

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики  
им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук»

На правах рукописи

Храменков Владислав Анатольевич

**НЕЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ  
ЭНЕРГОСЕТЕЙ С ХАБ-ТОПОЛОГИЕЙ**

1.3.4 – Радиофизика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор, член-корреспондент РАН  
Некоркин Владимир Исаакович

Нижний Новгород – 2024

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Модели энергосетей</b>	<b>15</b>
1.1 Энергосеть как нелинейная динамическая сеть . . . . .	15
1.2 Модель энергосети с нагрузкой в виде синхронных моторов . . . . .	16
1.3 Модель эффективной сети . . . . .	18
1.4 Основные режимы работы . . . . .	21
1.5 Выводы . . . . .	23
<b>2 Энергосеть с топологией хаб-кластера</b>	<b>24</b>
2.1 Модель хаб-кластера . . . . .	24
2.2 Режимы . . . . .	27
2.3 Пороговая устойчивость синхронного режима . . . . .	32
2.4 Выводы . . . . .	36
<b>3 Устойчивость энергосети к изменениям топологии</b>	<b>37</b>
3.1 Парадокс Браеса в энергосетях . . . . .	38
3.1.1 Базовая модель . . . . .	38
3.1.2 Динамика модели . . . . .	40
3.1.3 Новый сценарий возникновения парадокса Браеса . . . . .	43
3.1.4 Влияние возмущений . . . . .	46
3.2 Условия безопасного объединения энергосетей . . . . .	49
3.2.1 Модель объединенной энергосети . . . . .	50
3.2.2 Режимы и условия безопасного объединения . . . . .	52
3.3 Выводы . . . . .	57
<b>4 Критерий парциальной устойчивости неоднородной энергосети</b>	<b>59</b>
4.1 Модель неоднородной энергосети в виде хаб-кластера . . . . .	59
4.2 Области локализации траекторий . . . . .	62
4.3 Колебательные и вращательные свойства траекторий . . . . .	65
4.4 Критерий парциальной устойчивости и его проверка . . . . .	66
4.5 Выводы . . . . .	70

<b>5</b>	<b>Устойчивость многомашинной энергосети с общей нагрузкой</b>	<b>72</b>
5.1	Редуцированная модель эффективной сети . . . . .	73
5.1.1	Многомашинная энергосеть с общей нагрузкой . . . . .	73
5.1.2	Редукция эффективной сети . . . . .	74
5.1.3	Уравнения динамики редуцированной эффективной сети . . . . .	77
5.2	Синхронные режимы . . . . .	79
5.2.1	Условия существования . . . . .	79
5.2.2	Устойчивость в малом . . . . .	81
5.2.3	Характеристики . . . . .	84
5.3	Мультистабильность режимов . . . . .	85
5.4	Задачи о безопасном отключении и подключении генератора . . . . .	88
5.4.1	Условия безопасного отключения генератора . . . . .	91
5.4.2	Условия безопасного подключения генератора . . . . .	96
5.5	Мультистабильность синхронных режимов в трехмашинной энергосети . . . . .	98
5.6	Устойчивость синхронных режимов к различным возмущениям . . . . .	102
5.6.1	Нелокальная устойчивость синхронных режимов . . . . .	103
5.6.2	Частотные и фазовые возмущения. Переключения . . . . .	106
5.6.3	Случайные колебания мощностей турбин в условиях бистабильности синхронных режимов . . . . .	108
5.7	Выводы . . . . .	121
<b>6</b>	<b>Устойчивость энергосети Нижнего Новгорода</b>	<b>124</b>
6.1	Модель . . . . .	124
6.2	Режимы . . . . .	126
6.3	Устойчивость отдельных потребителей и генераторов . . . . .	128
6.4	Устойчивость по отношению к скачкам мощности . . . . .	131
6.5	Выводы . . . . .	133
	<b>Заключение</b>	<b>135</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>136</b>
	<b>Список публикаций автора</b>	<b>147</b>

# Введение

Современные энергосети (в англоязычной литературе – power grids, в отечественной технической литературе – энергосистемы) состоят из большого числа взаимодействующих между собой элементов, которые обеспечивают производство, передачу, распределение и потребление электроэнергии. Их развитие направлено на удовлетворение возрастающей потребности в электроэнергии. Наблюдается непрерывный рост энергосетей, который сопровождается появлением новых электростанций, созданием крупных энергообъединений, состоящих из большого числа узлов нагрузки, внутрисетевых и межсетевых связей. Примером активно развивающегося энергообъединения может служить единая энергетическая система (ЕЭС) России [1], состоящая из семи объединённых энергетических систем (ОЭС), каждая из которых состоит из нескольких энергетических подсистем. ЕЭС России работает совместно с ОЭС Казахстана и Белоруссии. Еще одно из крупнейших энергообъединений в мире – энергообъединение европейских стран ENTSO-E (European Network of Transmission System Operators for Electricity) [2]. Эксплуатация таких сетей (систем) является сложной комплексной проблемой, обусловленной необходимостью безаварийной непрерывной работы большой совокупности подсетей и устройств (электрических сетей, электростанций, подстанций, потребителей и т.д.), связанных между собой и расположенных на значительном удалении друг от друга.

В нормальном режиме работы энергосети [3] ее частота и модуль напряжения на шинах подключения потребителей (нагрузок) могут изменяться только в заранее установленных пределах, гарантирующих надежное электроснабжение потребителей. Для реализации нормального режима необходима синхронная работа генераторов энергосети, то есть установление синхронного (рабочего) режима их параллельной (совместной) работы [4, 5]. Нарушение синхронной работы генераторов (выпадение из синхронизма), то есть переход к асинхронному (аварийному) режиму, приводит к значительным колебаниям токов и напряжений, вызывающих срабатывание устройств релейной защиты и отключение линий электропередачи (далее для краткости – линий передачи), что в конечном итоге приводит к расстройству электроснабжения потребителей и авариям [6] (энергоавариям: локальным и масштабным нарушениям электроснабжения/“power outage, blackouts” [7–11], каскадным авариям/“cascade failures” [12–16]). Они могут затрагивать отдельные районы и целые города. Устранение последствий аварий требует больших затрат ресурсов и времени.

Например, 25 мая 2005 года в Москве произошла авария на электроподстанции № 510 «Чагино» [17]. После разрушения всех ее трансформаторов последовало отключение дру-

гих подстанций и воздушных линий электропередачи, что привело к снижению напряжения и частоты в энергосети. Затем пять московских электростанций (теплоэлектроцентралей – ТЭЦ) и ещё 15 питающих центров вышли из синхронизма и отключились. Авария приобрела каскадный характер и в итоге привела к потере электроснабжения районов Москвы, Подмосковья, Тульской, Калужской и Рязанской областей.

14 августа 2003 года случилась авария в энергосети США [6, 18], в результате которой произошла потеря нагрузки мощностью 61800 МВт, отключилась 21 электростанция, в том числе 10 атомных (АЭС). Было нарушено электроснабжение крупных городов в северо-восточной части США (штаты Огайо, Коннектикут, Мичиган, Пенсильвания, Нью-Джерси и Нью-Йорк) и Канады (Торонто и Оттава).

Закономерно возникает задача об устойчивости энергосетей [6], под которой принято понимать их способность восстанавливать нормальный режим после воздействия какого-либо возмущения: короткого замыкания, обрыва линии электропередачи, резкого роста нагрузки, потери возбуждения генераторов и др. Такая задача может быть сведена к задаче об устойчивости синхронного режима работы генераторов энергосети или, как принято говорить, устойчивости параллельной работы генераторов [4], связанных между собой электрическими сетями. Наличие связи между генераторами обуславливает невозможность рассмотрения их автономной динамики. Однако для грубых расчетов устойчивости энергосетей иногда рассматривают отдельный генератор, который через трансформатор и линию электропередачи подключен к шинам остальной части энергосети. Если мощность генераторов этой части, примерно в 8-10 раз больше мощности рассматриваемого генератора, то напряжение на шинах и частота в оставшейся части системы являются величинами постоянными, не зависящими от режима работы генератора и его электропередачи [6]. Поэтому в первом приближении можно изучать динамику генератора, работающего на шины бесконечной мощности (ШБМ), которые характеризуются постоянным модулем напряжения и его неизменной частотой (одномашинная модель энергосети/модель машина-шины [19, 20]).

Инженерная теория устойчивости энергосетей строилась на основе первого метода Ляпунова. Основы теории локальной устойчивости энергосетей были заложены в трудах отечественных (Лебедев С.А., Жданов П.С., Горев А.А., Веников В.А. и др.) и зарубежных (Park R.H., Kimbark E.W., Concordia C. и др.) ученых. Ими же написан ряд учебников и пособий по устойчивости энергосетей [4, 21–25]. Цель анализа устойчивости энергосети – это определение реакции генераторов на различные возмущения [5]. Наиболее распространенными генераторами электрической энергии являются синхронные машины (турбо- и гидрогенераторы тепловых и гидроэлектростанций, соответственно). В настоящее время, несмотря на активное внедрение солнечных и ветряных электростанций для создания так называемой зеленой энергетики, они все еще обеспечивают большую часть выработки электроэнергии в крупных энергосетях [26]. Впервые дифференциальные уравнения синхронной машины [22] независимо друг от друга получили Park R.H. и Горев А.А. Последним на примере генератора, работающего на шины бесконечной мощности, были рассмотрены задачи о простых и сложных переходах в одномашинной энергосети, задачи об определении реакции синхрон-

ной машины на сброс нагрузки и трехфазное короткое замыкание, а также о втягивании машины в синхронизм. Моделирование многомашинных энергосетей с помощью уравнений Парка-Горева затруднительно в силу их большой математической размерности и значительного числа параметров. Для анализа таких сетей разработаны более простые модели, полученные в предположении упрощенного рассмотрении процессов в контурах синхронных машин [6].

Большинство солнечных и ветряных электростанций подключены к энергосети посредством силовых инверторов [27, 28], в результате чего получают так называемые "inverter-based resources" (IBRs) [29]. Инверторы, используемые для IBR, обычно подразделяются на два типа: задающие поведение сети/"grid-forming" (GFM) [30] и инверторы, ведомые сетью/"grid-following inverters" (GFL) [29]. В энергосетях, содержащих синхронные генераторы, инверторы GFL следуют напряжению и частоте, которые задаются синхронными машинами, и действуют как управляемые источники тока, обеспечивающие необходимый запас активной и реактивной мощности. Напротив, GFM инверторы нужны для поддержания стабильного напряжения и частоты сети в случае подключения или отключения нагрузки. В работе [31] предложена обобщенная модель энергосети, учитывающая как электростанции с синхронными генераторами, так и электростанции, работающие на возобновляемых источниках энергии (ВИЭ) и подключенные к энергосети посредством инверторов. Однако в большинстве работ, посвященных устойчивости энергосетей, в качестве генераторов рассматриваются именно синхронные машины мощных электростанций.

Практика эксплуатации многомашинных энергосетей показала, что локальный анализ устойчивости синхронных режимов не всегда достаточен. Поэтому в настоящее время широкое распространение приобрел нелинейный динамический подход [32] (Dorfler F., Hellmann F., Kurths J., Motter A.E., Nishikawa T., Schafer B., Timme M., Witthaut D., Анищенко В.С., Белых В.Н., Вадивасова Т.Е., Осипов Г.В., Фрадков А.Л., Фуртат И.Б. и др.), в рамках которого энергосеть рассматривается как динамическая сеть. Ее активными узлами-элементами являются потребители и генераторы электроэнергии. Роль связей, осуществляющих взаимодействие между узлами сети, играют передающие системы (трансформаторы, линии электропередачи, переключательные пункты и пр.). Динамика энергосети, как правило, описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений. Состояние каждого генератора энергосети (синхронной машины) упрощенно задается уравнением движения ротора [4, 5, 19, 20] (уравнением качаний ротора/"swing equation" [33–36]), записанным для его механической фазы (угла), которая отсчитывается относительно синхронной оси. От ее величины зависит активная мощность, выдаваемая генератором в сеть, а также взаимодействие между генераторами. Передающая система рассматривается как пассивная часть сети, связывающая генераторы и нагрузки. Обычно она представлена эквивалентной схемой замещения. В зависимости от вида нагрузок (статических/динамических) обычно различают три основные модели энергосетей [37, 38]:

- Позиционная модель или модель эффективной сети (МЭС, "effective network model") [4, 5, 23, 33, 38, 39]. В этой модели нагрузки являются пассивными элементами и замещаются

постоянными полными сопротивлениями.

- Модель с сохранением структуры (МСС, “structure-preserving model”) [40]. В этой модели для описания нагрузок используется дифференциальное уравнение первого порядка, связывающее потребляемую узлом нагрузки мощность с мгновенной частотой напряжения в этом узле.
- Модель синхронных двигателей/моторов (МСМ, “synchronous motor model”) [32, 41–43]. В этой модели нагрузки, как и генераторы, представлены синхронными машинами, но работающими в двигательном режиме.

Классическая МЭС появилась значительно раньше МСС и МСМ. Она получила наибольшее распространение в рамках инженерных расчетов устойчивости энергосетей [4, 5, 23, 33–36]. МСС не получила широкого распространения, напротив МСМ, описывающая энергосети с динамическими нагрузками в виде синхронных моторов, в последнее время приобрела большую популярность при исследованиях крупных энергосетей [39, 44–52]. По всей видимости это обусловлено двумя факторами: (i) в реальных системах нагрузки не статичны – они изменяются во времени, а часть из них действительно представлена синхронными машинами (например, электропривод станков); (ii) уравнения МСМ схожи с уравнениями фазовых осцилляторов Курамото [53, 54], поэтому МСМ удобно применять для изучения синхронизации генераторов и потребителей. К тому же в отличие от МЭС, где энергосеть представляется полным графом взаимодействующих узлов, в рамках МСМ граф энергосети может полностью воспроизводить архитектуру ее линий электропередачи, связывающих генераторы и потребителей. Более того, с помощью так называемой матрицы псевдосвязей (“pseudocoupling matrix”) МСМ может быть сведена к модели сети с адаптивными связями, которая описывает, в частности, сети нейронов с синаптической пластичностью [55]. Такой подход позволяет распространить на последние, явление каскадного отключения линий электропередачи (“cascading line failure”) в энергосети.

Одной из наиболее актуальных проблем современных энергосетей, связанных с их непрерывным ростом и развитием, является определение устойчивости по отношению к изменениям архитектуры сетей. Они обусловлены вводом линий электропередачи, идущих к новым электростанциям и нагрузкам, или служащих для перераспределения потоков мощности между действующими узлами энергосети. К тому же линии электропередачи могут быть отключены из-за короткого замыкания, что является одной из самых распространенных аварийных ситуаций (около 40% всех случаев [6]), ведущих к потере устойчивости. Существование и устойчивость синхронного режима энергосети тесно связаны с ее архитектурой (топологией) и связностью соответствующего графа [56, 57, 62, 63]. Например, в [62] приведены необходимые условия существования синхронного режима, которые накладывают ограничения на связность узлов (“node connectivity”) графа энергосети. В [56] было найдено достаточное условие существования синхронизации в терминах алгебраической связности (“algebraic connectivity”), то есть второго наименьшего собственного значения матрицы Лапласа для графа, задающего архитектуру энергосети. Обнаружено, что большая связность обычно дает и

большее значение алгебраической связности. В свою очередь для установления синхронизации необходимо, чтобы алгебраическая связность превышала некоторое пороговое значение, чему и способствует большая связность графа энергосети. Аналогичный вывод получен и в работе [57], где условие синхронизации получено с помощью обратной матрицы Лапласа. Таким образом, считалось, что добавление новых линий электропередачи между узлами энергосети делает синхронизацию между ними более прочной и не нарушает синхронный режим в сети. Оказалось, что это не всегда так. В ряде работ [47, 58–61, 64] было установлено, что введение новых линий может как сохранить, так и разрушить синхронный режим в сети. Поэтому возникла неопределенность, связанная с реакцией энергосети на новые линии электропередачи, которая получила название парадокса Браеса (“Braess’ paradox”) в энергосетях. [47, 65]. Существование парадокса Браеса в небольшой специально сконструированной энергосети было доказано экспериментально [64]. В наиболее общем случае парадокс Браеса проявляется в различных сетевых системах, которые можно представить в виде графов из узлов (активных или пассивных), взаимодействующих между собой посредством ребер (связей/“links”). Он заключается в неожиданном нарушении нормального режима работы сети при добавлении новых ребер между узлами или увеличении веса (пропускной способности/“link capacity”) существующих ребер. Парадокс Браеса первоначально был обнаружен в транспортных сетях (“traffic networks”) [65], а затем и в других сетях различной природы: в сетях массового обслуживания (“queuing networks”) [66], электрических цепях и их механических аналогах [67, 68], сетях газопроводов (“gas networks”) [69], микрофлюидных сетях (“microfluidic networks”, системы каналов с жидкостью, имеющих характерные размеры от десяти до сотен микрометров) [70], сетях маршрутизаторов (“internet routers”) [71, 72], сетях осцилляторов [73–75].

Парадокс Браеса был обнаружен как в небольших модельных энергосетях, так и в достаточно крупной энергосети Великобритании [47, 58–62, 64]. Доказано [47], что парадокс может быть обусловлен исчезновением синхронного режима, которое связано с образованием циклов в графе энергосети при добавлении новой линии электропередачи. Установлена роль топологии энергосети в парадоксе Браеса [47, 58]. В частности, определены последствия добавления новых линий в энергосеть Великобритании и выявлены наиболее опасные участки для их подключения. Предложены алгоритмы [61] управления генераторами (“secondary control”), позволяющие избежать парадокса Браеса при изменениях архитектуры энергосети. В работе [59] представлен сценарий возникновения парадокса Браеса, основанный на изменениях локальной устойчивости синхронного режима энергосети, состоящей из одного генератора, питающего нагрузки, соединенные в цепочку (“chain model”). Установлены условия, при которых добавление новых линий снижает локальную устойчивость синхронного режима. Условия апробированы на энергосети Великобритании. Стоит отметить, что полученные сценарии возникновения парадокса Браеса не являются исчерпывающими и, как правило, не учитывают нелокальную устойчивость синхронного режима.

Важной особенностью энергосетей является мультистабильность, то есть сосуществование нескольких режимов, причем необязательно синхронных. Достаточно различать три слу-



чая. В первом сосуществуют один синхронный режим и несколько (или один) асинхронных режимов [41, 76–79]. Поэтому возмущения могут перевести энергосеть из исходного синхронного режима в какой-либо асинхронный, тем самым инициировав аварию. Во втором случае сосуществуют несколько синхронных режимов: основной и дополнительные. С точки зрения наличия синхронизации переключения между такими режимами безопасно. Однако дополнительные синхронные режимы могут характеризоваться наличием циркулирующих потоков мощности (“circulating power flows”, “loop flows”) [59, 60, 80–85], которые уменьшают эффективные пропускные способности соответствующих линий передачи, не доставляя при этом электроэнергию до потребителей и снижая общую пропускную способность сети. Кроме того, синхронные режимы могут характеризоваться существенно различными величинами суммарных потерь активной мощности, распределениями токов по линиям передачи и стационарными мощностями генераторов, выдаваемыми в сеть [86–88]. Тогда переключение может приводить к снижению активной мощности, доставляемой до потребителей, или увеличению токов в некоторых линиях. Последнее может инициировать срабатывание релейной токовой защиты и отключения линий, которые, развиваясь каскадно, приводят к энергоаварии. К тому же синхронные режимы могут характеризоваться существенно различными распределениями амплитуд узловых напряжений и, в частности, наличием узлов с очень низкими амплитудами [89–91]. Переход в такие режимы приводит к лавине (провалу) напряжения, что также может инициировать аварию. Возвращение сети в основной синхронный режим с нормальными параметрами зачастую является достаточно сложной задачей. Третий случай объединяет два предыдущих, то есть возможно сосуществование нескольких синхронных и асинхронных режимов.

В инженерной теории устойчивости энергосетей принято рассматривать два типа задач: о статической устойчивости, то есть устойчивости «в малом», и динамической устойчивости, то есть устойчивости «в большом». Их решение связано с нахождением наиболее оптимального с точки зрения распределения мощности между потребителями локально устойчивого синхронного режима энергосети и определением его устойчивости по отношению к различным возмущениям. С помощью МЭС и МСМ получены результаты об устойчивости больших энергосетей: Великобритании [46, 47, 52] (120 узлов и 165 связей), Северной Европы [48, 49] (236 узлов и 320 связей), Италии [39, 44] (678 узлов и 822 связи). Изучались и относительно небольшие энергосети [38, 41, 92–100], которые могут входить в состав крупных энергосетей и влиять на их динамику. Нахождение возмущений, приводящих лишь к переходному процессу, который заканчивается восстановлением исходного синхронного режима, является особенно важной задачей в условиях мультистабильности энергосети. Для исследования устойчивости энергосети по отношению к возмущениям в работе отдельных генераторов и потребителей введена концепция узловой бассейновой устойчивости (“node’s basin stability”) [49, 101]. С помощью нее выявлена особая уязвимость периферийных (тупиковых) узлов (“dead ends”) энергосети Северной Европы. Схожая концепция использовалась в работах [77, 102], где вычислялась вероятность сохранения синхронного режима нескольких модельных энергосетей с различной топологией при возмущениях в каждом из ее узлов. Для выявления наиболее опас-

ных возмущений динамических переменных крупных энергосетей применяется концепция минимального возмущения, нарушающего синхронный режим (“minimal fatal shock measure” – MiFaS) [51]. Оно представляет собой вектор, начинающийся в устойчивом состоянии равновесия, которое является математическим образом синхронного режима, и заканчивающийся в наиболее близкой точке границы его области (бассейна) притяжения. Последняя может быть оценена с помощью поверхностей уровня функций Ляпунова [95, 96, 103, 104]. В работах [76, 101, 105–108] был предложен ряд мер, в том числе вероятностных, применимых для количественной оценки нелокальной устойчивости синхронных режимов энергосетей. Однако большое количество переменных, описывающих динамику энергосетей, обуславливает ограниченность результатов по устойчивости в большом. Поэтому приходится ограничиваться рассмотрением некоторых типовых возмущений. Например, в работе [41] исследуется устойчивость энергосети по отношению к скачкам мощности турбин генераторов в виде прямоугольных импульсов. Для импульсов с разной длительностью устанавливаются диапазоны амплитуд, при которых импульсы не переводят сеть из синхронного режима в асинхронный.

В ряде работ [50, 109–116] исследуется влияние шумовых воздействий на работу энергосетей. Рассматривается стохастическая динамика генератора, работающего на ШБМ (“single-machine infinite-bus (SMIB) power system”), обусловленная воздействием белого гауссовского шума, дополненного внешним периодическим сигналом [109–111, 116]. Такая комбинация воздействий характерна для ветрогенератора, питающего периодически изменяющуюся нагрузку. Обнаружен эффект эрозии бассейна притяжения (“erosion of safe basin”) устойчивой точки, соответствующей синхронному режиму системы без шума и со статичной нагрузкой, а также динамика, схожая с хаотической (“chaos-like behavior/noise-induced chaos” [117]). Установлено, что поведение генераторов, использующих ВИЭ (солнечные и ветряные электростанции), имеет стохастический характер, причем обуславливающие его шумы могут иметь негауссову статистику [112, 113]. В рамках МСМ было исследовано влияние шумовых колебаний мощностей потребителей и генераторов в виде белого гауссовского шума на их синхронизацию [115]. Рассмотрено влияние генераторов со случайно изменяющимися выходными мощностями на синхронизацию в энергосети Италии [50]. В работе [114] изучалась устойчивость синхронного режима энергосети Европы к сбоям в работе ее узлов, которые моделируются шумовыми воздействиями. В частности, определена пороговая интенсивность шума, превышение которой ведет к потере синхронизации.

В условиях непрерывного расширения энергосетей из-за растущей потребности в электроэнергии возникают возмущения, связанные с изменениями топологии энергосетей. Они обусловлены подключением мощных потребителей (промышленные предприятия, электрифицированный транспорт, коммунально-бытовые нагрузки) и генераторов (в том числе работающих за счет ВИЭ, т.е. ветровых, солнечных и приливных электростанций), вводом новых линий электропередачи для перераспределения мощностей между потребителями, образованием межсетевых связей для объединения энергосетей с целью оптимизации их технико-экономических показателей (например, единая энергосистема (ЕЭС) России). Указанные изменения, как правило, затрагивают отдельные участки энергосетей, содержащие несколько

взаимосвязанных генераторов и потребителей, которые образуют подсети. Среди них выделяются сильно централизованные подсети – хаб-кластеры (сети с топологией «звезда»), которые состоят из одного генератора (электростанции), питающего нескольких потребителей, или наоборот – одного мощного потребителя и нескольких генераторов, питающих его. Обычно крупные энергосети имеют в своем составе несколько хаб-кластеров, связанных между собой, к тому же хаб-кластер можно рассматривать и как самостоятельную энергосеть. Стоит отметить, что для предотвращения наиболее тяжелых энергоаварий автоматика ликвидации асинхронного режима (АЛАР) может разделять энергосеть на несколько автономных подсетей. При этом необходимо обеспечение их устойчивости для успешного предотвращения или локализации аварий. Таким образом, нахождение условий устойчивости энергосетей и их подсетей (в том числе хаб-кластеров) является одной из актуальных задач, возникающих в процессе проектирования и эксплуатации современных энергосетей.

**Цель диссертационной работы** состоит в нахождении условий устойчивости энергосетей при внезапных изменениях режима работы, обусловленных отключением или подключением генераторов и линий электропередачи, изменением их пропускной способности, объединением энергосетей, колебаниями мощностей турбин генераторов и мощностей нагрузок.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи.

1. Построить модели сильно централизованных энергосетей, которые являются типичными подсетями крупных энергообъединений.
2. Установить границы нелокальной устойчивости подсетей по отношению к различным возмущениям, в том числе топологическим.
3. Выработать критерии и подходы для оценки нелокальной устойчивости энергосетей.
4. Построить модель энергосети Нижнего Новгорода и провести анализ ее устойчивости.

#### **Научная новизна работы**

1. Предложен подход, базирующийся на втором методе Ляпунова, который позволяет дать аналитическую оценку величины безопасных возмущений, при которых энергосеть в виде хаб-кластера сохраняет свою устойчивость.
2. Предложен критерий парциальной устойчивости, базирующийся на использовании вспомогательных систем сравнения, который дает условия безопасной работы групп пар потребитель-генератор из состава хаб-кластера.
3. Установлен новый сценарий возникновения парадокса Браеса в энергосетях, при котором потеря устойчивости сети при добавлении новой линии электропередачи или изменении пропускной способности действующей линии электропередачи связана с возникновением мультистабильности синхронного и асинхронных режимов.
4. Найдены условия безопасного объединения подсетей – хаб-кластера и трехмашинной энергосети, в которой возможен парадокс Браеса, при наиболее опасных, с точки зрения возникновения парадокса, параметрах.
5. Найдены условия на параметры схемы замещения многомашинной энергосети с общей нагрузкой, которые позволяют осуществить переход от эффективной сети с глобальными связями к эффективной сети с хаб-топологией. Эти условия возникают естественным обра-

зом из-за различия в длинах линий электропередачи или/и применения устройств продольной компенсации (УПК индуктивности линии) на одной из них. При выполнении условий значительно упрощаются задачи о существовании и устойчивости синхронных режимов.

6. Установлены условия возникновения мультистабильности синхронных режимов в многомашинной энергосети с общей нагрузкой. Выделены наиболее оптимальные с позиции генерируемой мощности синхронные режимы. Найдены условия безопасного отключения и подключения генератора для каждого синхронного режима. На примере трехмашинной энергосети изучены переключения между синхронными режимами, вызванные различными возмущениями.

7. Найдены условия возможного нарушения рабочего режима энергосети Нижнего Новгорода и установлены наиболее уязвимые к возмущениям узлы сети.

### **Теоретическая и практическая значимость диссертации**

1. Выделен типичный структурный элемент в составе крупных энергообъединений – энергосеть в виде хаб-кластера. Определены условия его устойчивости, которые можно использовать в качестве первого приближения при отыскании границ устойчивости больших энергосетей.

2. Подходы, предложенные для определения устойчивости отдельного хаб-кластера, могут быть обобщены на случай энергосетей с другими топологиями. Они могут использоваться для расчетов устойчивости энергосетей при их расширении за счет подключения новых потребителей и генераторов.

3. Разработана и зарегистрирована программа для расчета параметров безаварийной работы групп пар потребитель-генератор, входящих в состав хаб-кластера [А13].

4. Установлен новый сценарий возникновения парадокса Браеса в энергосетях, который позволяет спрогнозировать их реакцию на добавление новой линии электропередачи или изменение пропускной способности действующей линии. Он дает возможность определить наиболее оптимальные параметры линий электропередачи, позволяющие избежать нарушения устойчивости энергосети при указанных изменениях.

5. Переход от эффективной сети с глобальными связями к эффективной сети с хаб-топологией при моделировании многомашинной энергосети с общей нагрузкой позволяет применять подходы, предложенные для определения границ устойчивости хаб-кластера.

### **Методы исследований и достоверность результатов**

Исследование динамики систем, используемых в диссертационной работе, проводилось с помощью современных методов нелинейной динамики (изучение структуры фазового пространства, построение бифуркационных диаграмм, метод сечений Пуанкаре, метод функций Ляпунова, метод систем сравнения) и численного моделирования (методы Рунге-Кутты и Эйлера-Маруямы для интегрирования систем обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений, соответственно). Достоверность полученных результатов подтверждается соответствием аналитических и численных результатов, а также согласованностью с результатами других авторов. Основные положения диссертационной работы опубликованы в рецензируемых российских и зарубежных журналах и подвергались оценке независимых

экспертов.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. У энергосетей с хаб-топологией существуют области параметров, при которых синхронный режим устойчив по отношению к возмущениям частот вращения и/или фаз роторов синхронных машин в большом или в целом.

2. Критерий парциальной устойчивости дает условия безаварийной работы групп пар потребитель-генератор, входящих в состав хаб-кластера, и условия безопасного подключения потребителя или генератора к такой сети.

3. Установленный сценарий возникновения парадокса Браеса представляет собой новый механизм потери устойчивости энергосетей, связанный с мультистабильностью синхронного и асинхронных режимов.

4. Существует минимальное значение пропускной способности, то есть наибольшей передаваемой активной мощности, линии электропередачи между хаб-кластером и трехмашинной энергосетью, гарантирующее устойчивость объединенной энергосети.

5. В многомашинной энергосети с общей нагрузкой наблюдается мультистабильность синхронных режимов, которые характеризуются различными стационарными распределениями токов по цепям сети и мощностями, выдаваемыми генераторами в сеть.

### **Апробация результатов работы**

Основные результаты работы докладывались на научных семинарах Института прикладной физики РАН, на российских и зарубежных конференциях, в том числе:

18-я, 20-я, 21-я научные школы «Нелинейные волны» (Нижний Новгород, Россия, 2018, 2022, 2024).

24-я Нижегородская сессия молодых ученых (Нижний Новгород, Россия, 2019).

International Symposium «Topical problems of nonlinear wave physics» (Nizhny Novgorod, Russia, 2021).

19-я научно техническая конференция «Молодежь в науке» (Саров, Россия, 2021)

17-я Всероссийская молодежная научно инновационная школа «Математика и математическое моделирование» (Саров, 2023).

4-я международная конференция «Integrable Systems and Nonlinear Dynamics» (ISND) (Ярославль, Россия, 2023)

23-я международная конференция и молодежная школа «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, Россия, 2023).

По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, в том числе 6 статей в отечественных и зарубежных рецензируемых журналах, 6 статей в тезисах докладов. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Результаты работы получены в рамках грантов РФФИ и РНФ.

### **Личный вклад автора**

Все результаты диссертационной работы получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. Постановка задач и интерпретация результатов выполнены совместно с научным руководителем и соавтором.

### Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 148 страниц текста, включая 55 рисунков, 3 таблицы и список литературы из 161 наименования на 13 страницах.

# Глава 1

## Модели энергосетей

В первой главе вводятся модели энергосетей, которые используются в диссертации, описываются их основные особенности, преимущества и недостатки. Для этого энергосеть рассматривается как динамическая сеть, активными узлами-элементами которой являются синхронные генераторы и потребители электроэнергии, взаимодействующие посредством пассивных передающих систем. Динамика генератора упрощенно задается уравнением движения его ротора. Потребитель же может быть как активным элементом – синхронным мотором, так и пассивным – постоянным сопротивлением. В первом случае состояние синхронного мотора определяется уравнениями, аналогичными уравнениям для генератора, поэтому энергосеть представляется как динамическая сеть из активных узлов-генераторов и потребителей (модель синхронных моторов). Во втором случае энергосеть представляется как динамическая сеть из активных узлов-генераторов, глобально связанных друг с другом, причем сила этой связи зависит от параметров схемы замещения передающих систем и величины сопротивлений, моделирующих потребителей (модель эффективной сети). Динамика каждого узла таких сетей задается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка относительно фаз роторов, отсчитываемых от синхронных осей. Характер их изменения определяет режим работы энергосети.

### 1.1 Энергосеть как нелинейная динамическая сеть

В рамках проблемы устойчивости энергосеть может рассматриваться как сеть, состоящая из генераторов и потребителей электроэнергии (нагрузок), связанных посредством передающих систем, которые составляют пассивную часть схемы замещения. К ней относятся элементы, замещающие трансформаторы, линии передачи, батареи статических конденсаторов, реакторы и нагрузки, если они моделируются постоянными сопротивлениями. Пассивная часть схемы замещения является линейной электрической цепью. Динамика генераторов как правило задается нелинейными дифференциальными уравнениями. Наибольшая выработка электроэнергии приходится на синхронные генераторы (синхронные машины): гидро- и турбогенераторы электростанций (АЭС, ГЭС, ГРЭС). Динамика  $i$ -го синхронного генератора упрощенно описывается уравнением движения его ротора, которое может быть записано в

системе относительных единиц в виде [4, 5]

$$C_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = P_{T,i} - P_{D,i} - P_{SM,i}. \quad (1.1)$$

Все величины, входящие в уравнение (1.1), в системе относительных единиц выражаются в долях некоторых величин (той же размерности), принятых за единицы величин, называемых базисными [23].  $\delta_i$  – механический угол ротора генератора, отсчитываемый относительной синхронной оси.  $C_i$  – константа, значение которой определяется выбором той или иной системы относительных единиц. Обычно она имеет смысл постоянной инерции вращающейся части агрегата (ротора и турбины) –  $T_{J,i}$ .  $P_{T,i}$  – мощность турбины, приводящей в движение ротор  $i$ -ой синхронной машины. В общем случае слагаемое  $P_{T,i}$  зависит от частоты вращения турбины, контролируемой регулятором скорости. Однако при расчетах устойчивости действием регулятора пренебрегают в силу его инерционности, и полагают мощность турбины постоянной.  $P_{D,i} = D_i d\delta_i/dt$  – эквивалентная мощность демпфирования,  $D_i$  – демпферный коэффициент. Это слагаемое приближенно учитывает совокупное влияние всех демпфирующих факторов, как механических (трение), так и электрических (появление асинхронной мощности). Коэффициент  $D_i$  определяет их интенсивность.  $P_{SM,i}$  – активная мощность, выдаваемая  $i$ -ым генератором в сеть (“*SM*” – *synchronous machine*). Это слагаемое является нелинейной функцией углов  $\delta_j$ , вид которой зависит от состава пассивной части энергосети и модели нагрузки.

Заметим, что наиболее полное описание состояния синхронной машины дается системой уравнений Парка-Горева [22], которые имеют большую математическую размерность, поэтому их использование при описании многомашинных сетей затруднительно. Фактически, переход от уравнений Парка-Горева к уравнениям (1.1) осуществляется путем отказа от рассмотрения процессов в контурах синхронной машины и отражения их влияния посредством слагаемого  $P_{D,i}$  [23].

Таким образом, генераторы можно рассматривать как активные узлы динамической сети, состояние которых задается уравнениями (1.1), а взаимодействие между узлами определяется слагаемым  $P_{SM,i}$  и зависит от состава энергосети.

## 1.2 Модель энергосети с нагрузкой в виде синхронных моторов

Рассмотрим нагрузку в виде синхронного мотора (двигателя). Динамика синхронного мотора задается уравнением (1.1), если в нем первое слагаемое заменить на мощность, развиваемую мотором, взятую со знаком минус ( $-P_{M,i}$ ), второе слагаемое оставить без изменений, а третье слагаемое положить равным активной мощности, забираемой из сети, и поставить перед ней знак плюс вместо минуса. Предполагается, что  $i$ -ая и  $j$ -ая машины связаны друг с другом посредством линий передачи, замещаемых чисто индуктивными сопротивлениями  $x_{i,j}$ , которое включает в себя как сопротивление, вносимое самой линией, так и сопротив-



ления трансформаторов (рис. 1.1, а). Комплекс потенциала точки подключения машины  $U_k = |U_k|e^{i\delta_k}$  имеет аргумент, совпадающий с углом ротора ( $i^2 = -1$ ).

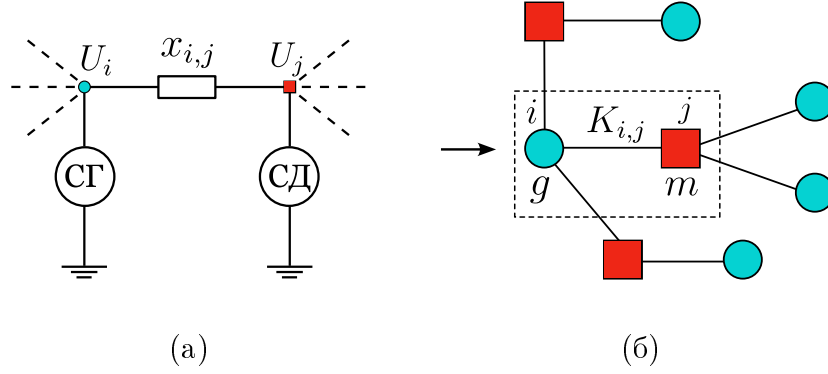


Рис. 1.1: Схема замещения участка энергосети, содержащего синхронный генератор (СГ) и синхронный двигатель (СД), которые соединены линией передачи ( $x_{i,j}$ ) (а). Граф энергосети с указанием узлов-генераторов (синие круги) и узлов-потребителей (красные квадраты) (б).

Активная мощность, отдаваемая  $i$ -ым генератором в ветвь цепи, идущую к  $j$ -му мотору может быть вычислена как  $P_{i \rightarrow j} = \text{Re}(U_i I_{i,j}^*) = |U_i U_j| x_{i,j}^{-1} \sin(\delta_i - \delta_j)$ , где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Суммируя эти мощности по индексу  $j$  получим активную мощность, выдаваемую  $i$ -ым генератором в сеть  $P_{SM,i}$ . Так как на линии передачи не происходит потерь активной мощности, то мощность, получаемая  $j$ -ым мотором по той же ветви будет  $P_{j \leftarrow i} = P_{i \rightarrow j}$ . Суммирование этих мощностей по индексу  $i$  дает мощность, получаемую мотором из сети. Тогда уравнение (1.1) для генераторов и моторов может быть переписано в компактной форме

$$C_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = P_i - D_i \frac{d\delta_i}{dt} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{N^{\text{MCM}}} \frac{|U_i U_j|}{x_{i,j}} \sin(\delta_j - \delta_i), \quad (1.2)$$

где  $P_i = P_{T,i} > 0$ , если  $i$ -ая машина является генератором, и  $P_i = -P_{M,i} < 0$ , если  $i$ -ая машина является мотором,  $N^{\text{MCM}}$  – число машин. При исследовании многомашинных энергосетей обычно полагают  $C_i = C$ ,  $D_i = D$ , поэтому уравнение (1.2) принимает вид

$$\frac{d^2 \delta_i}{dt_{new}^2} = P_i - \alpha \frac{d\delta_i}{dt_{new}} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{N^{\text{MCM}}} K_{i,j} \sin(\delta_j - \delta_i), \quad (1.3)$$

где введено новое время  $t_{new} = tC^{-1/2}$ , демпферный коэффициент  $\alpha = DC^{-1/2}$  и параметр  $K_{i,j} = |U_i U_j| x_{i,j}^{-1}$  ( $K_{i,j} = K_{j,i}$ ), который представляет собой пропускную способность линии передачи между  $i$ -ой и  $j$ -ой машинами, то есть максимальную мощность, передаваемую по этой линии. Он больше нуля, если указанные машины связаны линией, и равен нулю в противном случае. Далее для удобства индекс у времени будем опускать.

Необходимое условие существования стационарного состояния сети [46] может быть получено путем суммирования уравнений (1.3) при нулевых значениях производных. Оно имеет вид

$$\sum_{i=1}^{N^{\text{MCM}}} P_i = 0. \quad (1.4)$$

На основании уравнений (1.3) энергосеть можно представить в виде динамической сети с графом, состоящим из узлов-генераторов и узлов-моторов, соединенных ребрами, которые соответствуют линиям передачи (рис. 1.1, б). Вес и наличие ребер определяется параметрами  $K_{i,j}$ . Динамика  $i$ -го узла задается уравнениями (1.3), в которых слагаемые под знаком суммы отвечают за взаимодействие между  $i$ -ым и  $j$ -ым узлами.

Модель энергосети (1.3) была впервые предложена в работе [41] и затем активно использовалась рядом авторов [32, 38, 39, 42, 46–49, 51, 52, 60, 77, 88, 102, 119]. В ней уравнения, аналогичные (1.3), называются "Kuramoto-like model". Встречаются и другие названия: модель Курамото второго порядка (second-order Kuramoto model [119]), модель Курамото с инерцией (Kuramoto (phase) model with inertia [120]), а также модель синхронных моторов (MCM, synchronous motor model [38]). Последнее название отражает основную особенность модели – нагрузку в виде синхронного мотора, поэтому оно будет использоваться далее в тексте. По всей видимости такой выбор нагрузки обусловлен стремлением получить модель, наиболее близкую к модели Курамото [53, 54], которая активно используется для изучения синхронизации в различных динамических сетях. Например, в типовом составе городской нагрузки [6] 48% потребляемой электроэнергии приходится на асинхронные двигатели и лишь 10% – на синхронные. Однако в настоящее время доля синхронных двигателей постепенно возрастает. Можно считать, что в MCM синхронные моторы играют роль динамических нагрузок, состояние которых определится переменными  $\delta_i$  и  $\dot{\delta}_i$ . Таким образом, MCM предназначена главным образом для изучения синхронизации между синхронными машинами – генераторами и потребителями электроэнергии.

### 1.3 Модель эффективной сети

Рассмотрим схему замещения энергосети (рис. 1.2, а), в которой нагрузки представлены постоянными импедансами  $Z_k^{\text{load}}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_{\text{load}}$ , синхронные генераторы – эквивалентными источниками ЭДС  $E_i = |E_i|e^{i\delta_i}$  с неизменными внутренними комплексными сопротивлением  $Z_i^{\text{int}} = r_i^{\text{int}} + ix_i^{\text{int}}$  ( $x_i^{\text{int}} > 0$ ),  $i = 1, 2, \dots, n_{\text{gen}}$ ,  $n_{\text{gen}}$  – число генераторов ("int" – internal, ). Модуль ЭДС  $|E_i|$  обычно принимается постоянным, что может быть обусловлено действием автоматического регулятора возбуждения сильного действия (АРВ СД). Фаза  $\delta_i$  совпадает с фазой ротора  $i$ -ой машины. Источники ЭДС питают нагрузки посредством пассивной части схемы замещения (рис. 1.2, а), составленной из соответствующих схем замещения, входящих в нее элементов – линий передачи, трансформаторов, реакторов и др.

Активная мощность  $P_{SM,i}$ , выдаваемая  $i$ -ым генератором в сеть, может быть определена как реальная часть комплекса полной мощности  $S_i$  генератора. В свою очередь  $S_i = E_i I_i^*$ ,  $I_i$  – комплекс тока, протекающего по обмотке  $i$ -го генератора. Заметим, что каждый эквивалентный источник ЭДС, представляющий генератор, находится в отдельной ветви схемы, по

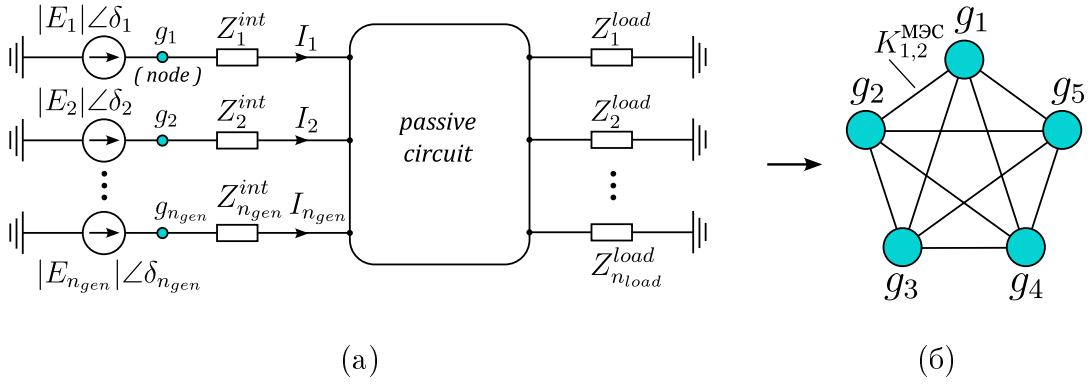


Рис. 1.2: Общий вид схемы замещения многомашинной энергосети (а). Граф эффективной сети в случае  $n_{gen} = 5$  (б).

которой течет ток  $I_i$  (рис. 1.2, а). С помощью принципа наложения [4,121], согласно которому ток в ветви схемы равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждой из ЭДС схемы в отдельности, для тока  $I_i$  может быть записано выражение

$$I_i = E_i Y_{i,i} - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n_{gen}} E_j Y_{i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, n_{gen}, \quad (1.5)$$

где  $Y_{i,i}$  и  $Y_{i,j} = Y_{j,i}$  – собственные и взаимные комплексные проводимости ветвей, содержащих источники ЭДС  $\dot{E}_i$  и  $\dot{E}_j$ , причем  $|Y_{i,i}| \neq 0$  и  $|Y_{i,j}| \neq 0$ ,  $i \neq j$ . Их значения зависят от проводимостей (импедансов) всех элементов, входящих в схему замещения. Чтобы установить смысл коэффициентов  $Y_{i,i}$  и  $Y_{i,j}$  рассмотрим величины обратные им, то есть  $Z_{i,i} = (Y_{i,i})^{-1}$  и  $Z_{i,j} = (Y_{i,j})^{-1}$ , которые называются собственными и взаимными комплексными сопротивлениями ветвей с источником ЭДС. Из принципа наложения следует, что собственное сопротивление каждой ветви с источником ЭДС определяет величину тока в этой ветви при нулевом значении ЭДС во всех остальных ветвях схемы. Собственное сопротивление  $Z_{i,i}$  вычисляется как эквивалентное сопротивление цепи относительно зажимов источника ЭДС  $E_i$ . Взаимное сопротивление  $Z_{i,j}$  определяет величину тока в ветви с источником ЭДС  $E_i$  при нулевом значении этой ЭДС и под действием ЭДС  $E_j$  другого источника.

Положим  $Y_{k,l} = |Y_{k,l}| e^{-i\Psi_{k,l}}$ ,  $\Psi_{k,l}$  – аргумент  $Z_{k,l}$ ,  $k, l = 1, 2, \dots, n_{gen}$ . Тогда, с учетом выражения (1.5), комплексная мощность  $\dot{S}_i$  примет вид

$$S_i = |E_i|^2 |Y_{i,i}| e^{i\Psi_{i,i}} - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n_{gen}} |E_i E_j Y_{i,j}| e^{i(\delta_i - \delta_j + \Psi_{i,j})}. \quad (1.6)$$

Введем так называемые дополняющие углы  $\alpha_{k,l} = \pi/2 - \Psi_{k,l}$  и, вычисляя реальную часть выражения (1.6), определим активную мощность  $i$ -го генератора

$$P_{SM,i} = |E_i|^2 |Y_{i,i}| \sin(\alpha_{i,i}) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{n_{gen}} |E_i E_j Y_{i,j}| \sin(\delta_i - \delta_j - \alpha_{i,j}). \quad (1.7)$$

Заметим, что выражение (1.7) получено для однофазной цепи, однако если под  $|E_k|$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_{gen}$  понимать межфазные значения, то  $P_i$  – мощность всех трех фаз. Но в соответствии подобранной системе относительных единиц нет необходимости делать различие между фазными и межфазными значениями [4, 5].

С учетом выражения (1.7) уравнения (1.1) примут вид

$$C_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = A_i - D_i \frac{d\delta_i}{dt} - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{N^{MЭС}} K_{i,j}^{MЭС} \sin(\delta_i - \delta_j - \alpha_{i,j}), \quad (1.8)$$

$$A_i = P_{T,i} - |E_i|^2 |Y_{i,i}| \sin(\alpha_{i,i}), \quad K_{i,j}^{MЭС} = |E_i E_j Y_{i,j}|,$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N^{MЭС}, \quad N^{MЭС} \equiv n_{gen}.$$

На основании уравнений (1.8) энергосеть может быть представлена как некоторая эффективная сеть взаимодействующих активных узлов, каждый из которых соответствует генератору и имеет такой же номер. Динамика  $i$ -го узла задается уравнением (1.8). Слагаемые, стоящие под суммой в правой части этого уравнения, описывают взаимодействие между  $i$ -ым и  $j$ -ым узлами, то есть отвечают за их связь. Коэффициент  $K_{i,j}^{MЭС}$  представляет силу этой связи, причем он больше нуля для всех  $i \neq j$ , поэтому все узлы связаны глобально, то есть “все со всеми”. Следовательно, эффективную сеть можно представить в виде полного графа (рис. 1.2, б). В этом контексте коэффициенты  $K_{i,j}^{MЭС}$  играют роль недиагональных элементов матрицы смежности с весами для этого графа. При этом оставшиеся элементы матрицы, стоящие на главной диагонали, равны нулю. Далее, говоря о коэффициентах  $K_{i,j}^{MЭС}$ , будем всегда считать, что  $i \neq j$ .

Модель энергосети (1.8) будем называть моделью эффективной сети (МЭС, effective network model [38]). В отечественной литературе она так же обозначается как классическая позиционная модель [23], а в зарубежной – классическая модель второго порядка (classical second order model) [5, 33–36]. Она широко использовалась в практике инженерных расчетов устойчивости энергосетей (метод площадей, метод последовательных интервалов и др. [4, 6, 19, 20, 23]).

В рамках МЭС нагрузка представляется постоянным импедансом  $Z_k^{load}$ . Если известны активная  $P_k^{load}$  и реактивная  $Q_k^{load}$  мощности, потребляемые нагрузкой, и задан модуль напряжения в узле нагрузки  $U_k^{load}$ , то проводимость  $Y_k^{load} = (Z_k^{load})^{-1}$  может быть вычислена по формуле [5]

$$Y_k^{load} = \frac{P_k^{load}}{(U_k^{load})^2} - i \frac{Q_k^{load}}{(U_k^{load})^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n_{load}.$$

Такое приближение принято для удобства во многих классических исследованиях [5]. На практике нагрузка имеет свои собственные динамические характеристики, которые обычно детально не известны. Реальная нагрузка по своим характеристикам занимает промежуточное положение между постоянным импедансом ( $Z_k^{load} = const_k$ ) и постоянной комплексной мощностью ( $S_k^{load} = const_k$ ). Поэтому представление нагрузки постоянным импедансом не совсем точно отражает ее реальные характеристики. Вопрос моделирования нагрузки является предметом отдельных исследований.

Вне зависимости от числа нагрузок и состава пассивной части схемы замещения, при использовании МЭС получается эффективная сеть из  $n_{gen}$  узлов, связанных глобально. Вопрос о ее топологии сводится лишь к определению числовых значений коэффициентов  $K_{i,j}^{MЭС}$  для конкретной расчетной схемы. При этом коэффициенты  $K_{i,j}^{MЭС}$  нельзя рассматривать по отдельности, так как каждый из них зависит от проводимостей (импедансов) всех элементов схемы замещения. Например, при изменении величины нагрузки  $Z_k^{load}$ , одновременно меняются все коэффициенты  $K_{i,j}^{MЭС}$ . Поэтому при исследовании системы уравнений (1.8), вообще говоря, нельзя менять значение какого-то одного коэффициента  $K_{k,l}^{MЭС}$ , оставляя остальные без изменений. Такой подход затрудняет определение участков схемы замещения и, следовательно, элементов энергосети, имеющих наибольшее влияние на параметры модели (1.8). К тому же установление роли конкретных связей эффективной сети в формировании динамики модели, представляется затруднительным.

## 1.4 Основные режимы работы

В рамках МСМ и МЭС состояние энергосети в фиксированный момент времени задается положением изображающей точки в фазовом пространстве системы (1.3) или (1.8), соответственно. Установившимся режимам работы энергосети соответствуют аттракторы этих систем, то есть определенная зависимость их координат от времени. В энергосети реализуется какой-либо режим, если изображающая точка находится в сколь угодно малой окрестности соответствующего аттрактора, целиком лежащей внутри его области притяжения. Переходным режимам энергосети соответствует движение изображающей точки между указанными окрестностями аттракторов. Установившийся режим будем характеризовать разностями фаз или относительными углами  $\delta_{km} = \delta_k - \delta_m$ ,  $k \neq m$ .

В МСМ (1.3) взаимодействие между  $i$ -ым и  $j$ -ым элементами энергосети (синхронными машинами – потребителями и генераторами) определяется слагаемым  $P_{i,j} = K_{i,j}^{МСМ} \sin(\delta_j - \delta_i)$ , то есть мощностью, которой обмениваются машины, связанные линией передачи с пропускной способностью  $K_{i,j}$ . Поэтому можно говорить об установившемся режиме взаимодействия двух отдельных элементов, который характеризуется переменной  $\delta_{i,j}$  и соответствующей мощностью  $P_{i,j}$ .

- Если  $\delta_{i,j} = const_{i,j}$ , то мощность  $P_{i,j} = const_{i,j}$ . В этом случае реализуется синхронный режим взаимодействия  $i$ -го и  $j$ -го элементов энергосети. Если аналогичные условия выполняются для всех связанных между собой элементов энергосети ( $K_{i,j} \neq 0$ ), то в ней реализуется синхронный режим, который является безопасным.
- Если  $\delta_{i,j}(t)$  совершает колебания во времени такие, что размах колебаний  $|max(\delta_{i,j}) - min(\delta_{i,j})| \leq 2\pi$ , то реализуется квазисинхронный режим взаимодействия  $i$ -го и  $j$ -го элементов энергосети. Если размах колебаний достаточно мал, по сравнению с  $2\pi$ , то мощность  $P_{i,j}$  изменяется в близких пределах, поэтому такой режим является относительно безопасным, по сравнению с синхронным режимом.

- Если  $\delta_{i,j}(t)$  изменяется во времени так, что всегда найдутся два момента времени  $t_1, t_2 : t_1 < t_2$ , при которых  $|\delta_{i,j}(t_2) - \delta_{i,j}(t_1)| > 2\pi$ , то реализуется асинхронный режим взаимодействия  $i$ -го и  $j$ -го элементов энергосети. В этом случае мощность  $P_{i,j}$  совершает значительные колебания. Такой режим является небезопасным, аварийным.

В рамках МСМ будем считать, что энергосеть работает в квазисинхронном режиме, если он реализуется хотя бы в одной паре элементов с  $K_{i,j} \neq 0$ . Такое определение позволяет разбить энергосеть на две подсети – в первой из них реализуется относительно безопасный квазисинхронный режим, а во второй – аварийный, асинхронный режим. Напротив, энергосеть работает в асинхронном режиме, если он реализуется в каждой паре связанных элементов.

В МЭС (1.8) состояние энергосети определяется поведением ее генераторов. Для нормальной работы энергосети генераторы должны быть синхронизованы между собой. В качестве переменной, определяющей наличие или отсутствие синхронизации будем использовать  $\delta_{i,j}$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n_{gen}$ . Если в энергосети имеется  $n_{gen}$  генераторов, то существует набор из  $(n_{gen} - 1)$  линейно независимых относительных углов  $\delta_{i,j}$ , которые и определяют ее состояние. Далее, говоря об относительных углах, будем иметь в виду один из таких наборов. В зависимости от характера изменения переменных  $\delta_{i,j}$  в некотором установившемся состоянии, можно рассматривать три основных режима работы энергосети.

- Если все  $\delta_{i,j} = const_{i,j}$ , то в энергосети установился синхронный режим. При этом, как видно из формулы (1.7), мощности генераторов имеют постоянные значения. Это нормальный режим работы энергосети. Он является безопасным.
- Если все  $\delta_{i,j}(t)$  совершают колебания во времени такие, что размах колебаний  $|max(\delta_{i,j}) - min(\delta_{i,j})| \leq 2\pi$ , то в энергосети установился квазисинхронный режим. Если размах колебаний достаточно мал, по сравнению с  $2\pi$ , то мощности генераторов изменяются в близких пределах, поэтому такой режим является относительно безопасным, по сравнению с синхронным режимом.
- Если хоть одна переменная  $\delta_{i,j}(t)$  изменяется во времени так, что всегда найдутся два момента времени  $t_1, t_2 : t_1 < t_2$ , при которых  $|\delta_{i,j}(t_2) - \delta_{i,j}(t_1)| > 2\pi$ , то, будем считать, что в энергосети установился асинхронный режим. В этом случае мощность генераторов совершает значительные колебания, поэтому такой режим является небезопасным, аварийным.

Синхронный режим может быть нарушен возмущениями параметров или переменных в уравнениях (1.3) и (1.8). Причинами этих возмущений могут быть следующие, наиболее часто встречающиеся, аварийные ситуации, возникающие в реальных энергосетях [6].

- Кратковременное или длительное отключение линий электропередачи из-за короткого замыкания, возникающего при грозе, дожде или сильном ветре из-за наброса постороннего предмета, перекрытия изоляции на посторонний предмет, обрыва провода.

- Отказ оборудования из-за разрушения опор, изоляторов, повреждения выключателей.
- Отказ или неправильные действия релейной защиты и автоматики.
- Отключение или снижение мощности блока электростанции.
- Отключение трансформаторов.
- Резкий рост нагрузки.
- Неправильные действия оперативного и ремонтного персонала энергосетей.
- Потеря возбуждения генераторов.

Например, при кратковременном отключении линии электропередачи или блока электростанции, с последующим подключением, параметры систем (1.3) и (1.8) не изменятся, при этом начальные условия примут значения, зависящие от условий протекания аварийной ситуации. В данной работе, изучая устойчивость синхронного режима, будем отвлекаться от первопричин возмущений параметров или переменных. При этом основной задачей является установление границ возмущений, не нарушающих исходный синхронный режим или приводящих к переходному процессу, который заканчивается установлением другого синхронного режима с приемлимыми характеристиками.

## 1.5 Выводы

В данной главе приведены две модели энергосетей (МСМ и МЭС), которые используются в диссертации. Основное их отличие заключается в способе представления нагрузок и передающих систем. В МСМ нагрузки представлены синхронными моторами, а в МЭС – постоянными сопротивлениями. При этом соответствующие динамические сети имеют различное количество узлов ( $N^{\text{МСМ}} > N^{\text{МЭС}}$ ). В МСМ необходимо рассматривать узлы-потребители и узлы-генераторы, причем топология связей между ними, повторяет конфигурацию линий передачи между соответствующими потребителями и генераторами. В МЭС нужно рассматривать только узлы-генераторы, которые связаны глобально. Силы этих связей зависят от параметров схемы замещения передающих систем и сопротивлений нагрузок. Добавление новой линии передачи между  $k$ -ым потребителем и  $m$ -ым генератором энергосети сопровождается добавлением новой связи  $K_{k,m}^{\text{МСМ}}$  между соответствующими узлами в случае МСМ или изменением всех коэффициентов  $K_{i,j}^{\text{МЭС}}$  в случае МЭС. Установлено соответствие между режимами энергосети и характером изменения переменных, описывающих их динамику в рамках МСМ и МЭС.

В настоящей работе МСМ используется в главах 2, 3, 4 и 6, а МЭС – в главе 5.

## Глава 2

# Энергосеть с топологией хаб-кластера

Во второй главе строится МСМ сильно централизованной энергосети – хаб-кластера. Приводятся диаграммы режимов его работы. Найдены области параметров, при которых всегда устанавливается синхронный режим или он сосуществует с квазисинхронными и (или) асинхронными режимами. В последнем случае предложен подход, базирующийся на втором методе Ляпунова, который позволяет дать аналитическую оценку области притяжения аттрактора (устойчивого состояния равновесия), соответствующего синхронному режиму. Оценка хорошо согласуется с результатами, полученными численно, при этом ее вычисление значительно проще и занимает меньше времени.

### 2.1 Модель хаб-кластера

В энергосетях можно встретить самые различных варианты топологий сетевых соединений, то есть способов связи генераторов и потребителей электроэнергии. Одной из часто встречающихся является топология в виде хаб-кластера, состоящего из одного генератора, питающего нескольких потребителей или наоборот – одного потребителя, которого питают несколько генераторов. В первом случае хаб-кластер моделирует централизованную сеть, в которой крупная электростанция (то есть хаб, например, АЭС, ГРЭС или ГЭС) питает несколько потребителей, а во втором – моделируется сеть с несколькими небольшими электростанциями, питающими мощную нагрузку (хаб). Крупные энергосети содержат большое количество подсетей в виде отдельных хаб-кластеров (рис. 2.1), поэтому они оказывают влияние на динамику энергосетей в целом [41, 92, 94, 96, 120].

Рассмотрим МСМ хаб-кластера, состоящего из  $N$  ( $N \equiv N^{\text{МЭС}}$ ) элементов: одного потребителя и  $(N - 1)$  генераторов (рис. 2.2). Динамика каждого элемента описывается уравнением (1.3). Соответственно,  $P_1 < 0$  (мотор),  $P_l > 0$ ,  $l = 2, 3, \dots, N$  (генераторы). Для простоты будем считать, что линии передачи, соединяющие элементы сети, одинаковые, поэтому  $K_{1,l} = K_{l,1} \equiv K$ ,  $l = 2, 3, \dots, N$ , остальные же коэффициенты равны нулю. Подобное допущение используется во многих работах [46, 48, 49, 52], где отличные от нуля коэффициенты  $K_{i,j}$  полагают равными некоторому среднему значению пропускной способности линий передачи энергосети. Для удобства введем новые переменные, время и параметры



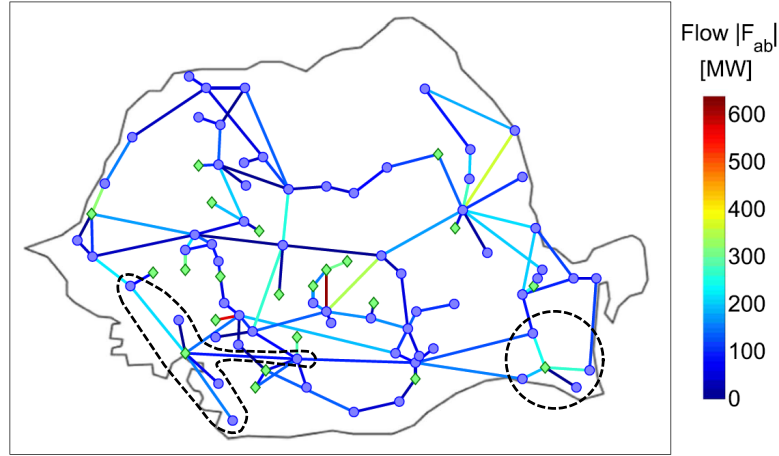


Рис. 2.1: Граф высоковольтной энергосети Румынии (Romanian high-voltage power grid). Синими кругами показаны узлы-потребители, зелеными ромбами – узлы-генераторы. Пунктиром выделены два крупных хаб-кластера. Рисунок адаптирован из работы [122].

$$\phi_i = \delta_{1,i+1}, \quad t_{new} = \sqrt{K}t, \quad \gamma_i = \frac{P_{i+1} - P_1}{K} > 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{K}}, \quad i = 1, 2, \dots, (N - 1). \quad (2.1)$$

С учетом (2.1) уравнения (1.3) примут вид

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = -\gamma_i - \lambda y_i - \sin(\phi_i) - \sum_{j=1}^{N-1} \sin(\phi_j), \end{cases} \quad (2.2)$$

где точкой обозначена производная по новому времени  $t_{new}$  и индекс  $i$  принимает значения от 1 до  $(N - 1)$ . Далее для удобства индекс у времени будем опускать. Система (2.2) определена в цилиндрическом фазовом пространстве  $G = S^{N-1} \times R^{N-1}$ . Нетрудно видеть, что переменные  $\phi_i$  и  $y_i$  описывают динамику соответствующей пары потребитель-генератор. Параметры  $\gamma_i$  зависят от мощностей турбин генераторов и механических мощностей, которые должны развивать синхронные двигатели. Ясно, что эти мощности могут меняться в процессе работы энергосети, поэтому параметры  $\gamma_i$  удобно использовать в качестве контрольных. Напротив, параметр  $\lambda$  обычно принимается постоянным. Вообще говоря, его расчет является предметом отдельных исследований [125, 126].

Заметим, что в случае хаб-кластера из одного генератора ( $P_1 > 0$ ) и  $(N - 1)$  потребителей ( $P_i < 0$ ), его динамика по-прежнему будет задаваться уравнениями (2.2), если иначе определить параметры  $\gamma_i = (P_1 - P_{i+1})/K > 0$  и переменные  $\phi_i = \delta_{i+1,1}$ , то есть сделать в системе (2.2) замену параметров  $\gamma_i \rightarrow -\gamma_i$  и переменных  $\phi_i \rightarrow -\phi_i$ ,  $y_i \rightarrow -y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, (N - 1)$ , относительно которых она инварианта. Поэтому далее будем указывать количество элементов хаб-кластера без уточнения их типа.

В соответствии с определением, данным в первой главе, синхронным режимам хаб-кластера соответствуют устойчивые состояния равновесия системы (2.2). Координаты состояний равновесия задаются системой уравнений

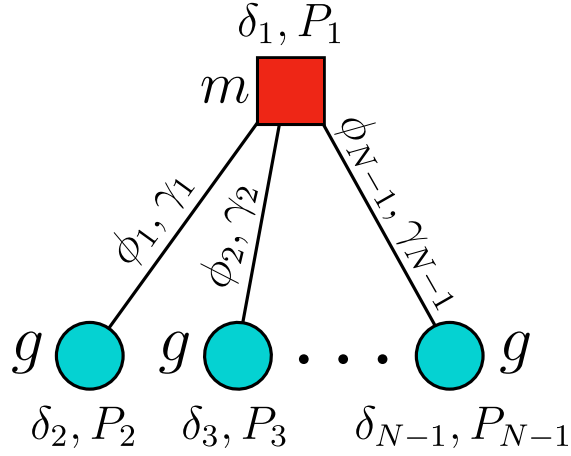


Рис. 2.2: Граф энергосети в виде хаб-кластера из одного потребителя и  $(N - 1)$  генератора с указанием основных параметров.

$$\begin{cases} y_i = 0, \\ \sin(\phi_i) = d_i, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $d_i \equiv (-N\gamma_i + \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_j)/N$ . Область  $S$  существования состояний равновесия системы (2.2) с учетом ограничений на значения параметров  $\gamma_i$ , может быть записана в виде

$$S = \{\lambda, \gamma_i \mid \lambda > 0, \gamma_i > 0, d_i > -1\}. \quad (2.4)$$

При значениях параметров из области  $S$ , система (2.2) имеет  $2^{N-1}$  грубых состояний равновесия [96] вида

$$O_j(\phi_i = \phi_i^{(k)}, y_i = 0, i = 1, 2, \dots, (N - 1), k = 1, 2), j = 1, 2, \dots, 2^{N-1}, \quad (2.5)$$

где периодические координаты состояний равновесия  $\phi_i^{(k)}$  на фазовом цилиндре  $G$  могут быть записаны в виде

$$\phi_i^{(1)} = \arcsin(d_i), \phi_i^{(2)} = \begin{cases} \pi - \phi_i^{(1)}, & d_i \geq 0, \\ -\pi - \phi_i^{(1)}, & d_i < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Стандартный анализ показывает, что состояние равновесия  $O_1(\phi_i = \phi_i^{(1)}, y_i = 0)$  является асимптотически устойчивым, а все остальные – седловыми [96]. Поэтому синхронному режиму работы энергосети в виде хаб-кластера соответствует состояние равновесия  $O_1$ . Все состояния равновесия системы (2.2) содержатся в поглощающей области  $G^+$ :

$$G^+ = \{\phi_i \in S^1, y_i \in [y_i^-, y_i^+]\}, y_i^\pm = -\frac{\gamma_i \mp N}{\lambda}. \quad (2.7)$$

## 2.2 Режимы

Вид зависимостей  $\phi_i(t)$  на аттракторах (в сколь угодно малых их окрестностях) системы (2.2) задает в соответствии с классификацией, принятой в первой главе, режимы работы хаб-кластера. В общем случае нужно учитывать, что в энергосети при фиксированных значениях параметров могут существовать несколько однотипных режимов, например, асинхронных, которым соответствуют различные аттракторы. Здесь мы не будем проводить такого деления, считая, что одному режиму может соответствовать несколько аттракторов с одинаковым характером изменения переменных. При этом в качестве примера аттрактора, соответствующего режиму, будем приводить какой-то один.

Сначала установим режимы простейшего хаб-кластера из трех элементов. Для этого рассмотрим разбиения следа области  $S$  в плоскости  $(\gamma_1, \gamma_2)$  на подобласти с различными комбинациями режимов хаб-кластера. Данные разбиения (карты режимов) были построены численно при нескольких фиксированных значениях параметра  $\lambda = 0.3, 0.5, 0.7$  и  $1.5$  (рис. 2.3).

Численно установлено, что наибольшее число режимов работы энергосети наблюдается при значении параметра  $\lambda = 0.3$  (рис. 2.3, а). Для значений параметров из области  $a_1$  состояние равновесия  $O_1$  глобально асимптотически устойчиво, поэтому при любых начальных условиях реализуется синхронный режим. Для значений параметров из области  $a_2$  траектории системы (2.2) стремятся в состояние равновесия  $O_1$  только при определенных начальных условиях, поскольку в фазовом пространстве помимо этого аттрактора существует еще устойчивый предельный цикл. Поведение траекторий системы (2.2) и осциллограммы переменных в малой окрестности этого предельного цикла (рис. 2.4, а,б) показывают, что данный аттрактор соответствует одному из двух возможных квазисинхронных режимов простейшего хаб-кластера. В этом режиме переменная  $\phi_1$  осциллирует во времени вокруг некоторого среднего значения, причем разница ее максимального и минимального значений не превышает  $2\pi$ . В то же время переменная  $\phi_2$  убывает во времени. Поэтому одна пара потребитель-генератор ( $\phi_1$ ) работает в квазисинхронном режиме, а другая ( $\phi_2$ ) – в асинхронном. В целом же, хаб-кластер работает в квазисинхронном режиме. При значениях параметров из области  $a_3$  в системе (2.2) реализуется второй тип квазисинхронного режима. В этом режиме переменная  $\phi_1$  убывает во времени, а  $\phi_2$  осциллирует около некоторого среднего значения. Следовательно, имеет место определенная симметрия в пространстве параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  относительно прямой  $\gamma_1 = \gamma_2$ . При значениях параметров из области  $a_4$  существуют оба типа квазисинхронных режимов как в областях  $a_2$  и  $a_3$ , которые реализуются при различных значениях начальных условий. При значениях параметров из области  $a_5$  в фазовом пространстве системы (2.2) существует предельный цикл (рис. 2.4, в,г). При движении траектории в его малой окрестности реализуется асинхронный режим, при котором обе переменные  $\phi_1$  и  $\phi_2$  убывают (рис. 2.4, в). Эту область необходимо избегать при выборе параметров сети. При значениях параметров из областей  $a_6$  и  $a_7$  помимо квазисинхронных режимов, таких же типов, как в областях  $a_2$  и  $a_3$ , соответственно, существует асинхронный режим. При параметрах из области  $a_8$  существуют все перечисленные выше режимы. При параметрах из области  $a_9$  не существует синхронного режима, поэтому ее подробное изучение не представляет особого

интереса.

Стоит отметить, что в рассматриваемой системе отсутствует тип квазисинхронного режима, при котором обе переменные  $\phi_1$  и  $\phi_2$  осциллируют во времени в указанном выше смысле. Такой результат можно рассматривать как следствие наличия функции Ляпунова у системы (2.2), которая исключает существование колебательных предельных циклов.

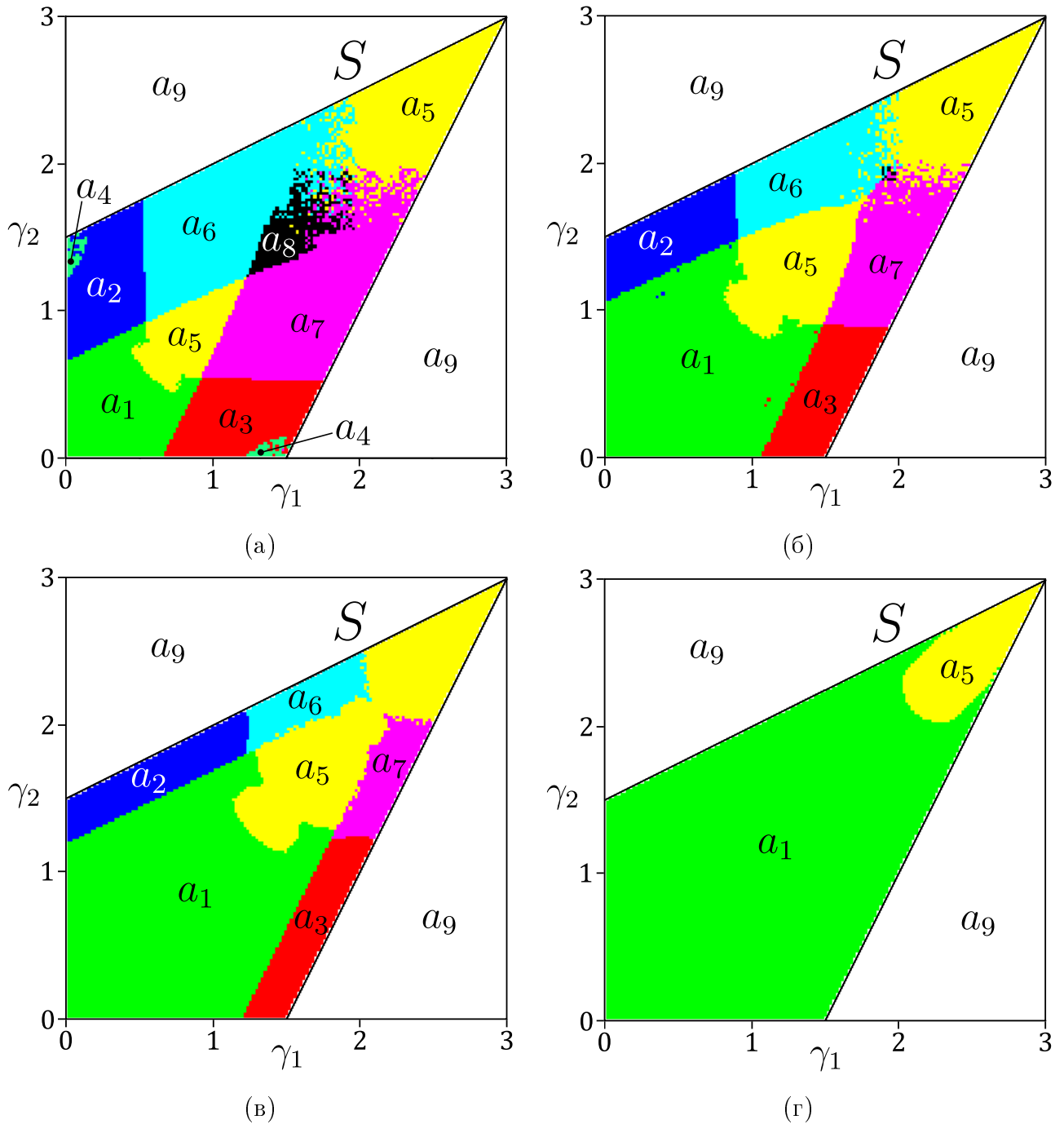


Рис. 2.3: Разбиение области  $S$  на подобласти  $a_i$  с различными режимами работы хаб-кластера из трех элементов при  $\lambda = 0.3$  (а);  $0.5$  (б);  $0.7$  (в) и  $1.5$  (г). Каждая подобласть выделена своим цветом.

Численно установлено, что увеличение параметра  $\lambda$  ведет к уменьшению количества областей  $a_k$ ,  $k = 2, 3, \dots, 8$  с различными комбинациями режимов и увеличению области  $a_1$

(рис. 2.3), где существует только синхронный режим. При превышении некоторого порогового значения параметра  $\lambda$  остаются только две области –  $a_1$  и  $a_5$  (рис. 2.3, г). Понятно, что вместе с ростом параметра  $\lambda$  растут и потери кинетической энергии ротора, что негативно сказывается на работе реальной энергосети.

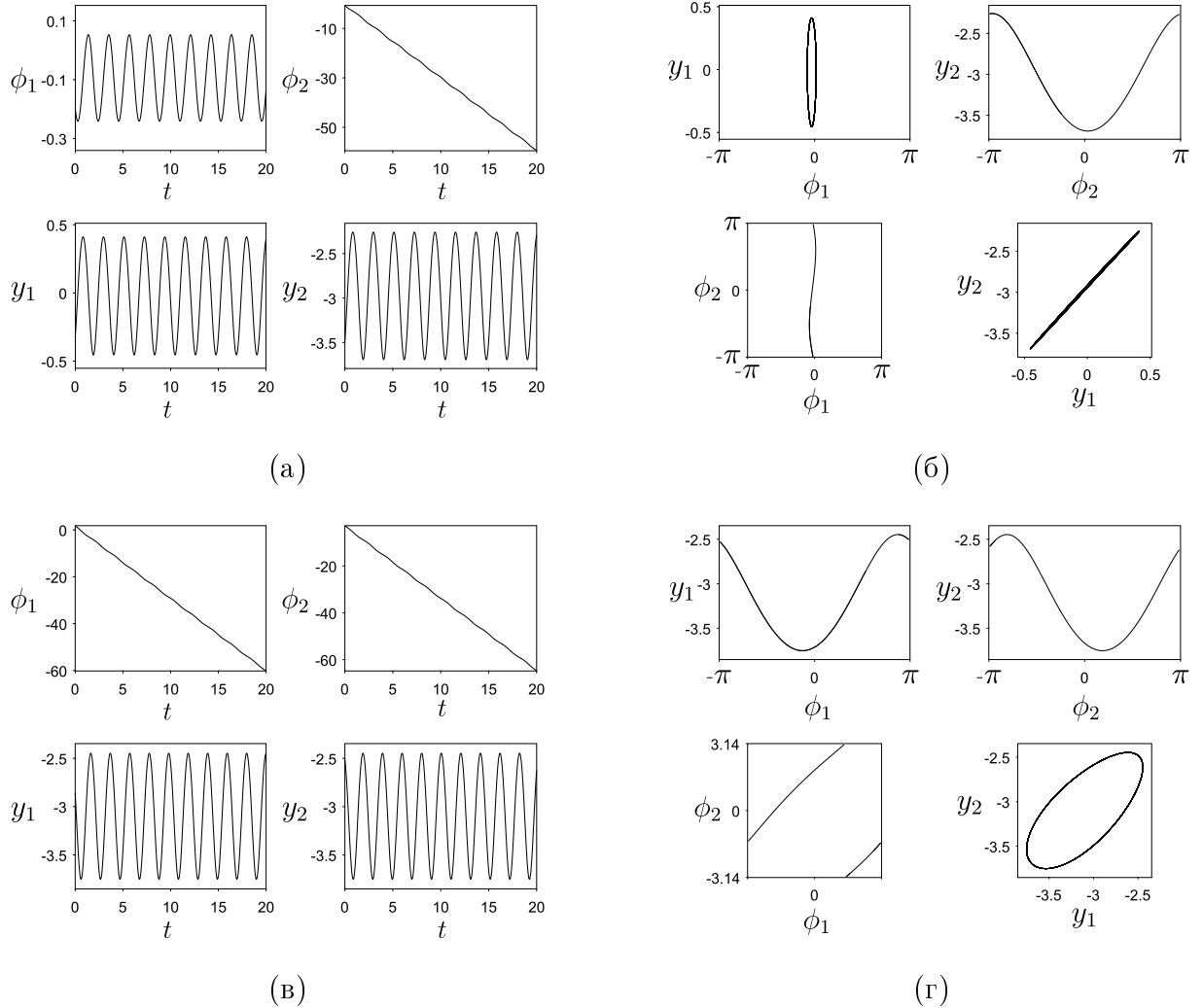


Рис. 2.4: Характерные осциллограммы переменных и проекции фазового портрета при  $\lambda = 0.3$ :  $\gamma_1 = 0.2$ ,  $\gamma_2 = 1$  – область  $a_2$  (а,б) и  $\gamma_1 = 0.9$ ,  $\gamma_2 = 1$  – область  $a_5$  (в,г).

Для того, чтобы понять, как изменится динамика энергосети в виде хаб-кластера при увеличении числа ее элементов, рассмотрим хаб-кластер, состоящий уже из одного потребителя и трех генераторов (или наоборот), и сравним его поведение с предыдущим примером.

В этом случае рассмотрим сечение пространства параметров  $\{\lambda = const_1, \gamma_3 = const_2\}$  (рис. 2.5, а). Область, которую ограничивает след области  $S$  в этом сечении обозначим через  $S_{sec}$ . Установлено, что число комбинаций различных режимов в случае хаб-кластера из четырех элементов больше, чем в случае сети из трех элементов. Поэтому удобно построить не одно разбиение области  $S_{sec}$  на области с различными режимами работы хаб-кластера, а три отдельных разбиения, характеризующие способ изменения каждой переменной  $\phi_i$ , то есть режимы в соответствующих парах потребитель-генератор. Налагая эти разбиения друг на друга можно в итоге получить диаграмму режимов работы хаб-кластера в целом. Примеры

таких разбиений на плоскости параметров  $(\gamma_1, \gamma_2)$  приведены на рисунках 2.5, в-г. На рисунке 2.6 приведены осциллограммы переменных и проекции фазового портрета некоторых характерных режимов работы хаб-кластера.

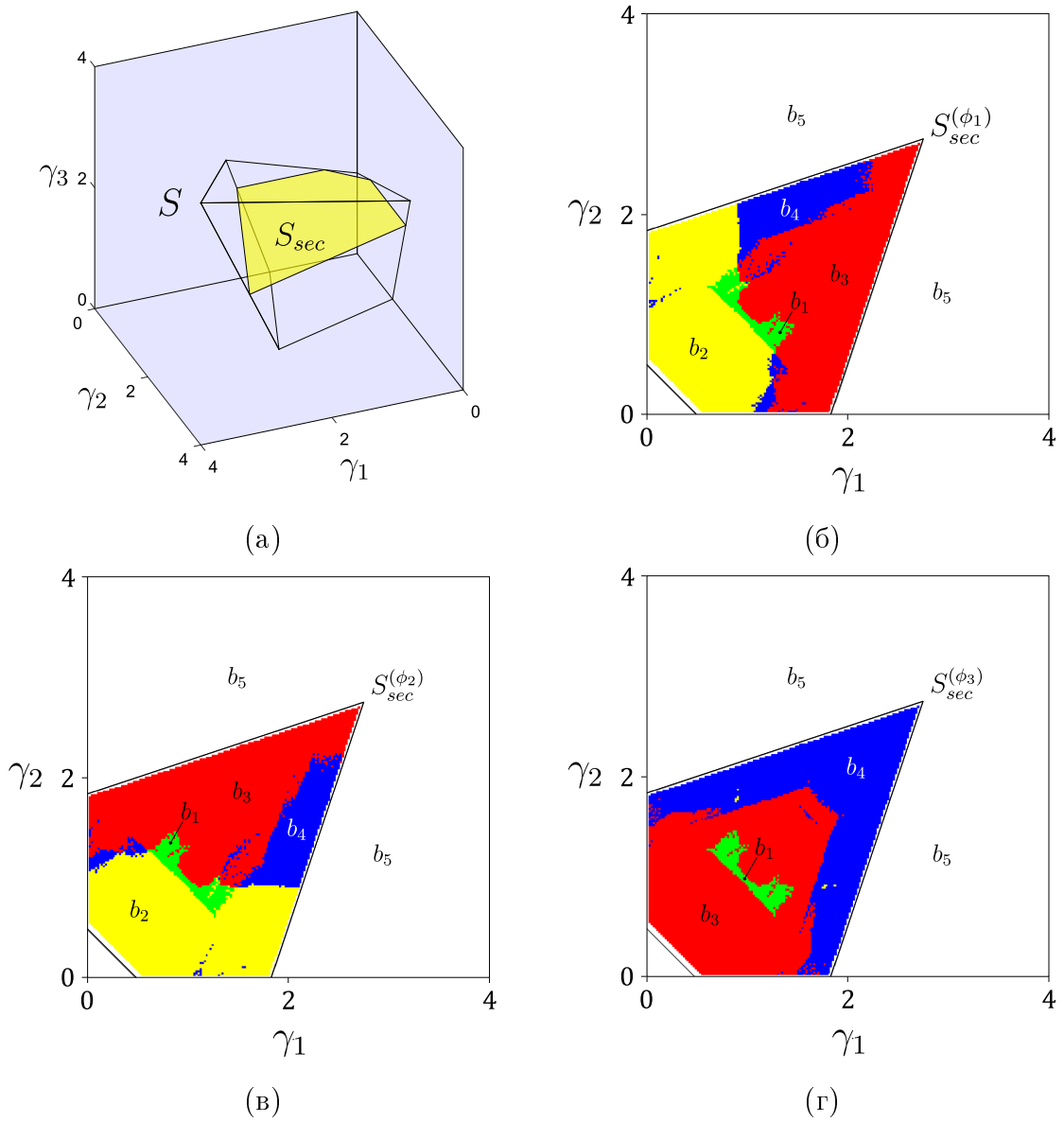
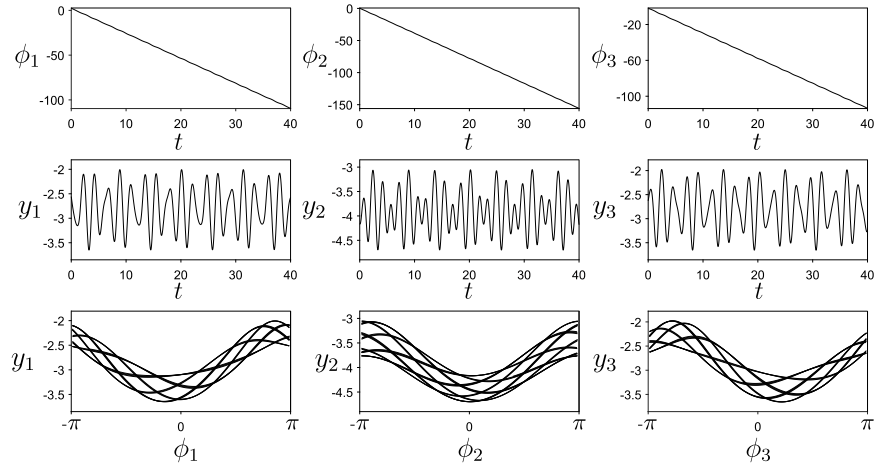
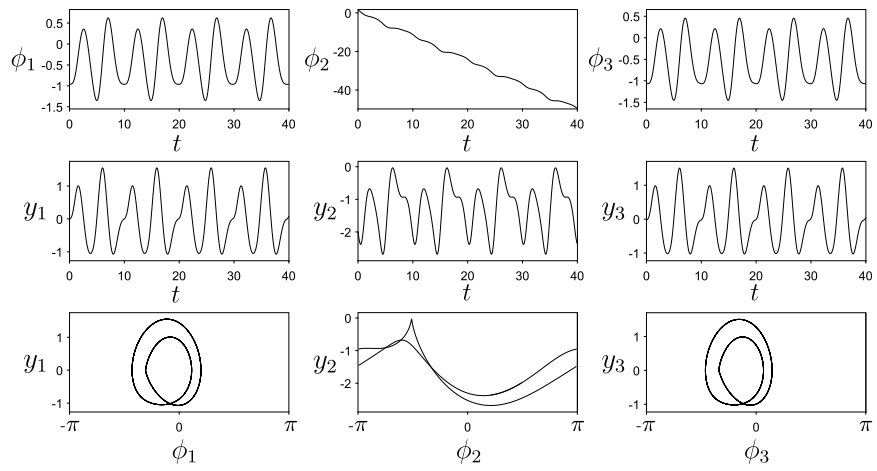


Рис. 2.5: Область параметров  $S$  и ее сечение  $S_{sec}$  при  $\gamma_3 = 1.5$  (а). Разбиение сечения  $S_{sec}$  на области с различными режимами пар потребитель-генератор, которые задаются переменными  $\phi_1$  (б),  $\phi_2$  (в),  $\phi_3$  (г). Для графиков (б-г) сечение  $S_{sec}$  снабжено индексом, указывающим переменную, отвечающую за режим в соответствующей паре потребитель-генератор. Параметр  $\lambda = 0.5$ .

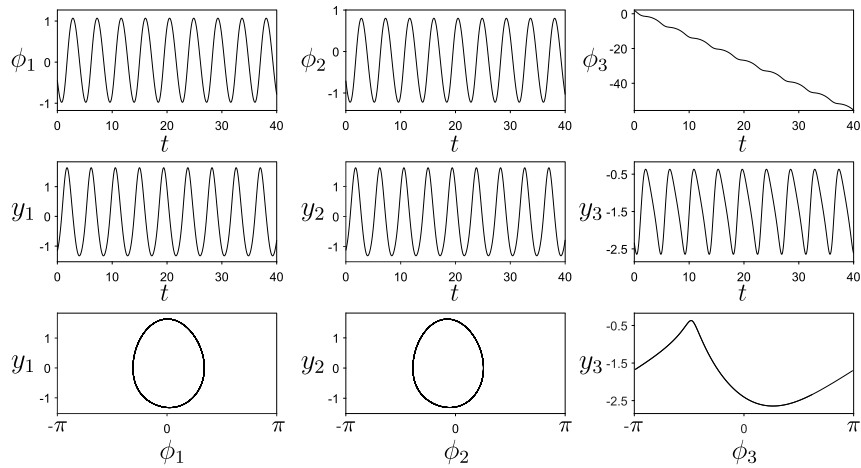
Обозначим разбиение сечения  $S_{sec}$  на режимы (карта режимов) для конкретной пары потребитель-генератор, режим которой задается переменной  $\phi_i$ , через  $S_{sec}^{\phi_i}$ . Тогда карта режимов  $S_{sec}^{\phi_1}$  может быть получена из карты режимов  $S_{sec}^{\phi_2}$  (и наоборот) путем ее зеркального отображения относительно прямой  $\gamma_1 = \gamma_2$ . Причина этого состоит в том, что система (2.2) не изменится, если сделать замену  $\gamma_k \leftrightarrow \gamma_m$  и  $\phi_k \leftrightarrow \phi_m$ ,  $y_k \leftrightarrow y_m$ , где  $k$  и  $m$  – два не равных индекса. В этом случае изменится лишь порядок следования уравнений.



(a)



(б)



(в)

Рис. 2.6: Примеры осциллограмм переменных и некоторых проекций фазового портрета при параметрах из области  $b_4$  на  $S_{sec}^{(\phi_1)}$  и  $S_{sec}^{(\phi_3)}$ ,  $b_3$  на  $S_{sec}^{(\phi_2)}$  (а-б);  $b_2$  на  $S_{sec}^{(\phi_1)}$  и  $S_{sec}^{(\phi_2)}$ ,  $b_3$  на  $S_{sec}^{(\phi_3)}$  (в). Параметры  $\lambda = 0.5$ ,  $\gamma_3 = 1.5$  и  $\gamma_1 = 1.4$ ,  $\gamma_2 = 2$  (а,б) или  $\gamma_1 = 0.4$ ,  $\gamma_2 = 0.6$  (в).

Рассмотрим, как изменяются переменные в режимах из разных областей разбиений. При значениях параметров из области  $b_1$  переменная  $\phi_i$  стремится к своему значению в состоянии равновесия  $O_1$ . При наложении диаграмм эти области совпадают и образуют область глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия  $O_1$ , то есть в системе при любых начальных условиях реализуется синхронный режим. Во всех остальных областях параметров, принадлежащих области  $S_{sec}$ , помимо синхронного режима, существуют и другие режимы изменения переменных  $\phi_i$ . При значениях параметров из области  $b_2$  переменная  $\phi_i$  осциллирует около некоторого среднего значения, что отвечает квазисинхронному взаимодействию между потребителем и генератором с номером  $(i + 1)$  (см. рис. 2.2). При значениях параметров из области  $b_3$  переменная  $\phi_i$  убывает, что отвечает асинхронному взаимодействию между потребителем и генератором с номером  $(i + 1)$ . В области  $b_4$  могут реализовываться оба описанных режима изменения переменной  $\phi_i$  из областей  $b_2$  и  $b_3$ . При значениях параметров из области  $b_5$  не существует синхронного режима работы сети, поэтому ее рассмотрение не представляет интереса.

Видно, что, наряду с синхронным режимом, в системе могут сосуществовать различные квазисинхронные режимы и асинхронный режим. Несмотря на большее многообразие динамических режимов работы хаб-кластера из четырех элементов, по сравнению с сетью из трех элементов, не наблюдается каких-либо качественно новых режимов работы сети, усложняется лишь поведение отдельных переменных  $\phi_i$ . Эти результаты показывают, что выявленные свойства хаб-кластеров из трех и четырех элементов являются типичными для сетей с такой топологией. В частности, наиболее важным является свойство, согласно которому в пространстве параметров системы (2.2) всегда существует область глобальной асимптотической устойчивости состояния равновесия  $O_1$ , что может быть показано с помощью функции Ляпунова.

## 2.3 Пороговая устойчивость синхронного режима

При параметрах из областей  $a_k$ ,  $k = 2, 3, \dots, 8$  система (2.2) имеет аттракторы, отличные от устойчивого состояния равновесия  $O_1$ , поэтому синхронный режим будет устанавливаться лишь при некоторых начальных условиях, которые формируют область притяжения точки  $O_1$ . Нахождение ее границы является сложной задачей, требующей больших вычислительных затрат. Поэтому представляет большой интерес получение аналитической оценки величины области притяжения состояния равновесия  $O_1$ .

Для этого в фазовом пространстве системы (2.2) введем в рассмотрение функцию вида

$$\begin{aligned}
 V(y_i, \phi_i) &= \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 - \frac{2}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} y_i y_j + \frac{2N}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\phi_i^{(1)}}^{\phi_i} [\sin(\zeta) - d_i] d\zeta \equiv \dots \\
 &\dots \equiv V_1(y_i) + V_2(\phi_i), \tag{2.8} \\
 V_1(y_i) &= \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 - \frac{2}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} y_i y_j, \quad V_2(\phi_i) = \frac{2N}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\phi_i^{(1)}}^{\phi_i} [\sin(\zeta) - d_i] d\zeta.
 \end{aligned}$$



Производная по времени от функции (2.8), вычисленная в силу системы (2.2), имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -2\lambda \left( \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 - \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N-1} y_i y_j \right) \leq 0. \quad (2.9)$$

В силу того, что функция  $V(y_i, \phi_i)$ , определяемая выражением (2.8), является положительно определенной при значениях параметров  $\gamma_i \in S_V$ , причем  $S_V \subset S$ , обращается в ноль в точке  $O_1$ , а ее производная по времени, вычисленная в силу системы (2.2), является отрицательно определенной функцией, функция  $V(y_i, \phi_i)$  является функцией Ляпунова [103, 124] системы (2.2). Область  $S_V$  будем называть областью существования функции Ляпунова (2.8).

Рассмотрим поверхности уровня функции Ляпунова (2.2), проходящие через седла  $V(O_k) = C_k$ ,  $k = 2, 3, \dots, N-1$ . Найдем

$$C_{min}^{saddle} = \min(C_k^{saddle}). \quad (2.10)$$

Множество точек фазового пространства системы (2.2), ограниченное замкнутой частью поверхности уровня  $V(y_i, \phi_i) = C_{min}^{saddle}$ , охватывающей устойчивое состояние равновесия  $O_1$ , принадлежат области притяжения этой точки. Поэтому указанную часть поверхности уровня можно считать оценкой области притяжения состояния равновесия  $O_1$  [96]. В качестве оценки ее величины (размера) будем использовать минимальное расстояние от точки  $O_1$  до поверхности уровня  $V(y_i, \phi_i) = C_{min}^{saddle}$ , которое обозначим через  $r_{min}$ . Найдем эту величину.

Рассмотрим сечение  $\phi_i = \phi_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, N-1$  поверхности уровня функции Ляпунова  $V(y_i, \phi_i) = C_{min}^{saddle}$ , которое можно записать в виде

$$V_1(y_i) = C, \quad (2.11)$$

где  $C \equiv C_{min}^{saddle} - V_2(\phi_i^*) > 0$ . В левой части выражения (2.11) стоит положительно определенная квадратичная форма  $V_1(y_i)$ , которую можно преобразовать к каноническому виду, тогда выражение (2.11) примет вид

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{x_i}{\sqrt{C/\lambda_i}} \right)^2 = 1, \quad (2.12)$$

где  $\lambda_i$  – собственные числа матрицы квадратичной формы  $V_1(y_i)$ , которую будем обозначать через  $\hat{A}$ . Она состоит из элементов

$$\hat{A}: a_{ii} = 1, a_{ij} = -\frac{1}{N-1}, i, j = 1, 2, \dots, N-1, i \neq j \quad (2.13)$$

Из выражений (2.13) видно, что матрица  $\hat{A}$  является циркулянтом, поэтому ее собственные числа могут быть найдены по известной для циркулянтов формуле [123]:

$$\lambda_j = 1 - \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-2} \omega_j^k, \omega_j = e^{i \frac{2\pi jk}{N-1}}, i^2 = -1, j = 0, 1, \dots, N-2. \quad (2.14)$$

Из формулы (2.14) легко найти, что

$$\lambda_0 = \frac{1}{N-1}. \quad (2.15)$$

Определим значения остальных собственных чисел  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N-2$ . В силу того, что матрица  $\hat{A}$  – вещественная и симметричная, ее собственные числа вещественны. Поэтому выражение (2.14) можно записать в виде

$$\lambda_j = 1 - \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-2} \cos\left(\frac{2\pi jk}{N-1}\right), \quad j = 1, 2, \dots, (N-2). \quad (2.16)$$

Сумму, стоящую в правой части выражения (2.16), можно вычислить, используя следующую формулу из тригонометрии

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \quad (2.17)$$

Положив в формуле (2.17)  $n = N-2$ ,  $x = 2\pi j/(N-1)$ , после преобразований получим, что искомая сумма равна  $-1$  и, следовательно,

$$\lambda_j = \frac{N}{N-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N-2. \quad (2.18)$$

Таким образом, уравнение (2.12) задает эллипсоид, длина наименьшей полуоси которого вычисляется по формуле

$$l_{min} = \sqrt{\frac{N-1}{N}(C_{min}^{saddle} - V_2(\phi_i^*))}. \quad (2.19)$$

Тогда расстояние  $r_{min}$  имеет вид

$$r_{min} = \min \left( \sqrt{l_{min}^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (\phi_i^* - \phi_i^{(1)})^2} \right). \quad (2.20)$$

Рассматривая правую часть выражения (2.20) как функцию переменных  $\phi_i^*$ , можно показать, что она имеет единственный минимум при  $\phi_i^* = \phi_i^{(1)}$ , поэтому

$$r_{min} = \sqrt{\frac{N-1}{N}C_{min}^{saddle}}. \quad (2.21)$$

В качестве численной оценки области притяжения состояния равновесия  $O_1$  будем использовать максимальное значение радиуса сферы с центром в этой точке, при котором все траектории с начальными условиями на этой сфере асимптотически стремятся к состоянию равновесия  $O_1$ .

Рассмотрим сначала как меняется величина  $r_{min}$  при изменении параметров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . На рисунках 2.7, б-г приведены зависимости величины  $r_{min}$  вдоль прямых  $\gamma_2 = -2\gamma_1 + \gamma_1^*$  для  $\gamma_1^* = 1$ ,  $\gamma_1^* = 1.5$  и  $\gamma_1^* = 2$ , соответственно. Рассматриваемые прямые, перпендикулярны прямой  $\gamma_2 = \gamma_1$ , относительно которой система обладает свойствами симметрии. При этом значения  $\gamma_1^*$  выбраны таким образом, чтобы прямые не пересекали область параметров  $a_1$ .

Видно, что при удалении от области  $a_1$  величина  $r_{min}$  убывает. Общий вид зависимости  $r_{min}(\gamma_1, \gamma_2)$  для параметров  $\gamma_1, \gamma_2$  из области  $S_V$  приведен на рисунке 2.7, г.

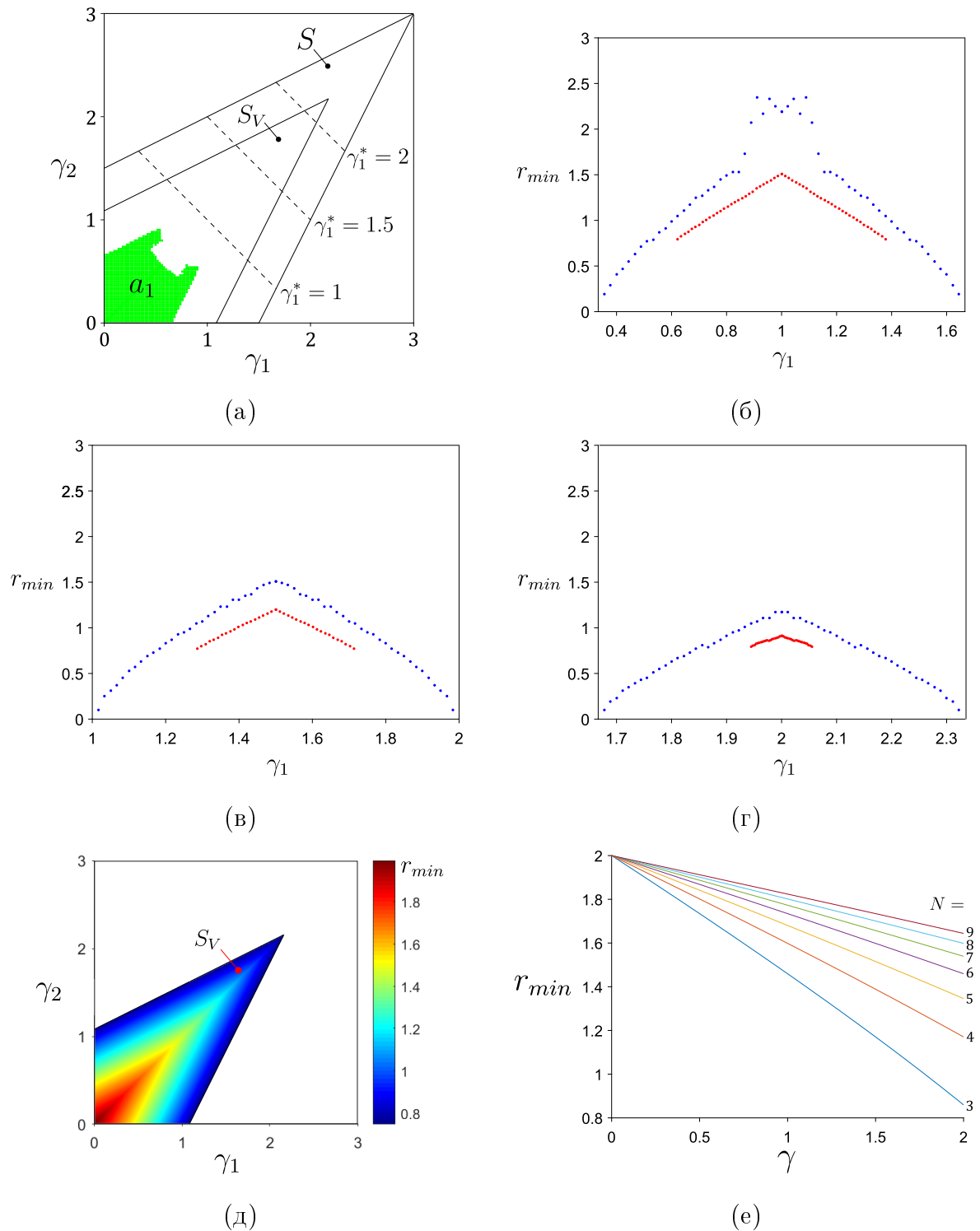


Рис. 2.7: Взаимное расположение областей существования состояний равновесия  $S$  и функции Ляпунова  $S_V$ , а также прямых, на которых рассчитывается величина  $r_{min}$  (а); зависимость  $r_{min}(\gamma_1)$ , определенная аналитически (красные маркеры) и численно (синие маркеры) при  $\gamma_1^* = 1$  (б),  $\gamma_1^* = 1.5$  (в) и  $\gamma_1^* = 2$  (г); значение величины  $r_{min}$  в области  $S_V$  (д); вид зависимости  $r_{min}(\gamma)$  при разном количестве элементов в хаб-кластере (справа от кривых указано соответствующее им количество элементов сети  $N$ ) (е). Параметр  $\lambda = 0.3$ .

Далее рассмотрим как изменяется величина  $r_{min}$  при увеличении числа элементов хаб-кластера. Для этого положим  $\gamma_i = \gamma$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ . В этом случае выражение для величины  $r_{min}$  примет вид

$$r_{min} = \sqrt{2 \left( 2\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{N}\right)^2} + \frac{\gamma}{N} \left( -\pi + 2 \arcsin \left( \frac{\gamma}{N} \right) \right) \right)}. \quad (2.22)$$

Ограничимся значениями параметра  $\gamma \in (0, 2]$  для того, чтобы функция Ляпунова (2.8) существовала для всех  $N \geq 3$ . Можно показать, что при таких значениях параметра  $\gamma$ , функция  $r_{min}(\gamma)$  является монотонно убывающей. Зависимости  $r_{min}(\gamma_1)$  при разных значениях числа  $N$  представлены на рисунке 2.7, е. Видно, что величина  $r^{min}$  растет с увеличением числа элементов хаб-кластера  $N$ .

Таким образом, значение величины  $r_{min}$ , которое может быть вычислено с помощью описанного выше подхода, дает наглядную оценку величины области притяжения состояния равновесия  $O_1$  и определяет множество начальных условий, при которых система возвращается в исходный синхронный режим. Отметим, что система может принимать указанные начальные условия после воздействия какого-либо возмущения, поэтому можно сказать, что величина  $r_{min}$  дает оценку границы безопасных возмущений системы.

## 2.4 Выводы

Рассмотрена модель синхронных моторов для энергосети с топологией хаб-кластера. Данная сеть является типичным элементом крупных энергосетей и может оказывать сильное влияние на их динамику в целом. В отдельности модель используется для анализа устойчивости сильно централизованных энергосетей.

Для хаб-кластеров из трех и четырех машин получены карты режимов. Выделены области параметров, при которых всегда устанавливается синхронный режим, то есть области безаварийной работы хаб-кластеров при любых начальных условиях. Установлено, что вне этих областей наряду с синхронным режимом, сосуществуют различные квазисинхронные и (или) асинхронные режимы. Показано, что количество различных режимов растет при увеличении числа машин (генераторов или потребителей), входящих в хаб-кластер.

Для анализа нелокальной устойчивости синхронного режима вне области безаварийной работы хаб-кластеров был использован подход, базирующийся на втором методе Ляпунова. Он позволяет дать оценку области притяжения состояния равновесия, соответствующего синхронному режиму и, следовательно, определить возмущения, не нарушающие его. С помощью этого подхода получена формула для оценки минимального расстояния от указанного состояния равновесия до границы его области притяжения. Такая оценка хорошо согласуется с результатами полученными численно, но ее вычисление требует значительно меньше времени, что особенно существенно, при расчетах устойчивости хаб-кластеров с большим количеством потребителей или генераторов.

## Глава 3

# Устойчивость энергосети к изменениям ТОПОЛОГИИ

В третьей главе предложена базовая модель (мотив из двух генераторов и одного мотора) для изучения реакции энергосети на добавление новой линии передачи или на изменение пропускной способности действующей линии. С ее помощью установлен новый сценарий возникновения парадокса Браеса в энергосетях, при котором потеря устойчивости сети при указанных изменениях связана с возникновением мультистабильности и возмущениями синхронного режима, а не только с его исчезновением, как считалось ранее [47, 60]. Для этого построено разбиение плоскости параметров, отвечающих за пропускные способности линий передачи мотива на области с различными режимами. Выделены области параметров, при которых всегда устанавливается синхронный режим или он сосуществует с асинхронными режимами. В последнем случае предложено несколько вероятностных мер, позволяющих определить устойчивость синхронного режима по отношению к произвольным возмущениям динамических переменных, к частотным и фазовым возмущениям, а также к возмущениям динамики одного из генераторов мотива. Показано, что основные особенности нового сценария, в частности, качественный вид разбиения плоскости параметров на области с различными режимами, сохраняются в сетях с различной топологией, что свидетельствует о его универсальности.

Найдены условия безопасного объединения подсетей – хаб-кластера и мотива, при наиболее опасных, с точки зрения возникновения парадокса Браеса, параметрах. Построено разбиение плоскости параметров, отвечающих за пропускные способности линий передачи хаб-кластера и линии между подсетями на области с различными режимами работы объединенной энергосети, определены вероятности их реализации. Установлены основные сценарии поведения объединенной энергосети в зависимости от пропускной способности линии передачи, соединяющей подсети.

## 3.1 Парадокс Браеса в энергосетях

Одна из основных тенденций развития современной электроэнергетики состоит в активном внедрении в энергосети большого числа новых, как правило, маломощных, альтернативных источников энергии, таких как солнечные, ветряные и приливные электростанции [127, 128]. В настоящее время на альтернативные источники энергии возлагают большие надежды при создании так называемой зеленой энергетики и рассматривают их как замену крупным электростанциям (АЭС, ГЭС). Однако при реализации этой концепции закономерно возникает проблема оптимального подключения новых источников энергии к уже существующим энергосетям, а также перераспределения потоков электроэнергии за счет новых линий передачи. К тому же постоянный рост энергосетей, обусловленный появлением новых потребителей, требует строительства линий передачи для их питания.

Считалось, что добавление новых линий передачи между элементами энергосети делает синхронизацию между ними более прочной и не нарушает синхронный режим в сети. Оказалось, что это не всегда так. В ряде работ [47, 58–62, 64] было установлено, что введение новых линий передачи может как сохранить, так и нарушить синхронный режим в сети. Поэтому возникла неопределенность, связанная с реакцией энергосети на новые линии передачи, которая получила название парадокса Браеса в энергосетях [47]. В общем случае, он проявляется в нарушении синхронного режима работы энергосети при добавлении новой линии передачи между ее элементами (генераторами и потребителями) или при изменении (увеличении) пропускной способности действующей линии/линий.

Существование парадокса Браеса выявлено как в небольших модельных энергосетях [47, 58, 60, 61], так и в достаточно крупной энергосети Великобритании [47, 58, 59]. Отметим, что в этих работах используется два существенных предположения, которые сильно ограничивают их выводы. Во-первых, свойства линий передачи считаются неизменными. Во-вторых, исследования были проведены при фиксированных тривиальных начальных условиях для переменных, характеризующих состояние сети. Такой подход не позволяет учесть постоянно действующие в реальных энергосетях возмущения, что существенно с практической точки зрения.

### 3.1.1 Базовая модель

В рамках МСМ рассмотрим произвольную энергосеть, которую можно представить в виде графа (рис. 3.1). Предположим, что один из потребителей этой сети ( $m_1$ ,  $P_1 < 0$ ) соединен с двумя генераторами ( $g_{2,3}$ ,  $P_{2,3} > 0$ ) (рис. 3.1). Например, они могут представлять собой внедренные в энергосеть относительно небольшие (альтернативные) источники энергии. Указанный потребитель и два генератора образуют типичный мотив в составе больших энергосетей (рис. 3.1). Наличие таких мотивов обусловлено растущей децентрализацией современных энергосетей, когда несколько крупных электростанций, таких как АЭС и ГЭС, которые питают множество потребителей, могут быть заменены или дополнены несколькими относительно небольшими электростанциями, питающими одного потребителя или неболь-

шую группу потребителей.

Будем предполагать, что мотив синхронизован с остальной частью энергосети, то есть выполняется условие  $\delta_4 - \delta_1 = \delta_{4,1}^0 = const$ . В этом случае мощность, которой обменивается мотив с сетью имеет постоянное значение. Обозначим его через  $P_{grid} = K_{1,4} \sin(\delta_{4,1}^0)$  (рис. 3.1).

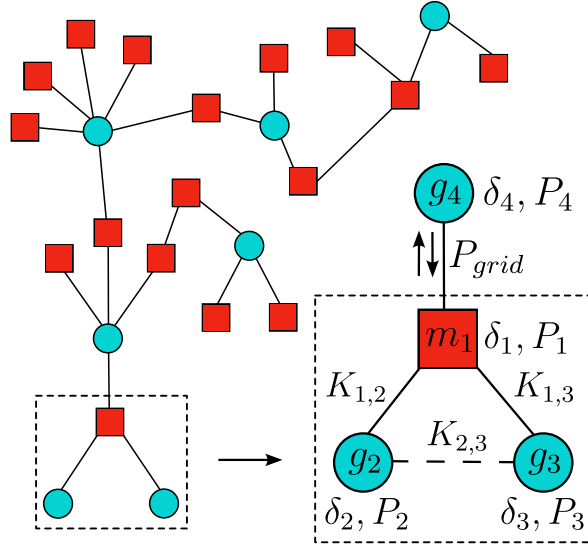


Рис. 3.1: Схематическое представление структуры энергосети в виде графа и исследуемая подсеть в виде трехэлементного мотива, состоящего из одного потребителя ( $m_1$ ) и двух генераторов ( $g_2, g_3$ ). Новая линия передачи между генераторами мотива показана пунктирным ребром  $K_{2,3}$ .

Рассмотрим влияние новой линии передачи между генераторами (рис. 3.1) на динамику мотива. Для простоты положим  $P_2 = P_3$  и  $K_{1,2} = K_{1,3} \equiv K$ , обозначим  $K_{2,3} \equiv B$ . Введем новые переменные и параметры

$$\phi_1 = \delta_{2,1}, \quad \phi_2 = \delta_{3,1}, \quad \Delta P = P_2 - P_1 - P_{grid}, \quad (3.1)$$

Тогда уравнения (1.3) для мотива запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = \Delta P - \alpha y_1 - 2K \sin(\phi_1) - K \sin(\phi_2) - B \sin(\phi_1 - \phi_2), \\ \dot{\phi}_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \Delta P - \alpha y_2 - K \sin(\phi_1) - 2K \sin(\phi_2) - B \sin(\phi_2 - \phi_1), \end{cases} \quad (3.2)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени  $t$ . Для удобства положим  $\Delta P = 1$  и  $\alpha = 0.8$ . Параметры  $K$  и  $B$  представляют собой пропускные способности линий передачи, соединяющих генераторы с потребителем и друг с другом, соответственно. Будем считать, что  $|P_{grid}| \ll |P_i|$ ,  $i = 1, 2, 3$ . В этом случае параметр  $\Delta P$  характеризует суммарную механическую мощность элементов мотива. Поэтому, выбрав  $\Delta P = 1$ , мы должны ограничить значения пропускных способностей  $K, B \leq 1$ , так как с практической точки зрения не имеет смысла использовать линии передачи с избыточной пропускной способностью.

### 3.1.2 Динамика модели

Проведено исследование динамики системы (3.2) и установлено следующее. Все аттракторы системы (3.2) лежат в поглощающей области

$$G^+ = \{\phi_i \in S^1, y_i \in [y^-, y^+], i = 1, 2\}, \quad (3.3)$$

где  $y^\pm = (\Delta P \pm (3K + B))/\alpha$ . Область  $G^+$  содержит единственное устойчивое состояние равновесия  $O$  с координатами  $\phi_i = \arcsin(\Delta P/(3K))$ ,  $y_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ , которое существует при  $K > K_0$ ,  $K_0 = \Delta P/3$ . Оно соответствует синхронному режиму работы мотива. Остальные состояния равновесия являются седловыми. Наряду с синхронным, в мотиве может возникать асинхронный режим, которому соответствуют предельные циклы или хаотические аттракторы вращательного типа в фазовом пространстве системы (3.2). Установление того или иного режима зависит от начальных условий и значений параметров системы (3.2). Поэтому рассмотрим разбиение плоскости параметров  $B, K$  на области, отвечающие различным режимам работы мотива (рис. 3.2, а).

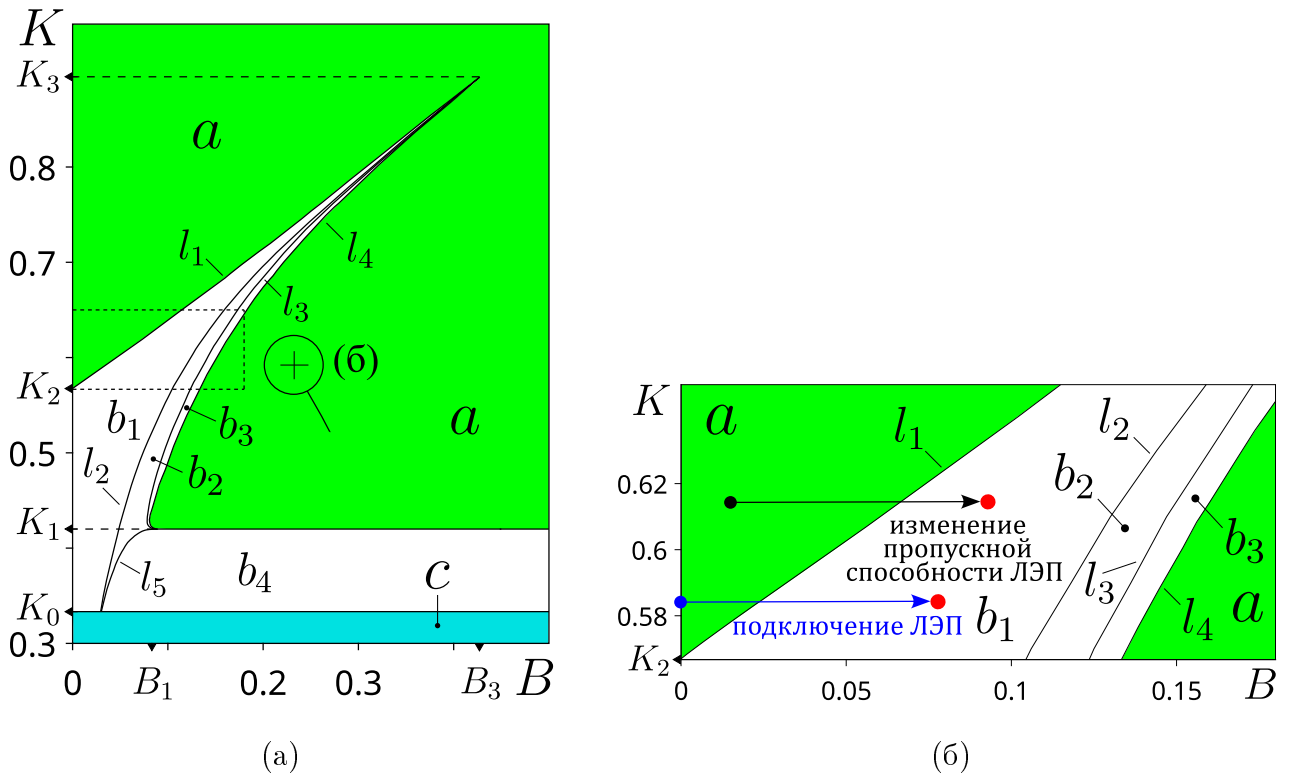


Рис. 3.2: Разбиение плоскости параметров  $B, K$  на области с различными режимами работы мотива. Области  $a, b$  и  $c$  выделены зеленым, белым и синим цветом, соответственно. На рисунке (б) синей и черной точками обозначены исходные параметры мотива, гарантирующие установление синхронного режима, при отсутствии линии передачи между генераторами (синяя точка) и при ее наличии (черная точка). Красными точками обозначены конечные параметры мотива, обусловленные присоединением новой линии передачи (синяя стрелка) или изменением пропускной способности действующей линии (черная стрелка). При них возможен парадокс Браеса. Параметры  $\Delta P = 1$ ,  $\alpha = 0.8$ .



Для значений параметров  $B, K$  из области  $a$  (рис. 3.2) состояние равновесия  $O$  глобально асимптотически устойчиво, то есть при любых начальных условиях реализуется синхронный режим. Следовательно, данная область параметров является безопасной.

Для значений параметров  $B, K$  из области  $b$  (рис. 3.2), состоящей из четырех подобластей  $b_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , траектории системы (3.2) стремятся в состояние равновесия  $O$  только при определенных начальных условиях, поскольку в фазовом пространстве системы (3.2) помимо устойчивого состояния равновесия существуют другие аттракторы – вращательные предельные циклы (рис. 3.3, а,б) и хаотические аттракторы (рис. 3.3, в,г). Таким образом, область параметров  $b$  является потенциально опасной, потому что при этих значениях параметров может реализовываться асинхронный режим.

При значениях параметров  $B, K$  из области  $c$  (рис. 3.2) система (3.2) не имеет устойчивого состояния равновесия, то есть синхронного режима не существует. Вместо него всегда устанавливается асинхронный режим, поэтому область параметров  $c$  является опасной.

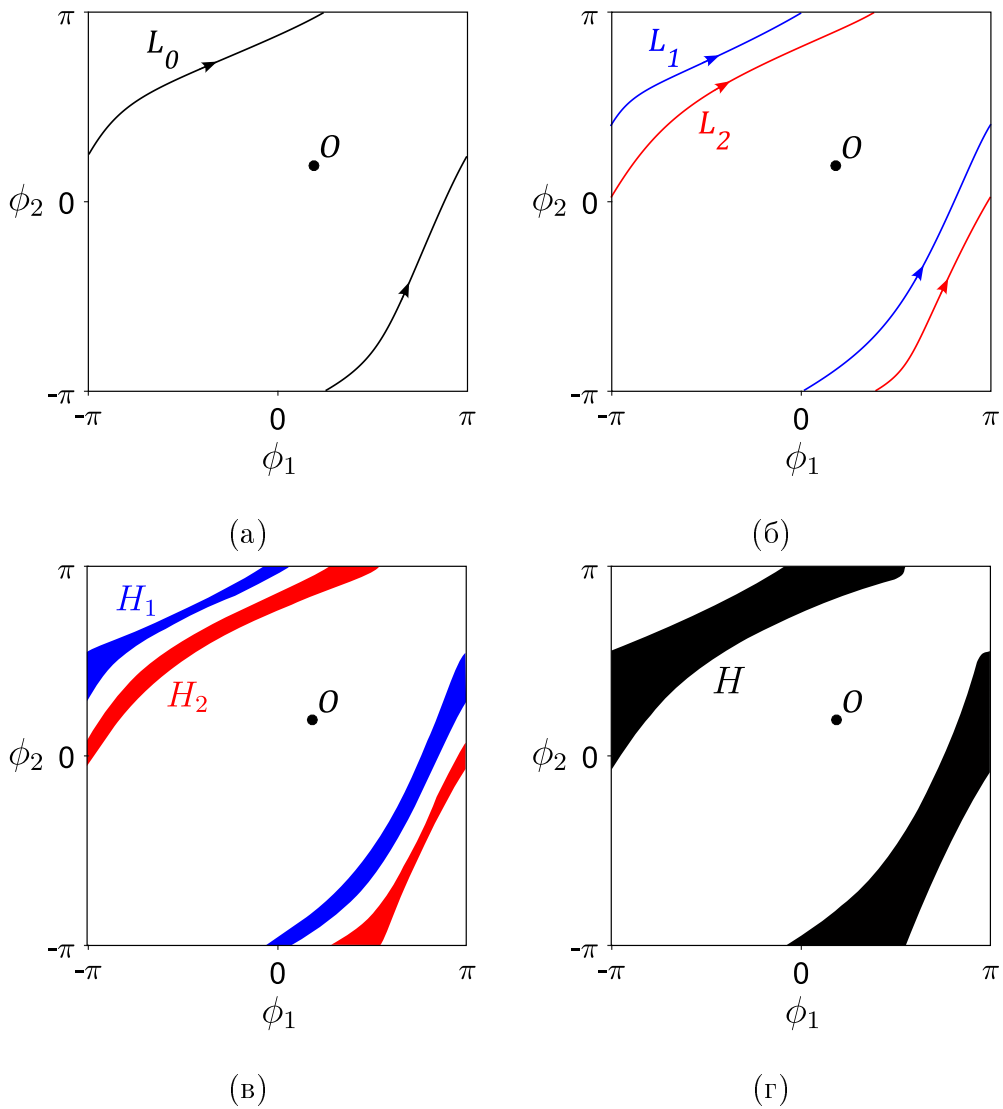


Рис. 3.3: Проекция аттракторов на плоскость  $(\phi_1, \phi_2)$  при значениях параметров из областей:  $b_1$  при  $B = 0.07$  (а),  $b_2$  при  $B = 0.133$  (б),  $b_3$  при  $B = 0.147$  (в) и  $B = 0.1504$  (г). Параметр  $K = 0.6$

Проследим за динамикой системы (3.2) при значениях параметров  $B, K$  из области  $b$ . Для этого зафиксируем параметр  $K = 0.6$  и будем постепенно увеличивать параметр  $B$ . Удобно построить однопараметрическую бифуркационную диаграмму для аттракторов, соответствующих асинхронному режиму. Для этого по оси абсцисс отложим значение параметра  $B$ , а по оси ординат – координату  $\phi_1^{sec}$  пересечения аттрактора с секущей  $S_{sec} = \{\phi_1 = -\phi_2, \phi_2 \in [-\pi, 0]\}$  (рис. 3.4).

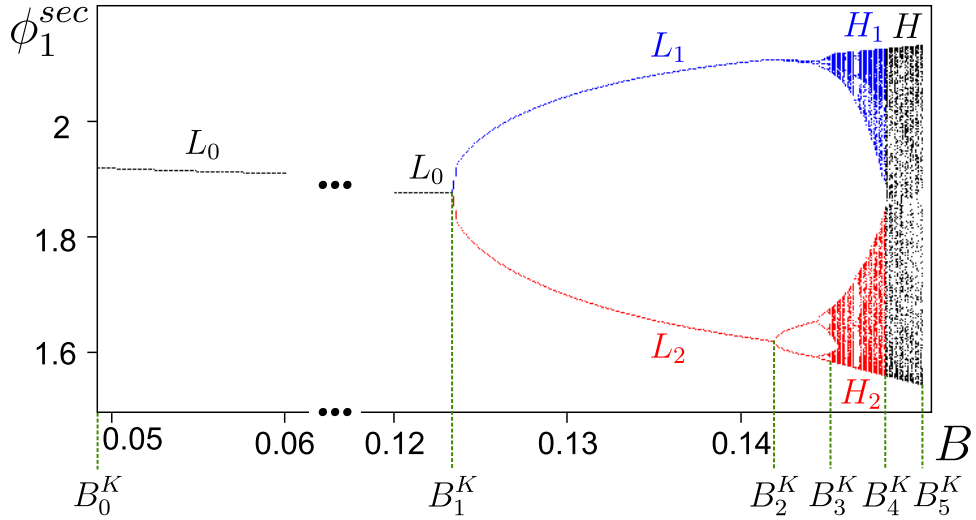


Рис. 3.4: Однопараметрическая бифуркационная диаграмма  $\phi_1^{sec}(B)$ . Параметр  $K = 0.6$ .

При переходе из области  $a$  в область  $b_1$  через границу  $l_1$  ( $B = B_0^K$ , рис. 3.4) в результате седло-узловой бифуркации предельных циклов рождается устойчивый вращательный предельный цикл  $L_0$  (рис. 3.3, а), который существует при значениях параметров из области  $b_1$  ( $B_0^K < B < B_1^K$ , рис. 3.4). При переходе из области  $b_1$  в область  $b_2$  через границу  $l_2$  ( $B = B_1^K$ , рис. 3.4) происходит бифуркация “pitchfork” (“вилка”), в результате которой предельный цикл  $L_0$  теряет устойчивость и рождаются два устойчивых предельных цикла  $L_1$  и  $L_2$  (рис. 3.3, б;  $B_1^K < B < B_2^K$ , рис. 3.4). При дальнейшем увеличении параметра  $B$  предельные циклы  $L_1$  и  $L_2$  претерпевают каскад бифуркаций удвоения периода, реализуется сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу ( $B_2^K < B < B_3^K$ , рис. 3.4). Он приводит к образованию двух хаотических аттракторов  $H_1$  и  $H_2$  (рис. 3.3, в), которые существуют при параметрах из области  $b_3$  ( $B_3^K < B < B_4^K$ , рис. 3.4). Также, при параметрах из области  $b_3$ , хаотические аттракторы  $H_1$  и  $H_2$  при приближении к границе  $l_4$  ( $B = B_4^K$ , рис. 3.4) трансформируются в один хаотический аттрактор  $H$  (рис. 3.3, г;  $B_4^K < B < B_5^K$ , рис. 3.4), который исчезает при переходе из области  $b_3$  в область  $a$  ( $B = B_5^K$ , рис. 3.4).

В области  $b_4$  существует устойчивый симметричный предельный цикл  $L$ :  $\{\phi_i, y_i : \phi_1(t) = \phi_2(t), y_1(t) = y_2(t)\}$ , который теряет устойчивость при переходе через границу  $l_5$  в область  $b_2$ , где в результате бифуркации “pitchfork” рождаются два устойчивых предельных цикла  $L_1$  и  $L_2$ .

### 3.1.3 Новый сценарий возникновения парадокса Браеса

Рассмотрим влияние пропускной способности дополнительной линии передачи ( $B$ ), соединяющей генераторы мотива (рис. 3.1), на режим его работы. Для этого зафиксируем значение параметра  $K$  и будем увеличивать параметр  $B$ , начиная с нуля. При  $B = 0$  будем считать, что мотив находится в синхронном режиме. Учтем, что изменение параметра  $B$ , сопровождается возмущениями частоты и фазы, которые постоянно наблюдаются в реальных энергосетях. Тогда возможны три основных варианта изменения режима работы мотива.

- (i) Если параметр  $K \in (K_0, K_1)$  (рис. 3.2, а), то при любом  $B > 0$  возмущения могут перевести мотив в асинхронный режим.
- (ii) Если параметр  $K \in (K_1, K_3)$  (рис. 3.2, а), то при постепенном увеличении параметра  $B$  точка  $(B, K)$  смещается в область  $b$ , и поэтому возмущения могут перевести мотив в асинхронный режим, однако при дальнейшем увеличении  $B$  точка  $(B, K)$  смещается в область  $a$ , и в мотиве всегда устанавливается синхронный режим. Следовательно, при  $K \in (K_1, K_3)$  добавление линии передач между генераторами может привести как к разрушению, так и к сохранению синхронного режима. Поэтому этот вариант соответствует парадоксу Браеса.
- (iii) Если параметр  $K > K_3$  (рис. 3.2, а), то вне зависимости от значения параметра  $B$  подсеть будет работать в синхронном режиме. Однако в этом случае пропускная способность  $K$  должна принимать достаточно большие значения, которые не всегда возможно реализовать на практике.

Вариант (ii) наиболее важен с практической точки зрения, так как при любых возмущениях частоты и фазы он позволяет привести мотив в синхронный режим путем добавления линии передач между генераторами с определенной пропускной способностью. В его рамках следует различать два случая. В первом случае  $K \in (K_1, K_2)$ , поэтому даже при  $B = 0$  синхронный режим может быть нарушен действием возмущений, но если увеличить  $B$  так, что точка  $(B, K) \in a$ , то установление синхронного режима в мотиве гарантируется. Во втором случае  $K \in (K_2, K_3)$  и при  $B = 0$  мотив может находиться только в синхронном режиме. Увеличение параметра  $B$  до значений, при которых точка  $(B, K) \in b$  делает возможным нарушение синхронного режима из-за действия возмущений, однако дальнейшее увеличение параметра  $B$  ведет к тому, что точка  $(B, K) \in a$  и в мотиве всегда реализуется синхронный режим.

Вариант (ii) показывает новый сценарий возникновения парадокса Браеса, который состоит в следующем. Если при значениях параметров  $K \in (K_1, K_3)$  и  $B = 0$  мотив находится в синхронном режиме, то при увеличении параметра  $B$  точка  $(B, K)$  может быть смещена в область параметров  $b$ , где система (3.2) является мультистабильной – помимо устойчивого состояния равновесия  $O$ , соответствующего синхронному режиму, в фазовом пространстве системы существуют другие аттракторы, соответствующие асинхронному режиму. Поэтому

под действием возмущений мотив может быть переведен из синхронного режима в асинхронный. Следовательно, добавление новой линии передачи с пропускной способностью  $B$  (синяя стрелка и ее концы на рис. 3.2, б) может привести к нарушению синхронного режима. Если же  $K \in (K_2, K_3)$  и линия передачи между генераторами существует и имеет такую пропускную способность  $B$ , что точка  $(B, K) \in a$  лежит левее кривой  $l_1$ , тогда увеличение пропускной способности  $B$  тоже может привести к нарушению синхронного режима (черная стрелка и ее концы на рис. 3.2, б).

В ранее установленном сценарии возникновения парадокса Браеса [47] потеря синхронного режима при добавлении новой линии передачи или увеличении пропускной способности действующей линии связана с исчезновением соответствующего устойчивого состояния равновесия. В новом сценарии, приведенном выше, нарушение синхронного режима при указанных изменениях сети, связано с появлением мультистабильности и действием возмущений. При этом синхронный режим и соответствующее ему устойчивое состояние равновесия  $O$  сохраняются. Более того, координаты точки  $O$  вообще не зависят от значения пропускной способности  $B$  линии передачи, наличие которой и приводит к возникновению парадокса Браеса.

Установленный в настоящей работе сценарий возникновения парадокса Браеса тесно связан с наличием характерной клиновидной области на плоскости параметров  $(B, K)$ , лежащей в промежутке между значениями параметра  $K = K_2$  и  $K = K_3$  (рис. 3.2, а), и отвечающей мультистабильности режимов мотива (т.е. сосуществованию синхронного и асинхронного режимов). Обозначим ее через  $b_{wedge}$ . Область  $b_{wedge}$  расположена так, что слева и справа она граничит с областью  $a$ . Поэтому при фиксированном параметре  $K \in (K_2, K_3)$  существуют чередующиеся между собой промежутки значений параметра  $B$ , лежащие в области  $a$  или  $b_{wedge}$ , что и обуславливает возможность потери синхронного режима при добавлении линии передачи с пропускной способностью  $B$ .

Аналогичные области  $b_{wedge}$  были обнаружены для энергосетей с графом в виде цикла (рис. 3.5, а-г) или с графом, имеющим иерархическую структуру (рис. 3.5, д-з), а также для энергосети, с помощью которой изучался парадокс Браеса в работе [47] (рис. 3.5, и,к). В рассмотренных случаях все линии, кроме добавляемых, имели одинаковую пропускную способность  $K$ . Характерное разбиение плоскости  $(B, K)$  сохранялось при добавлении как одной (рис. 3.5, а,д,и), так и двух линий передачи с пропускной способностью  $B$  между двумя несовпадающими парами узлов сети (рис. 3.5, б,е). Вид и количество областей  $b_{wedge}$  зависит от числа добавляемых линий передачи. Например, для энергосетей с графом в виде цикла при добавлении одной линии передачи существует только одна область  $b_{wedge}$  (рис. 3.5, а,в), а при добавлении двух – нетрудно выделить две характерные клиновидные области (рис. 3.5, б,г). Причем в последнем случае пороговое значение параметра  $K$ , при превышении которого в сети всегда устанавливается синхронный режим (при любых рассматриваемых значениях параметра  $B$ ), больше, чем в первом. Обратная ситуация наблюдается для иерархической сети – указанное пороговое значение больше в случае добавления одной линии, а не двух.

Приведенные примеры показывают, что предложенный сценарий возникновения пара-

докса Браеса реализуется не только в мотиве, но и в более крупных энергосетях, имеющих графы с большим количеством узлов и ребер. Такой результат может свидетельствовать об универсальности сценария. Более точная проверка этого предположения требует значительных затрат времени для моделирования сетей с различными топологиями и поэтому выходит за рамки настоящей работы.

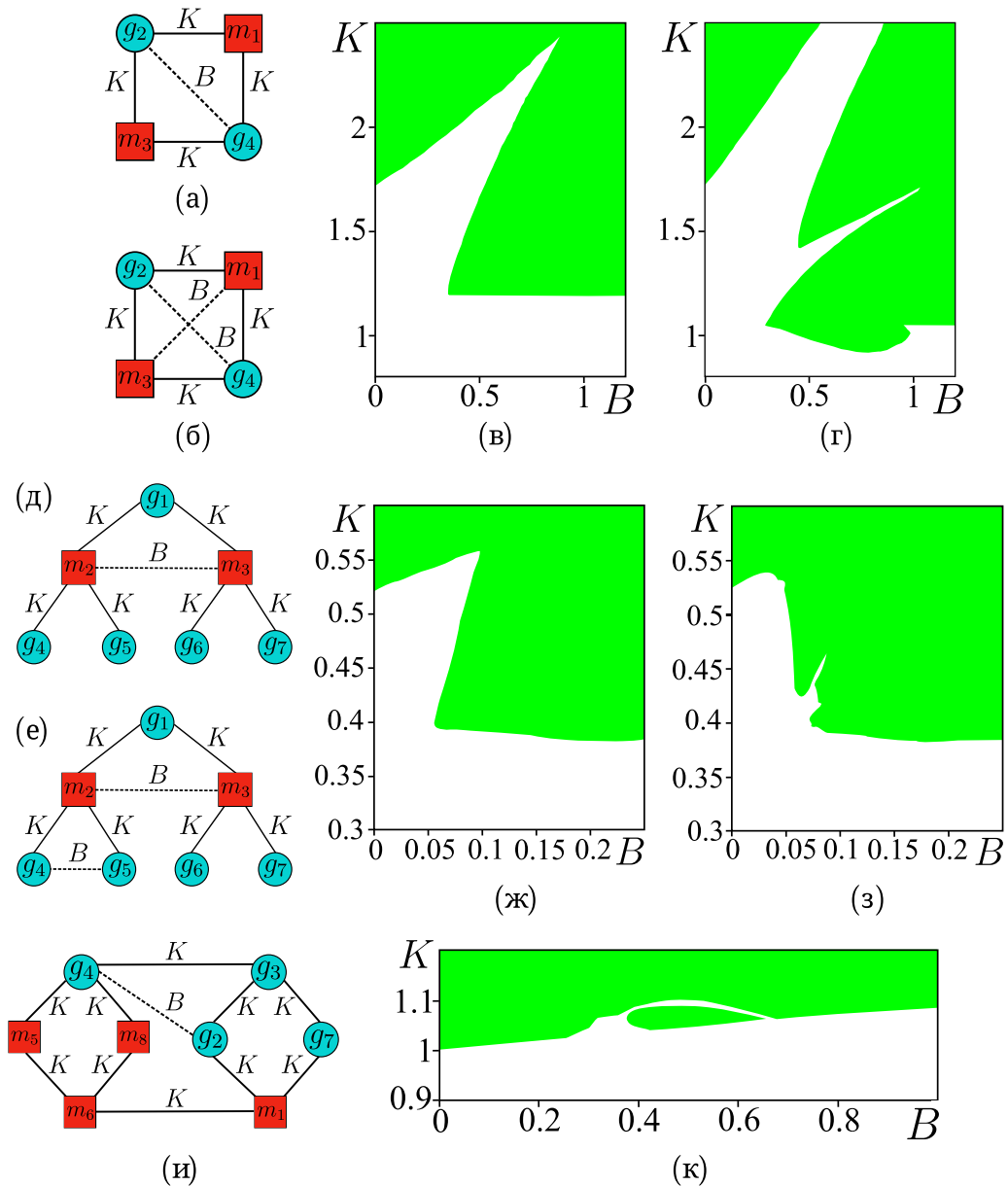


Рис. 3.5: Графы энергосетей с вариантами подключения новой линии передачи (а), (б) и (д), (е), (и). Соответствующие разбиения плоскостей параметров  $B, K$  на область, где существует только синхронный режим (зеленый цвет), и область, где он сосуществует с другими режимами, в том числе асинхронным (белый цвет) (в), (г) и (ж), (з), (к). Параметры  $P_1 = P_3 = -1$ ,  $P_2 = P_4 = 1$ ,  $\alpha_i = 0.8$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  (а)-(г);  $P_2 - P_1 = P_3 - P_1 = -1$ ,  $P_4 - P_1 = P_5 - P_1 = P_6 - P_1 = P_7 - P_1 = 1$ ,  $\alpha_i = 0.8$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$  (д)-(з);  $P_1 = P_5 = P_6 = P_8 = -1$ ,  $P_2 = P_3 = P_4 = P_7 = 1$ ,  $\alpha_i = 1.0$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$  (и), (к). Граф (и) и соответствующие параметры энергосети взяты из работы [47].

### 3.1.4 Влияние возмущений

Одной из причин возникновения парадокса Браеса являются возмущения, которым подвергается синхронный режим. Поэтому область параметров  $b$  является потенциально опасной. В общем случае возмущения приводят к произвольному изменению переменных  $\phi_i, y_i$ ,  $i = 1, 2$ . В качестве характеристики, определяющей устойчивость синхронного режима к таким возмущениям, удобно использовать вероятность его реализации. Обозначим ее через  $P$ . Избегая областей параметров с относительно небольшими значениями вероятности  $P$ , можно минимизировать влияние парадокса Браеса на динамику мотива.

Для определения вероятности  $P$  зафиксируем параметры  $B$  и  $K$ , случайным образом выберем  $n$  начальных условий из поглощающей области  $G^+$  и проинтегрируем систему (3.3). Затем определим количество траекторий стремящихся в состояние равновесия  $O$ , обозначим его через  $n_O$ . Тогда искомая вероятность будет определяться как  $P = n_O/n$ . На рисунке (3.6) приведено распределение вероятности  $P(B, K)$  в области  $b$  при  $n = 1000$ . Видно, что с ростом параметра  $K$ , вне зависимости от величины параметра  $B$ , значение вероятности  $P$  в целом возрастает и, следовательно, влияние парадокса Браеса ослабевает. То есть увеличение пропускной способности линий передач ( $K$ ), соединяющих потребителя с генераторами, положительно сказывается на устойчивости синхронного режима по отношению к произвольным возмущениям переменных  $\phi_i, y_i$ , вне зависимости от пропускной способности линии передач ( $B$ ) между генераторами.

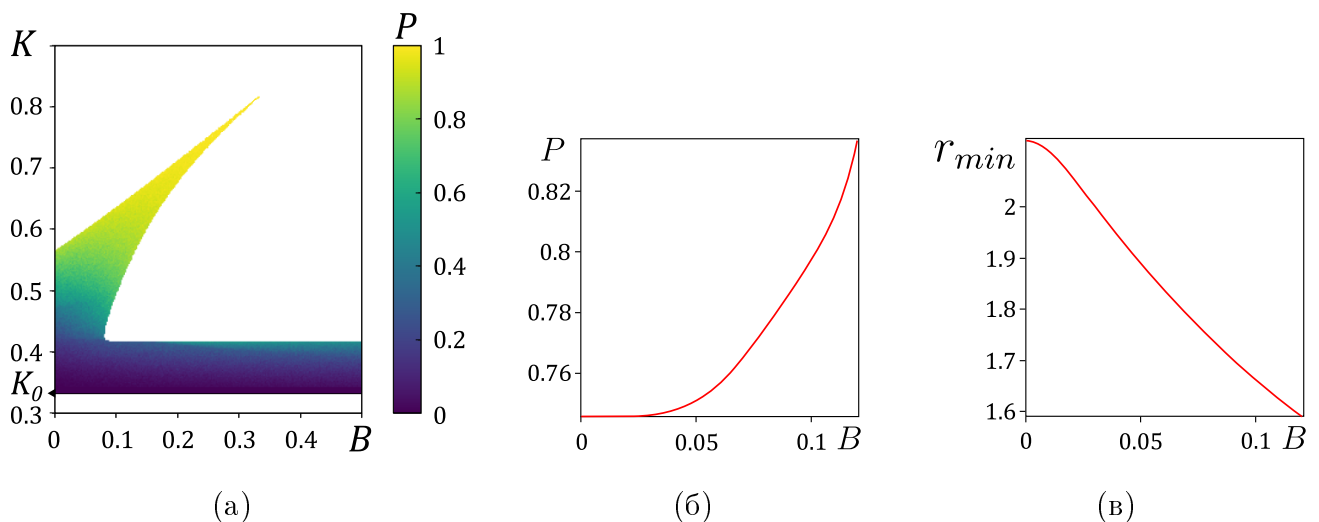


Рис. 3.6: Распределение вероятности реализации синхронного режима ( $P$ ) на плоскости параметров  $B, K$  (а). Зависимости  $P(B)$  и  $r_{min}(B)$  в области  $b$  при  $K = 0.541$ . Параметр  $n = 1000$ .

Вероятность  $P$  дает представление о величине области притяжения устойчивого состояния равновесия  $O$ , но не содержит информации о его форме. Поэтому она не показывает устойчивость синхронного режима по отношению к характерным возмущениям, которым может подвергаться мотив в процессе своей работы. Рассмотрим три основных вида таких возмущений: частотные, фазовые и возмущения динамики одного из генераторов подсети, например генератора  $g_3$  (рис. 3.1). Под действием этих возмущений претерпевают изменения

переменные  $(y_1, y_2)$ ,  $(\phi_1, \phi_2)$  и  $(\phi_2, y_2)$ , соответственно.

Рассмотрим алгоритм, позволяющий определить величину, характеризующую устойчивость синхронного режима по отношению к одному из указанных видов возмущений. В качестве примера выберем частотные возмущения. Разобьем контрольную область переменных  $\phi_1, \phi_2$ , которую обозначим через  $S_{control} = \{-\pi \leq \phi_i \leq \pi, i = 1, 2\}$ , на квадратную сетку, состоящую из  $k_{control}$  узлов. Выберем  $j$ -ый узел сетки с координатами  $(\phi_1^{(j)}, \phi_2^{(j)})$ . Далее разобьем область частотных возмущений  $S_{pert} = \{y^- \leq y_i \leq y^+, i = 1, 2\}$  на квадратную сетку, состоящую из  $k_{pert}$  узлов. Выберем  $l$ -ый узел с координатами  $(y_1^{(l)}, y_2^{(l)})$ . Проинтегрируем систему (3.2) при начальных условиях  $(\phi_1^{(j)}, y_1^{(l)}, \phi_2^{(j)}, y_2^{(l)})$ ,  $l = 1, 2, \dots, k_{pert}$  и определим число траекторий, стремящихся в состояние равновесия  $O$ . Обозначим его через  $k_O$ . Предположим, что подсеть находится в синхронном режиме, который постоянно подвергается различным возмущениям, тогда при возмущении переменных  $\phi_1, \phi_2$  до значений  $\phi_1^{(j)}, \phi_2^{(j)}$ , синхронный режим сохраняется под действием частотных возмущений с вероятностью  $p_j = k_O/k_{pert}$ . Перебирая все узлы на плоскости  $S_{control}$ , получим характерное распределение вероятности  $p = p(\phi_1, \phi_2)$ . Очевидно, что она связана с вероятностью  $P$  следующим образом

$$P = \frac{1}{k_{control}} \sum_{j=1}^{k_{control}} p_j. \quad (3.4)$$

Таким образом, значение величины  $p(\phi_1, \phi_2)$  характеризует устойчивость синхронного режима к частотным возмущениям при изначальном возмущении фазы до величин  $\phi_1, \phi_2$ , которое далее будем называть текущим возмущением. Чем больше ее значение, тем более устойчив синхронный режим по отношению к произвольным частотным возмущениям из области  $S_{pert}$ .

Аналогично вычисляется вероятность  $p$  для фазовых возмущений и возмущений динамики одного из генераторов подсети. Для этого в первом случае необходимо положить  $S_{control} = \{y^- \leq y_i \leq y^+, i = 1, 2\}$  и  $S_{pert} = \{-\pi \leq \phi_i \leq \pi, i = 1, 2\}$ , а во втором —  $S_{control} = \{-\pi \leq \phi_1 \leq \pi, y^- \leq y_1 \leq y^+\}$  и  $S_{pert} = \{-\pi \leq \phi_2 \leq \pi, y^- \leq y_2 \leq y^+\}$ .

Обозначим через  $p_{freq}$  и  $p_{phase}$  величину  $p$  в случае частотных и фазовых возмущений, соответственно. При возмущениях динамики одного из генераторов мотива будем рассматривать вероятность  $p_{gen}$ . Рассмотрим распределения этих вероятностей по контрольным областям при разных значениях параметра  $B$  и фиксированном значении параметра  $K = 0.541$  из интервала  $(K_1, K_2)$  (рис. 3.7). Удобно выделить области, где величины  $p_{freq}$ ,  $p_{phase}$  и  $p_{gen}$  принимают значения большие, чем некоторое пороговое значение  $p_{th}$ , близкое к единице. Обозначим их через  $\Omega_{freq}$ ,  $\Omega_{phase}$  и  $\Omega_{gen}$ , соответственно (рис. 3.7). Эти области содержат наиболее безопасные значения текущих возмущений подсети, при которых синхронный режим с наибольшей вероятностью сохраняется под действием трех указанных видов возмущений. Выберем  $p_{th} = 0.92$ , так как вне соответствующей этому значению области  $\Omega$  величина  $p$  для каждого вида возмущений быстро убывает. Видно, что с ростом параметра  $B$  значение вероятности  $P$  растет (рис. 3.6, а, б), вместе с ним распределения вероятностей  $p_{freq}(\phi_1, \phi_2)$ ,  $p_{phase}(y_1, y_2)$  и  $p_{gen}(\phi_1, y_1)$  становятся более равномерными (рис. 3.7). При этом значения ве-

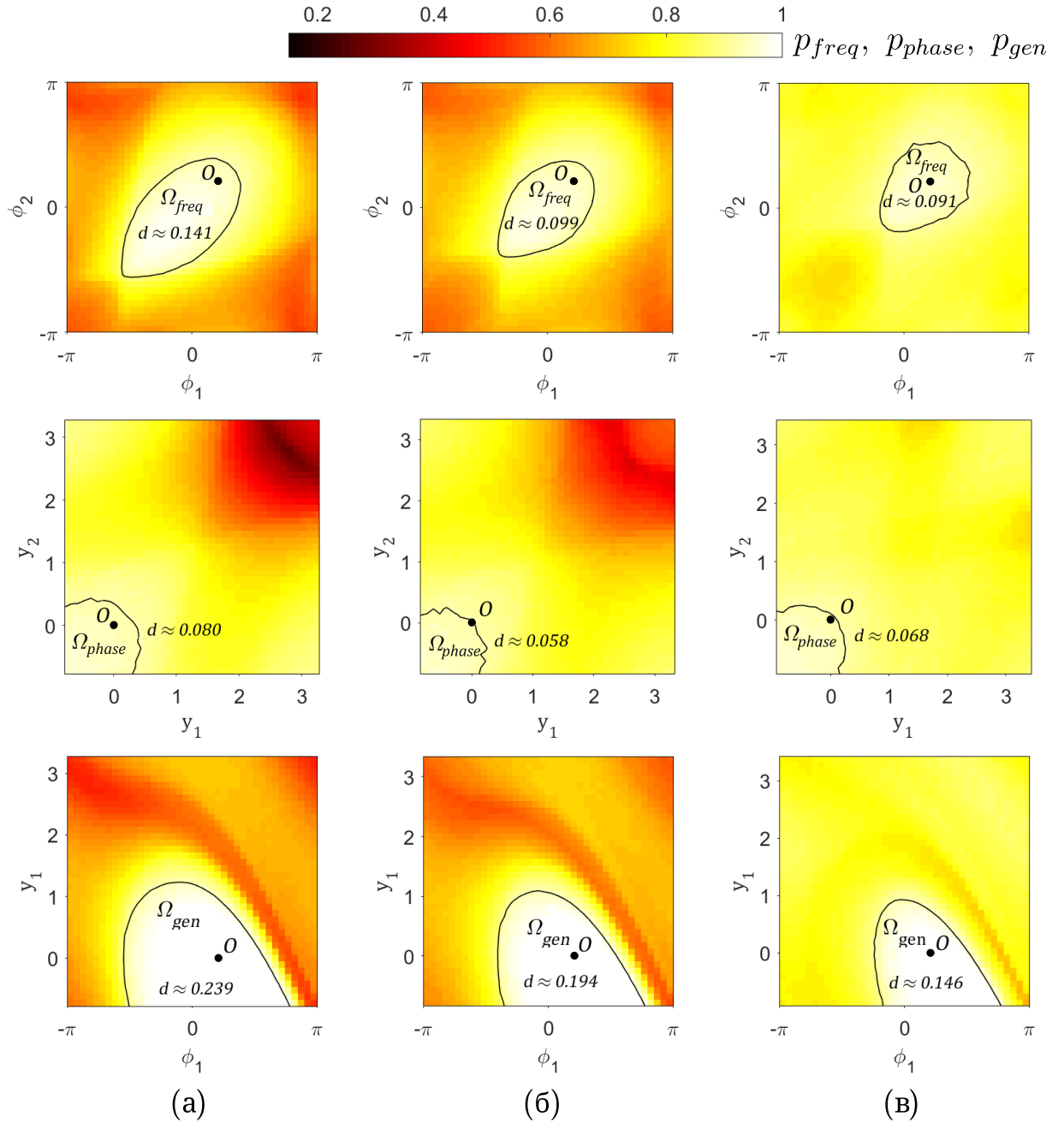


Рис. 3.7: Распределения вероятности  $p$  по разным контрольным областям при  $K = 0.541$  и  $B = 0$  (точка  $(B, K) \in b_1$ ) (а),  $B = 0.05$  (точка  $(B, K) \in b_1$ ) (б),  $B = 0.12$  (точка  $(B, K) \in b_3$ ) (в). Черными контурами выделены границы соответствующих областей  $\Omega$ . Параметр  $d$  равен отношению площадей области  $\Omega$  и контрольной области. Параметры:  $k_{control} = 1600$ ,  $k_{pert} = 1600$

личин  $p_{freq}$ ,  $p_{phase}$  и  $p_{gen}$  в разной степени возрастают почти в каждой точке контрольных областей (рис. 3.7). Однако области  $\Omega_{freq}$  и  $\Omega_{gen}$  уменьшаются. Область  $\Omega_{phase}$  при  $B > 0$  становится меньше, чем аналогичная область при  $B = 0$ . Следовательно, с ростом параметра  $B$  синхронный режим работы подсети в целом становится более устойчив к трем характерным видам возмущений. Но в случае частотных возмущений и возмущений динамики одного из ге-



нераторов мотива размер областей  $\Omega_{freq}$  и  $\Omega_{element}$ , содержащих наиболее безопасные текущие возмущения, уменьшается. Вероятно, это связано с уменьшением минимального расстояния  $r_{min}$  от состояния равновесия  $O$  до границы его бассейна притяжения. Монотонно убывающая зависимость  $r_{min}(B)$  подтверждает данное предположение (рис. 3.6, в). Стоит отметить, что вероятность  $P$  принимает наибольшие значения (рис. 3.6, б), а с ней и распределение величины  $p$  по контрольным областям становится более равномерным (рис. 3.7, в), при параметрах  $B, K$  из области  $b_3$ , где существует хаотический аттрактор, соответствующий асинхронному режиму работы мотива. Вероятно, это объясняется тем, что многообразия седел, разделяющие области притяжения аттракторов, устроены таким образом, что область притяжения хаотического аттрактора меньше по объему, чем области притяжения предельных циклов, существующих при значениях параметров из областей  $b_1$  и  $b_2$ . Поэтому, фактически, появление хаотического аттрактора приводит к увеличению устойчивости синхронного режима по отношению к различным видам возмущений.

Следовательно, значения вероятности  $P$ , распределения значений вероятностей  $p_{freq}, p_{phase}$  и  $p_{gen}$  по контрольным областям, а также величины областей  $\Omega_{freq}, \Omega_{phase}$  и  $\Omega_{gen}$  наиболее полно характеризуют устойчивость синхронного режима к всевозможным возмущениям динамических переменных, описывающих состояние мотива.

## 3.2 Условия безопасного объединения энергосетей

Один из вариантов развития современных энергосетей состоит в их объединении [129]. При этом закономерно возникает задача о нахождении условий на параметры объединяемых энергосетей (подсетей) и связывающих их передающих систем, которые обеспечивают сохранение синхронных режимов как в подсетях, так и в объединенной энергосети.

В главе 2 рассмотрена динамика энергосети с топологией хаб-кластера. Известно, что хаб-кластер является моделью сильно централизованной энергосети, состоящей, например, из мощной электростанции (АЭС, ГЭС), питающей большое число потребителей. Как правило, крупные энергосети состоят из нескольких хаб-кластеров.

В пункте 3.1 рассмотрена динамика мотива, который представляет собой типичный вариант расширения действующей энергосети за счет внедрения дополнительных электростанций, которые могут работать, например, за счет альтернативных источников энергии. Предполагалось, что мотив синхронизован со всей сетью, что несколько ограничивало результаты исследования.

Теперь конкретизируем топологию энергосети, к которой присоединен мотив. В качестве нее выберем хаб-кластер, так как он может быть моделью целой энергосети или ее части. Рассмотрим сеть, образованную в результате расширения энергосети в виде хаб-кластера за счет подключения к ней мотива. При этом не будем накладывать никаких ограничений на режим взаимодействия хаб-кластера и мотива. В рамках данной сети рассмотрим вопрос об условиях безопасного объединения мотива и хаб-кластера.

### 3.2.1 Модель объединенной энергосети

В рамках МСМ рассмотрим сеть, образованную двумя подсетями: мотивом, состоящим из одного потребителя ( $m_1$ ,  $P_1 < 0$ ) и двух генераторов ( $g_{2,3}$ ,  $P_{2,3} > 0$ ), и хаб-кластером, состоящим из одного генератора ( $g_4$ ,  $P_4 > 0$ ) и  $N-4$  потребителей ( $m_j$ ,  $P_j < 0$ ,  $j = 5, 6, \dots, N$ ) (рис. 3.8).

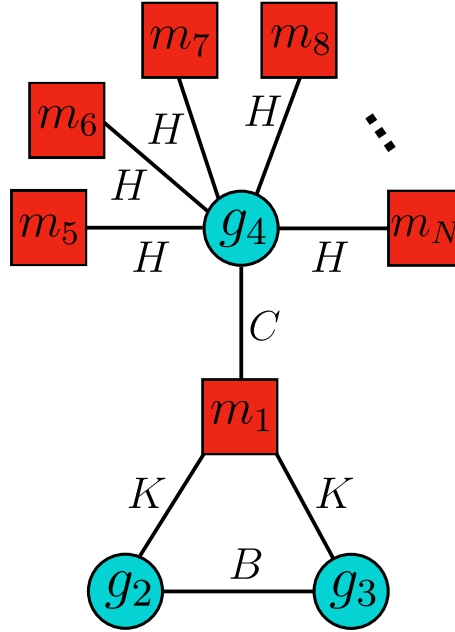


Рис. 3.8: Граф объединенной энергосети.

Рассмотрим уравнения, описывающие динамику сети (рис. 3.8) и для удобства введем новые переменные и параметры

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \delta_{2,1}, \quad \phi_2 = \delta_{3,1}, \quad \phi_3 = \delta_{4,1}, \quad \phi_{j-1} = \delta_{j,4}, \\ K_{1,2} &= K_{1,3} = K, \quad K_{2,3} = B, \quad K_{1,4} = C, \quad K_{4,j} = H, \quad j = 5, 6, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.5)$$

С учетом (3.5) уравнения (1.3) примут вид

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \dot{y}_1 = P_2 - P_1 - \alpha y_1 - 2K \sin(\phi_1) - K \sin(\phi_2) - C \sin(\phi_3) - B \sin(\phi_1 - \phi_2), \\ \dot{y}_2 = P_3 - P_1 - \alpha y_2 - K \sin(\phi_1) - 2K \sin(\phi_2) - C \sin(\phi_3) - B \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \dot{y}_3 = P_4 - P_1 - \alpha y_3 - K \sin(\phi_1) - K \sin(\phi_2) - 2C \sin(\phi_3) + \sum_{k=4}^{N-1} H \sin(\phi_k), \\ \dot{y}_j = P_{j+1} - P_4 - \alpha y_j + C \sin(\phi_3) - H \sin(\phi_j) - \sum_{k=4}^{N-1} H \sin(\phi_k), \quad j = 4, 5, \dots, N-1, \end{cases} \quad (3.6)$$

где точкой обозначена производная по времени  $t$ . Система (3.6) определена в цилиндрическом фазовом пространстве  $G = S^{N-1} \times R^{N-1}$ . Нетрудно показать, что в нем существует поглощающая область

$$\begin{aligned}
G^+ &= \{\phi_i \in S^1, y_i \in [y_i^-, y_i^+], i = 1, 2, \dots, N-1\}, \\
y_{1,2}^\pm &= (P_{2,3} - P_1 \pm [3K + C + B])\alpha^{-1}, y_3^\pm = (P_4 - P_1 \pm [2K + 2C + (N-4)H])\alpha^{-1}, \\
y_j^\pm &= (P_{j+1} - P_4 \pm [C + (N-3)H])\alpha^{-1}, j = 4, 5, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Переменные  $\phi_{1,2}$ ,  $y_{1,2}$  описывают мотив, а переменные  $\phi_j$ ,  $y_j$ ,  $j = 4, 5, \dots, N-1$  – хаб-кластер. Переменные  $\phi_3$ ,  $y_3$  описывают взаимодействие мотива с хаб-кластером. Параметры  $K, B$  определяют пропускную способность линий передачи, соединяющих генераторы  $g_{2,3}$  с потребителем  $m_1$  и между собой, соответственно, и характеризуют мотив. Параметр  $H$  определяет пропускную способность линий передачи, соединяющих генератор  $g_4$  с потребителями  $m_j$ ,  $j = 5, 6, \dots, N-1$ , и характеризует хаб-кластер. Параметр  $C$  – это пропускная способность линии передачи, соединяющей потребитель  $s_1$  с генератором  $g_1$ , то есть мотив с хаб-кластером.

Будем предполагать, что условие (1.4), необходимое для существования синхронного режима, выполняется для мотива и хаб-кластера по отдельности и, следовательно, выполняется для всей объединенной сети, то есть

$$\sum_{k=1}^3 P_k = 0, \sum_{j=4}^N P_j = 0, \sum_{i=1}^N P_i = 0. \tag{3.8}$$

Условие (3.8) допускает существование синхронных режимов в мотиве и хаб-кластере при отсутствии связи между ними ( $C = 0$ ), то есть до подключения одной подсети к другой.

Зададим при  $C = 0$  параметры мотива и хаб-кластера, исходя из следующих соображений.

Динамика мотива при  $C = 0$  изучена в пункте 3.1. В частности, установлено, что в нем существуют асинхронные режимы, которые могут привести к потере синхронного режима в сети, к которой он подключается ( $C > 0$ ). Вероятность реализации асинхронных режимов в мотиве зависит от его параметров. Можно предположить, что при подключении к хаб-кластеру ( $C > 0$ ) мотив может существенно повлиять на его динамику, если в мотиве существует асинхронный режим при  $C = 0$  и его вероятность достаточно велика. Поэтому, опираясь на результаты пункта 3.1, зафиксируем параметры  $\alpha = 0.8$ ,  $P_1 = -2/3$ ,  $P_2 = P_3 = 1/3$  (удовлетворяют условию (3.8)). При этих параметрах известно распределение вероятности реализации синхронного режима  $P_{sync} \equiv P(B, K)$  (см. рис. 3.6, а). Соответственно, вероятность реализации асинхронного режима в мотиве  $P_{async} = 1 - P_{sync}$ . Выберем параметры  $B = 0.2$  и  $K = 0.4$ , при которых  $P_{async} > 0.8$ .

Перейдем к параметрам хаб-кластера. Удобно выбрать значение параметра  $P_4$  того же порядка, что и значения  $|P_i|$ ,  $i = 1, 2, 3$ , чтобы сеть была более однородной, то есть состояла из потребителей и генераторов незначительно отличающихся друг от друга по потребляемому и генерируемому мощностям, соответственно. Зафиксируем  $P_4 = 0.6$  и для того, чтобы удовлетворить условие (3.8), положим

$$P_j = P_{con}(N), P_{con}(N) = -\frac{P_4}{N-4}, j = 5, 6, \dots, N. \tag{3.9}$$

Пропускная способность  $H$ , с одной стороны, должна удовлетворять потребностям потребителей, а с другой – не быть избыточной, поэтому ограничимся значениями параметра  $H \in [H_{start}, H_{fin}]$ ,  $H_{start} = 1.1|P_{con}|$ ,  $H_{fin} = 2|P_{con}|$ , обеспечивающими необходимый запас пропускной способности линий передачи хаб-кластера.

Таким образом, будем рассматривать динамику объединенной энергосети (рис. 3.8) при следующих значениях параметров

$$\begin{aligned} P_1 = -2/3, \quad P_2 = P_3 = 1/3, \quad P_4 = 0.6, \quad P_j = P_{con}, \quad j = 5, 6, \dots, N, \\ \alpha = 0.8, \quad B = 0.2, \quad K = 0.4, \quad H \in [H_{start}, H_{fin}]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.2.2 Режимы и условия безопасного объединения

Было проведено исследование динамики системы (3.6) и установлено следующее. Поглощающая область  $G^+$  содержит единственное локально устойчивое состояние равновесия

$$\begin{aligned} O(\phi_i = \phi_i^{(0)}, \quad y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1), \\ \phi_{1,2}^{(0)} = \arcsin\left(\frac{P_{2,3}}{K}\right), \quad \phi_3^{(0)} = 0, \quad \phi_j^{(0)} = \arcsin\left(\frac{P_{con}}{H}\right), \quad j = 4, 5, \dots, N - 1, \end{aligned} \quad (3.11)$$

которое существует при  $K > P_{2,3}$  и  $H > |P_{con}|$ . Оно соответствует синхронному режиму работы объединенной сети. Остальные состояния равновесия являются седловыми. Заметим, что при параметрах (3.10) всегда существует состояние равновесия  $O$ .

Наряду с синхронным, в рассматриваемой энергосети возникают режимы, представляющие собой различные комбинации асинхронных и квазисинхронных режимов взаимодействия отдельных элементов сети. Таким режимам соответствуют аттракторы вращательного типа в фазовом пространстве системы (3.6). Установление того или иного режима зависит от начальных условий и значений параметров системы (3.6). Поэтому рассмотрим разбиение плоскости параметров  $H, C$  на области, отвечающие различным режимам работы сети, состоящей из  $N = 10$  элементов (рис. 3.9, а).

- Если  $(H, C) \in a$  (рис. 3.9, а), то состояние равновесия  $O$  глобально асимптотически устойчиво, то есть при любых начальных условиях реализуется синхронный режим взаимодействия между всеми связанными элементами сети. Следовательно, данная область параметров является безопасной.
- Если  $(H, C) \in b_1$  (рис. 3.9, а), то в сети может установиться *режим 1*, при котором наблюдается асинхронный режим взаимодействия между элементами хаба-кластера: потребителями  $m_j$ ,  $j = 5, \dots, N - 1$  и генератором  $g_4$ , а также квазисинхронный режим взаимодействия между элементами мотива: генераторами  $g_{2,3}$  и потребителем  $m_1$  (рис. 3.9, б). То есть в хаб-кластере устанавливается асинхронный режим, а в мотиве – квазисинхронный.
- Если  $(H, C) \in b_2$  (рис. 3.9, а), то в сети, наряду с режимом 1, может установиться *режим 2*, при котором наблюдается асинхронный режим взаимодействия как между

элементами хаб-кластера, так и между элементами мотива (рис. 3.9, в). Во всей сети устанавливается асинхронный режим.

- Если  $(H, C) \in b_3$  (рис. 3.9, а), то в сети, наряду с режимами 1 и 2, может установиться режим 3, при котором наблюдается квазисинхронный режим взаимодействия между элементами хаб-кластера, а также асинхронный режим взаимодействия между элементами мотива (рис. 3.9, г). То есть в хаб-кластере устанавливается квазисинхронный режим, а в мотиве – асинхронный.
- Если  $(H, C) \in b_4$  (рис. 3.9, а), то в сети может установиться режим 3. (рис. 3.9, г).

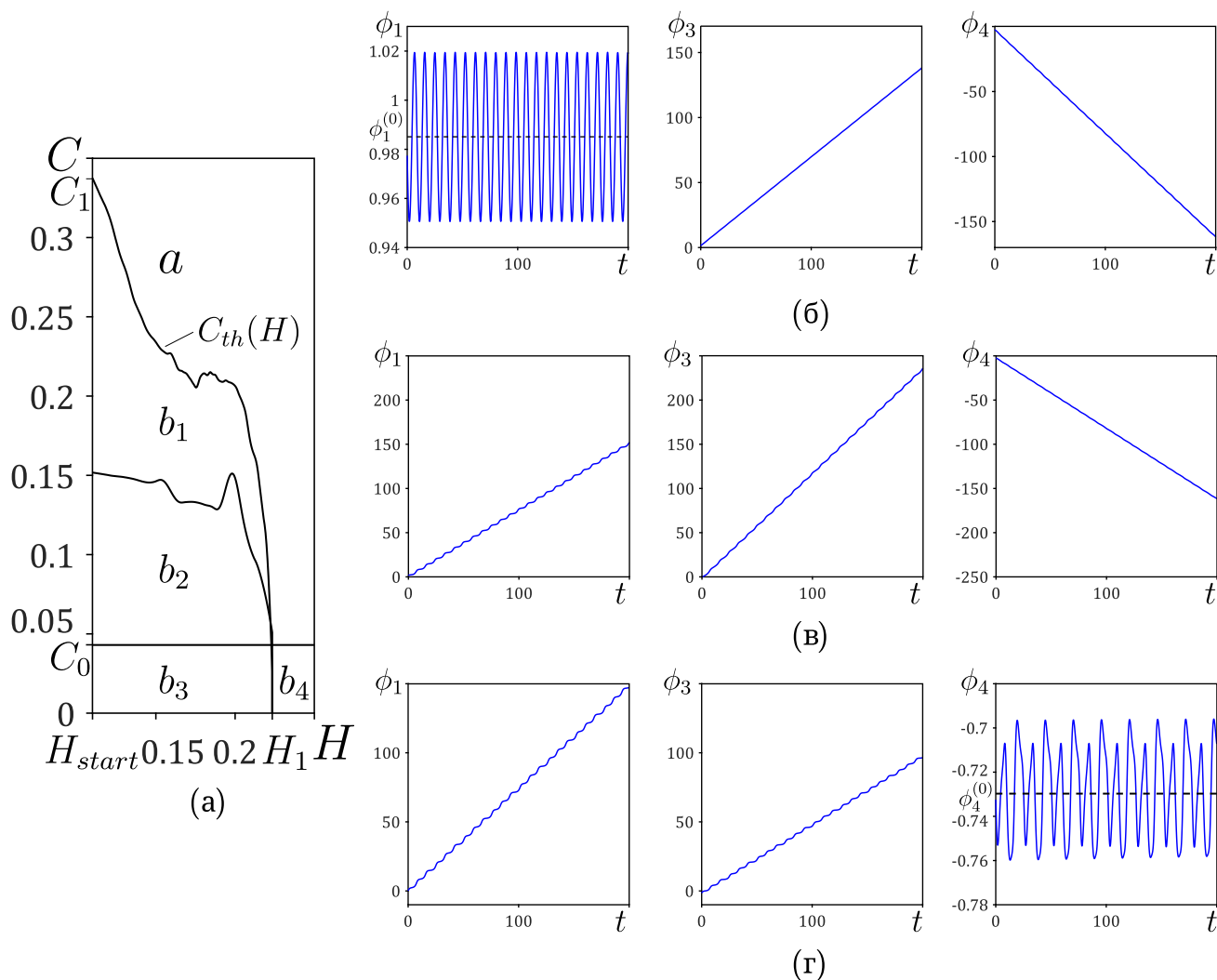


Рис. 3.9: Разбиение плоскости параметров  $H, C$  на области с различными режимами работы сети (а). Характерные осциллограммы переменных  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_3(t)$ ,  $\phi_4(t)$  в случае установления в сети режима 1 (б), режима 2 (в) и режима 3 (г). Зависимость  $\phi_2(t)$  имеет тот же вид, что и  $\phi_1(t)$ . Осциллограммы переменных  $\phi_5(t)$ ,  $\phi_6(t)$ , ...,  $\phi_9(t)$  имеют такой же вид как зависимость  $\phi_4(t)$ . Осциллограммы режимов построены для параметров  $H = 0.15$ ,  $C = 0.02$ . Параметры:  $C_0 \approx 0.0430$ ,  $H_1 \approx 0.2234$ ,  $C_1 \approx 0.3365$ .

В каждом из режимов 1, 2, 3 наблюдается асинхронный режим взаимодействия между генератором хаб-кластера  $g_4$  и потребителем мотива  $m_1$ , которые связаны линией передачи с пропускной способностью  $C$  (см.  $\phi_3(t)$  на рис. 3.9, б-г).

Существует пороговое значение параметра  $C = C_1$ , при превышении которого в сети всегда устанавливается синхронный режим, если значение параметра  $H$  допускает его существование (рис. 3.9, а).

При значениях параметра  $H > H_1$  (рис. 3.9, а), возможно привести параметры сети в область  $a$ , гарантировав тем самым установление синхронного режима, путем задания относительно небольшого (по сравнению с  $K, B$  и  $H$ ) значения параметра  $C > C_0$ .

Таким образом, в энергосети реализуется безопасное подключение мотива к хаб-кластеру, если параметры удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} C > C_{th}(H), & \text{если } H_{start} \leq H < H_1, \\ C > C_0, & \text{если } H_1 \leq H \leq H_{fin}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Отметим, что  $C_0 \approx 0.0430$  в несколько раз меньше характерного значения  $C_1 \approx 0.3365$ . Поэтому при достаточном запасе пропускной способности  $H \geq H_1$  линий передачи в хаб-кластере, безопасное присоединение мотива требует создания линии передачи с меньшим значением пропускной способности  $C$ , чем в случае  $H < H_1$  (рис. 3.9, а).

Однако на практике не всегда удается реализовать необходимый запас пропускной способности линий передачи, что особенно важно при расширении существующих энергосетей. Поэтому, наряду с безопасной областью параметров  $a$ , необходимо также учитывать менее безопасные, с точки зрения установления синхронного режима, области параметров  $b_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , где могут устанавливаться режимы 1, 2 или 3. Перейдем теперь к их характеристикам.

Очевидно, режим 2 является аварийным для всей сети. Режимы 1 и 3 предусматривают наличие квазисинхронных режимов взаимодействия отдельных элементов сети и могут быть относительно безопасными для одной из подсетей. Удобно характеризовать квазисинхронный режим взаимодействия с помощью размаха колебаний соответствующих переменных  $\phi_i(t)$ . Обозначим через  $A_1 = |\max(\phi_1(t)) - \min(\phi_1(t))|$  – размах колебаний переменной  $\phi_1$  в случае установления режима 1, а через  $A_2 = |\max(\phi_4(t)) - \min(\phi_4(t))|$  – размах колебаний переменной  $\phi_4$  в случае установления режима 3 (рис. 3.10). Расчет показывает, что  $A_1 < 0.2$ , а  $A_2 < 1.1$  в рассматриваемой области параметров  $H, C$  (рис. 3.10), что значительно меньше значения  $2\pi$ , которое является предельным для размаха колебаний при квазисинхронном режиме. Таким образом, режим 1 является относительно безопасным для мотива, а режим 3 – для хаб-кластера. В то же время, режим 1 является аварийным (опасным) для хаб-кластера, а режим 3 – для мотива.

Так как хаб-кластер представляет собой крупную централизованную сеть, а мотив является вариантом ее расширения, то сохранение безопасного режима работы хаб-кластера является более приоритетной задачей, чем сохранение аналогичного режима в мотиве. Поэтому режим 3 является более предпочтительным, чем режимы 1 и 2.

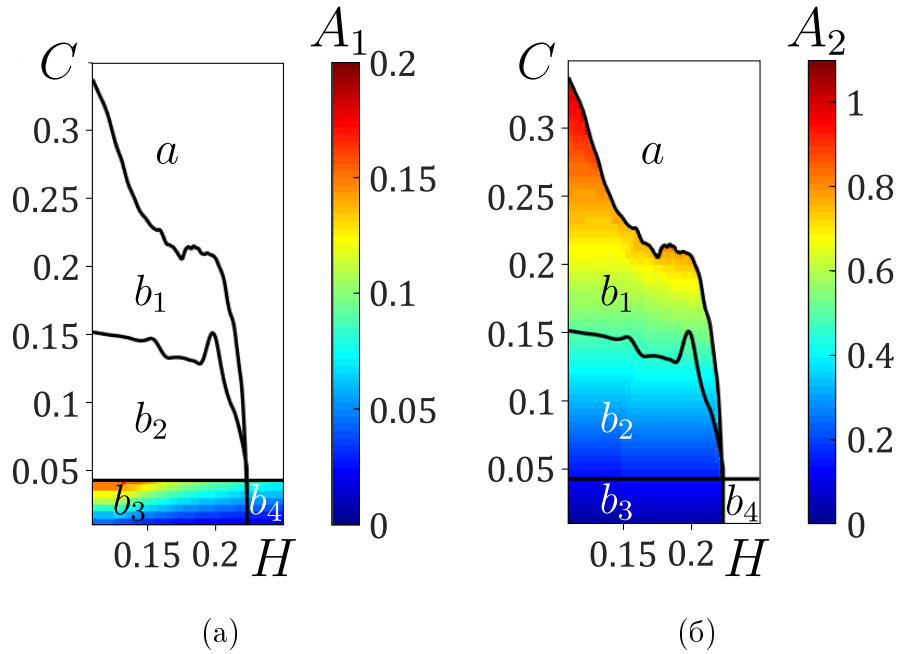


Рис. 3.10: Величина размаха колебаний  $A_1$  (а) и  $A_2$  (б) в зависимости от параметров  $H$  и  $C$ .

Реализация синхронного режима или одного из трех указанных выше режимов зависит от значений параметров  $H, C$  и начальных условий. В общем случае начальные условия произвольны. Поэтому удобно определить вероятность реализации каждого обнаруженного режима. Для этого зафиксируем параметры  $H$  и  $C$ , случайным образом выберем  $n$  начальных условий из поглощающей области  $G^+$  и определим количество начальных условий, приводящих к режиму под номером  $i$ , обозначим его через  $n_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Тогда вероятность установления режима  $i$  будет определяться как  $p_i = n_i/n$ . На рисунке 3.11 приведены распределения вероятности  $p_i(H, C)$  при  $n = 1000$ . Опираясь на них, разделим области параметров  $b_i$  на опасные и относительно безопасные для работы хаб-кластера.

- При параметрах из области  $b_1$  (рис. 3.11) наибольшую вероятность установления имеет режим 1, который является аварийным для хаб-кластера, поэтому эта область параметров – опасная.
- При параметрах из области  $b_2$  (рис. 3.11) наибольшую вероятность установления имеет режим 2, который является аварийным для всей сети, поэтому эта область параметров также является опасной.
- При параметрах из области  $b_3$  (рис. 3.11) наибольшую вероятность установления имеют режимы 2 и 3. С ростом параметра  $H$  вероятность  $p_2$  убывает, а  $p_3$  растет. Поэтому область  $b_3$ , при соответствующем подборе параметра  $H$ , может быть использована для относительно безопасной работы хаб-кластера.
- При параметрах из области  $b_4$  (рис. 3.11) наибольшую вероятность установления имеет режим 3, который является относительно безопасным для хаб-кластера, как и сама область  $b_4$ .

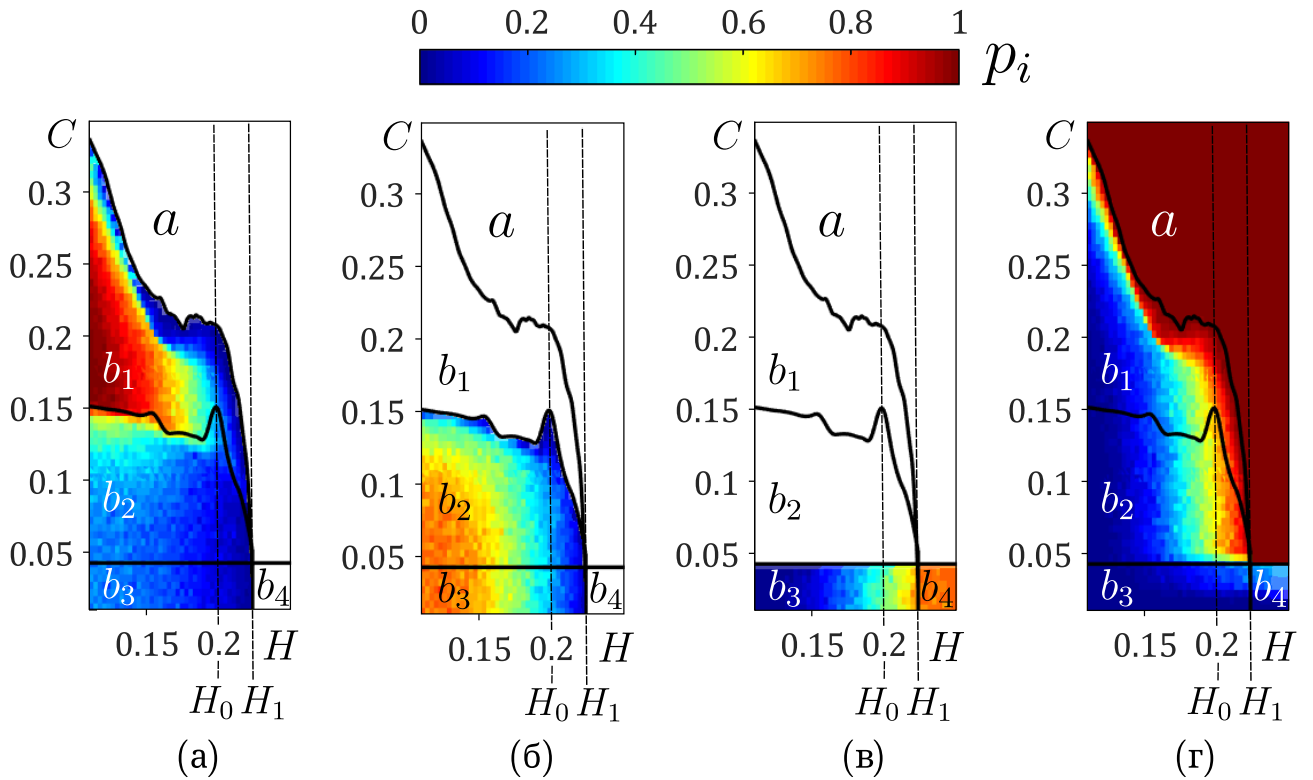


Рис. 3.11: Вероятность установления режима 1 (а), режима 2 (б), режима 3 (в) и синхронного режима (г) в зависимости от параметров  $H$  и  $C$ . Значение  $H_0 \approx 0.2$

При расширении действующих энергосетей, за счет объединения нескольких подсетей, есть возможность выбирать параметры линий передачи, которые должны соединить подсети. При этом параметры линий отдельных подсетей, как правило, остаются неизменными. То есть при присоединении мотива к хабу можно варьировать параметр  $C$ , например, кратно увеличивая или уменьшая его за счет изменения количества линий передачи между потребителем  $m_1$  и генератором  $g_4$ . Тогда, в зависимости от значения параметра  $H$ , можно выделить три основных сценария поведения объединенной сети при изменении параметра  $C$  (рис. 3.11).

1. Если  $H_{start} < H < H_0$  (рис. 3.11), то при увеличении параметра  $C$  от нуля, точка  $(H, C)$  сначала попадает в область  $b_3$ , а именно в ту ее часть, где наиболее вероятно установление опасных для хаб-кластера режимов 1 и 2. Далее точка  $(H, C)$  попадает в области  $b_2$  и  $b_1$ , где с наибольшей вероятностью реализуются только опасные для хаб-кластера режимы. Однако при дальнейшем увеличении параметра  $C$  точка  $(H, C)$  попадает в область  $a$  и во всей сети устанавливается синхронный режим.
2. Если  $H_0 < H < H_1$  (рис. 3.11), то при увеличении параметра  $C$  от нуля, точка  $(H, C)$  сначала попадает в область  $b_3$ , а именно в ту ее часть, где наиболее вероятно установление относительно безопасного для хаб-кластера режима 3. Далее точка  $(H, C)$  попадает в области  $b_2$  и  $b_1$ , но в отличие от предыдущего случая, при выбранном  $H$ , в этих областях наиболее вероятным режимом является синхронный. При дальнейшем увеличении параметра  $C$  точка  $(H, C)$  попадает в безопасную область  $a$ .



3. Если  $H > H_1$  (рис. 3.11), то при увеличении параметра  $C$  от нуля, точка  $(H, C)$  сначала попадает в область  $b_4$ , где с наибольшей вероятностью устанавливается относительно безопасный для хаб-кластера режим 3, а затем в безопасную область  $a$ .

Данные сценарии показывают, что при различных значениях параметра  $H$ , присоединение мотива к хаб-кластеру, посредством линии передачи с пропускной способностью  $C$ , может приводить к установлению синхронного режима во всей сети или режимов, которые могут быть относительно безопасными (режим 3) или аварийными (режимы 1, 2) для хаб-кластера и даже для всей сети в целом (режим 2).

### 3.3 Выводы

Рассмотрена модель типичного мотива в составе больших энергосетей. В ее рамках изучена реакция мотива на подключение новой линии передачи. Для этого построено разбиение плоскости параметров, отвечающих за пропускные способности линий передачи мотива ( $K$ ) и подключаемой линии ( $B$ ), на области с различными режимами. С помощью него установлен новый сценарий возникновения парадокса Браеса в энергосетях, который состоит в следующем. При добавлении новой линии передачи или увеличении пропускной способности действующей линии возможен переход из синхронного режима в асинхронный. Такой переход не связан с исчезновением синхронного режима, как предполагалось ранее [47]. Он обусловлен двумя факторами: (i) наличием в пространстве параметров, отвечающих за пропускные способности линий передачи мотива, характерной клиновидной области сосуществования синхронного и асинхронных режимов (см. рис. 2.3), а также (ii) возмущениями координат системы, которые имеют место при указанных изменениях энергосети, и переводят ее в асинхронный режим. Предложен ряд вероятностных мер ( $P, p_{freq}, p_{phase}, p_{gen}$ ), позволяющих характеризовать устойчивость синхронного режима по отношению к различным видам возмущений, вызывающих парадокс Браеса. Установлены значения пропускных способностей линий передачи мотива ( $K > K_3$ ), позволяющих избежать парадокса при любых значениях пропускной способности ( $B$ ) подключаемой линии. Показано, что основные особенности нового сценария сохраняются в энергосетях с графом в виде цикла или с графом, имеющим иерархическую структуру, а также для энергосети, в которой наблюдается сценарий парадокса Браеса, связанный с исчезновением синхронного режима [47]. При этом установлено, что новый сценарий имеет место при добавление двух линий передачи в разные участки сетей. Эти результаты можно использовать в рамках концепций формирования наиболее устойчивых к различным возмущениям топологий энергосетей, предложенных в работах [130–132].

Рассмотрена модель энергосети, образованной в результате объединения хаб-кластера и мотива. Она является типичным примером расширения сильно централизованной энергосети (хаб-кластер) за счет внедрения в нее дополнительных источников электроэнергии, например, альтернативных (мотив). Для сети из  $N = 10$  узлов (3 узла мотива и 7 узлов

хаб-кластера) построено разбиение плоскости параметров, отвечающих за пропускные способности линий передачи в хаб-кластере ( $H$ ) и линии между мотивом и хаб-кластером ( $C$ ), на области, соответствующие различным режимам объединенной энергосети. С помощью него получены условия безопасного объединения подсетей, накладывающие ограничение на минимальную пропускную способность ( $C$ ) линии передачи между ними, при которой гарантируется установление синхронного режима в объединенной энергосети. Проведена классификация режимов работы объединенной энергосети, с точки зрения их безопасности для подсетей, то есть хаб-кластера и мотива. Установлены основные характеристики режимов, такие как вероятность их реализации и размах колебаний переменных в квазисинхронном режиме взаимодействия отдельных узлов сети. Опираясь на полученные результаты, были определены три основных сценария поведения энергосети при изменении пропускной способности линии передачи, соединяющей подсети.

## Глава 4

# Критерий парциальной устойчивости неоднородной энергосети

В четвертой главе приводится вариант МСМ, учитывающий активное сопротивление линий передачи между синхронными машинами. Данное уточнение особенно существенно при рассмотрении энергосетей, содержащих кабельные линии электропередачи. В этом случае удельное (погонное) активное сопротивление линии значительно больше удельного реактивного (индуктивного) сопротивления, а для кабельных линий напряжением менее 10 кВ можно учитывать только активное сопротивление [133]. Учет активного сопротивления воздушных линий электропередачи делает расчет устойчивости энергосети более точным [88]. Предполагается, что полное активное сопротивление линии передачи зависит от ее длины. Это приводит к обратно пропорциональной зависимости коэффициентов связи между узлами сети и длиной соответствующих линий передачи. Поэтому уточненная модель описывает неоднородную энергосеть с коэффициентами связи между узлами, зависящими от реального расположения генераторов и потребителей электроэнергии на местности. Рассматривается динамика неоднородной энергосети в виде хаб-кластера, состоящего из одного генератора, питающего несколько потребителей (моторов), посредством линий передачи с различными длинами. С помощью вспомогательных систем сравнения [134] получен критерий устойчивости отдельных пар потребитель-генератор. Он позволяет определять значения длин линий передачи в паре потребитель-генератор, при которых возможно установление синхронного, квазисинхронного или асинхронного режимов взаимодействия в этой паре. Критерий позволяет находить режимы взаимодействия сразу в нескольких парах потребитель-генератор. Приводится численная проверка критерия, подтверждающая его справедливость.

### 4.1 Модель неоднородной энергосети в виде хаб-кластера

При выводе МСМ (см. главу 1) предполагалось, что линия передачи между  $i$ -ой и  $j$ -ой синхронными машинами замещается чисто индуктивным сопротивлением  $x_{i,j}$ . Для учета активного сопротивления линии  $r_{i,j}$  необходимо рассмотреть полное комплексное сопротивление  $Z_{i,j} = r_{i,j} + ix_{i,j}$ ,  $r_{i,j} > 0$ , которое удобно представить в виде  $Z_{i,j} = z_{i,j}e^{i\Psi_{i,j}}$ ,  $z_{i,j} =$

$|Z_{i,j}|$ ,  $\Psi_{i,j} = \arg(Z_{i,j})$ ,  $\Psi_{i,j} \in (0, \pi/2]$ , причем  $z_{i,j} = z_{j,i}$ ,  $\Psi_{i,j} = \Psi_{j,i}$ . В этом случае мощности  $P_{i \rightarrow j}$  и  $P_{j \leftarrow i}$  (см. главу 1) примут вид

$$\begin{aligned} P_{i \rightarrow j} &= \frac{|U_i|^2}{z_{i,j}} \cos(\Psi_{i,j}) - \frac{|U_i U_j|}{z_{i,j}} \cos(\delta_i - \delta_j + \Psi_{i,j}), \\ P_{j \leftarrow i} &= -\frac{|U_i|^2}{z_{i,j}} \cos(\Psi_{i,j}) + \frac{|U_i U_j|}{z_{i,j}} \cos(\delta_j - \delta_i + \Psi_{i,j}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Поэтому уравнение (1.1) для генераторов и моторов по-прежнему может быть переписано в компактной форме

$$C_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = P_i - D_i \frac{d\delta_i}{dt} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{N^{\text{MCM}}} \left( \frac{|U_i U_j|}{z_{i,j}} \cos(\delta_i - \delta_j + \Psi_{i,j}) - \frac{|U_i|^2}{z_{i,j}} \cos(\Psi_{i,j}) \right). \quad (4.2)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N^{\text{MCM}}$ ,  $P_i > 0$ , если  $i$ -ая машина является генератором, и  $P_i < 0$ , если  $i$ -ая машина является мотором. Если  $r_{i,j} = 0$  для всех линий передачи, тогда  $z_{i,j} = x_{i,j}$ ,  $\Psi_{i,j} = \pi/2$  и уравнение (4.2) переходит в (1.2).

Также, как и в главе 1, положим  $C_i = C$ ,  $D_i = D$  и для простоты будем считать, что  $|U_i| = u$ ,  $i = 1, 2, \dots, N^{\text{MCM}}$ . Активное и индуктивное сопротивления линии передачи между  $i$ -ой и  $j$ -ой машинами зависят от ее конструкции и длины [133]. Предполагая, что все линии имеют одинаковую конструкцию, полное сопротивление  $z_{i,j}$  линии передачи может быть записано в виде

$$z_{i,j} = z_0 l_{i,j}, \quad (4.3)$$

где  $z_0 = \sqrt{r_0^2 + x_0^2}$  – полное удельное сопротивление линии передачи, выраженное в относительных единицах, то есть в долях  $R_b/l_b$ , где  $R_b$  и  $l_b$  – базовые значения сопротивления и длины,  $r_0$  и  $x_0$  – удельные активное и индуктивное сопротивления линии, выраженные в тех же относительных единицах,  $l_{i,j}$  – длина линии передачи, выраженная в относительных единицах длины. Формула (4.3) позволяет учесть зависимость полных сопротивлений линий передачи от их длин. В свою очередь длины линий определяются расположением генераторов и потребителей на местности.

Для удобства введем новые параметры и время

$$p_i = \frac{P_i}{w}, \quad i = 1, 2, \dots, N^{\text{MCM}}, \quad \alpha = \frac{D}{\sqrt{Cw}}, \quad t_{\text{new}} = \sqrt{\frac{w}{C}} t, \quad w = \frac{u^2}{z_0}, \quad (4.4)$$

тогда уравнения (4.2) примут вид

$$\frac{d^2 \delta_i}{dt_{\text{new}}^2} = p_i - \alpha \frac{d\delta_i}{dt_{\text{new}}} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{N^{\text{MCM}}} \frac{a_{i,j}}{l_{i,j}} (\cos(\delta_i - \delta_j + \Psi_{i,j}) - \cos(\Psi_{i,j})), \quad (4.5)$$

где  $a_{i,j} = 1$ , если машины связаны друг с другом линией передачи, и  $a_{i,j} = 0$  в противном случае. Уравнения (4.5) описывают неоднородную энергосеть. Далее индекс “new” для краткости опустим.

Рассмотрим неоднородную энергосеть в виде хаб-кластера из одного генератора ( $p_1 > 0$ ) и  $N - 1$  ( $N \equiv N^{\text{МСМ}}$ ) потребителей – моторов ( $p_k < 0$ ,  $k = 2, 3, \dots, N$ ) (рис. 4.1).

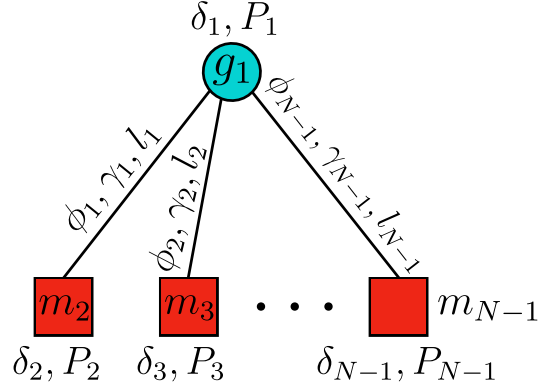


Рис. 4.1: Граф неоднородной энергосети в виде хаб-кластера из одного генератора и  $N - 1$  потребителя (мотора) с указанием основных параметров.

Введем новые переменные и параметры

$$\phi_i = \delta_{i+1,1}, \Delta_i = \Psi_{1,i+1}, \Delta_i \in (0, \pi/2], \gamma_i = p_1 - p_{i+1} > 0, l_i = l_{1,i+1}, i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (4.6)$$

Тогда уравнения (4.5) для неоднородной энергосети в виде хаб-кластера примут вид

$$\begin{cases} \frac{d\phi_i}{dt} = y_i, \\ \frac{dy_i}{dt} = -\gamma_i - \alpha y_i - \frac{2}{l_i} \sin(\Delta_i) \sin(\phi_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N-1} \frac{[\cos(\Delta_j) - \cos(\phi_j - \Delta_j)]}{l_j}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Пусть  $i$  – произвольный индекс из набора  $\{1, 2, \dots, N - 1\}$ , который для удобства будем далее обозначать как  $n$ . Рассмотрим динамику  $n$ -ого элемента сети (рис. 4.1), то есть пары потребитель-генератор под номером  $n$ , куда входит генератор и потребитель с номером  $n + 1$ . Введем новые параметры и время

$$\lambda_n = \alpha a_n, \quad a_n = \sqrt{\frac{l_n}{2 \sin(\Delta_n)}}, \quad \tau = \frac{t}{a_n}, \quad (4.8)$$

при использовании которых система, описывающая динамику  $n$ -ого элемента, примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\phi_n}{d\tau} = y_n, \\ \frac{dy_n}{d\tau} = -\gamma_n a_n^2 - \lambda_n y_n - \sin(\phi_n) + a_n^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N-1} \frac{[\cos(\Delta_j) - \cos(\phi_j - \Delta_j)]}{l_j}. \end{cases} \quad (4.9)$$

Заметим, что переменная  $y_n^{(4.7)}$  системы (4.7) и аналогичная переменная  $y_n^{(4.9)}$  системы (4.9) связаны соотношением

$$y_n^{(4.9)} = a_n y_n^{(4.7)}. \quad (4.10)$$

## 4.2 Области локализации траекторий

Введем в рассмотрение вспомогательные системы сравнения [134–136]

$$\begin{cases} \frac{d\phi_n}{d\tau} = y_n, \\ \frac{dy_n}{d\tau} = \gamma_n^+ - \lambda_n y_n - \sin(\phi_n), \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \frac{d\phi_n}{d\tau} = y_n, \\ \frac{dy_n}{d\tau} = \gamma_n^- - \lambda_n y_n - \sin(\phi_n), \end{cases} \quad (4.12)$$

где

$$\gamma_n^+ = a_n^2 \left[ -\gamma_n + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N-1} \frac{(1 + \cos(\Delta_j))}{l_j} \right], \quad \gamma_n^- = -a_n^2 \left[ \gamma_n + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N-1} \frac{(1 - \cos(\Delta_j))}{l_j} \right]. \quad (4.13)$$

Каждая из систем (4.11), (4.12) представляет собой систему с цилиндрическим фазовым пространством  $G = S^1 \times R^1$  вида

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{d\tau} = y, \\ \frac{dy}{d\tau} = \gamma - \lambda y - \sin(\phi), \end{cases} \quad (4.14)$$

которая описывает, в частности, динамику маятника в вязкой среде, находящегося под действием постоянного вращающего момента, точечного джозефсоновского контакта и др. Динамика системы (4.14) полностью изучена и широко представлена в литературе [137, 138]. Установлено (см., например, [139]), что разбиение полуплоскости параметров  $(\gamma, \lambda \geq 0)$  системы (4.14) на области, соответствующие различным структурно устойчивым фазовым портретам осуществляется следующими бифуркационными линиями:

- прямыми  $|\gamma| = 1$ , соответствующими образованию в системе седло-узла, неустойчивая сепаратриса которого при  $\lambda > \lambda^*$  формирует вращательную гомоклиническую орбиту, то есть орбиту, охватывающую цилиндр  $G$ ;
- кривыми  $|\gamma| = \gamma^T(\lambda)$ , где  $\gamma^T(\lambda)$  – так называемая кривая Трикоми (см. Приложение к главе 4, где она задана в виде таблицы значений), соответствующая гомоклинической вращательной орбите (петле), образованной сепаратрисами седла, определенной при  $0 \leq \lambda < \lambda^*$  и удовлетворяющей следующим условиям

$$\gamma^T(0) = 0, \quad 0 < \gamma^T(\lambda) < 1, \quad \frac{d\gamma^T}{d\lambda} > 0$$

- $(\gamma = 1, \lambda = \lambda^* \approx 1.22)$  является бифуркационной точкой коразмерности 2, соответствующей вращательной гомоклинической орбите седло-узла, возвращающейся в него через “край” узловой области.

В работе [134] (см. также [120, 135, 136]) исследовано взаимное расположение на развертке фазового цилиндра  $G$  состояний равновесия, сепаратрис седел и предельных циклов двух систем вида (4.14), отличающихся друг от друга значениями параметра  $\gamma$ :  $\gamma = \gamma^+$  и  $\gamma = \gamma^-$ , удовлетворяющих условию  $\gamma^- < \gamma < \gamma^+$ . В частности, в [134] получены условия на параметры, при которых на плоскости  $(\phi, y)$  существуют компактные области, содержащие состояние равновесия и предельный цикл системы (4.14).

Несложный анализ показывает, что с помощью неустойчивых сепаратрис и предельных циклов систем (4.11), (4.12) на фазовой плоскости  $(\phi_n, y_n)$  системы (4.9) можно построить две области, которые обозначим через  $b^\omega$  и  $k^\omega$  (см. рис. 4.2).

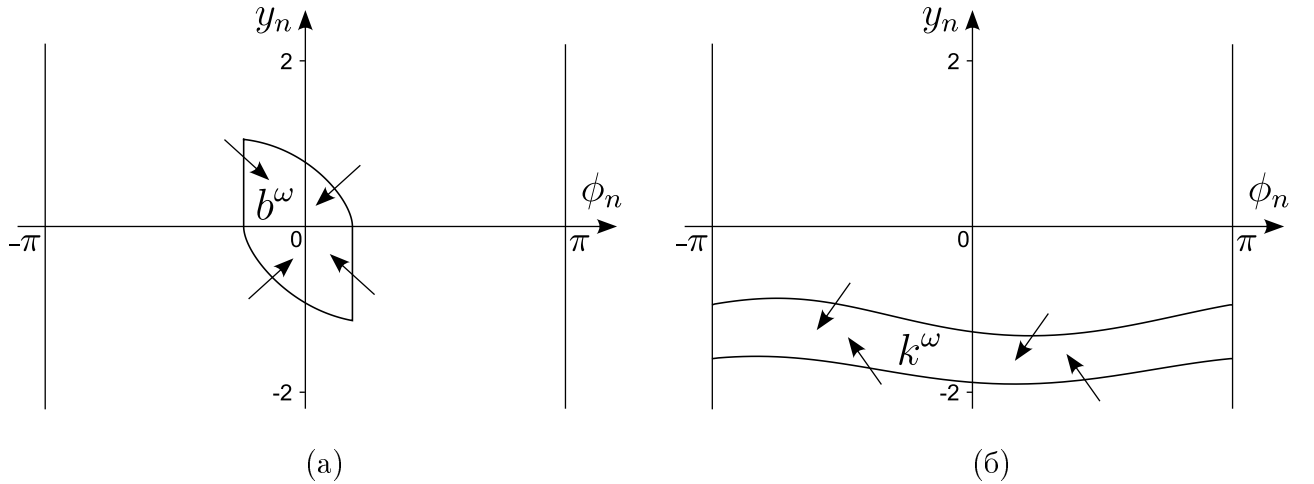


Рис. 4.2: Области  $b^\omega$  (а) и  $k^\omega$  (б). Стрелками показана (качественно) ориентация векторного поля системы (4.9) на границах этих областей. Масштабы осей абсцисс и ординат совпадают. Значения параметров:  $\gamma_n^+ = 0.251$ ,  $\gamma_n^- = -0.384$ ,  $\lambda_n = 0.999$  (а);  $\gamma_n^+ = -3.291$ ,  $\gamma_n^- = -5.187$ ,  $\lambda_n = 1.727$  (б).

Верхнюю границу области  $b^\omega$  образует фрагмент неустойчивой сепаратрисы седла системы (4.11), а нижнюю – неустойчивой сепаратрисы седла системы (4.12). Левую (соответственно правую) границу области  $b^\omega$  образует ортогональный к оси абсцисс отрезок, расположенный при  $y_n < 0$  ( $y_n > 0$ ) (см. рис. 4.2, а). Границу области  $k^\omega$  образуют устойчивые предельные циклы систем (4.11), (4.12): верхнюю – системы (4.11), а нижнюю – системы (4.12) (см. рис. 4.2, б). Векторное поле системы (4.9) на границах областей  $b^\omega$  и  $k^\omega$  ориентировано внутрь этих областей (рис. 4.2), поскольку при  $y_n \neq 0$  справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{dy_n}{d\phi_n} \right)_{(4.9)} - \left( \frac{dy_n}{d\phi_n} \right)_{(4.11)} \right] y_n &= -a_n^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N-1} \frac{[1 + \cos(\Delta_j)]}{l_j} \leq 0, \\ \left[ \left( \frac{dy_n}{d\phi_n} \right)_{(4.9)} - \left( \frac{dy_n}{d\phi_n} \right)_{(4.12)} \right] y_n &= a_n^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N-1} \frac{[1 - \cos(\Delta_j)]}{l_j} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Нетрудно показать, что область  $b^\omega$  существует, если  $(l_n, \gamma_n) \in D_{lib}^n$ , где  $D_{lib}^n$  – область, выделяемая на плоскости  $(l_n, \gamma_n)$  следующими (см. рис. 4.3) кривыми:

$$\begin{aligned}
T^+ &= \left\{ l_n, \gamma_n : l_n > 0, \gamma_n = -\frac{2 \sin(\Delta_n) \gamma^T(\lambda_n)}{l_n} + L^+ \right\}, \\
T^- &= \left\{ l_n, \gamma_n : l_n > 0, \gamma_n = \frac{2 \sin(\Delta_n) \gamma^T(\lambda_n)}{l_n} - L^- \right\}, \\
\Gamma^+ &= \left\{ l_n, \gamma_n : l_n > 0, \gamma_n = -\frac{2 \sin(\Delta_n)}{l_n} + L^+ \right\}, \\
\Gamma^- &= \left\{ l_n, \gamma_n : l_n > 0, \gamma_n = \frac{2 \sin(\Delta_n)}{l_n} - L^- \right\},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

где

$$L^+ = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N-1} \frac{(1 + \cos(\Delta_j))}{l_j}, \quad L^- = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N-1} \frac{(1 - \cos(\Delta_j))}{l_j}, \tag{4.17}$$

а  $\gamma^T(\lambda_n)$  – кривая Трикоми.

Заметим, что

- при  $\alpha \leq (\lambda^*) \sqrt{\frac{L^+ + L^-}{2}}$ , область  $D_{lib}^n$  выделяется на плоскости  $(l_n, \gamma_n)$  только кривыми  $T^+$  и  $T^-$ , которые сливаются в точке  $T^0$ , имеющей координаты

$$l_n = l_n^0 \neq 0, \quad \gamma_n = \frac{l_n^0 (L^+ + L^-)}{4 \sin(\Delta_n)},$$

где  $l_n^0$  – решение уравнения

$$\gamma^T(\lambda_n) = \frac{(L^+ + L^-) l_n}{4 \sin(\Delta_n)};$$

- при  $(\lambda^*) \sqrt{\frac{L^+ + L^-}{2}} < \alpha \leq (\lambda^*) \sqrt{L^+}$  граница области  $D_{lib}^n$  состоит, кроме кривых  $T^+, T^-$ , также из кривых  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$ , имеющих общую точку  $\Gamma^0$  (см. рис. 4.3), координаты которой

$$l_n = \frac{4 \sin(\Delta_n)}{L^+ + L^-}, \quad \gamma_n = \frac{L^+ - L^-}{2};$$

- при  $\alpha > (\lambda^*) \sqrt{L^+}$  состав границы области  $D_{lib}^n$ , за исключением отсутствующей в нем кривой  $T^+$ , такой же, как и в предыдущем случае.

В свою очередь область  $k^\omega$  существует, если  $(l_n, \gamma_n) \in D_{rot}^n$  – области на плоскости  $(l_n, \gamma_n)$ , граница которой задается кривой (см. рис. 4.3)

$$\Gamma = \left\{ l_n, \gamma_n : l_n > 0, \gamma_n = \frac{2 \sin(\Delta_n)}{l_n} + L^+ \right\}. \tag{4.18}$$

Таким образом, мы выделили области параметров  $D_{lib}^n$  и  $D_{rot}^n$ , для точек которых на плоскости  $(\phi_n, y_n)$  системы (4.9) существуют области  $b^\omega$  и  $k^\omega$ , на границе которых векторное поле системы (4.9) ориентировано внутрь этих областей. Заметим, что такая ориентация на  $b^\omega$  и  $k^\omega$  сохранится и на  $n$ -ом элементе системы (4.7), поскольку введение времени  $\tau$  не меняет



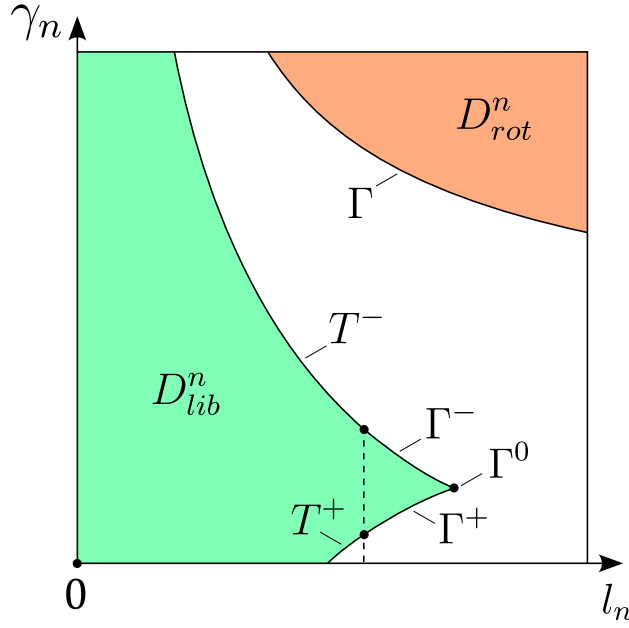


Рис. 4.3: Области  $D_{lib}^n$  (выделена бледно-зеленым цветом) и  $D_{rot}^n$  (выделена бледно-красным цветом) при  $(\lambda^*)\sqrt{\frac{L^++L^-}{2}} < \alpha \leq (\lambda^*)\sqrt{L^+}$ .

направления движения по траекториям, так как  $a_n > 0$ . Однако в этом случае необходимо пересчитать границы областей  $b^\omega$  и  $k^\omega$  с учетом соотношения (4.10).

### 4.3 Колебательные и вращательные свойства траекторий

Рассмотрим динамику системы (4.7). Пусть для всех  $i \neq n$  начальные условия  $(\phi_i(0), y_i(0))$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  в системе (4.7) будут произвольными, а  $(\phi_n(0), y_n(0)) \in b^\omega$ . Поскольку граница области  $b^\omega$  не зависит от переменных  $\phi_i, y_i$ , то в фазовом пространстве  $(S^{N-1} \times R^{N-1})$  системы (4.7) вдоль направления, задаваемого любой из этих переменных, она образует немняющуюся замкнутую поверхность  $B_i^\omega$ . В любой точке каждой такой поверхности  $B_i^\omega$  проекция векторного поля системы (2.9) на плоскость  $(\phi_n, y_n)$  ориентирована внутрь этой поверхности, так как траектории системы (2.9) пересекают границу области  $b^\omega$  внутрь (см. рис. 4.2, а). Следовательно, при любом  $t > 0$  выполняется условие

$$(\phi_n(t), y_n(t)) \in b^\omega \text{ при } t > 0. \quad (4.19)$$

Обратим внимание на то, что (4.19) выполняется для любых начальных условий  $\phi_n(0), y_n(0)$  принадлежащих области  $b^\omega$ . Из условия (4.19), при учете геометрических размеров области  $b^\omega$ , вытекает справедливость следующего утверждения

$$|\phi_n(t)| < \pi, \quad y_{min} < y_n(t) < y_{max} \text{ при } t \geq 0, \quad (4.20)$$

где  $y_{max}$  и  $y_{min}$  – максимальное и минимальное значение переменной  $y_n(t)$  на границе области  $b^\omega$ ,  $y_{min} < 0 < y_{max}$ .

Рассмотрим теперь поведение траекторий системы (4.7), когда  $(\phi_n(0), y_n(0)) \in k^\omega$ , а начальные условия по остальным переменным являются произвольными. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, устанавливаем справедливость следующего утверждения

$$(\phi_n(t), y_n(t)) \in k^\omega \text{ при } t > 0. \quad (4.21)$$

Поскольку область  $k^\omega$  целиком расположена в области  $y_n < 0$  (см. рис. 4.2, б), из (4.21) следует, что переменная  $\phi_n(t)$  будет монотонно убывать, а переменная  $y_n(t)$  – совершать ограниченные колебания в области  $y_n < 0$ .

Обратим внимание на то, что все результаты получены для произвольного элемента  $i = n$  системы (4.7). Однако области параметров  $D_{lib}^n$  и  $D_{rot}^n$  для каждого элемента  $i$  системы (4.7) будут, вообще говоря, разными, так как они зависят от распределения длин  $l_i$ , которое свое для каждого элемента  $i$ . Аналогично, области  $b^\omega$  и  $k^\omega$  тоже зависят от номера  $i$  и поэтому далее будем писать  $b_i^\omega, k_i^\omega$ . Тем не менее, различные однотипные области  $D_{lib}^i$  или  $D_{rot}^i$  могут пересекаться. В этом случае, описанные выше колебательные и вращательные свойства траекторий системы (4.7) могут реализовываться одновременно в нескольких элементах.

## 4.4 Критерий парциальной устойчивости и его проверка

Проведенное в пункте 4.1 исследование динамики системы (4.7) позволяет, фактически, сформулировать критерий парциальной устойчивости работы  $i$ -ой пары потребитель-генератор. Действительно, математическим образом нормального рабочего режима энергосети является устойчивое состояние равновесия системы (4.7), которому соответствует устойчивый синхронный режим во всех ее элементах. Следовательно, в нормальном рабочем состоянии сети в каждом  $i$ -ом элементе системы (4.7) выполняется условие  $(\phi_i = \phi_i^0, y_i = y_i^0) \in b_i^\omega$ , где  $\phi_i^0$  и  $y_i^0 = 0$  – координаты устойчивого состояния равновесия системы (4.7), поскольку на окружности  $S^1$  оно расположено между состояниями равновесия вспомогательных систем (4.11), (4.12). Отсюда и из результатов пункта 4.1 следует *критерий парциальной устойчивости*.

1. Изменение параметров внутри области  $D_{lib}^i$  является безопасным для нормальной работы  $i$ -ой пары потребитель-генератор, поскольку в этом случае выход из синхронного режима возможен лишь в квазисинхронный режим, в котором набег разности фаз колебаний пары на  $2\pi$  не происходит. Заметим, безопасный диапазон вариации разности мощностей в паре тем больше, чем меньше расстояние между ними.
2. Область  $b_i^\omega$  определяет диапазон безопасных для устойчивой нормальной работы скачкообразных внешних возмущений.
3. Область параметров  $D_{rot}^i$  является потенциально опасной, так как для этих значений параметров возможна реализация режима асинхронных колебаний, отвечающих в системе (4.7) области  $k_i^\omega$ , которому соответствует аварийный режим в паре.

В качестве примера рассмотрим энергосеть из  $N = 10$  машин. Применяя наш критерий, получим условия безопасной работы частичного элемента энергосети. Пусть для определенности это будет пара с номером  $i = 1$ . Зададим параметры всех остальных девяти элементов сети (см. рис. 4.4, а-в) и с помощью формул (4.16) и (4.18) построим на плоскости  $(l_1, \gamma_1)$  кривые  $T^-$ ,  $\Gamma^-$ ,  $\Gamma^+$  и  $\Gamma$  (рис. 4.4, г). Эти кривые выделяют искомые области  $D_{lib}^1$  и  $D_{rot}^1$ . Выберем для примера определенные значения параметров  $l_1$  и  $\gamma_1$  из области  $D_{lib}^1$  (см. рис. 4.4, г, точка  $A$ ) и зададим начальные условия следующим образом:  $(\phi_1(0), y_1(0)) \in b_1^\omega$ , а во всех остальных девяти парах они являются случайными. На рисунках 4.5, а и б показаны результаты моделирования системы (4.7) при сделанных выше предположениях. Они показывают, что в первой паре потребитель-генератор реализуется квазисинхронный режим и  $D_{lib}^1$  действительно соответствует области безопасного изменения параметров. Если же  $(l_1, \gamma_1) \in D_{rot}^1$  (см. рис. 4.4, г, точка  $B$ ) и  $(\phi_1(0), y_1(0)) \in k_1^\omega$ , то, независимо от начальных условий в других парах энергосети, в первой паре реализуется аварийный режим работы (рис. 4.5, в,г).

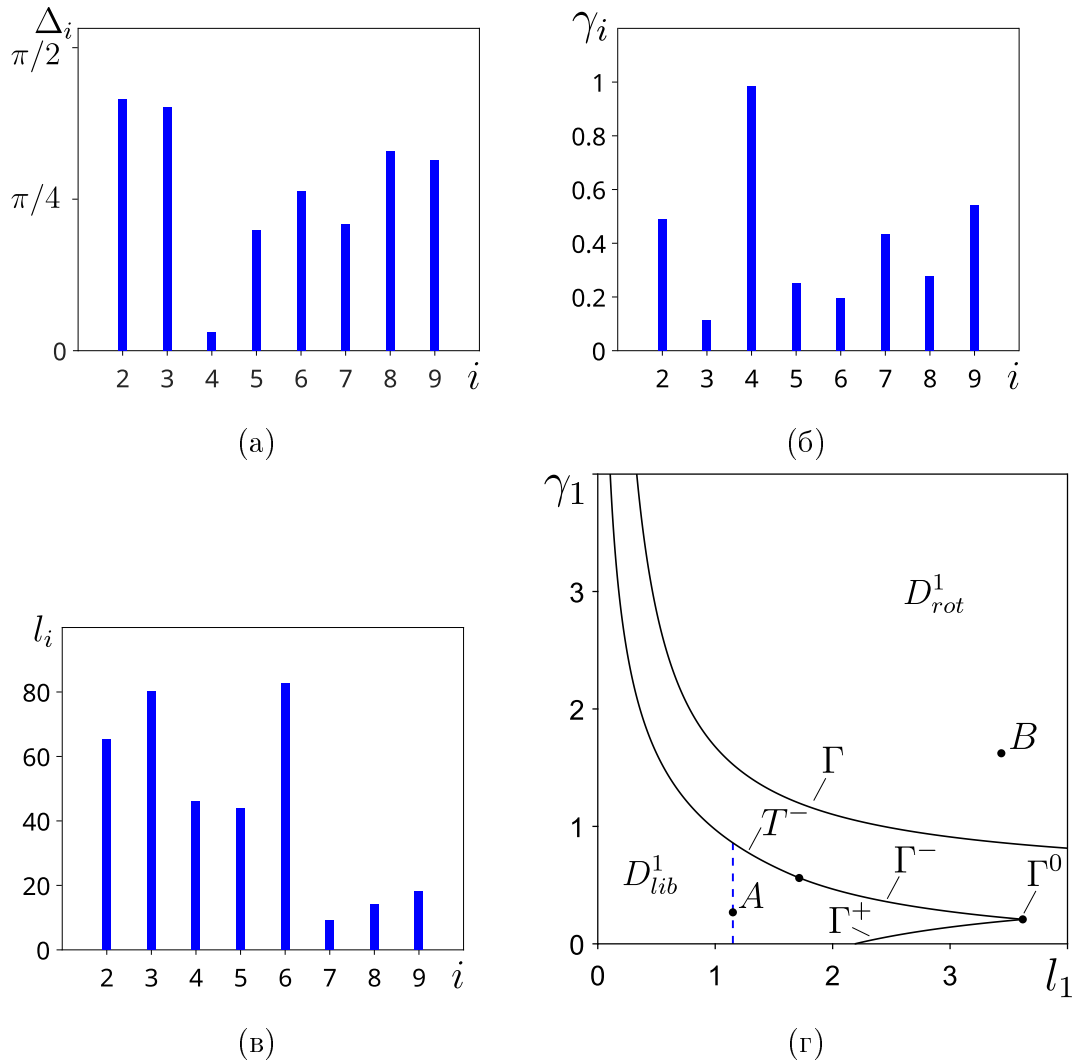


Рис. 4.4: Распределения параметров  $\Delta_i$  (а),  $\gamma_i$  (б) и  $l_i$  (в). Разбиение плоскости параметров  $(l_1, \gamma_1)$  на области  $D_{lib}^1$  и  $D_{rot}^1$  (г). Пунктиром показан диапазон безопасных значений параметра  $\gamma_1$ . Параметр  $\alpha = 1$ .

Длины линий передачи  $l_i$  действующей энергосети имеют постоянные значения. Пара-

метры  $\gamma_i$  зависят от мощности турбины генератора  $g_1$  и мощностей, которые необходимо снимать с валом моторов  $m_k$ ,  $k = 2, 3, \dots, 10$  (рис. 4.1). Указанные мощности могут изменяться в процессе работы энергосети, поэтому необходимо знать диапазон безопасных значений параметров  $\gamma_i$  для одной или нескольких пар потребитель-генератор. Для  $i$ -ой пары при фиксированной длине линии  $l_i$  этот диапазон можно оценить исходя из вида области  $D_i^{lib}$  как это показано на рисунке 4.4, г, где диапазон безопасных значений параметра  $\gamma_1$  выделен синим пунктиром.

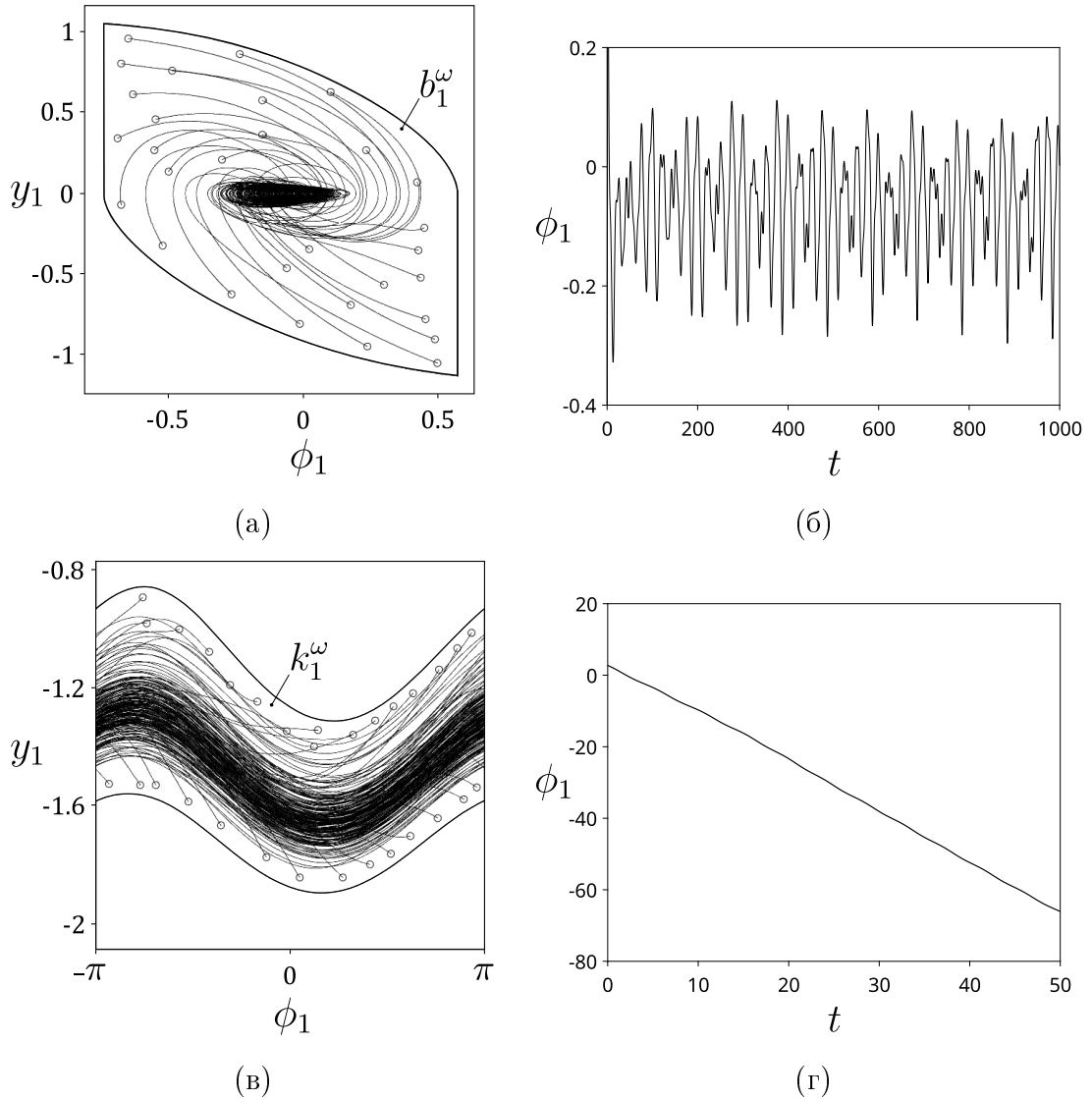


Рис. 4.5: Области  $b_1^\omega$  (а) и  $k_1^\omega$  (в), а также проекции на плоскость  $(\phi_1, y_1)$  траекторий системы (4.7) для начальных условий, обозначенных круглыми маркерами. Зависимости  $\phi_1(t)$ , характерные для начальных условий  $(\phi_1(0), y_1(0)) \in b_1^\omega$  (б) и  $(\phi_1(0), y_1(0)) \in k_1^\omega$  (г). Параметр  $\alpha = 1$ .

Критерий позволяет находить области безопасной работы не только одиночных пар, но и нескольких пар одновременно. Для определенности рассмотрим, например, пары с номерами  $k = 1, 2, 3$ . Предположим, что параметры  $l_k$  и  $\gamma_k$ , отвечающие за динамику выбранных пар, принимают следующие значения (рис. 4.6, б):

$$(l_1, \gamma_1) \in D_{lib}^1, (l_2, \gamma_2) \in D_{lib}^2, (l_3, \gamma_3) \in D_{rot}^3,$$

а остальные параметры тоже имеют некоторые фиксированные значения (рис. 4.6, б). Выберем следующие начальные условия

$$(\phi_1(0), y_1(0)) \in b_1^\omega, (\phi_2(0), y_2(0)) \in b_2^\omega, (\phi_3(0), y_3(0)) \in k_3^\omega,$$

остальные начальные условия будут произвольными. Численное моделирование системы (4.7) подтверждает справедливость критерия. Именно в первой и второй парах потребитель-генератор реализуется квазисинхронный режим работы (рис. 4.6, в), а в третьей паре – асинхронный (рис. 4.6, в).

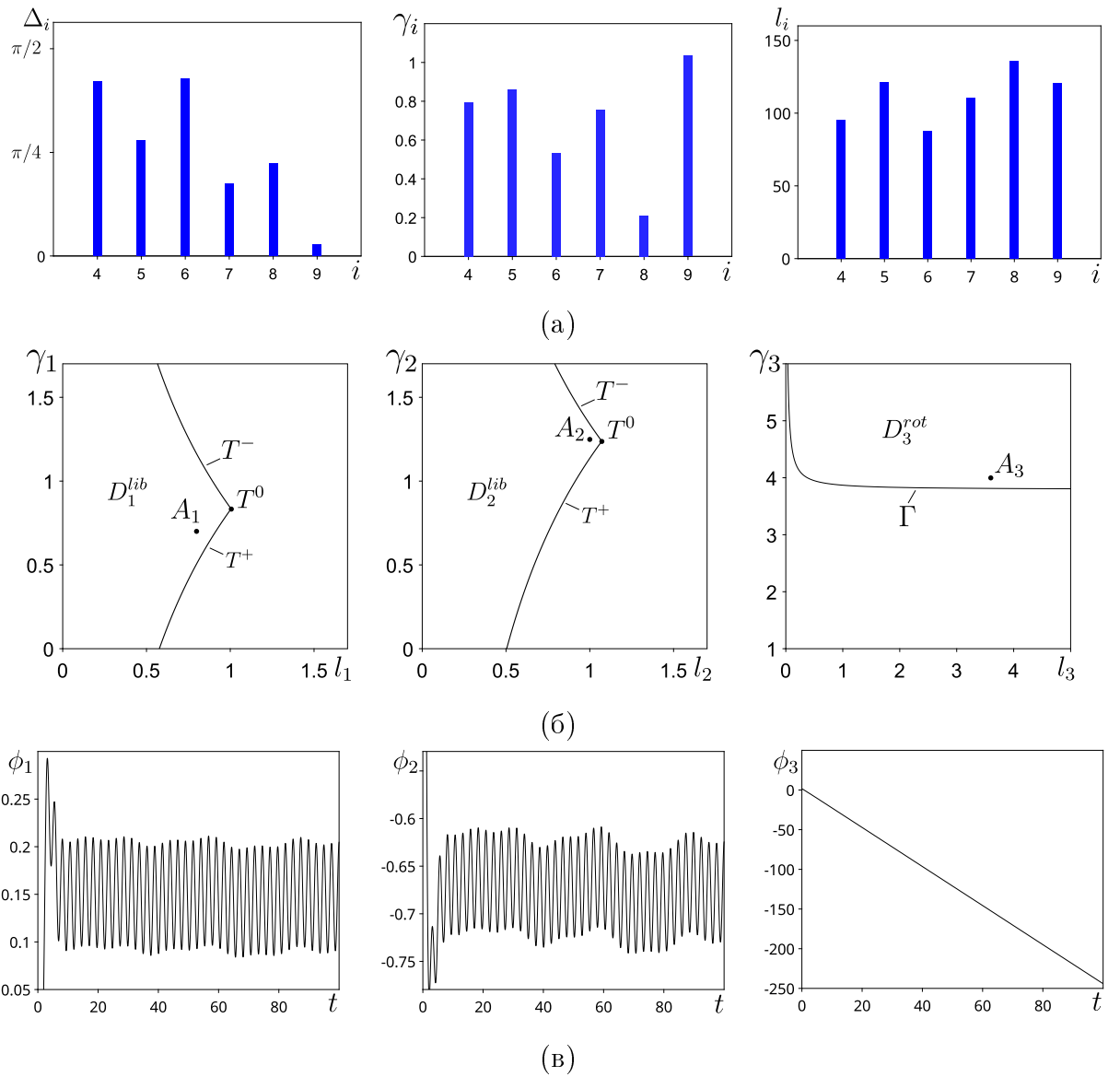


Рис. 4.6: Распределение параметров  $\Delta_i$ ,  $\gamma_i$  и  $l_i$  (а). Области параметров  $D_{lib}^1$ ,  $D_{lib}^2$  и  $D_{rot}^3$  (б). Зависимости  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$  и  $\phi_3(t)$  характерные для начальных условий  $(\phi_1(0), y_1(0)) \in b_1^\omega$ ,  $(\phi_2(0), y_2(0)) \in b_2^\omega$ ,  $(\phi_3(0), y_3(0)) \in k_3^\omega$ . Параметр  $\alpha = 1.4$ .

## 4.5 Выводы

Рассмотрена модель неоднородной энергосети в виде хаб-кластера. Она учитывает как индуктивное, так и активное сопротивление линий передачи, а также зависимость полного сопротивления линий от их длины, что позволяет учесть влияние взаимного расположения потребителей и генераторов на динамику всей сети. Получен критерий парциальной устойчивости, базирующийся на использовании вспомогательных систем сравнения. Он позволяет находить условия, в частности, на значения длин линий передачи, обеспечивающие безопасную работу (синхронный/квазисинхронный режим) пар потребитель-генератор из состава хаб-кластера. Он также дает условия перехода указанных пар в асинхронный режим. Фактически критерий позволяет определить наиболее оптимальное положение (длину линии передачи) подключаемого к хаб-кластеру потребителя.

Нетрудно видеть, что системы сравнения можно использовать для получения критерия парциальной устойчивости связанных пар потребителей и генераторов (синхронных машин) в энергосети с графом в виде дерева (связный ациклический граф [141]). В этом случае динамика энергосети может быть задана посредством уравнений для  $(N^{\text{MCM}} - 1)$  линейно независимых разностей фаз  $\phi_i = \delta_{k,m}$  и их производных по времени  $\dot{\phi}_i$ , где индексы  $k, m$  соответствуют паре узлов графа, непосредственно соединенных ребром. Поэтому переменные  $\phi_n, \dot{\phi}_n$  ( $n$  – фиксированный индекс) отвечают за динамику (режим взаимодействия)  $n$ -ой пары элементов энергосети: потребитель-генератор, потребитель-потребитель или генератор-генератор. Уравнения, задающие ее динамику могут быть записаны в виде, аналогичном системе 4.9:

$$\begin{cases} \frac{d\phi_n}{d\tau} = y_n, \\ \frac{dy_n}{d\tau} = \gamma'_n - \lambda_n y_n - \sin(\phi_n) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N-1} f_j(\phi_j), \end{cases}$$

где  $f(\phi_j)$  – периодическая функция с периодом  $2\pi$ , она ограничена:  $f_j^{\min} \leq f(\phi_j) \leq f_j^{\max}$ , причем  $f_j^{\min} \leq 0$ ,  $f_j^{\max} \geq 0$ ,  $f_j^{\min} \neq f_j^{\max}$ . Отсутствие циклов в графе энергосети приводит к тому, что под суммой стоят только функции, не зависящие от переменной  $\phi_n$ . Поэтому можно снова ввести вспомогательные системы сравнения вида (4.11) и (4.12), где

$$\gamma_n^+ = \gamma'_n + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N-1} f_j^{\max}, \quad \gamma_n^- = \gamma'_n - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N-1} |f_j^{\min}|.$$

Далее, находя области локализации траектории  $b_n^\omega$  и  $k_n^\omega$  и соответствующие им области параметров, можно сформулировать критерий парциальной устойчивости  $n$ -ой пары элементов энергосети.

## Приложение к главе 4

$\lambda_n$	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.5	0.55
$\gamma^T$	0	0.064	0.127	0.190	0.252	0.315	0.374	0.432	0.490	0.550	0.597	0.650
0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15	
0.698	0.745	0.787	0.825	0.862	0.895	0.923	0.948	0.967	0.983	0.995	0.997	
1.20	1.22											
0.999	1.000											

Таблица 4.1: Координаты некоторых точек кривой Трикоми.

## Глава 5

# Устойчивость многомашинной энергосети с общей нагрузкой

В пятой главе рассматривается МЭС многомашинной энергосети, состоящей из произвольного числа генераторов, питающих одну общую статическую пассивную нагрузку, посредством трансформаторов и линий электропередачи [38]. Модель двухмашинной энергосети с общей нагрузкой, которая часто приводится в литературе по устойчивости энергосетей (энергосистем) [4, 19, 20], является частным случаем изучаемой модели. Схемы замещения некоторых многомашинных энергосетей с несколькими нагрузками могут быть преобразованы к схеме с общей нагрузкой, путем стандартных приемов упрощения схем (преобразование треугольник-звезда, перенос нагрузок [4] и т.д.). Пример такого преобразования можно найти в [21].

Найдены условия на параметры схемы замещения многомашинной энергосети с общей нагрузкой, которые позволяют осуществить переход от эффективной сети с глобальными связями к редуцированной эффективной сети с хаб-топологией (топологией “звезда”). Переход возможен, если линия электропередачи одного из генераторов значительно короче остальных или (и) на ней выполнена продольная компенсация [142].

Считая условия перехода выполненными, найдены синхронные режимы (соответствующие им устойчивые состояния равновесия динамической системы) и их характеристики: распределения токов по цепям сети и мощности, выдаваемые генераторами в сеть. Выделена область параметров, при которых наблюдается мультстабильность (сосуществование) синхронных режимов. Определены наиболее оптимальные синхронные режимы с точки зрения генерируемой мощности. Построены карты режимов многомашинных энергосетей с разным числом генераторов. В частности, выделены области параметров, отвечающие существованию только синхронного(-ых) режима(-ов). Найдены условия безопасного отключения и подключения генератора. При этом в качестве исходного режима энергосети использованы различные сосуществующие синхронные режимы.

На примере трехмашинной энергосети изучены переключения между синхронными режимами, вызванные различными возмущениями: произвольными возмущениями динамических переменных, частотными и фазовыми возмущениями, а также случайными приращениями



мощностей турбин генераторов. В последнем случае рассмотрена стохастическая динамическая система и определены основные статистические характеристики задаваемого ею случайного процесса.

## 5.1 Редуцированная модель эффективной сети

### 5.1.1 Многомашинная энергосеть с общей нагрузкой

В рамках модели эффективной сети (МЭС, см. главу 1) рассмотрим энергосеть, в которой  $n$  генераторов питают одну общую нагрузку ( $n_{gen} = n > 3$ ,  $n_{load} = 1$ ). Каждый генератор связан с нагрузкой посредством двух трансформаторов и линии передачи, составляющих его передающую систему (рис. 5.1, а). Участок схемы замещения такой сети приведен на рисунке 5.1, б. В ней  $i$ -ый генератор, посредством трансформатора  $T_i^{in}$ , замещаемого импедансом  $Z_{i,T}^{in} = r_{i,T}^{in} + ix_{i,T}^{in}$  ( $x_{i,T} > 0$ , “in” – input), подключен к линии передачи, имеющей стандартную  $T$ -образную схему замещения с импедансами  $Z_i^{line}/2$ ,  $Z_i^{line} = r_i^{line} + ix_i^{line}$  ( $x_i^{line} > 0$ ) и проводимостью  $Y_i^{sh} = g_i^{line} + ib_i^{line}$  ( $b_i > 0$ , “sh” – shunt). Линия передачи подключена к нагрузке, представленной постоянным импедансом  $Z_{load}$ , через трансформатор  $T_i^{out}$ , замещенный импедансом  $Z_{i,T}^{out} = r_{i,T}^{out} + ix_{i,T}^{out}$  ( $x_{i,T} > 0$ , “out” – output). Удобно ввести обозначения

$$Z_i^{in} = Z_i^{line}/2 + Z_{i,T}^{in} + Z_i^{int}, \quad Z_i^{out} = Z_i^{line}/2 + Z_{i,T}^{out}, \quad (5.1)$$

которые упрощают вид схемы замещения (рис. 5.1, б) и ее расчет. При этом для каждого комплексного сопротивления может быть записана соответствующая проводимость и наоборот.

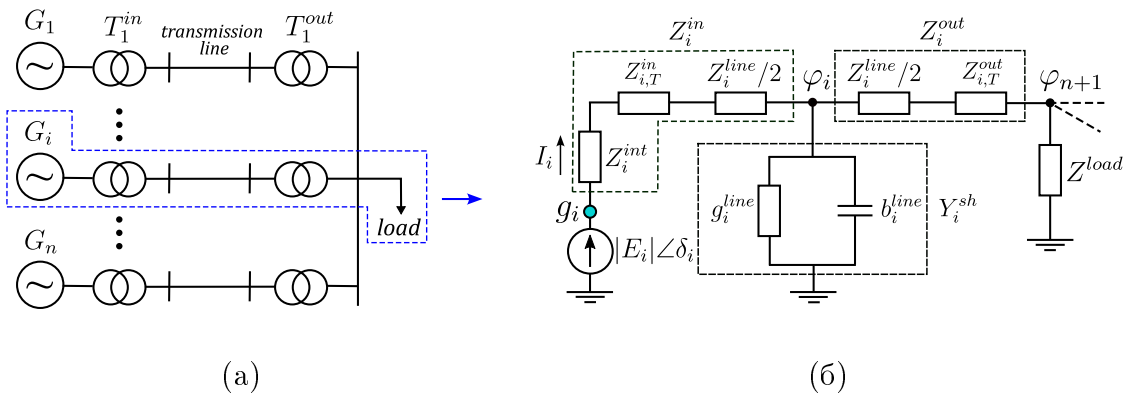


Рис. 5.1: Принципиальная схема многомашинной энергосети с общей нагрузкой (а) и схема замещения ее участка с указанием параметров (б).

При записи уравнений МЭС (1.8) необходимо выразить собственные  $Y_{i,i}$  и взаимные  $Y_{i,j}$  проводимости через параметры схемы замещения. Для этого рассчитаем ее с помощью метода узловых потенциалов (МУП) [121]. Уравнения МУП имеют вид

$$\widehat{G}\vec{\varphi} = \vec{J}, \quad (5.2)$$

где  $\widehat{G}$  – симметричная матрица МУП,  $\vec{\varphi}$  – вектор-столбец потенциалов узлов, подлежащих определению,  $\vec{J}$  – вектор-столбец так называемых узловых токов. В нашем случае  $\widehat{G} = (G_{k,k})$  – матрица порядка  $(n + 1)$ , ее элементы, отличные от нуля, имеют вид

$$\begin{aligned} G_{i,i} &= Y_i^{in} + Y_i^{out} + Y_i^{sh}, \quad G_{i,n+1} = G_{n+1,i} = -Y_i^{out}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ G_{n+1,n+1} &= Y_{load} + \sum_{i=1}^n Y_i^{out}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Вектор  $\vec{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}]^T$ , где  $\varphi_i$  – комплексы потенциалов узлов, указанных на рисунке 5.1, б. Вектор  $\vec{J} = [E_1 Y_1^{in}, E_2 Y_2^{in}, \dots, E_n Y_n^{in}, 0]^T$ . Разрешая систему (5.2) относительно потенциалов узлов, получим

$$\begin{aligned} \varphi_i &= E_i \frac{Y_i^{in}}{G_{i,i}} \left( 1 + \frac{G_{i,n+1}^2}{G_{i,i} C_G} \right) + \frac{G_{i,n+1}}{G_{i,i} C_G} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n E_j \frac{G_{j,n+1} Y_j^{in}}{G_{j,j}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \varphi_{n+1} &= -\frac{1}{C_G} \sum_{j=1}^n E_j \frac{G_{j,n+1} Y_j^{in}}{G_{j,j}}, \quad C_G = G_{n+1,n+1} - \sum_{j=1}^n \frac{G_{j,n+1}^2}{G_{j,j}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Нетрудно видеть, что ток  $I_i = (E_i - \varphi_i) Y_i^{in}$  (рис. 5.1, в). Подставляя сюда выражения (5.4) для потенциалов  $\varphi_i$ , получим формулу для тока вида (1.5), где

$$\begin{aligned} Y_{i,i} &= Y_i^{in} \left[ 1 - \frac{Y_i^{in}}{G_{i,i}} \left( 1 + \frac{G_{i,n+1}^2}{G_{i,i} C_G} \right) \right], \quad Y_{i,j} = Y_i^{in} Y_j^{in} \frac{G_{i,n+1} G_{j,n+1}}{G_{i,i} G_{j,j} C_G}, \\ & \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.5)$$

Подстановка выражений (5.3) для элементов  $G_{k,l}$  матрицы МУП в формулы (5.5) дает выражения для коэффициентов  $Y_{i,i}$  и  $Y_{i,j}$  через проводимости элементов схемы замещения. Для анализа значений указанных коэффициентов удобно выразить их через импедансы  $Z_k^{in}, Z_k^{out}, Z_{load}$  и проводимость  $Y_k^{sh}$ , так как в справочной литературе приводятся данные для расчета именно такой комбинации параметров схемы замещения. Тогда, путем несложных преобразований выражений (5.5), получим

$$\begin{aligned} Y_{i,i} &= \frac{1}{Z_i^{in}} \left[ 1 - \frac{Z_i^{out}}{R_i} \left( 1 + \frac{Z_{load} Z_i^{in}}{Z_i^{out} C_R} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^n R_k \right) \right], \quad Y_{i,j} = \frac{Z_{load}}{C_R} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i, j}}^n R_k, \\ C_R &= \prod_{k=1}^n R_k + Z_{load} \sum_{k=1}^n (1 + Y_k^{sh} Z_k^{in}) \prod_{\substack{p=1, \\ p \neq k}}^n R_p, \quad R_k = Z_k^{in} + Z_k^{out} + Y_k^{sh} Z_k^{in} Z_k^{out}, \\ & \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.6)$$

### 5.1.2 Редукция эффективной сети

Выражения (5.6) позволяют найти условия на параметры схемы замещения, при которых коэффициенты  $K_{i,j} (\equiv K_{i,j}^{M\Theta C})$  удовлетворяют неравенствам

$$K_{q,j} \gg K_{m,j}, \quad (5.7)$$

$m, j \neq q, m, j = 1, 2, \dots, n, q - \text{фиксированный номер.}$

Если выполняются неравенства (5.7), то  $q$ -ый узел эффективной сети (рис. 5.2, а) связан со всеми остальными узлами намного сильнее, чем они между собой (рис. 5.2, б). Тогда вместо системы (1.8) логично рассматривать приближенную систему (по крайней мере, в первом приближении), которая получается из исходной, если положить в ней  $K_{m,j} = 0$ . Такой системе соответствует граф с хаб-топологией, где роль хаба играет  $q$ -ый узел (рис. 5.2, в). Следовательно, исходная эффективная сеть с глобально связанными узлами преобразуется в сеть с хаб-топологией (топологией звезды), которую мы будем называть редуцированной эффективной сетью. Процесс редукции схематично показан на рисунках 5.2, а–в.

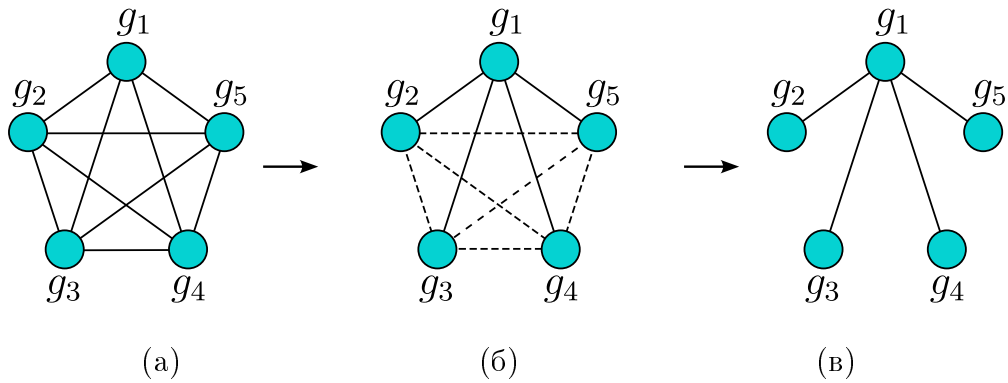


Рис. 5.2: Этапы редукции эффективной в случае  $n_{gen} = 5$  и  $q = 1$ : эффективная сеть (а), эффективная сеть с “сильными” (сплошные линии) и “слабыми” (пунктирные линии) связями (б), редуцированная эффективная сеть с хаб-топологией (топологией звезды) (в).

Используя выражения (5.6), покажем как найти условия выполнения неравенств (5.7). Так как по формуле (1.8):  $K_{i,j} = |E_i E_j Y_{i,j}|$ , то, считая  $|E_k|$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) величинами одного порядка, можно сказать, что значения  $K_{i,j}$  в основном определяются значениями  $|Y_{i,j}|$ , то есть  $K_{i,j} \sim |Y_{i,j}|$ , в свою очередь  $|Y_{i,j}| \sim \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i,j}}^n |R_k|$ , как это видно из выражений (5.6), поэтому

$$K_{i,j} \sim \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i,j}}^n |R_k|, \quad (5.8)$$

Зафиксируем индекс  $i = q$  и предположим, что

$$|R_q| \ll |R_j|, \quad j \neq q, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.9)$$

причем  $|R_j|$  – величины одного порядка. Тогда, с учетом выражения (5.8) и предположения об одинаковом порядке величин  $|E_k|$ , видно, что коэффициенты  $K_{i,j}$  должны подчиняться неравенствам (5.7). Поэтому исходная эффективная сеть может быть преобразована в сеть с топологией хаб-кластера при выполнении условий (5.9).

Рассмотрим вопрос о параметрах схемы замещения энергосети, при которых выполняются условия (5.9). Сначала покажем, что при практических расчетах

$$R_k \approx Z_k^{in} + Z_k^{out}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.10)$$

Индекс  $k$  будем для краткости опускать, если не оговорено обратное. Величина  $R$  определяется выражением (5.6) через комплексные сопротивления ( $Z^{in}, Z^{out}$ ) и проводимость ( $Y^{sh}$ ), которые зависят от параметров схемы замещения следующим образом

$$\begin{aligned} Z^{in} &= (r^{line}/2 + r_T^{in} + r^{int}) + i(x^{line}/2 + x_T^{in} + x^{int}) \equiv r_1 + ix_1, \\ Z^{out} &= (r^{line}/2 + r_T^{out}) + i(x^{line}/2 + x_T^{out}) \equiv r_2 + ix_2, \\ Y^{sh} &= g^{line} + ib^{line}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Проводимость  $Y^{sh}$  имеет активную ( $g^{line}$ ) и реактивную – емкостную ( $b^{line}$ ) составляющие. Активная проводимость линии соответствует двум видам потерь активной мощности: от тока утечки через изоляторы и на корону. Емкостная проводимость линии обусловлена емкостями между проводами разных фаз и емкостью провод – земля. При расчете сетей с уровнями напряжений до 220 кВ активная проводимость обычно не учитывается [133], то есть полагается  $g^{line} = 0$ . Для простоты будем использовать данное приближение и считать  $Y^{sh} = ib^{line}$ . Заметим, что для воздушных линий напряжением 35 кВ и ниже можно не учитывать и емкостную проводимость, при этом  $Y^{sh}$  обращается в ноль и приближенное равенство (5.10) становится точным. Но этот случай является менее общим и мы не будем на нем останавливаться. С учетом соотношений (5.11), выражение для  $R$  примет вид

$$\begin{aligned} R &= (r_1 + r_2 - b^{line}[r_1x_2 - x_1r_2]) + i(x_1 + x_2 + b^{line}[r_1r_2 - x_1x_2]) = \dots \\ &\dots = (A - B) + i(C + D), \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$A = r_1 + r_2, \quad B = b^{line}[r_1x_2 - x_1r_2], \quad C = x_1 + x_2, \quad D = b^{line}[r_1r_2 - x_1x_2].$$

Оценим значения величин  $A, B, C, D$ . Как правило, при практических расчетах активные сопротивления трансформаторов и генераторов не учитывают, то есть полагают  $r_T^{in} = r_T^{out} = r^{int} = 0$ , поэтому  $r_{1,2} \sim r^{line}$ . Для величин  $x_{1,2}$  будем использовать грубую оценку, которая не скажется на правильности результата, примем  $x_{1,2} \sim x^{line}$ . Параметры линии передачи можно определить как

$$r^{line} = r_0l, \quad x^{line} = x_0l, \quad b^{line} = b_0l, \quad (5.13)$$

где  $r_0$  и  $x_0$  – удельное активное и реактивное сопротивления линии передачи,  $b_0$  – ее удельная емкостная проводимость,  $l$  – длина линии.

В качестве примера рассмотрим воздушную линию передачи длиной 100 км с номинальным напряжением 220 кВ со сталеалюминиевыми проводами. Расчет проведем в размерных величинах. Выберем номинальное сечение провода 240/32 мм<sup>2</sup> (алюминиевая/стальная часть). Из справочных материалов [133] можно определить, что в этом случае  $r^{line} = 12.1$  Ом,  $x^{line} = 43.5$  Ом и  $b^{line} = 2.6 \times 10^{-4}$  См. Тогда нетрудно получить следующие оценки  $A \sim 10^1$  Ом,  $B \sim 10^{-2}$  Ом,  $C \sim 10^1$  Ом,  $D \sim 10^{-2}$  Ом. Из них следует, что в выражении (5.12) приближенно можно положить  $R \approx A + iC$ , откуда сразу получается искомое

соотношение (5.10). Аналогичные оценки можно получить для линий передачи с другими номинальными напряжениями и удостовериться в справедливости приближения (5.10).

Неравенство (5.9) может быть удовлетворено, если  $|\operatorname{Re}(R_q)| \ll |\operatorname{Re}(R_j)|$  и  $|\operatorname{Im}(R_q)| \ll |\operatorname{Im}(R_j)|$ . Эти неравенства, с учетом приближения (5.10) и выражений (5.1), могут быть записаны в виде

$$r_q^{line} + r_{q,T}^{in} + r_{q,T}^{out} + r_q^{int} \ll r_j^{line} + r_{j,T}^{in} + r_{j,T}^{out} + r_j^{int}, \quad (5.14)$$

$$x_q^{line} + x_{q,T}^{in} + x_{q,T}^{out} + x_q^{int} \ll x_j^{line} + x_{j,T}^{in} + x_{j,T}^{out} + x_j^{int}, \quad (5.15)$$

$q$  – фиксированный индекс,  $j \neq q$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Как было указано ранее, при практических расчетах обычно полагают  $r_T^{in} = r_T^{out} = r^{int} = 0$ , поэтому неравенство (5.14) переходит в  $r_q^{line} \ll r_j^{line}$ , которое, при одинаковых удельных активных сопротивлениях линий передачи, преобразуется в  $l_q \ll l_j$ ,  $l_q$  и  $l_j$  – длины линий. Иногда при расчетах воздушных линий передачи полагают  $r^{line} = 0$ , тогда, очевидно, неравенство (5.14) рассматривать не нужно.

В неравенстве (5.15) значения  $x_q^{line}$  и  $x_j^{line}$  также зависят от длин линий, к тому же левая часть неравенства (5.15) может быть существенно меньше правой в силу следующей причины. Для улучшения работы линии передачи применяется продольная компенсация. Она осуществляется путем последовательного включения в линию конденсаторов, компенсирующих ее индуктивность, что способствует уменьшению падению напряжения на линии [4]. Допустим, что в промежуточную точку  $q$ -ой линии передачи последовательно включен конденсатор, характеризующийся комплексным сопротивлением  $(-ix_C)$ ,  $x_C > 0$ . Тогда левая часть неравенства (5.15) должна быть заключена под знак модуля и дополнена слагаемым  $-x_C$ , а само неравенство запишется как

$$|(x_q^{line} + x_{q,T}^{in} + x_{q,T}^{out} + x_q^{int}) - x_C| \ll x_j^{line} + x_{j,T}^{in} + x_{j,T}^{out} + x_j^{int}. \quad (5.16)$$

Соответствующим выбором  $x_C$  можно обеспечить выполнение неравенства (5.16). Отметим, что продольная компенсация может выполняться в рамках системы FACTS (flexible alternating current transmission system) [142], которая активно внедряется в современные энергосети с целью управления параметрами электропередачи.

Таким образом, неравенство (5.9) может возникнуть естественным путем из-за различий длин линий передачи и использования средств продольной компенсации на одной из них. При этом необходимо учитывать особенности устройства конкретных генераторов и передающих систем, потому как их параметры оказывают непосредственное влияние на значения величин  $R_k$ , входящих в неравенство (5.9).

### 5.1.3 Уравнения динамики редуцированной эффективной сети

Определив коэффициенты  $Y_{i,i}$  и  $Y_{i,j}$ , перейдем к уравнениям динамики редуцированной эффективной сети. Ключевую роль в формировании условий, при которых возможна реду-

ция эффективной сети, имеет передающая система. Поэтому для простоты будем рассматривать генераторы с одинаковыми параметрами

$$C_i = C, D_i = D, i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.17)$$

Более того, предположим, что все машины, кроме первой, а также их передающие системы имеют одинаковые параметры, которые будем писать без индексов, то есть

$$\begin{aligned} P_{T,k} = P_T, |E_k| = |E|, Z_k^{in} = Z^{in}, Z_k^{out} = Z^{out}, Y_k^{sh} = Y^{sh}, \\ R_k = R, A_k = A, k = 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Те же параметры, относящиеся к первому генератору и его передающей системе, будем по-прежнему снабжать индексами. Тогда формулы (5.6) для взаимных проводимостей  $Y_{i,j}$  могут быть переписаны в виде

$$Y_{1,j} = \frac{Z_{load}}{R_1 R + N Z_{load} R_1 (1 + Y^{sh} Z^{in}) + Z_{load} R (1 + Y_1^{sh} Z_1^{in})}, Y_{i,j} = Y_{1,j} \frac{R_1}{R}, \quad (5.19)$$

$$i \neq j, i, j = 2, 3, \dots, n,$$

где  $N = n - 1$ . В этом случае неравенство (5.7) для  $q = 1$  будет справедливо, если

$$|R_1 E| \ll |R E_1| \quad (5.20)$$

Считая, что последнее неравенство выполняется, перейдем к редуцированной эффективной сети с отличными от нуля коэффициентами связи  $K_{1,j} = K, j = 2, 3, \dots, n$ . Вводя новые переменные, параметры и время

$$\begin{aligned} \varphi_i = \delta_1 - \delta_{i+1}, i = 1, 2, \dots, N, \alpha_{1,j} = \alpha, j = 2, 3, \dots, n, \\ \Delta = \frac{A_1 - A}{K}, \mu = \frac{D}{\sqrt{CK}}, t_{new} = \sqrt{\frac{K}{C}}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

перепишем систему (5.8) в виде

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = \Delta - \mu y_i - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_i) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N \sin(\varphi_j - \alpha), \end{cases} \quad (5.22)$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$ , точкой обозначено дифференцирование по новому времени  $t_{new}$ , которое далее мы будем писать без индекса. Система (5.22) определена в цилиндрическом фазовом пространстве  $G = S^N \times R^N$ , в котором существует поглощающая область

$$G^+ = \left\{ \phi_i \in S^1, y_i \in [y^-, y^+], i = 1, 2, \dots, N \right\}, y^\pm = \frac{\Delta \pm (2|\cos(\alpha)| + (N-1))}{\mu}. \quad (5.23)$$

Система (5.22) имеет три параметра:  $\Delta, \mu$  и  $\alpha$ . Будем фиксировать параметр  $\mu$  и рассматривать контрольную плоскость параметров  $(\alpha, \Delta)$ . Особую роль в динамике системы (5.22)

имеют состояния равновесия, которые могут существовать только при  $|\Delta| \leq (N + 1)$ . В общем случае нужно рассматривать значения параметра  $\alpha$  из отрезка  $[-\pi, \pi]$ . Учитывая то, что система (5.22) инварианта относительно преобразований

$$\Delta \rightarrow -\Delta, \alpha \rightarrow -\alpha + \pi m, \varphi_i \rightarrow -\varphi_i + \pi m, y_i \rightarrow -y_i, i = 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, \quad (5.24)$$

достаточно рассмотреть на контрольной плоскости параметров область

$$S_N = \{\alpha, \Delta \mid 0 \leq \alpha \leq \pi/2, |\Delta| \leq N + 1\}. \quad (5.25)$$

Система (5.22) обладает симметрией – ее вид не изменится при одновременной смене двух любых индексов переменных:  $p \rightarrow q$  и  $q \rightarrow p$  (изменится лишь порядок следования уравнений). Следовательно, все угловые координаты  $\varphi_i$  и линейные координаты  $y_i$  равнозначны. Поэтому, если система (5.22) имеет аттрактор (или решение), заданный в виде  $\varphi_i = f_i(t)$ ,  $y_i = g_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $t$  – время, то она будет иметь еще и аттракторы вида  $\varphi_i = f_j(t)$ ,  $y_i = g_j(t)$ , где индекс  $j$  последовательно принимает значения из наборов, представляющих собой перестановки исходного набора индексов  $\{1, 2, \dots, N\}$ , при этом некоторые решения могут совпадать.

## 5.2 Синхронные режимы

### 5.2.1 Условия существования

Синхронным режимам работы энергосети соответствуют устойчивые состояния равновесия системы (5.22). Она может иметь как однородные состояния равновесия с одинаковыми значениями угловых координат  $\varphi_i$ , так и неоднородные – с разными значениями угловых координат. Координаты  $y_i$  в обоих случаях равны нулю.

Координаты однородных состояний равновесия определяются из уравнения

$$2 \cos(\alpha) \sin(\varphi) + (N - 1) \sin(\varphi - \alpha) = \Delta, \quad (5.26)$$

разрешая его относительно неизвестной  $\varphi$ , получим два однородных состояния равновесия вида

$$O_1^{hom}(\varphi_i = -\beta^{hom} + \Omega^{hom}, y_i = 0) \text{ и } O_2^{hom}(\varphi_i = \pi - (\beta^{hom} + \Omega^{hom}), y_i = 0), i = 1, 2, \dots, N, \\ \beta^{hom} = (-1)^{\Theta(\sin(\alpha))} \arccos\left(\frac{(N+1)\cos(\alpha)}{f(N, \alpha)}\right), \Omega^{hom} = \arcsin\left(\frac{\Delta}{f(N, \alpha)}\right), \\ f(N, \alpha) = \sqrt{N^2 + 2N\cos(2\alpha) + 1}, \quad (5.27)$$

где  $\Theta(\dots)$  – функция Хэвисайда. Предполагается, что значения угловых координат приводятся в полуинтервал  $(-\pi, \pi]$ . Однородные состояния равновесия существуют при параметрах из области

$$S_N^{hom} = \{\alpha, \Delta \mid 0 \leq \alpha \leq \pi/2, |\Delta| \leq f(N, \alpha)\} \quad (5.28)$$

Координаты неоднородных состояний равновесия могут быть найдены из системы

$$\sin(\varphi_i + \alpha) = \Delta - \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \alpha), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.29)$$

Правые части уравнений системы (5.29) имеют одинаковые значения при любых  $i = 1, 2, \dots, N$ , поэтому и левые части должны быть равны между собой. Для этого достаточно положить

$$\varphi_m + \alpha = \Phi, \quad \varphi_l + \alpha = \pi - \Phi, \quad m \in M, \quad l \in L, \quad \Phi \in S^1,$$

где  $M$  и  $L$  – подмножества множества значений индексов  $\{1, 2, \dots, N\}$  такие, что  $M \cap L = \emptyset$  и  $M \cup L = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\Phi$  – неизвестная, подлежащая определению. Каждое решение системы (5.29) можно представить как набор координат  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ , в котором  $J$  штук имеют значения  $\varphi_l = -\alpha + \pi - \Phi$ , а оставшиеся  $(N - J)$  координат  $\varphi_m = -\alpha + \Phi$ ,  $J = 1, 2, \dots, N - 1$ . Одному значению  $J$  соответствуют несколько наборов, их количество определяется по формуле для перестановок с повторениями и равно  $N!/(J!(N - J)!) \equiv N_J$ . Наборы, соответствующие одному и тому же значению  $J$ , удобно объединить в группы, и присвоить каждой из них индекс равный значению  $J$  (см. табл. 5.1). Подстановка каждого из наборов  $J$ -ой группы в систему (5.29) дает одно и то же уравнение для нахождения неизвестной  $\Phi$ :

$$\sin(\Phi_J) + (N - J) \sin(\Phi - 2\alpha) + J \sin(\Phi_J + 2\alpha) = \Delta, \quad (5.30)$$

где неизвестная дополнительно снабжена индексом “ $J$ ”, указывающим на группу. Уравнение (5.30) имеет решения

$$\begin{aligned} \Phi_J^{(1)} &= -\beta_J^{inh} + \Omega_J^{inh}, \quad \Phi_J^{(2)} = \pi - (\beta_J^{inh} + \Omega_J^{inh}), \\ \beta_J^{inh} &= -1^{(1-\Theta(b_J))} \arccos\left(\frac{1 + N \cos(2\alpha)}{g(N, J, \alpha)}\right), \quad \Omega_J^{inh} = \arcsin\left(\frac{\Delta}{g(N, J, \alpha)}\right), \\ b_J &= (-N + 2J) \sin(2\alpha), \quad g(N, J, \alpha) = \sqrt{(1 + N \cos(2\alpha))^2 + b_J^2}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

которые существуют при параметрах из области

$$S_{N,J}^{inh} = \{\alpha, \Delta \mid 0 \leq \alpha \leq \pi/2, |\Delta| \leq g(N, J, \alpha)\} \quad (5.32)$$

номер группы J:	1			2		
номер набора:	1	2	3	1	2	3
$\varphi_1 + \alpha =$	$\Phi$	$\Phi$	$\pi - \Phi$	$\pi - \Phi$	$\pi - \Phi$	$\Phi$
$\varphi_2 + \alpha =$	$\Phi$	$\pi - \Phi$	$\Phi$	$\pi - \Phi$	$\Phi$	$\pi - \Phi$
$\varphi_3 + \alpha =$	$\pi - \Phi$	$\Phi$	$\Phi$	$\Phi$	$\pi - \Phi$	$\pi - \Phi$

Таблица 5.1: Группы и наборы при  $N = 3$ . В качестве примера серым цветом выделен 2-ой набор из 1-ой группы. Для удобства вместо переменных  $\varphi_i$  рассматриваются суммы  $\varphi_i + \alpha$ .



Из-за наличия двух корней общее число наборов необходимо удвоить. Непосредственной подстановкой решений  $\Phi_J^{(1)}$  и  $\Phi_J^{(2)}$ ,  $J = 1, 2, \dots, N-1$  в наборы из соответствующих групп можно убедиться в том, что часть наборов совпадут друг с другом. Нетрудно установить, что при нечетных  $N$  достаточно рассмотреть группы с номерами  $J = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ , остальные же группы, содержат наборы в точности повторяющие наборы из указанных групп. При четных  $N$  достаточно рассмотреть группы с номерами  $J = 1, 2, \dots, (N/2-1)$ , а также группу с номером  $N/2$ , но только при  $\Phi_{N/2} = \Phi_{N/2}^{(1)}$ . Полученные неповторяющиеся наборы определяют угловые координаты неоднородных состояний равновесия системы (5.22), их число  $N_{ss}$  определяется по формуле

$$N_{ss} = \begin{cases} 2 \sum_{J=1}^{(N-1)/2} \frac{N!}{J!(N-J)!}, & \text{если } N - \text{нечетное,} \\ 2 \sum_{J=1}^{N/2-1} \frac{N!}{J!(N-J)!} + \frac{N!}{((N/2)!)^2}, & \text{если } N - \text{четное.} \end{cases}$$

Координаты неоднородного состояния равновесия зависят от выбора номера группы, набора и значения  $\Phi$ . Поэтому каждое из них может быть записано в виде  $O_{J,S}^{inh,(p)}$ , где  $J$  – номер группы ( $J = 1, 2, \dots, N-1$ ),  $S$  – номер набора из выбранной группы ( $S = 1, 2, \dots, N_J$ ),  $p = 1$  соответствует выбору  $\Phi_J^{(1)}$ , а  $p = 2$  – выбору  $\Phi_J^{(2)}$ . Например, при  $N = 3$  неоднородное состояние равновесия с координатами, получающимися при подстановке  $\Phi_J^{(1)}$  во 2-ой набор 1-ой группы, можно записать в виде

$$O_{1,2}^{inh,(1)}(\varphi_1 = -\alpha + \Phi_1^{(1)}, \varphi_2 = \pi - (\alpha + \Phi_1^{(1)}), \varphi_3 = -\alpha + \Phi_1^{(1)}, y_i = 0).$$

Таким образом, система (5.22) имеет два однородных и  $N_{ss}$  неоднородных состояний равновесия.

## 5.2.2 Устойчивость в малом

Определим устойчивость состояний равновесия системы (5.22). Для этого линеаризуем ее в окрестности одного из них. Матрица линеаризованной системы  $\hat{A}_{lin}$  порядка  $2N$  имеет вид блочной матрицы

$$\hat{A}_{lin} = \begin{pmatrix} \hat{O} & \hat{E} \\ \hat{Q} & -\mu\hat{E} \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

где  $\hat{O}$  и  $\hat{E}$  – нулевая и единичная матрицы  $N$ -го порядка,  $\hat{Q}$  – матрица  $N$ -го порядка с элементами  $q_{jj} = -2 \cos(\alpha) \cos(\phi_j^*)$ ,  $q_{i,j} = -\cos(\phi_j^* - \alpha)$ ,  $i \neq j$ ,  $\phi_j^*$  – координаты состояния равновесия,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . Устойчивость особой точки определяется собственными значениями  $\varkappa_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, 2N$  матрицы  $\hat{A}_{lin}$ . Нетрудно показать, что они связаны с собственными значениями  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  матрицы  $\hat{Q}$  посредством уравнения

$$\varkappa(\varkappa + \mu) = \lambda, \quad \text{т.е. } \varkappa^\pm = 0.5(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4\lambda}), \quad (5.34)$$

где нижние индексы для простоты опущены. Таким образом, задача о собственных числах матрицы  $\widehat{A}$  сводится к таковой для матрицы  $\widehat{Q}$ , элементы которой зависят от выбора особой точки.

Для однородных состояний равновесия  $\phi_j^* = \phi^*$ , поэтому матрица  $\widehat{Q}$  принимает вид циркулянта. Собственные значения циркулянтной матрицы определяются по известной формуле [123], которая в случае с матрицей  $\widehat{Q}$  дает

$$\lambda_1 = -(2 \cos(\alpha) \cos(\phi^*) + (N - 1) \cos(\phi^* - \alpha)), \quad \lambda_k = -\cos(\phi^* + \alpha), \quad k = 2, 3, \dots, N. \quad (5.35)$$

Подставляя в выражения (5.35) координаты однородных состояний равновесия  $O_1^{hom}$  и  $O_2^{hom}$ , а затем вычисляя собственные числа  $\lambda$  с помощью уравнения (5.34), можно установить, что точка  $O_1^{hom}$  является устойчивой при параметрах из области (рис. 5.3)

$$S_N^{hom,st} = \{\alpha, \Delta \mid 0 \leq \alpha \leq \pi/2, -f(N, \alpha) < \Delta < f_1(N, \alpha), \}, \quad f_1(N, \alpha) = 1 + N \cos(2\alpha), \quad (5.36)$$

причем  $S_N^{hom,st} \subset S_N^{hom}$ , при параметрах из оставшейся части области  $S_N^{hom}$ , состояние равновесия  $O_1^{hom}$  является седловым. Точка  $O_2^{hom}$  является седловой при всех значениях параметров из области  $S_N^{hom}$ .

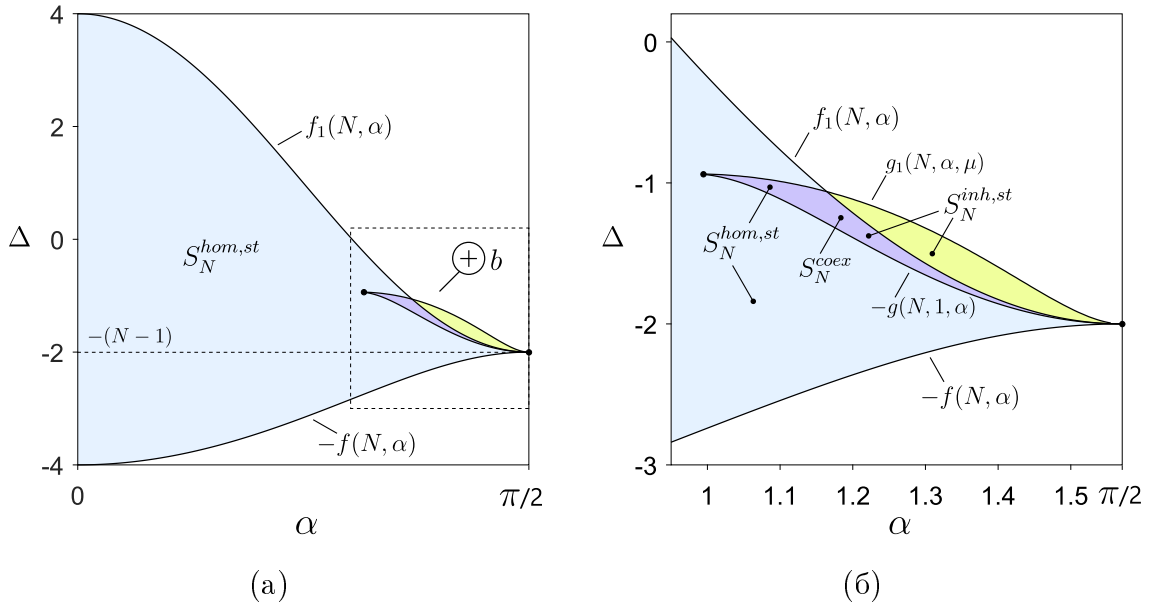


Рис. 5.3: Область существования устойчивого однородного состояния равновесия –  $S_N^{hom,st}$  (выделена голубым и фиолетовым цветами), устойчивых неоднородных состояний равновесия –  $S_N^{inh,st}$  (выделена желтым и фиолетовым цветами), а также область их сосуществования –  $S_N^{coex}$  (выделена фиолетовым цветом). Параметры:  $N = 3$ ,  $\mu = 3$

Неоднородные состояния равновесия с одинаковыми индексами  $J$  и  $p$  имеют одинаковый тип в силу указанной симметрии системы (5.22). Поэтому достаточно установить тип одного из них. Выберем состояние равновесия с координатами из набора, принадлежащего  $J$ -ой группе, такое, что

$$\varphi_m^* = -\alpha + \Phi, \quad \varphi_l^* = \pi - (\alpha + \Phi), \quad m = 1, 2, \dots, N - J, \quad l = N - J + 1, \dots, N, \quad (5.37)$$

при этом  $\Phi$  может принимать значения  $\Phi_J^{(1)}$  или  $\Phi_J^{(2)}$ . Подставляя координаты (5.37) особой точки в выражения для элементов матрицы  $\widehat{Q}$ , установим, что она имеет вид блочной матрицы

$$\widehat{Q} = \begin{pmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & \widehat{D} \end{pmatrix},$$

где  $\widehat{A}$  – симметричная матрица размера  $(N - J) \times (N - J)$  с элементами  $a_{i,j} = -\cos(\Phi - 2\alpha)$ ,  $a_{i,i} = -2\cos(\alpha)\cos(\Phi - \alpha)$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N - J$ ,  $\widehat{B} = \cos(\Phi + 2\alpha)\widehat{G}_{(N-J) \times J}$ , где  $\widehat{G}_{(N-J) \times J}$  – матрица единиц размера  $(N - J) \times J$ ,  $\widehat{C} = -\cos(\Phi - 2\alpha)\widehat{G}_{J \times (N-J)}$ , где  $\widehat{G}_{J \times (N-J)}$  – матрица единиц размера  $J \times (N - J)$ ,  $\widehat{D}$  – симметричная матрица размера  $J \times J$  с элементами  $d_{i,j} = \cos(\Phi + 2\alpha)$ ,  $d_{i,i} = 2\cos(\alpha)\cos(\Phi + \alpha)$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, J$ . Собственные числа матрицы  $Q$  находятся из уравнения  $|Q - \lambda\widehat{E}| = 0$ , то есть необходимо вычислить определитель блочной матрицы

$$\widehat{Q}' = \begin{pmatrix} \widehat{A}' & \widehat{B}' \\ \widehat{C}' & \widehat{D}' \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

где  $\widehat{A}' = \widehat{A} - \lambda\widehat{E}$  и  $\widehat{D}' = \widehat{D} - \lambda\widehat{E}$ , а затем приравнять результат к нулю, тем самым получив уравнение относительно  $\lambda$ . Для этого можно использовать известные формулы [140] для определителя блочной матрицы

$$|\widehat{Q}'| = \begin{vmatrix} \widehat{A}' & \widehat{B}' \\ \widehat{C}' & \widehat{D}' \end{vmatrix} = \begin{cases} |\widehat{A}'| |\widehat{D}' - \widehat{C}'\widehat{A}'^{-1}\widehat{B}'|, & \text{если } |\widehat{A}'| \neq 0, \\ |\widehat{D}'| |\widehat{A}' - \widehat{B}'\widehat{D}'^{-1}\widehat{C}'|, & \text{если } |\widehat{D}'| \neq 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Нетрудно показать, что при использовании формул (5.39) необходимо вычислять только определители матриц, которые являются циркулянтами. Определители циркулянтных матриц вычисляются по известным формулам [123], поэтому, используя разложения (5.39) для вычисления  $|\widehat{Q}'|$ , а затем приравнявая результат к нулю, получим искомые уравнения для нахождения  $\lambda$ , имеющие следующие корни

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (c - a) - \text{корень кратности } (N - J - 1), \\ \lambda_2 &= (d - b) - \text{корень кратности } (J - 1), \\ \lambda_{3,4} & - \text{корни, определяемые из квадратного уравнения:} \\ \lambda^2 - \lambda(c + d + (N - J - 1)a + (J - 1)b) + (cd + (N - J - 1)ad + (J - 1)bc - ab(N - 1)) &= 0, \\ a &= -\cos(\Phi - 2\alpha), \quad b = \cos(\Phi + 2\alpha), \quad c = -2\cos(\alpha)\cos(\Phi - \alpha), \quad d = 2\cos(\alpha)\cos(\Phi + \alpha). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Подставляя в выражения (5.40) значение  $\Phi_J^{(1)}$  или  $\Phi_J^{(2)}$ , соответствующее выбранному состоянию равновесия, получим корни  $\lambda$ , затем с помощью формул (5.34) найдем собственные числа  $\varkappa$ , которые определяют устойчивость состояния равновесия.

Таким образом, установлено, что устойчивыми могут быть только состояния равновесия с  $J = 1$  и  $p = 2$ , то есть точки  $O_{1,S}^{inh,(2)}$ ,  $S = 1, 2, \dots, N$ , которые для простоты обозначим через

$$\begin{aligned} & O_{1,st}^{inh} \left( -\alpha + \Phi_1^{(2)}, -\alpha + \Phi_1^{(2)}, \dots, -\alpha + \Phi_1^{(2)}, -\alpha + \Phi_1^{(2)}, \pi - (\alpha + \Phi_1^{(2)}) \right), \\ & O_{2,st}^{inh} \left( -\alpha + \Phi_1^{(2)}, -\alpha + \Phi_1^{(2)}, \dots, -\alpha + \Phi_1^{(2)}, \pi - (\alpha + \Phi_1^{(2)}), -\alpha + \Phi_1^{(2)} \right), \\ & \vdots \\ & O_{N,st}^{inh} \left( \pi - (\alpha + \Phi_1^{(2)}), -\alpha + \Phi_1^{(2)}, \dots, -\alpha + \Phi_1^{(2)}, -\alpha + \Phi_1^{(2)}, -\alpha + \Phi_1^{(2)} \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

При этом параметры системы (5.22) должны принадлежать области (рис. 5.3)

$$S_N^{inh,st} = \{ \alpha, \Delta \mid \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, -g(N, 1, \alpha) < \Delta < g_1(N, \alpha, \mu) \}, \quad (5.42)$$

где кривая  $g_1(N, \alpha, \mu)$  определяется из следующих условий. Корням  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  соответствуют корни  $\varkappa_3^\pm$  и  $\varkappa_4^\pm$  уравнения (5.34). На кривой  $g_1(N, \alpha, \mu)$  собственные значения  $\varkappa_3^+$  и  $\varkappa_4^+$  образуют пару чисто мнимых комплексно-сопряженных чисел, что соответствует бифуркации Андронова–Хопфа неоднородных состояний равновесия (5.41). Справа от кривой эти точки теряют устойчивость и в их окрестностях возможно возникновение колебательных предельных циклов. При значении параметра  $\alpha$  равном  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$  кривые  $-g(N, 1, \alpha)$  и  $g_1(N, \alpha, \mu)$  пересекаются. С ростом параметра  $\mu$  площадь области  $S_N^{inh,st}$  увеличивается.

При  $N > 2$  существует непустая область параметров  $S_N^{coex} = S_N^{hom,st} \cap S_N^{inh,st}$ , отвечающая сосуществованию однородных и неоднородных устойчивых состояний равновесия (рис. 5.3). Случай  $N = 2$  является частным, так как  $S_2^{coex} = \emptyset$ . Он подробно рассмотрен в разделах 5.4 – 5.5, поэтому далее будем предполагать, что  $N > 2$ .

### 5.2.3 Характеристики

Установим характеристики синхронных режимов – стационарные значения токов и мощностей генераторов. Будем различать однородные и неоднородные синхронные режимы в соответствии с состояниями равновесия, которые являются их математическими образами. Для вычисления стационарных значений токов по формуле (1.5) необходимо знать значения  $\delta_i$ , однако координаты устойчивых состояний равновесия представляют собой разности  $\delta_1 - \delta_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Поэтому вместо токов  $I_j$  удобно вычислить величины  $I'_j = I_j e^{-i\delta_1}$ . При этом согласно (5.18) и (5.19) достаточно рассматривать только значения ЭДС  $E$  и  $E_1$ , а также проводимостей  $Y_{11}$ ,  $Y_{1,2}$ ,  $Y_{2,2}$  и  $Y_{2,3}$ , что справедливо и в случае вычисления мощностей генераторов.

Стационарные значения  $I'_j$  в однородном синхронном режиме определяются выражениями

$$\begin{aligned} I'_1(O_1^{hom}) &= E_1 Y_{1,1} - N E Y_{1,2} e^{-i\varphi^{hom}}, \quad \varphi^{hom} = -\beta^{hom} + \Omega^{hom}, \\ I'_k(O_1^{hom}) &= E Y_{2,2} e^{-i\varphi^{hom}} - E_1 Y_{1,2} - (N-1) E Y_{2,3} e^{-i\varphi^{hom}}, \quad k = 2, 3, \dots, N+1, \end{aligned} \quad (5.43)$$

откуда видно, что в общем случае  $I_1(O_1^{hom})/I_k(O_1^{hom}) = I'_1(O_1^{hom})/I'_k(O_1^{hom}) \neq 1$ , более того  $|I_1(O_1^{hom})/I_k(O_1^{hom})| \neq 1$ . Используя выражение (5.7), стационарные мощности генераторов запишем в виде

$$\begin{aligned} P_1(O_1^{hom}) &= P_{1,0} + NK_{1,2} \sin(\varphi^{hom} - \alpha), \\ P_k(O_1^{hom}) &= P_{2,0} - K_{1,2} \sin(\varphi^{hom} + \alpha) - (N-1)K_{2,3} \sin(\alpha_{2,3}), \quad k = 2, 3, \dots, N+1, \end{aligned} \quad (5.44)$$

где  $P_{1,0} = |E_1|^2 |Y_{1,1}| \sin(\alpha_{1,1})$ ,  $P_{2,0} = |E|^2 |Y_{2,2}| \sin(\alpha_{2,2})$ . Следовательно, в однородном синхронном режиме по всем линиям передачи, кроме первой, текут равные токи (в соответствующих участках), при этом все генераторы, кроме первого, выдают в сеть одинаковую мощность.

Стационарные значения  $I'_j$  в неоднородном синхронном режиме, которому соответствует устойчивое состояние равновесия  $O_{l,st}^{inh}$ ,  $l = 1, 2, \dots, N$ , определяются выражениями

$$\begin{aligned} I'_1(O_{l,st}^{inh}) &= E_1 Y_{1,1} + E Y_{1,2} e^{i(\alpha + \Phi_1^{(2)})} - (N-1) E Y_{1,2} e^{i(\alpha - \Phi_1^{(2)})}, \\ I'_{l+1}(O_{l,st}^{inh}) &= -E Y_{2,2} e^{i(\alpha + \Phi_1^{(2)})} - E_1 Y_{1,2} - (N-1) E Y_{2,3} e^{i(\alpha - \Phi_1^{(2)})}, \\ I'_k(O_{l,st}^{inh}) &= E Y_{2,2} e^{i(\alpha - \Phi_1^{(2)})} - E_1 Y_{1,2} + E Y_{2,3} e^{i(\alpha + \Phi_1^{(2)})} - (N-2) E Y_{2,3} e^{i(\alpha - \Phi_1^{(2)})}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

стационарные значения мощностей генераторов задаются как

$$\begin{aligned} P_1(O_{l,st}^{inh}) &= P_{1,0} + K_{1,2} \sin(2\alpha + \Phi_1^{(2)}) - (N-1) K_{1,2} \sin(2\alpha - \Phi_1^{(2)}), \\ P_{l+1}(O_{l,st}^{inh}) &= P_{2,0} - K_{1,2} \sin(\Phi_1^{(2)}) + (N-1) K_{2,3} \sin(\alpha_{2,3} - 2\Phi_1^{(2)}), \\ P_k(O_{l,st}^{inh}) &= P_{2,0} - K_{1,2} \sin(\Phi_1^{(2)}) + K_{2,3} \sin(\alpha_{2,3} + 2\Phi_1^{(2)}) - (N-2) K_{2,3} \sin(\alpha_{2,3}), \end{aligned} \quad (5.46)$$

где  $k \neq l+1$ ,  $k = 2, 3, \dots, (N+1)$ . В неоднородном синхронном режиме токи в ветвях, содержащих генераторы с номерами  $k$ , имеют одинаковые значения, отличаются от них только токи  $I_1$  и  $I_{l+1}$ . Аналогично, все генераторы, кроме первого и  $(l+1)$ -го, выдают в сеть одинаковые мощности. Если же в выражении (5.46) пренебречь слагаемыми с  $K_{2,3}$ , что делается при переходе к редуцированной эффективной сети, то получим равные мощности всех генераторов, кроме первого. В этом случае можно показать, что при параметрах из области  $S_N^{coex}$  суммарная мощность, выдаваемая генераторами в неоднородном синхронном режиме больше таковой в однородном синхронном режиме. Таким образом, неоднородные синхронные режимы являются более выгодными с точки зрения величины генерируемой мощности.

### 5.3 Мультистабильность режимов

Рассмотрим разбиение области существования синхронных режимов  $S_N^{syn} = S_N^{hom,st} \cup S_N^{inh,st}$  на подобласти с различными комбинациями режимов работы энергосети – карту режимов. При этом ограничимся значениями  $\alpha \in [0.93, \pi/2]$ . Подобласть, соответствующую существованию только синхронных режимов (однородного или неоднородных), обозначим через  $a_{syn}$ .

Параметры, при которых наряду с синхронными режимами сосуществуют квазисинхронные, асинхронные или квазисинхронные и асинхронные режимы одновременно, отнесем к подобластям  $a_{quasi}$ ,  $a_{asyn}$  или  $a_{qs,as}$ , соответственно. Проследим за видом подобластей при изменении параметра  $\mu$  и числа генераторов энергосети  $n$  (или  $N$ ).

При  $N = 3$  и  $\mu = 1.3$  область  $S_3^{syn}$  разбивается на три подобласти:  $a_{syn}$ ,  $a_{quasi}$  и  $a_{asyn}$ , причем последняя состоит из трех подобластей  $a_{asyn}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$  (рис. 5.4, а). Подобласть  $a_{syn}$  занимает большую часть области  $S_3^{syn}$ . Она пересекает области существования однородных ( $S_3^{hom,st}$ ) и неоднородных ( $S_3^{inh,st}$ ) синхронных режимов, а также область их сосуществования ( $S_3^{coex}$ ). Поэтому при соответствующем выборе параметров  $\alpha$  и  $\Delta$  можно гарантировать установление в энергосети одного из видов синхронных режимов или же их сосуществование. В последнем случае установление одного из них будет зависеть от начальных условий. Подобласть  $a_{quasi}$  прилегает к области ( $S_3^{inh,st}$ ) по ее верхней границе  $g_1(3, \alpha, 1.3)$ , на которой происходит бифуркация Андронова-Хопфа неоднородных состояний равновесия. В результате нее и образуются колебательные аттракторы, соответствующие квазисинхронным режимам из области  $a_{quasi}$ .

При увеличении параметра  $\mu$  подобласть  $a_{syn}$  растет, подобласть  $a_{quasi}$  деформируется и уменьшается, в том числе за счет подъема ее нижней границы  $g_1(3, \alpha, \mu)$  (рис. 5.4, б,в). Подобласть  $a_{asyn}^{(1)}$  уменьшается, так что ее верхняя граница приближается к кривой  $-f(3, \alpha)$ , подобласть  $a_{asyn}^{(2)}$  тоже уменьшается, а подобласть  $a_{asyn}^{(3)}$  исчезает (рис. 5.4, б,в). Таким образом, увеличение или уменьшение параметра  $\mu$  приводит к таким же изменениям подобласти  $a_{syn}$  при фиксированном количестве генераторов.

При фиксированном значении параметра  $\mu = 1.7$  получены карты режимов для энергосетей с разным числом генераторов (рис. 5.4, в-д). Так как изменение числа генераторов приводит к изменению области  $S_N^{syn}$ , то, сравнивая результаты для разных  $N$ , будем говорить о размере подобласти ( $a_{syn}$ ,  $a_{quasi}$ ,  $a_{asyn}$  и  $a_{qs,as}$ ), подразумевая под ним отношение площади подобласти к площади содержащей ее части области  $S_N^{syn}$ . Увеличение энергосети (количества генераторов) приводит к уменьшению доли подобласти  $a_{syn}$  и росту долей подобластей  $a_{quasi}$  и  $a_{asyn}$  в разбиении области  $S_N^{syn}$  (рис. 5.4, в-д). Причем растет как подобласть  $a_{asyn}^{(1)}$ , так и  $a_{asyn}^{(2)}$ . В случае  $N = 5$  появляется подобласть  $a_{qs,as}$  (рис. 5.4, д). По всей видимости, ее появление обусловлено пересечением подобластей  $a_{asyn}^{(1)}$  и  $a_{quasi}$ , которые при  $\mu < 1.7$  могут быть обособлены друг от друга. При увеличении  $N$  верхняя граница подобласти  $a_{asyn}^{(1)}$  поднимается, тем самым сокращая долю области  $a_{syn}$  вплоть до нуля при достаточно больших размерах энергосети ( $N > 10$ ).

Если рассматривать абсолютный размер подобласти  $a_{asyn}$ , то, нетрудно видеть (рис. 5.4, в-д), что он растет при увеличении  $N$ . Однако при фиксированном параметре  $\alpha$ , то есть при неизменных характеристиках линий передачи и нагрузки, длина диапазона(-ов) безопасных значений (из подобласти  $a_{syn}$ ) параметра  $\Delta$ , отвечающего за разность мощностей первичных двигателей генераторов – хаба и периферийных узлов эффективной сети, может как уменьшаться (например, при  $\alpha = 1.3$ ), так и увеличиваться (например, при  $\alpha = 1$ ). Это справедливо до достижения  $N$  некоторого порогового значения, определяемого величиной  $\mu$ ,

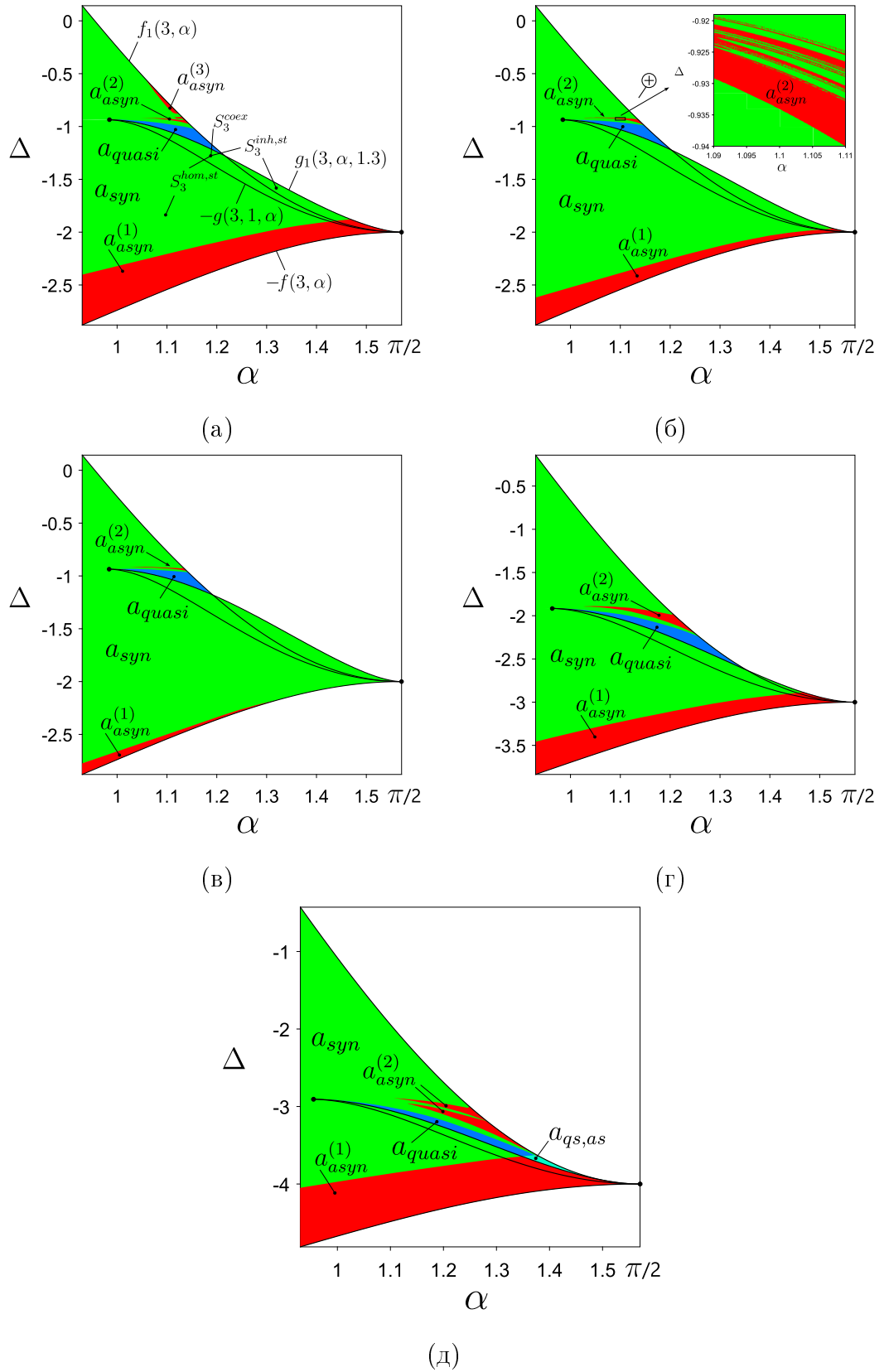


Рис. 5.4: Разбиения области  $S_N^{syn}$  на подобласти  $a_{syn}$ ,  $a_{quasi}$ ,  $a_{asyn}$  и  $a_{qs,as}$ , выделенные зеленым, синим, красным и бирюзовым цветом, соответственно, при  $N = 3$ ,  $\mu = 1.3$  (а),  $N = 3$ ,  $\mu = 1.5$  (б),  $N = 3$ ,  $\mu = 1.7$  (в),  $N = 4$ ,  $\mu = 1.7$  (г) и  $N = 5$ ,  $\mu = 1.7$  (д). На рисунке (б) приведен увеличенный фрагмент подобласти  $a_{asyn}^{(2)}$ .

после чего длина диапазона безопасных значений параметра  $\Delta$  (если он не пустой) начинает сокращаться вплоть до нуля.

Полученные результаты дают основание полагать, что при неизменном устройстве передающих систем и нагрузки (параметр  $\alpha$ ), для обеспечения резерва мощности первичных двигателей генераторов (диапазона безопасных значений  $\Delta$  фиксированной длины) демпферный коэффициент ( $\mu$ ) должен увеличиваться вместе с размером энергосети ( $N$ ), по всей видимости, из-за того, что нагрузка в виде постоянного сопротивления ( $Re(Z^{load}) > 0$ ) не может достаточно быстро потреблять вырабатываемую генераторами мощность.

Заметим, что во всех рассмотренных случаях (рис. 5.4) область  $a_{asyn}^{(2)}$  имеет сложное строение. Она состоит из отдельных полос, которые чередуются с полосами, принадлежащими подобласти  $a_{syn}$  (см. рис. 5.4, б). Характерная толщина некоторых полос значительно меньше, чем максимальный (по  $\Delta$ ) размер рассматриваемой части области  $S_N^{syn}$  равный  $f_1(N, 0.93) - (-f(N, 0.93))$ . С практической точки зрения, использование указанных полос подобласти  $a_{syn}$  нецелесообразно, так как параметры  $\alpha$  и  $\Delta$  задаются с определенной погрешностью, которая может привести к их попаданию в полосу, принадлежащую подобласти  $a_{asyn}^{(2)}$ , с последующим переходом энергосети в асинхронный режим.

## 5.4 Задачи о безопасном отключении и подключении генератора

Рассмотрим задачи об отключении и подключении генератора к энергосети. В их рамках необходимо определить реакцию генераторов энергосети на отключение одного из них или на подключение нового генератора, то есть установить условия существования и установления синхронного режима в измененной энергосети. Отключение генератора может быть связано со срабатыванием релейной (токовой) защиты на его линии передачи из-за возникновения короткого замыкания, или с плановой остановкой машины на ремонт. Подключение генератора, реализующего резерв мощности, связано, например, с резким увеличением нагрузки и осуществляется посредством устройства АВР (автоматического включения резерва) [6].

Для решения указанных задач в рамках МЭС введем ряд упрощающих предположений.

- Возможно отключение любого генератора, кроме первого. Параметры подключаемого генератора и его передающей системы такие же как и у генераторов исходной сети, кроме первого.
- Предыдущее условие позволяет применять к измененной энергосети уравнения (5.22), описывающие динамику редуцированной эффективной сети.
- Будем считать, что изначально система работала в синхронном режиме (однородном или неоднородном), поэтому координаты соответствующего состояния равновесия примем за начальные условия для системы (5.22), описывающей измененную энергосеть.



- Параметры  $\alpha, \Delta$  и  $\mu$  в измененной сети имеют те же значения, что и аналогичные параметры в исходной сети.

Последнее предположение нуждается в обосновании. Рассмотрим упрощенную схему замещения линии передачи, состоящую из последовательно соединенных активного и реактивного сопротивлений. В этом случае передающая система  $i$ -го генератора может быть замещена импедансом  $Z_i = r_i + ix_i$ , поэтому формулы (5.6) для  $Y_{i,i}$  и  $Y_{i,j}$  переписутся в виде

$$Y_{i,i} = \frac{1}{C_Z} \left( \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^n Z_k + Z_{load} \sum_{\substack{k=1, \\ k \neq i}}^n \prod_{\substack{l=1, \\ l \neq k, i}}^n Z_l \right), \quad Y_{i,j} = \frac{1}{C_Z} \left( Z_{load} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq i, j}}^n Z_k \right), \quad (5.47)$$

$$C_Z = \prod_{k=1}^n Z_k + Z_{load} \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n Z_l, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Полагая, как и ранее, передающие системы всех генераторов, кроме первого, одинаковыми ( $Z_k = Z, k = 2, 3, \dots, n$ ), получим

$$Y_{1,j} = \frac{Z_{load}}{Z_1 Z + Z_{load} Z + N Z_{load} Z_1}, \quad Y_{i,j} = Y_{1,j} \frac{Z_1}{Z}, \quad Y_{1,1} = \frac{1 - Z Y_{1,j}}{Z_1}, \quad Y_{j,j} = \frac{1 - Z_1 Y_{1,j}}{Z}, \quad (5.48)$$

$$i \neq j, \quad i, j = 2, 3, \dots, n.$$

Поэтому достаточно знать только одну взаимную проводимость, например,  $Y_{1,2}$ , чтобы определить остальные. Условие (5.20), при котором возможен переход к редуцированной эффективной сети, переписывается в виде

$$|Z_1 E| \ll |Z E_1|. \quad (5.49)$$

Считая его выполненным, снова придем к уравнениям (5.22). При подключении или отключении генератора число  $N$  в формулах (5.48) нужно заменить на  $N + 1$  или  $N - 1$ , соответственно. Предположим, что линия передачи первого генератора кабельная, тогда  $Z_1$  можно приближенно положить равным  $r_1$  [133]. Если  $|E_1|$  и  $|E|$  – величины одного порядка, то неравенство (5.49) будет удовлетворено, если  $|Z_1| \ll |Z|$ , то есть  $r_1 \ll \sqrt{r^2 + x^2}$ . Вместо  $Y_{1,2}$  рассмотрим обратную величину

$$Z_{1,2} = Y_{1,2}^{-1} = r \left( 1 + \frac{r_1}{r_{load}} \right) + N r_1 + ix \left( 1 + \frac{r_1}{r_{load}} \right).$$

При изменении  $N$  меняется только реальная часть  $Z_{1,2}$ . Например, при подключении генератора взаимное сопротивление  $Z_{1,2}$  меняется на  $Z_{1,2}^+$ , реальная часть которого равна

$$Re(Z_{1,2}^+) = r \left( 1 + \frac{r_1}{r_{load}} \right) + N r_1 + r_1 > (r + N r_1) + r_1,$$

откуда видно, что величиной  $r_1$  можно пренебречь по сравнению с  $(r + N r_1)$  при достаточно больших значениях  $N$  или при  $r_1 \ll r$ , что может иметь место при выполнении условий перехода к редуцированной эффективной сети. Аналогичные рассуждения можно провести

и для взаимного сопротивления  $Z_{1,2}^-$ , получающегося при отключении генератора. Поэтому, приближенно можно считать, что  $Re(Z_{1,2}) \approx Re(Z_{1,2}^\pm)$ , то есть при подключении или отключении генератора величины  $Z_{1,2}$  и  $Y_{1,2}$  остаются почти неизменными. Тогда, согласно (5.48), не изменяются и остальные собственные и взаимные проводимости, которые входят в выражения для параметров  $\alpha$ ,  $\Delta$  и  $\mu$ , следовательно, они тоже не претерпевают значительных изменений.

Обозначим число координат  $\varphi_i$  (или  $y_i$ ), описывающих состояние исходной энергосети, через  $N_1$ , а число аналогичных координат, необходимых для описания измененной энергосети, через  $N_2$ . При подключении генератора  $N_2 = N_1 + 1$ , а при отключении  $N_2 = N_1 - 1$ . Тогда, с учетом принятых предположений, динамика измененной энергосети описывается уравнениями (5.22) при  $N = N_2$ , относительно  $2N_2$  координат. При этом параметры  $\alpha$ ,  $\Delta$  и  $\mu$  имеют одинаковые значения для исходной ( $N = N_1$ ) и измененной ( $N = N_2$ ) энергосетей.

Подключение или отключение генератора будем считать безопасным, если в измененной энергосети устанавливается синхронный режим. Это возможно, если области существования устойчивых состояний равновесия системы (5.22) при  $N = N_1$  и  $N = N_2$  имеют пересечение, что действительно имеет место. Обозначим его через  $a$  (рис. 5.5). При  $N_1, N_2 > 2$  область  $a$  разбивается на три подобласти  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  (рис. 5.5). Пусть  $N_2 = N_1 - 1$ , то есть происходит отключение генератора, тогда при параметрах из подобластей  $a_i$  система (5.22) при  $N = N_1$  и  $N = N_2$  имеет устойчивые точки, приведенные в таблице 5.2.

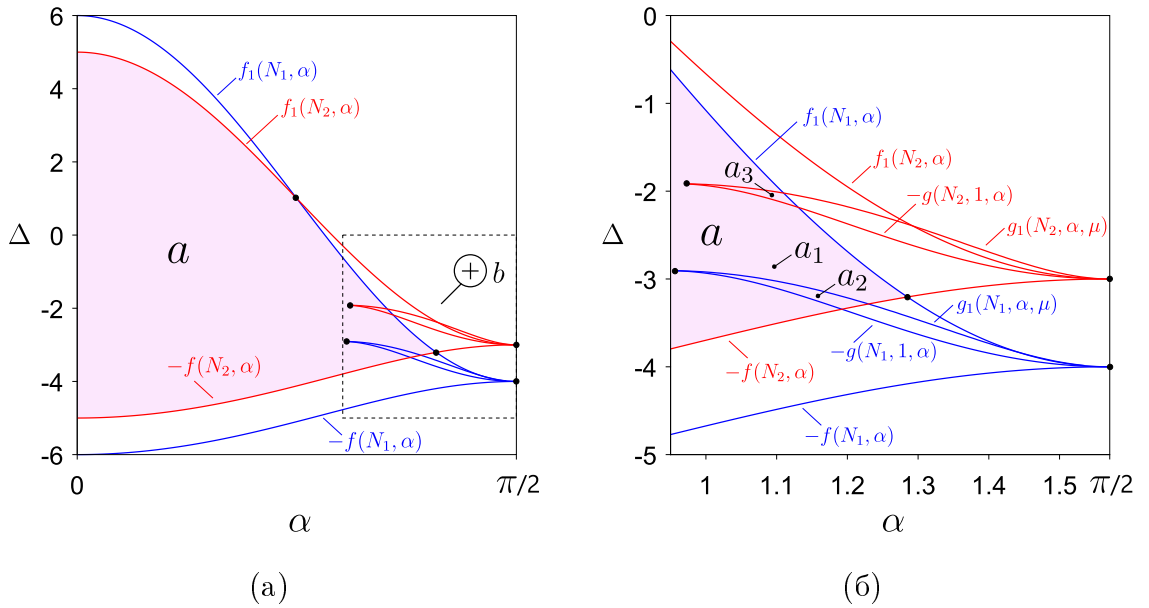


Рис. 5.5: Область  $a$  (выделена розовым цветом) и подобласти  $a_i$ , а также кривые, образующие их границы. Параметры:  $N_1 = 5$ ,  $N_2 = 4$ ,  $\mu = 3$ .

На основании таблицы 5.2 можно определить виды рабочих режимов в исходной и измененной энергосети. Например, если  $(\alpha, \Delta) \in a_3$ , то рабочим режимом исходной энергосети является однородный синхронный режим, которому соответствует состояние равновесия  $O_1^{hom}$  системы (5.22) при  $N = N_1$ . При отключении генератора у измененной энергосети есть несколько рабочих режимов – однородный и неоднородные синхронные режимы, которым

$a_i \backslash N$	$N_1$	$N_2$
$a_1 :$	$O_1^{hom}$	$O_1^{hom}$
$a_2 :$	$O_1^{hom}$ и $O_{l,st}^{inh}$ , $l = 1, 2, \dots, N_1$	$O_1^{hom}$
$a_3 :$	$O_1^{hom}$	$O_1^{hom}$ и $O_{l,st}^{inh}$ , $l = 1, 2, \dots, N_2$

Таблица 5.2: Устойчивые точки системы (5.22) при  $N = N_1, N_2$  ( $N_2 = N_1 - 1$ ) и параметрах из областей  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$

соответствуют особые точки  $O_1^{hom}$  и  $O_{l,st}^{inh}$  системы (5.22) при  $N = N_2$ . Аналогичную таблицу можно составить и в случае подключения генератора, для этого достаточно поменять местами второй и третий столбцы, а затем  $N_1$  переобозначить через  $N_2$  и наоборот, при этом получим  $N_2 = N_1 + 1$ . Таким же образом необходимо поменять обозначения на рисунке 5.5 и дополнительно сменить цвета кривых с синего на красный и наоборот, заменить  $a_2 \leftrightarrow a_3$ .

### 5.4.1 Условия безопасного отключения генератора

В силу установленной симметрии системы (5.22), достаточно рассмотреть реакцию энергосети на отключение любого из генераторов, кроме первого. Пусть отключается  $(N_1 + 1)$  генератор. Предполагается, что исходная энергосеть находилась в синхронном режиме, поэтому ее динамика после отключения генератора будет описываться уравнениями (5.22) при  $N = N_2$  и векторе начальных условий вида

$$\vec{v}_{init} = \left\{ \varphi_i^{(0)} = \varphi_{i,forN_1}^*, y_i^{(0)} = 0 \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N_2 \quad (5.50)$$

где  $\varphi_{i,forN_1}^*$  – координаты устойчивого состояния равновесия системы (5.22) при  $N = N_1$ , о чем свидетельствует нижний индекс. Причем используются все угловые координаты, кроме последней.

Если исходная энергосеть работала в однородном синхронном режиме, то

$$\vec{v}_{init,1}^{hom} = \left\{ \varphi_i^{(0)} = \varphi_{forN_1}^{hom}, y_i^{(0)} = 0 \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N_2, \quad (5.51)$$

где  $\varphi_{forN_1}^{hom} \equiv \varphi^{hom}$ . По аналогии с особыми точками, назовем такие начальные условия однородными.

Если исходная энергосеть работала в одном из неоднородных синхронных режимов, то существуют два типа начальных условий при отключении  $(N_1 + 1)$ -го генератора. При выборе синхронного режима, которому соответствует точка  $O_{1,st}^{inh}$  системы (5.22) при  $N = N_1$ , для той же системы при  $N = N_2$  имеем вектор однородных начальных условий вида

$$\vec{v}_{init,2}^{hom} = \left\{ \varphi_i^{(0)} = -\alpha + \Phi_{1,forN_1}^{(2)}, y_i^{(0)} = 0 \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N_2, \quad (5.52)$$

где  $\Phi_{1,forN_1}^{(2)} \equiv \Phi_1^{(2)}$  при  $N = N_1$ . Если же выбрать один из синхронных режимов, которым соответствуют точки  $O_{l,st}^{inh}$ ,  $l = 2, 3, \dots, (N_1 - 1)$ , то получим  $(N_1 - 2)$  векторов неоднородных

начальных условий, угловые координаты которых совпадают с первыми  $(N_1 - 1)$  координатами выбранного состояния равновесия  $O_{l,st}^{inh}$ . В силу симметрии системы (5.22) достаточно рассмотреть лишь один из таких векторов начальных условий, например

$$\vec{v}_{init}^{inh} = \left\{ \varphi_k^{(0)} = -\alpha + \Phi_{1,forN_1}^{(2)}, \varphi_{N_2}^{(0)} = \pi - (\alpha + \Phi_{1,forN_1}^{(2)}), y_i^{(0)} = 0 \right\}, \quad (5.53)$$

$$k = 1, 2, \dots, N_2 - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_2.$$

Будем рассматривать часть области  $a$ , лежащую при  $\alpha > 0.93$  (рис. 5.5, б). В соответствии с таблицей 5.2, начальные условия  $\vec{v}_{init,1}^{hom}$  можно использовать при любых параметрах из области  $a$ . Вектора  $\vec{v}_{init,2}^{hom}$  и  $\vec{v}_{init}^{inh}$  можно использовать в качестве начальных условий только при параметрах из подобласти  $a_2$ . Зафиксируем параметры  $(\alpha, \Delta) \in a(a_2)$ , выберем один из векторов начальных условий (5.51-5.53), проинтегрируем систему (5.22) при  $N = N_2$  и установим, к какому аттрактору стремится траектория, то есть определим режим энергосети после отключения генератора. При конкретном векторе начальных условий, задаваемом синхронным режимом исходной энергосети, область  $a(a_2)$  разобьется на две подобласти –  $a_{syn}$  и  $a_{asyn}$ , соответствующие установлению синхронного и асинхронного режима в измененной энергосети (рис. 5.6). Такие разбиения были получены для  $N_2 = 3, 4, 5$  и при разных значениях параметра  $\mu$ .

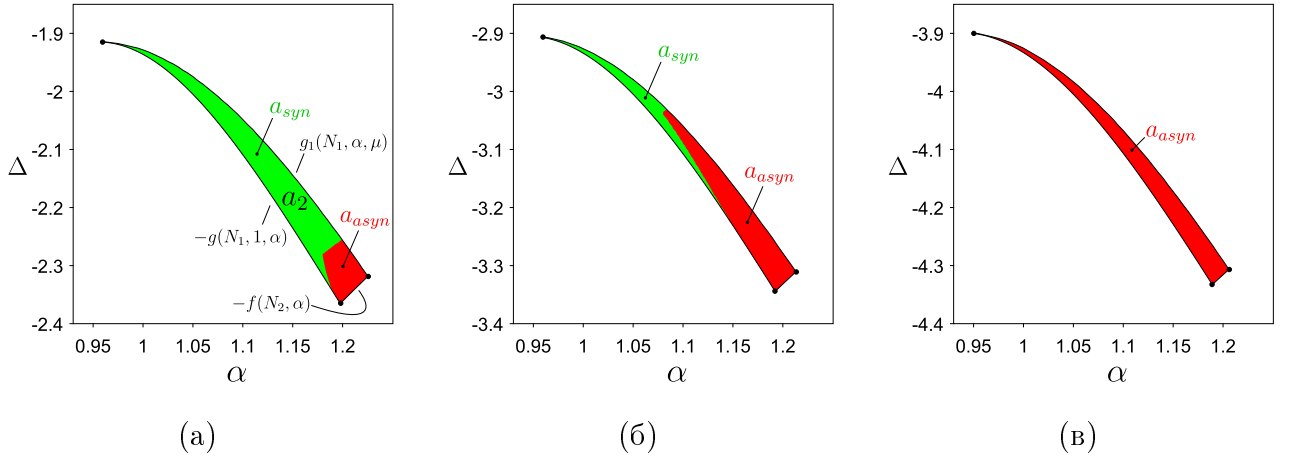


Рис. 5.6: Разбиение области  $a_2$  на подобласти  $a_{syn}$  и  $a_{asyn}$  (выделены зеленым и красным цветом, соответственно) при начальных условиях  $\vec{v}_{init}^{inh}$  для случаев  $N_2 = 3$  (а),  $N_2 = 4$  (б) и  $N_2 = 5$  (в). Параметр  $\mu = 1.5$ .

При  $\mu = 1.5$  и начальных условиях  $\vec{v}_{init,1}^{hom}$  и  $\vec{v}_{init,2}^{hom}$  подобласть  $a_{syn}$  совпадает с областями  $a$  и  $a_2$ , соответственно, при всех указанных значениях  $N_2$ . Для вектора  $\vec{v}_{init}^{inh}$  область  $a_2$  разбивается на подобласти  $a_{syn}$  и  $a_{asyn}$  при  $N_2 = 3, 4$  (рис. 5.6, а,б). С увеличением размера энергосети подобласть  $a_{asyn}$  растет и при  $N_2 = 5$  совпадает с  $a_2$  (рис. 5.6, в).

При уменьшении параметра  $\mu$  область  $a$  при начальных условиях  $\vec{v}_{init,1}^{hom}$  начинает (при  $\mu \lesssim 1$  для  $N_2 = 3$ ) делиться на подобласти  $a_{syn}$  и  $a_{asyn}$  (рис. 5.7), последняя из которых увеличивается по мере уменьшения  $\mu$ . Область  $a_2$  при начальных условиях  $\vec{v}_{init,2}^{hom}$  продолжает совпадать с  $a_{syn}$  вплоть до  $\mu = 0.5$ , однако ее размер становится значительно меньше по сравнению с размером области  $a$ , особенно при больших значениях  $N_2$ , поэтому при достаточно

маленьких  $\mu$  ( $\mu < 0.5$ ), с практической точки зрения, нет смысла рассматривать область  $a_2$ . Область  $a_2$  при начальных условиях  $\vec{v}_{init}^{inh}$ , начиная с некоторого  $\mu$ , зависящего от  $N_2$ , полностью совпадает с  $a_{asyn}$ .

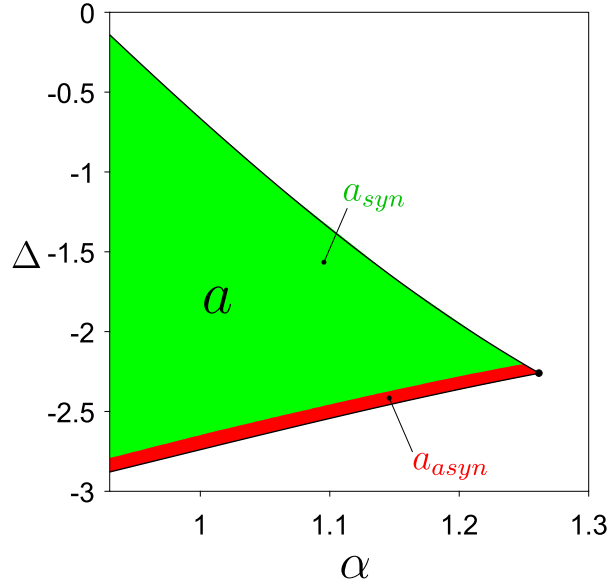


Рис. 5.7: Разбиение области  $a$  на подобласти  $a_{syn}$  и  $a_{asyn}$  при начальных условиях  $\vec{v}_{init,1}^{hom}$ . Параметры:  $N_1 = 4$ ,  $N_2 = 3$ ,  $\mu = 0.5$ .

Получим оценку снизу области  $a_{syn}$  при однородных начальных условиях  $\vec{v}_{init,1}^{hom}$  или  $\vec{v}_{init,2}^{hom}$ . При однородных начальных условиях траектория системы (5.22) должна задаваться соотношениями вида

$$\varphi_i(t) = \varphi(t), \quad y_i(t) = y(t), \quad i = 1, 2, \dots, N_2. \quad (5.54)$$

Это следует из свойств симметрии системы (5.22), согласно которым все координаты  $\varphi_i$  ( $y_i$ ) равнозначны, поэтому для траектории, стартующей с однородных начальных условий, нельзя указать какое-либо выделенное направление движения, кроме того, что задается соотношениями (5.54). Функции  $\varphi(t)$  и  $y(t)$  могут быть определены из системы

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = y, \\ \dot{y} = \Delta - \mu y - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi) - (N_2 - 1) \sin(\varphi - \alpha). \end{cases} \quad (5.55)$$

Перепишем ее в виде

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \Delta - \mu \frac{d\varphi}{dt} - f(N_2, \alpha) \sin(\varphi + \beta^{hom}(N_2, \alpha)), \quad (5.56)$$

где  $f(N_2, \alpha)$  и  $\beta^{hom}(N_2, \alpha)$  задаются соотношениями (5.27). Вводя новую переменную, параметры и время

$$\varphi_{new} = \varphi + \beta^{hom}(N_2, \alpha), \quad \gamma = \frac{\Delta}{f(N_2, \alpha)}, \quad \lambda = \frac{\mu}{\sqrt{f(N_2, \alpha)}}, \quad \tau = \sqrt{f(N_2, \alpha)}t, \quad (5.57)$$

перепишем уравнение (5.56) в виде системы

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_{new}}{d\tau} = y_{new}, \\ \frac{dy_{new}}{d\tau} = \gamma - \lambda y_{new} - \sin(\varphi_{new}), \end{cases} \quad (5.58)$$

которую нужно рассматривать только при начальных условиях  $\varphi_{new}^{(0)} = \varphi_{forN_1}^{hom} + \varphi_0$ ,  $y_{new}^{(0)} = 0$  (при  $\vec{v}_{init,1}^{hom}$ ) или  $\varphi_{new}^{(0)} = -\alpha + \Phi_{1,forN_1}^{(2)} + \varphi_0$ ,  $y_{new}^{(0)} = 0$  (при  $\vec{v}_{init,2}^{hom}$ ). Каждое из них определяет точку  $O(\varphi_{new} = \varphi_{new}^{(0)}, y_{new} = 0)$  в цилиндрическом фазовом пространстве системы (5.58).

Динамика системы (5.58) известна [137, 138]. При  $|\gamma| < 1$  она имеет два грубых состояния равновесия:  $O_1(\varphi_{new} = \varphi_1, y_{new} = 0)$  – устойчивая точка и  $O_2(\varphi_{new} = \varphi_2, y_{new} = 0)$  – седло, где  $\varphi_1 = \arcsin(\gamma)$ ,  $\varphi_2 = \pi - \arcsin(\gamma)$ . Если траектория системы (5.58), стартующая из точки  $O$ , стремится в состояние равновесия  $O_1$ , то траектория системы (5.22), задаваемая соотношениями (5.54) и стартующая с соответствующего однородного начального условия –  $\vec{v}_{init,1}^{hom}$  или  $\vec{v}_{init,2}^{hom}$ , будет стремиться в однородное состояние равновесия  $O_1^{hom}$ . Установив параметры, при которых реализуется такая ситуация, получим область  $a_{syn}$ .

Известно, что при параметрах из области

$$S_{glob} = \{\gamma, \lambda \mid -1 < \gamma < 1, \lambda > \lambda^T(|\gamma|)\},$$

где  $\lambda^T(|\gamma|)$  – кривая Трикоми [137] (см. таблицу 4.1), состояние равновесия  $O_1$  является глобально асимптотически устойчивым. Поэтому те параметры  $\mu, \Delta$  и  $\alpha$  системы (5.22), при которых  $(\gamma, \lambda) \in S_{glob}$ , принадлежат области  $a_{syn}$ .

Вне области  $S_{glob}$  при  $|\gamma| < 1$  система (5.58) имеет два аттрактора – точку  $O_1$  и вращательный предельный цикл. Чтобы установить стремится ли траектория, стартующая из точки  $O$ , в состояние равновесия  $O_1$ , можно использовать функцию Ляпунова вида [139]:

$$V(\varphi_{new}, y_{new}) = \frac{y_{new}^2}{2} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_{new}} [-\gamma + \sin(\xi)] d\xi.$$

Известно, что с помощью ее поверхностей уровня в фазовом пространстве системы (5.58) можно выделить область

$$\Omega^+ = \{\varphi_{new}, y_{new} \mid V(\varphi_{new}, y_{new}) < C_s, \varphi_0 < \varphi < \varphi_2\}, \quad C_s = V(\varphi_2, 0),$$

которая является оценкой области притяжения точки  $O_1$  (см. рис. 5.8, а). Поэтому при  $O \in \Omega^+$ , то есть при

$$\varphi_0 < \varphi_{new}^{(0)} < \varphi_2, \quad (5.59)$$

траектория системы (5.59) стремится в состояние равновесия  $O_1$  и, следовательно, траектория системы (5.22) стремится в однородное состояние равновесия  $O_1^{hom}$ .

Если при фиксированных параметрах  $\mu, \alpha, \Delta$  системы (5.22) и однородном начальном условии  $\vec{v}_{init,1}^{hom}$  (или  $\vec{v}_{init,2}^{hom}$ ) найти параметры  $\gamma$  и  $\lambda$ , то, определив с помощью описанных выше способов, стремится ли траектория системы (5.58), стартующая из точки  $O$ , в состояние

равновесия  $O_1$ , выделим параметры  $(\Delta, \alpha) \in a_{syn}$ . Таким образом, получена оценка области  $a_{syn}$ , которую обозначим через  $a_{syn}^{est}$  (рис. 5.9, б,в). При этом, если не использовалось условие (5.59), то  $a_{syn}^{est}$  совпадет с  $a_{syn}$ .

Для параметров из области  $a$  ( $a_2$ ) и однородном начальном условии  $\vec{v}_{init,1}^{hom}$  ( $\vec{v}_{init,2}^{hom}$ ) всегда существует непустая область  $a_{syn}^{est}$ , если  $\mu > 0$ . Причем часть области  $a_{syn}^{est}$ , получаемая с помощью функции Ляпунова, не зависит от  $\mu$ . Область  $a_{syn}^{est}$  дает достаточно хорошую оценку области  $a_{syn}$  (см. рис. 5.7 и рис. 5.8, б).

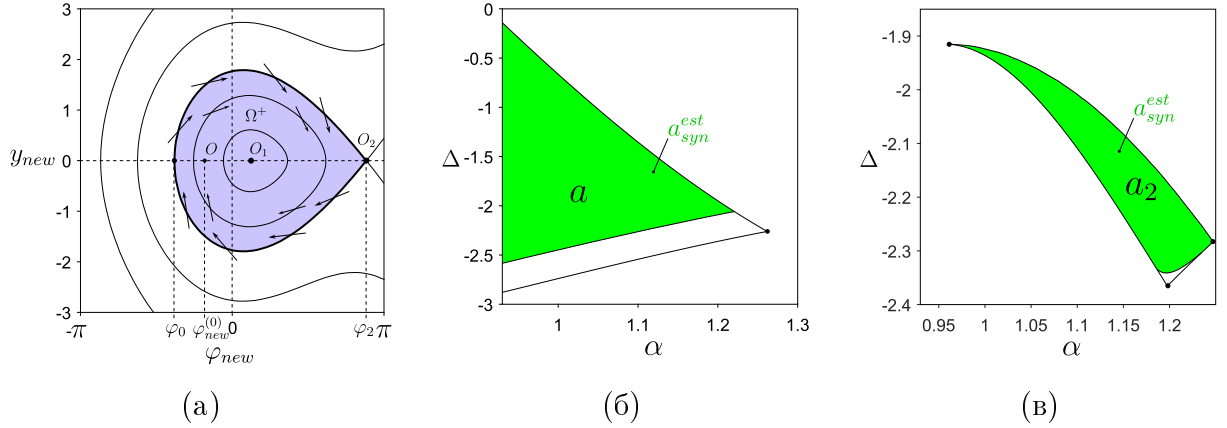


Рис. 5.8: Качественный вид линий уровня функции  $V(\varphi, y)$ , ориентация векторного поля системы (5.58) на них, а также область  $\Omega^+$  (выделена фиолетовым цветом) (а). Подобласти  $a_{syn}^{est}$  (выделены зеленым цветом) для однородных начальных условий  $\vec{v}_{init,1}^{hom}$  (б) и  $\vec{v}_{init,2}^{hom}$  (в), полученные с помощью условия (5.59) при  $N_2 = 3$ . Область  $a_2$  построена при  $\mu = 3$  для наглядного отображения границы подобласти  $a_{syn}^{est}$ .

Таким образом, при любом  $\mu > 0$  отключение генератора может быть безопасным, если синхронному режиму исходной энергосети соответствовали состояния равновесия, дающие при отключении генератора однородные начальные условия для системы (5.22), описывающей динамику измененной энергосети. Отметим, что в рассмотренных случаях, при параметрах из областей  $a_{syn}$  в измененной энергосети всегда устанавливался однородный синхронный режим.

Заметим, что в силу установленных в разделе 5.1 свойств симметрии системы (5.22) справедливо следующее замечание. Если для некоторого набора индексов  $i \in M_{ind}$ ,  $M_{ind} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$  выбрать начальные условия  $\phi_i^{(0)} = \phi^{(0)}$  и  $y_i^{(0)} = y^{(0)}$ , то при произвольных остальных начальных условиях решение системы (5.22) будет таким, что  $\phi_i(t) = \phi(t)$  и  $y_i(t) = y(t)$ . Поэтому вместо интегрирования системы (5.22) можно интегрировать систему меньшей размерности. Она получается из системы (5.22) путем замены переменных  $\phi_i$  и  $y_i$  на  $\phi$  и  $y$  для всех  $i \in M_{ind}$  и исключения получившихся после нее одинаковых уравнений, кроме одной пары для  $\phi$  и  $y$ .

### 5.4.2 Условия безопасного подключения генератора

Пусть подключаемый генератор имеет номер  $(N_2 + 1)$ . Будем предполагать, что его ротор предварительно разогнан до частоты вращения, близкой к опорной частоте сети. Если исходная энергосеть, находилась в одном из синхронных режимов, то после подключения генератора динамика измененной энергосети будет описываться уравнениями (5.22) при  $N = N_2$  ( $N_2 = N_1 + 1$ ) и начальных условиях

$$\vec{v}_{init} = \left\{ \varphi_i^{(0)} = \varphi_{i,forN_1}^*, \varphi_{N_2}^{(0)}, y_i^{(0)} = 0, y_{N_2}^{(0)} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 \quad (5.60)$$

Координаты  $\varphi_{N_2}^{(0)} = \delta_1^{(0)} - \delta_{N_2+1}$  и  $y_{N_2}^{(0)} = \dot{\delta}_1^{(0)} - \dot{\delta}_{N_2+1}$ , как видно, зависят от состояния подключаемого генератора, ротор которого был предварительно разогнан, поэтому ограничимся значениями  $\varphi_{N_2}^{(0)} \in [-\pi, \pi]$  и  $y_i = [y^-, y^+]$ , где  $y^\pm$  вычислены по формуле (5.23) при  $N = N_2$ .

Если исходная энергосеть работала в однородном синхронном режиме, то

$$\vec{v}_{init,1} = \left\{ \varphi_i^{(0)} = \varphi_{forN_1}^{hom}, \varphi_{N_2}^{(0)}, y_i^{(0)} = 0, y_{N_2}^{(0)} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 \quad (5.61)$$

Если исходная энергосеть работала в одном из неоднородных синхронных режимов, то в силу симметрии системы (5.22) при составлении вектора начальных условий можно использовать координаты любого из них, например,  $O_{N_1, st}^{inh}$ . В этом случае имеем

$$\vec{v}_{init,2} = \left\{ \varphi_k^{(0)} = -\alpha + \Phi_{1,forN_1}^{(2)}, \varphi_{N_2-1}^{(0)} = \pi - (\alpha + \Phi_{1,forN_1}^{(2)}), \varphi_{N_2}^{(0)}, y_i^{(0)} = 0, y_{N_2}^{(0)} \right\}, \quad (5.62)$$

$$k = 1, 2, \dots, N_1 - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N_1.$$

Начальные условия  $\vec{v}_{init,1}$  и  $\vec{v}_{init,2}$  можно использовать при параметрах из областей  $a$  и  $a_2$ , соответственно.

Зафиксируем параметры  $(\alpha, \Delta) \in a (a_2)$  и выберем один из векторов начальных условий. Перебирая значения координат  $\varphi_{N_2}^{(0)}$  и  $y_{N_2}^{(0)}$  из указанных диапазонов и интегрируя систему (5.22) при  $N = N_2$ , подсчитаем долю траекторий, стремящихся в устойчивые состояния равновесия, то есть определим вероятность установления синхронного режима в измененной энергосети, которую обозначим через  $P_{syn}$ . При этом область  $a (a_2)$  разобьется на подобласти двух типов. К первому из них относятся подобласти параметров  $a_{syn}$ , при которых  $P_{syn} = 1$ , а ко второму – подобласти параметров  $a_{prob}$ , при которых  $0 < P_{syn} < 1$ . Поэтому при параметрах из подобластей  $a_{syn}$  подключение генератора является безопасным, так как в измененной энергосети гарантируется установление синхронного режима. Для параметров из подобластей  $a_{prob}$  установление синхронного режима носит вероятностный характер.

Ограничимся случаем  $N_2 = 5$ , когда к энергосети, содержащей пять генераторов, подключается еще один. Установлено, что для начальных условий  $\vec{v}_{init,1}$  и значений параметра  $\mu = 1.50, 1.25$  и  $1.00$  существуют оба типа подобластей ( $a_{syn}$  и  $a_{prob}$ ). При уменьшении параметра  $\mu$  размер подобласти  $a_{syn}$  уменьшается, снижается и вероятность  $P_{syn}$  для параметров из подобластей  $a_{prob}$ , суммарный размер которых растет (рис. 5.9, а-в).



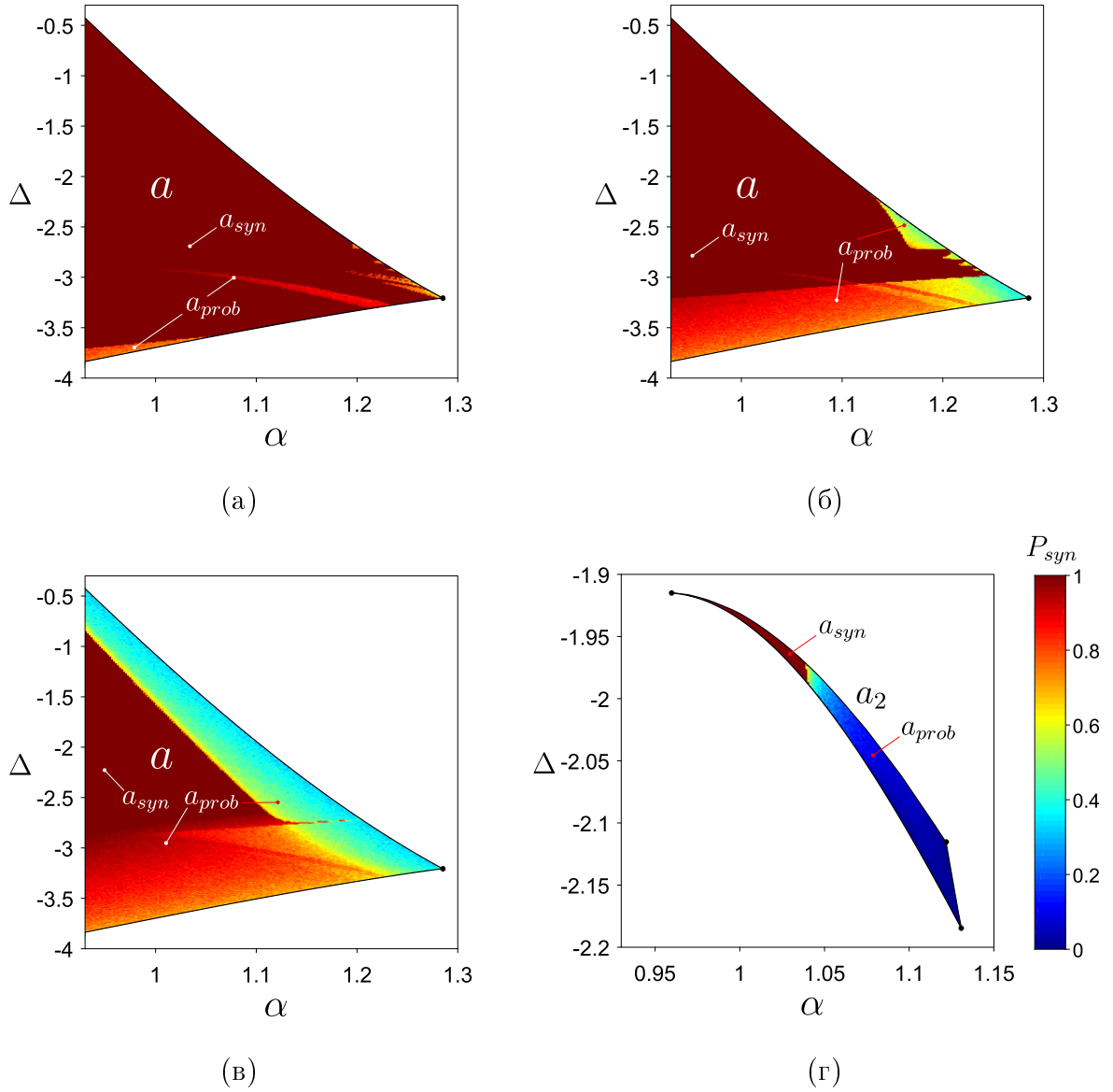


Рис. 5.9: Распределение вероятности  $P_{syn}$  в области  $a$  для начальных условий  $\vec{v}_{init,1}$  при  $\mu = 1.50$  (а),  $\mu = 1.25$  (б),  $\mu = 1.00$  (в), и в подобласти  $a_2$  для начальных условий  $\vec{v}_{init,2}$  при  $\mu = 1.00$  (г) (цвет online). Параметры:  $N_1 = 4$ ,  $N_2 = 5$ .

Для начальных условий  $\vec{v}_{init,2}$  и значений параметра  $\mu = 1.50$  или  $\mu = 1.25$  область  $a_2$  совпадает с  $a_{syn}$ , тем самым гарантируется установление синхронного режима при подключении генератора к исходной энергосети, работающей в неоднородном синхронном режиме. При  $\mu = 1.00$  наряду с подобластью  $a_{syn}$  появляется подобласть  $a_{prob}$  (рис. 5.9, г).

Здесь мы не различали однородные и неоднородные синхронные режимы в измененной энергосети. Однако установлено, что при рассмотренных значениях параметра  $\mu$ , вероятность установления однородного синхронного режима значительно выше таковой для неоднородного синхронного режима, если они сосуществуют. При параметрах из областей  $a_{syn}$  устанавливается исключительно однородный синхронный режим. При параметрах из областей  $a_{prob}$  вероятность установления неоднородного синхронного режима не превышает 0.13.

Таким образом, можно предположить, что в рассматриваемой задаче о подключении ге-

нератора, решающую роль в сохранении синхронного режима играет однородное состояние равновесия  $O_1^{hom}$  системы (5.22) при  $N = N_2$ , точнее его область притяжения. Отыскание последней в случае многомерной динамической системы представляется затруднительным, поэтому и приходится прибегать к вычислению вероятностей.

## 5.5 Мультистабильность синхронных режимов в трехмашинной энергосети

В качестве примера многомашинной энергосети, для которой в рамках МЭС осуществлен переход от эффективной сети с глобальными связями между узлами к сети с хаб-топологией, рассмотрим трехмашинную энергосеть ( $n = 3$ ,  $N = 2$ ). Ее динамика задается уравнениями (5.22) при  $N = 2$ , которые для удобства перепишем в виде

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = y_1, \\ \dot{\varphi}_2 = y_2, \\ \dot{y}_1 = \Delta - \mu y_1 - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2 - \alpha), \\ \dot{y}_2 = \Delta - \mu y_2 - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \alpha). \end{cases} \quad (5.63)$$

Согласно пункту 5.2 система (5.63) может иметь до четырех состояний равновесия. Два однородных –  $O_1^{hom}$  и  $O_2^{hom}$ , а также два неоднородных –  $O_1^{inh}$  и  $O_2^{inh}$ . Для удобства переобозначим  $O_1^{hom}$  и  $O_2^{hom}$  через  $O_1$  и  $O_2$ , а  $O_1^{inh}$  и  $O_2^{inh}$  через  $O_3$  и  $O_4$ , соответственно. Однородные состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  существуют при параметрах из области  $S_2^{hom}$ , причем точка  $O_2$  является седловой, а точка  $O_1$  – устойчива при параметрах из подобласти  $S_2^{hom,st}$ , которую переобозначим через  $c_1$ , в остальной же части области (подобласть  $c_3$ ) она является седловой (рис. 5.10, а). Неоднородные состояния равновесия  $O_3$  и  $O_4$  существуют при параметрах из области  $S_2^{inh}$ , они являются устойчивыми в подобласти  $S_2^{inh,st}$ , которую переобозначим через  $c_3$ , и седловыми вне нее (рис. 5.10, а). Область существования устойчивого однородного состояния равновесия  $O_1$  –  $c_1$  и область существования двух устойчивых однородных состояний равновесия  $O_3$  и  $O_4$  –  $c_2$  не пересекаются ( $S_2^{coex} = \emptyset$ ) и являются смежными (рис. 5.10, а). Таким образом, при параметрах из области  $c_1$  существует однородный синхронный режим (ему соответствует точка  $O_1$ ), а при параметрах из области  $c_2$  – сосуществуют два неоднородных синхронных режима (им соответствуют точки  $O_3$  и  $O_4$ ). При параметрах из области  $c_3$  синхронного режима не существует.

Установлено, что наряду с синхронными режимами в трехмашинной энергосети могут существовать квазисинхронные и асинхронные режимы, которым соответствуют колебательные и вращательные аттракторы системы (5.63) (колебательные и вращательные предельные циклы, а также хаотические аттракторы). Рассмотрим разбиение области  $c$  (выделена пунктиром на рис. 5.10, а), содержащей подобласть  $c_2$  и часть подобластей  $c_1$  и  $c_3$ , на области с различными комбинациями режимов работы энергосети при значении параметра  $\mu = 1$ . В области  $c_1^{(1)}$  (рис. 5.10, б) единственным аттрактором системы (5.63) является состояние

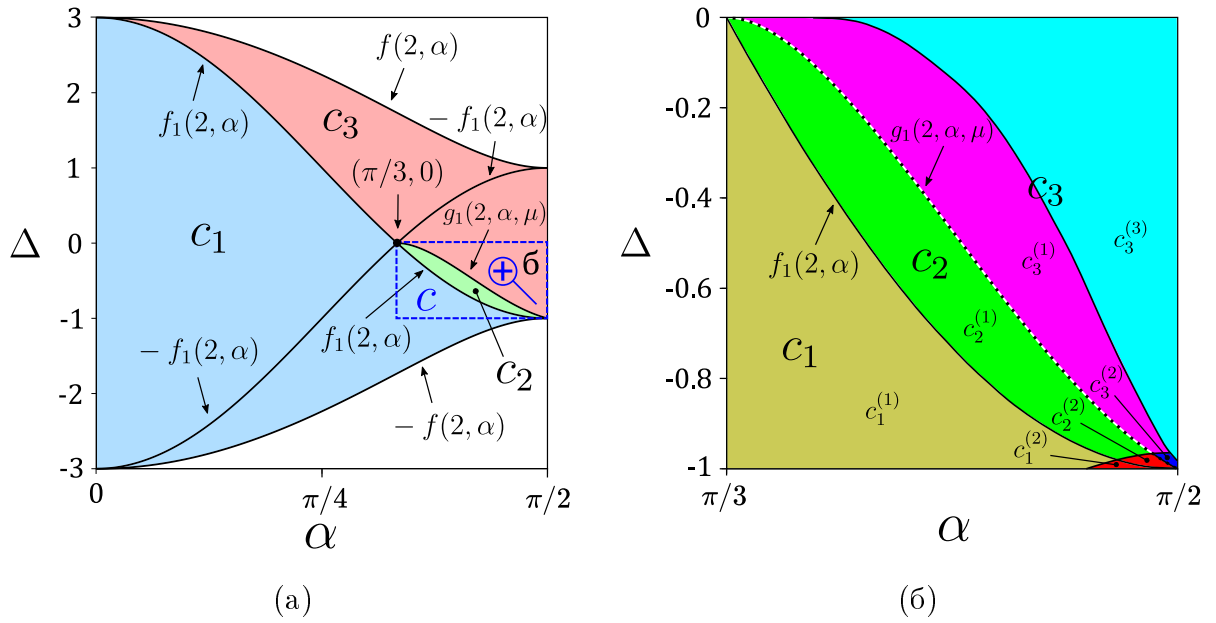


Рис. 5.10: Разбиение областей существования состояний равновесия на подобласти, где существует устойчивые однородные ( $c_1$ ) и неоднородные ( $c_2$ ) состояния равновесия или устойчивых состояний равновесия не существует ( $c_3$ ) (а). Разбиение области параметров  $c$  (выделена синим пунктиром на рисунке а) на подобласти с различными режимами работы трехмашинной энергосети при  $\mu = 1$  (б).

равновесия  $O_1$ , поэтому при любых начальных условиях в энергосети устанавливается однородный синхронный режим. В области  $c_2^{(1)}$  сосуществует только два аттрактора – состояния равновесия  $O_3$  и  $O_4$ , поэтому в зависимости от начальных условий в сети может установиться один из неоднородных синхронных режимов. В областях  $c_1^{(2)}$  и  $c_2^{(2)}$  (рис. 5.10, б) наряду с однородным и неоднородными синхронными режимами, существуют асинхронные режимы. В области  $c_3^{(1)}$  существуют только квазисинхронные режимы, а в области  $c_3^{(2)}$  они сосуществуют с асинхронными режимами (рис. 5.10, б). Заметим, что при переходе из области  $c_2$  в область  $c_3$  через границу  $g_1(2, \alpha, \mu)$  (пунктирная линия на рис. 5.10, б), которая соответствует бифуркации Андронова-Хопфа состояний равновесия  $O_3$  и  $O_4$ , эти точки теряют устойчивость, а в их окрестностях рождаются два устойчивых колебательных предельных цикла ( $L_{qs,1}$  и  $L_{qs,2}$  на рис. 5.11, а). Вблизи границы амплитуды колебаний переменных  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  на этих аттракторах достаточно малы, чтобы считать соответствующие квазисинхронные режимы относительно безопасными. При отдалении от границы  $g_1(2, \alpha, \mu)$  в сторону области  $c_3^{(3)}$  амплитуды колебаний возрастают и на границе области  $c_3^{(3)}$  колебательные предельные циклы трансформируются во вращательные ( $L_{as,1}$  и  $L_{as,2}$  на рис. 5.11, б). В области  $c_3^{(3)}$  (рис. 5.10, б) существуют только асинхронные режимы, которым соответствуют как вращательные предельные циклы (рис. 5.11, б), так и вращательные хаотические аттракторы ( $C_{as}$  на рис. 5.11, в).

Нетрудно видеть (см. формулу (5.45)), что неоднородные синхронные режимы отличаются стационарными токами второго и третьего генераторов, которые в общем случае характеризуются соотношениями

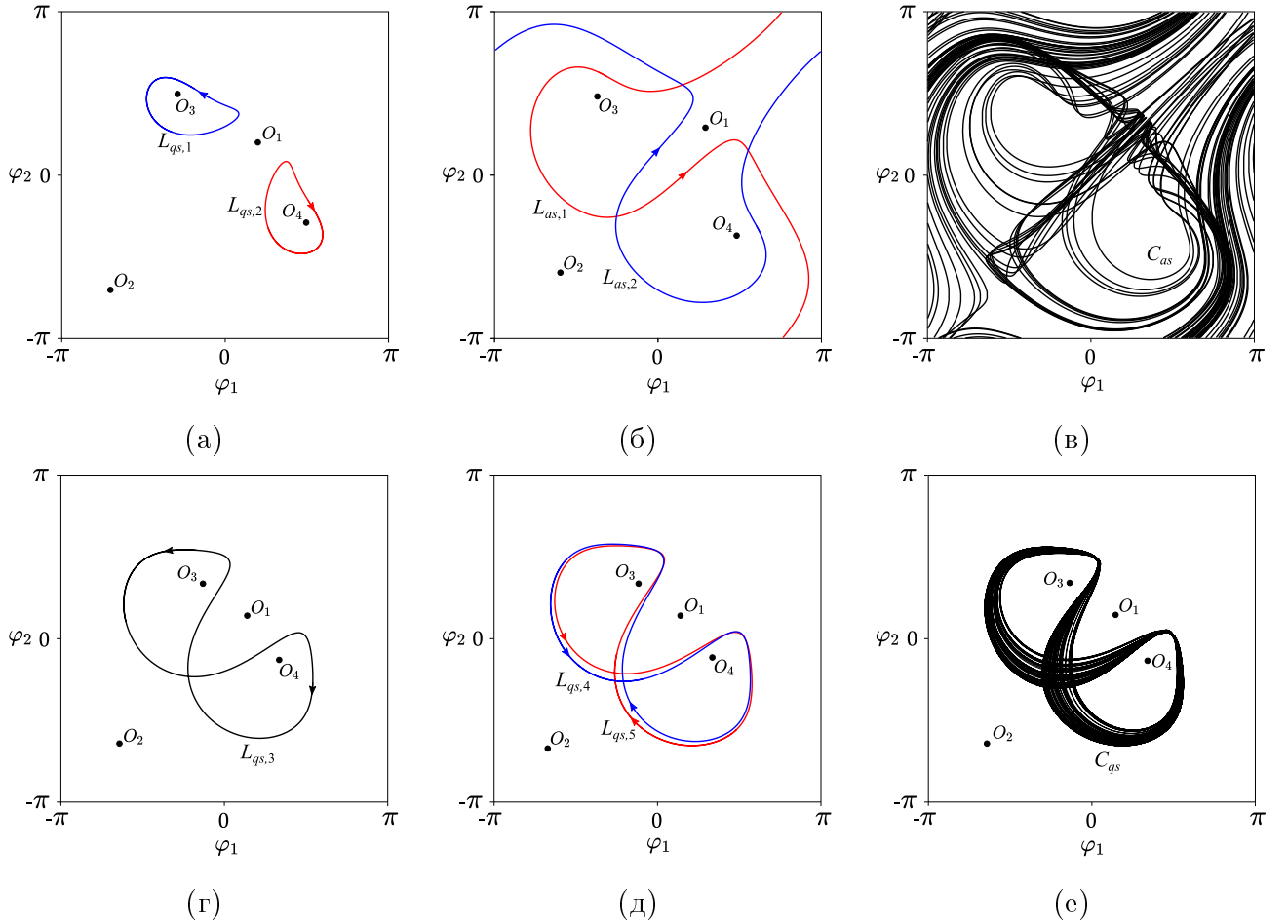


Рис. 5.11: Характерные проекции аттракторов системы (5.30) на плоскость  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . Колебательные предельные циклы  $L_{qs,1}$  и  $L_{qs,2}$  при  $\alpha = 1.25$ ,  $\Delta = -0.2$  (а), соответствующие квазисинхронным режимам, вращательные предельные циклы  $L_{as,1}$  и  $L_{as,2}$  при  $\alpha = 1.37$ ,  $\Delta = -0.2$  (б) и хаотический аттрактор  $C_{as}$  при  $\alpha = 1.4$ ,  $\Delta = -0.2$ (в), соответствующие асинхронным режимам. Колебательный предельный цикл  $L_{qs,3}$  при  $\alpha = 1.25$ ,  $\Delta = -0.44$  (г), два сосуществующих колебательных предельных цикла  $L_{qs,4}$  и  $L_{qs,5}$  при  $\alpha = 1.25$ ,  $\Delta = -0.445$  (д) и хаотический аттрактор  $C_{qs}$  при  $\alpha = 1.25$ ,  $\Delta = -0.45$  (е), соответствующие квазисинхронным режимам. Параметры:  $\mu = 1$  для (а)-(в) и  $\mu = 0.625$  для (г)-(е).

$$\frac{I_2(O_3)}{I_3(O_3)} = \frac{I_3(O_4)}{I_2(O_4)} \neq 1, \text{ при этом } \frac{|I_2(O_3)|}{|I_3(O_3)|} \neq 1. \quad (5.64)$$

Поэтому в неоднородном синхронном режиме, которому соответствует состояние равновесия  $O_3$  (или  $O_4$ ), возникает ситуация, когда амплитуды токов в ветвях второго и третьего генераторов различаются, что обуславливает различие токов, текущих по передающим системам указанных генераторов к их общей нагрузке. В свою очередь это приводит к различным тепловым нагрузкам и потерям энергии в передающих системах этих же генераторов.

При переходе от одного неоднородного синхронного режима к другому, вызванному действием каких-либо возмущений, меняется стационарное распределение токов в ветвях цепи. При возрастании тока в одной из ветвей, возможно срабатывание токовых защит, что, потенциально, может привести к нарушению синхронного режима во всей сети. Поэтому стабиль-

ная работа энергосети тесно связана с выбором одного из синхронных режимов, а также его устойчивостью.

Конструкция энергосети может допускать ее нормальное функционирование в обоих неоднородных синхронных режимах. В этом случае их сосуществование можно трактовать как фактор, способствующий увеличению ее устойчивости.

Далее сосредоточим внимание на изучении неоднородных синхронных режимов, которым соответствуют состояния равновесия  $O_3$  и  $O_4$ , а также рассмотрим вопрос об условиях перехода между этими режимами. При этом необходимо ограничиться значениями параметров из области  $c_2$ . Нетрудно показать, что именно в этой области параметров стационарные мощности генераторов имеют наибольшие значения. С этой точки зрения область  $c_2$  можно назвать областью оптимальных параметров системы (5.63) или моделируемой энергосети.

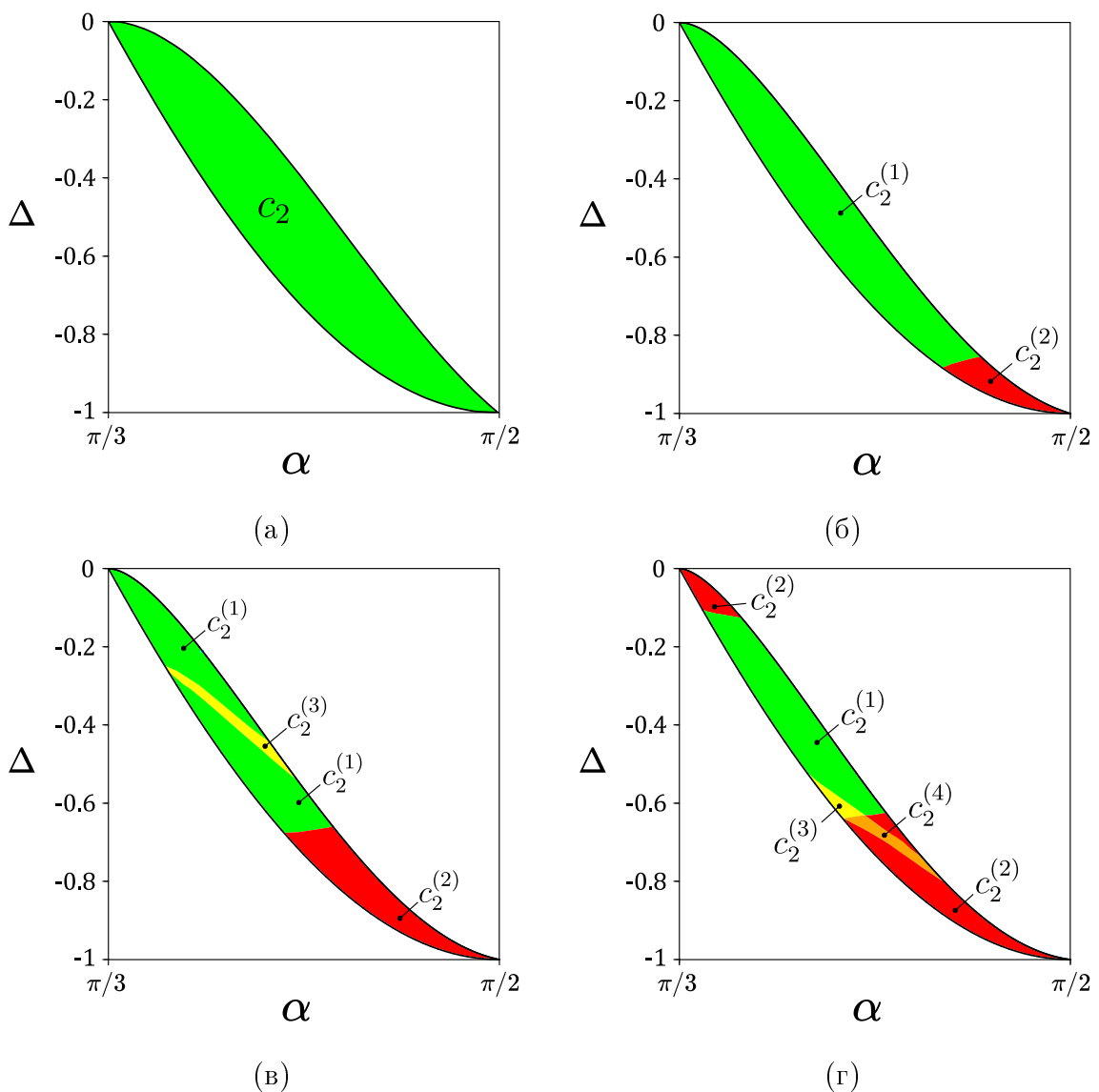


Рис. 5.12: Разбиение области  $c_2$  на подобласти с различными комбинациями режимов при параметре  $\mu = 1.25$  (а),  $\mu = 0.75$  (б),  $\mu = 0.625$  (в) и  $\mu = 0.5$  (г). На рисунках 5.11, (г)-(е) приведены проекции аттракторов при параметрах из области  $a_2^{(4)}$  на рисунке (г).

Рассмотрим разбиение области  $c_2$  на подобласти с различными режимами работы трех-

машинной энергосети при разных значениях демпферного коэффициента  $\mu$  (рис. 5.12). При  $\mu > 1.19$  (рис. 5.12, а) состояния равновесия  $O_3$  и  $O_4$  являются единственными аттракторами системы (5.30) при параметрах из области  $c_2$ , поэтому в зависимости от начальных условий в энергосети устанавливается один из неоднородных синхронных режимов. При  $\mu \approx 1.19$  в нижней части области  $c_2$  появляется подобласть  $c_2^{(2)}$  (рис. 5.12, б), в которой наряду с неоднородными синхронными режимами существуют асинхронные режимы. Оставшуюся часть области  $c_2$  занимает подобласть  $c_2^{(1)}$ , соответствующая установлению одного из неоднородных синхронных режимов. При дальнейшем уменьшении параметра  $\mu$  подобласть  $c_2^{(2)}$  растет вверх (рис. 5.12, б-г). При  $\mu \approx 0.72$  в верхней части области  $c_2$ , появляется подобласть  $c_2^{(3)}$  (рис. 5.12, в), отвечающая сосуществованию синхронных и квазисинхронных режимов. Она имеет вид полоски, пересекающей область  $c_2$ . При уменьшении параметра  $\mu$  она опускается вниз и при  $\mu \approx 0,57$  становится смежной с подобластью  $c_2^{(2)}$ . Затем при  $\mu < 0,57$  появляется подобласть  $c_2^{(4)}$  (рис. 5.12, г), отвечающая сосуществованию синхронных, квазисинхронных и асинхронных режимов. Причем квазисинхронным режимам могут соответствовать как предельные циклы (см.  $L_{qs}$  на рис. 5.11, г или  $L_{qs,1}$  и  $L_{qs,2}$  на рис. 5.11, д), так и хаотические аттракторы (см.  $q_s$  на рис. 5.11, е). При  $\mu \approx 0,53$  в верхней части области  $c_2$  появляется ещё одна подобласть  $c_2^{(2)}$ , которая при дальнейшем уменьшении  $\mu$  растёт вниз. При  $\mu \approx 0,47$  подобласть  $c_2^{(3)}$  исчезает, вслед за ней при  $\mu \approx 0,29$  исчезает подобласть  $c_2^{(4)}$ . Наконец, при  $\mu \approx 0,27$  исчезает подобласть  $c_2^{(1)}$ , при этом нижняя и верхняя части подобласти  $c_2^{(2)}$  сливаются и она совпадает с областью  $c_2$ .

Таким образом, при параметрах из области  $c_2$ , неоднородные синхронные режимы могут сосуществовать с квазисинхронными или асинхронными режимами. Под действием возмущений возможны переходы между режимами.

Заметим, численное моделирование показывает, что при введении неоднородности, нарушающей свойства симметрии системы (5.22) или (5.63) (например,  $P_{T,3} \neq P_{T,2}$  и/или  $K_{1,2} \neq K_{1,3}$ ), качественная структура разбиения пространства параметров на области  $c_i$  может сохраняться. В частности, остается область  $c_2$ , где существуют два устойчивых состояния равновесия  $O_3$  и  $O_4$ , соответствующие синхронным режимам с различными характеристиками.

## 5.6 Устойчивость синхронных режимов к различным возмущениям

В пункте 5.4 установлено, что помимо синхронного режима, в энергосети могут установиться квазисинхронный или асинхронный режимы, которым соответствуют колебательные (например, колебательный предельный цикл) и вращательные (например, вращательный предельный цикл) аттракторы в фазовом пространстве системы (5.63).

В процессе работы энергосети синхронный режим подвергается воздействию различных по силе возмущений, которые, вообще говоря, нарушают его. После окончания действия возмущений, в сети начинается переходный процесс, который заканчивается установлением

какого-либо из указанных режимов. Если таким режимом является асинхронный, то может возникнуть аварийная ситуация, сопровождающаяся расстройством электроснабжения потребителей. Поэтому важно определить возмущения, после окончания действия которых, сеть вернется в исходный синхронный режим. Будем называть такие возмущения безопасными.

Действие возмущений в энергосети будем трактовать как изменение состояния системы (5.63). В свою очередь, состояние системы (5.63) в данный момент времени определяется положением изображающей точки в ее фазовом пространстве. Следовательно, действие возмущений может быть сведено к изменению положения изображающей точки. С этой точки зрения, переходному процессу сети отвечает движение (стремление) изображающей точки к одному из аттракторов системы (5.63). Установление какого-либо режима практически означает попадание изображающей точки в сколь угодно малую (заранее заданную) окрестность соответствующего аттрактора. Далее мы рассмотрим три вида возмущений состояния системы (5.63) – произвольные возмущения переменных, частотные и фазовые возмущения. В качестве исходного состояния будем использовать одну из устойчивых точек  $O_3$  или  $O_4$ .

### 5.6.1 Нелокальная устойчивость синхронных режимов

В общем случае возмущения приводят к произвольному изменению переменных  $\varphi_i, y_i$ , то есть координат изображающей точки. Если изначально система (5.63) находилась в устойчивом состоянии равновесия, то после окончания действия возмущения, изображающая точка займет некоторое новое положение, отличное от исходного, после чего начнет двигаться к одному из аттракторов. Расстояние между состоянием равновесия и изображающей точкой, перемещенной возмущением, характеризует величину возмущения. С течением времени изображающая точка попадет в заранее заданную (малую) окрестность некоторого аттрактора, что будет означать установление соответствующего режима. Для того, чтобы изображающая точка стремилась к исходному состоянию равновесия, необходимо, чтобы она принадлежала области притяжения этого состояния. Поэтому область притяжения состояния равновесия определяет величины безопасных возмущений.

Отыскание области притяжения аттрактора многомерной динамической системы является достаточно трудной задачей. По этой причине, а также в силу произвольности возмущений, удобно оценить величину максимального безопасного возмущения  $r_{max}^{safe}$ , численно равную минимальному расстоянию от исходного устойчивого состояния равновесия до границы его области притяжения. Для этого будем использовать следующий алгоритм. Зафиксируем параметры системы (5.63). В ее фазовом пространстве возьмем сферу с центром в точке  $O_3$  и радиусом  $r_0$ . Его значение должно быть достаточно мало по сравнению с характерными размерами фазового пространства системы (5.63) (например, диаметром поглощающей области), чтобы сфера целиком лежала в области притяжения точки  $O_3$ . Выберем случайным образом  $N_{init}$  начальных условий на ее поверхности, проинтегрируем систему (5.30) и убедимся, что все траектории стремятся в состояние равновесия  $O_3$ . Затем будем увеличивать радиус сферы на величину  $\Delta_r$  и повторять те же действия до тех пор, пока хотя бы

одна траектория не будет стремиться к другому аттрактору. При этом радиус примет значение  $r'$ . Тогда в качестве оценки  $r_{max}^{safe}$  можно принять величину  $r' - \Delta_r$  или, с помощью, какого-либо метода, например, метода половинного деления на отрезке  $[r' - \Delta_r, r']$ , уточнить значение  $r_{max}^{safe}$ . Данный алгоритм необходимо повторить  $N_{repeat}$  раз и затем усреднить полученные оценки  $r_{max}^{safe}$ . Заметим, что в силу эквивалентности состояний равновесия  $O_3$  и  $O_4$ , они имеют одинаковые значения  $r_{max}^{safe}$ .

Удобно построить зависимость величины  $r_{max}^{safe}$  от какого-либо параметра системы (5.63). Параметр  $\Delta$  зависит от мощностей турбин  $P_{T,i}$  (см. формулы (5.21) и (1.8)), которые можно регулировать [4, 5], что дает возможность менять параметр  $\Delta$ . Параметр  $\alpha$  определяется передающей системой генераторов и нагрузкой. Состав передающей системы и ее характеристики обычно считаются неизменными. В общем случае, величина нагрузки меняется во времени, однако можно выделить достаточно длительные интервалы, когда она постоянна. Поэтому будем фиксировать параметр  $\alpha$ . Параметр  $\mu$  при изучении вопросов устойчивости энергосетей, как правило, полагают неизменным. Построим зависимость  $r_{max}^{safe}(\Delta)$  при разных фиксированных значениях параметров  $\alpha$  и  $\mu$  (рис. 5.13, б-в). Контрольный параметр  $\Delta$  принимает значения из интервала  $(f_1(2, \alpha), g_1(2, \alpha, \mu))$ , целиком лежащего в области  $c_2$  (см. фиолетовый пунктир на рис. 5.13, а).

Все приведенные зависимости  $r_{max}^{safe}(\Delta)$  обладают общими свойствами (5.13, б-в). При увеличении параметра  $\Delta$ , начиная с левой границы интервала его значений, величина  $r_{max}^{safe}$  сначала в целом растет, затем достигает своего максимального значения, а потом начинает в целом убывать. Параметры, при которых величина  $r_{max}^{safe}$  имеет максимальное значение, являются оптимальными, с точки зрения устойчивости синхронного режима по отношению к произвольным возмущениям (см.  $\Delta_m$  на рис. 5.13, б). Очевидно, что в области  $c_2$  существует некоторая кривая, содержащая указанные оптимальные параметры. С помощью регулирования мощности турбин, которое обуславливает изменение параметра  $\Delta$  и, как следствие, координат устойчивого состояния равновесия, отвечающего синхронному режиму, можно добиться повышения его устойчивости по отношению к произвольным возмущениям. При этом нужно учитывать влияние параметра  $\Delta$  на стационарные значения мощностей генераторов (5.46).

Увеличение параметра  $\mu$  приводит к росту величины  $r_{max}^{safe}$  почти при всех рассматриваемых параметрах  $\Delta$ , за исключением небольшого интервала значений у левой границы интервала  $(f_1(2, \alpha), g_1(2, \alpha, \mu))$  (5.13, а), где, например, величина  $r_{max}^{safe}$  при  $\mu = 1$  меньше, чем при  $\mu = 0.75$ . Будем обозначать такие значения через  $\Delta^{exc}$  ("exc" – exception). Из формулы (5.21) видно, что параметр  $\mu$  пропорционален демпферному коэффициенту  $D$ . Как известно, его увеличение обычно ведет к повышению устойчивости синхронного режима (состояния равновесия), что и подтверждается видом зависимостей  $r_{max}^{safe}(\Delta)$  при разных  $\mu$ , за исключением параметров  $\Delta^{exc}$ . Это исключение скорее всего обусловлено недостаточной информативностью величины  $r_{max}^{safe}$ , которая не может характеризовать форму и размеры поглощающей области устойчивой точки.

Величину области притяжения аттрактора можно характеризовать вероятностью стрем-



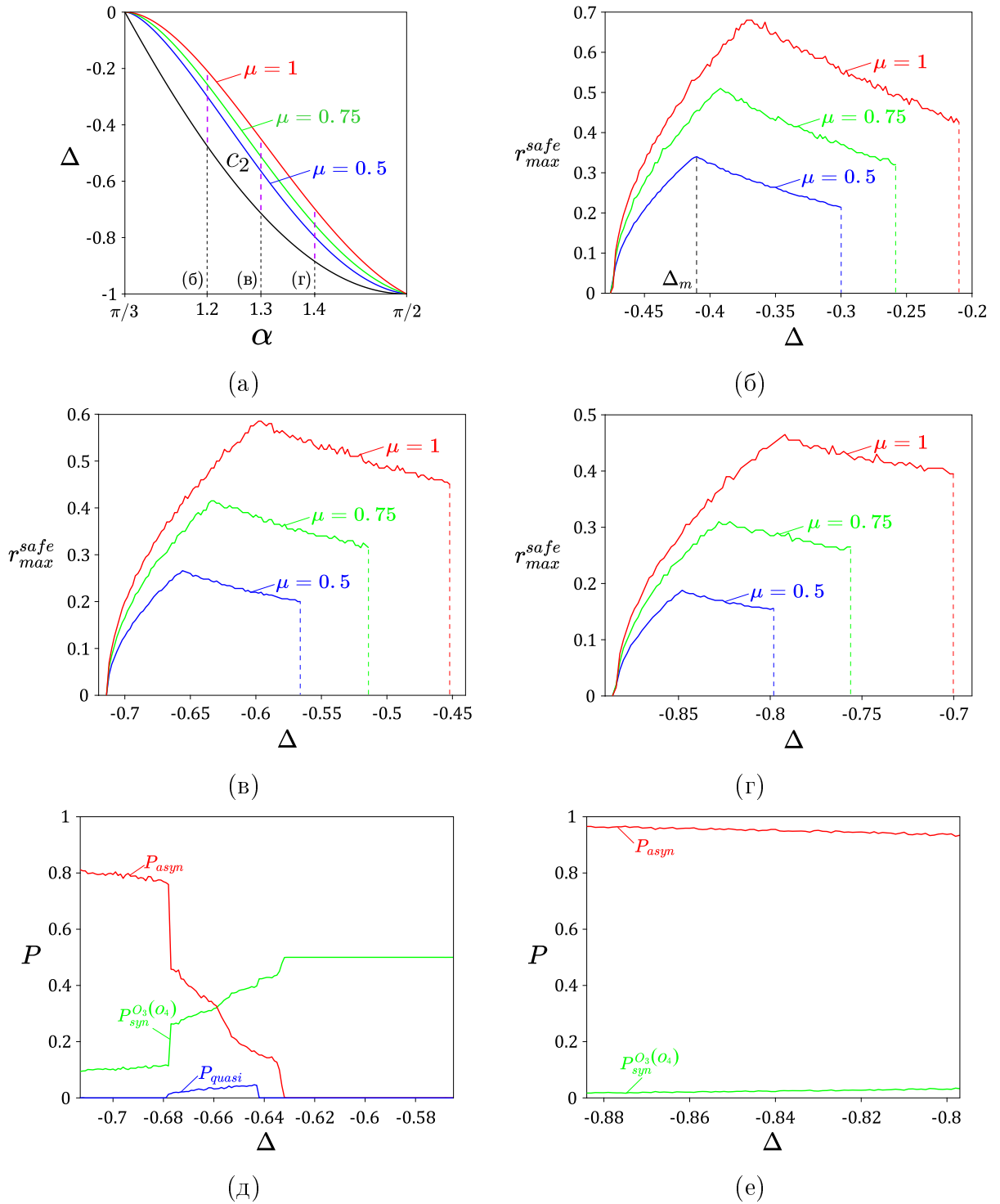


Рис. 5.13: Область  $c_2$  при разных значениях параметра  $\mu$  (а). Ее граница, задаваемая кривой  $g_1(2, \alpha, \mu)$ , при разных значениях  $\mu$  выделена цветом: синим при  $\mu = 0.5$ , зеленым при  $\mu = 0.75$  и красным при  $\mu = 1$ . Фиолетовым пунктиром выделены интервалы значений параметра  $\Delta$  для расчета величины  $r_{max}^{safe}$ . Зависимости  $r_{max}^{safe}(\Delta)$  при  $\alpha = 1.2$  (б),  $\alpha = 1.3$  (в) и  $\alpha = 1.4$  (г). Зависимости  $r_{max}^{safe}(\Delta)$  при разных значениях  $\mu$  выделены теми же цветами, что и кривые  $g_1(2, \alpha, \mu)$  на рисунке (а). Зависимости вероятности установления режимов при  $\mu = 0.5$ ,  $\alpha = 1.3$  (д) и  $\mu = 0.5$ ,  $\alpha = 1.4$  (е).

ления в него траектории при произвольном выборе начальных условий. Ее можно трактовать как вероятность установления соответствующего режима. На рисунках 5.13, (д) и (е) показаны зависимости вероятностей установления неоднородных синхронных режимов  $P_{syn}^{O_3}$  и  $P_{syn}^{O_4}$ , которым соответствуют устойчивые состояния равновесия  $O_3$  и  $O_4$ , а также вероятности установления квазисинхронного  $P_{quasi}$  и асинхронного  $P_{asyn}$  режимов, каждому из которых могут соответствовать несколько аттракторов. Вероятности вычислены для двух интервалов значений параметра  $\Delta$ , показанных на рисунке 5.13, (а), при  $\alpha = 1.3$ ,  $\mu = 0.5$  и  $\alpha = 1.4$ ,  $\mu = 0.5$ .

При  $\alpha = 1.3$  (рис. 5.13, д) на левой границе интервала значений  $\Delta$  устойчивые точки  $O_3$  и  $O_4$  сосуществуют с вращательными предельными циклами и имеют значительно меньшие вероятности  $P_{syn}^{O_3}$  и  $P_{syn}^{O_4}$  по сравнению с общей для указанных циклов вероятностью  $P_{asyn}$ . При увеличении  $\Delta$  вероятности  $P_{syn}^{O_3}$  и  $P_{syn}^{O_4}$  медленно возрастают. Это продолжается до тех пор, пока  $\Delta \approx -0.68$ , где оба значения испытывают скачок и в системе (5.63) появляется колебательный предельный цикл. Вероятно, здесь имеет место нелокальная бифуркация, приводящая к трансформации областей притяжения устойчивых точек и вращательных предельных циклов. Затем вероятности  $P_{syn}^{O_3}$  и  $P_{syn}^{O_4}$  начинают быстро расти, вплоть до  $\Delta \approx -0.63$ , где все вращательные и колебательные предельные циклы исчезают, а состояния равновесия  $O_3$  и  $O_4$  становятся единственными аттракторами в системе. При  $\alpha = 1.4$  (рис. 5.13, д) устойчивые точки  $O_3$  и  $O_4$  сосуществуют с вращательными предельными циклами на всем интервале значений  $\Delta$ . При этом вероятности  $P_{syn}^{O_3}$  и  $P_{syn}^{O_4}$  значительно меньше, чем  $P_{asyn}$ .

Полученные зависимости  $r_{max}^{safe}(\Delta)$  и  $P_{syn}^{O_{3,4}}$  позволяют наглядно продемонстрировать степень устойчивости неоднородных синхронных режимов к произвольным возмущениям, не прибегая к отысканию области притяжения соответствующих состояний равновесия. Однако остается открытым вопрос о том, какое именно возмущение может привести к потере синхронного режима, и какой режим установится в сети после окончания его действия.

## 5.6.2 Частотные и фазовые возмущения. Переключения

Установлено, что при определенных значениях параметров из области  $c_2$ , в системе (5.63) существуют только два аттрактора – устойчивых состояния равновесия  $O_3$  и  $O_4$ , которые соответствуют неоднородным синхронным режимам с разными характеристиками. Поэтому, с практической точки зрения, важно знать какой именно синхронный режим установился в энергосети. Под воздействием возмущений сеть может перейти от одного синхронного режима к другому, при этом изображающая точка перейдет из одного состояния равновесия в сколь угодно малую окрестность другого. Можно сказать, что произойдет “переключение” между состояниями равновесия системы или синхронными режимами энергосети. При этом, если в энергосети существуют еще квазисинхронные и (или) асинхронные режимы, то сеть может быть переведена в один из них.

Рассмотрим вопрос о переключениях между режимами, возникающими под действием конкретных видов возмущений: фазовых и частотных. Эти возмущения приводят к произвольному приращению только одной координаты изображающей точки. Координата  $\varphi_1$

( $\varphi_2$ ) под действием фазовых возмущений получает приращение  $\xi_1$  ( $\xi_2$ ), а координата  $y_1$  ( $y_2$ ) под действием частотных –  $\xi_3$  ( $\xi_4$ ). При этом ограничим значения возмущенных координат  $\varphi_i^{pert} = \varphi_i + \xi_i$  и  $y_i^{pert} = y_i + \xi_{i+2}$ ,  $i = 1, 2$  поглощающей областью  $G^+$ . Далее приращения  $\xi_i$  так же будет называть возмущениями соответствующих переменных.

Зафиксируем начальное состояние системы в точке  $O_3(\varphi_1^*, \varphi_2^*, 0, 0)$ ,  $\varphi_1^* = -\alpha + \Phi_1^{(2)}$ ,  $\varphi_2^* = \pi - (\alpha + \Phi_1^{(2)})$ . Под действием фазовых возмущений координата, например  $\varphi_1$ , получит приращение  $\xi_1 \in [-\pi, \pi]$ . Тогда изображающая точка будет иметь координаты  $(\varphi_1^* + \xi_1, \varphi_2^*, 0, 0)$ . Принимая их как начальные условия и интегрируя систему (5.63), определим к какому из аттракторов стремится изображающая точка. Таким образом, при фиксированных параметрах  $\alpha$  и  $\mu$  получим разбиение плоскости  $(\Delta, \xi_1)$  на области  $b_r$ ,  $b_s$  и  $b_{em}$  (рис. 5.14). Область  $b_r$  (“*r*” – *return*) соответствует приращениям  $\xi_1$ , при которых изображающая точка стремится к исходному состоянию равновесия  $O_3$ , область  $b_s$  (“*s*” – *switch*) – приращениям  $\xi_1$ , приводящим систему (5.63) к точке  $O_4$ , то есть к переключению, область  $b_{em}$  (“*em*” – *emergency*) – приращениям  $\xi_1$ , при которых изображающая точка стремится к любому из аттракторов, соответствующих квазисинхронному или асинхронному режимам. Аналогично строятся разбиения оставшихся плоскостей  $(\Delta, \xi_k)$ ,  $k = 2, 3, 4$ .

На рисунке 5.14 показаны разбиения плоскостей  $(\Delta, \xi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  при  $\mu = 0.5$  и  $\alpha = 1.2$  (а),  $\alpha = 1.3$  (б) и  $\alpha = 1.4$  (в). Области  $b_{em}$  существуют только при  $\alpha = 1.3$  и  $\alpha = 1.4$  (рис. 5.14, б,в), причем с ростом  $\alpha$  увеличивается часть интервала значений параметра  $\Delta$ , где присутствуют возмущения  $\xi_i$  (выделены красным на рис. 5.14, б,в), переводящие энерго-сеть в асинхронные режимы. Для значений параметра  $\Delta$  вблизи левой границы интервала его изменения существуют незначительные по абсолютной величине возмущения  $\xi_i$ , положительные для  $\varphi_1$ ,  $y_1$  и отрицательные для  $\varphi_2$ ,  $y_2$ , которые приводят к переключению на состояние равновесия  $O_4$ . Это объясняется малым расстоянием между точками  $O_3$  и  $O_4$  при рассматриваемых значениях  $\Delta$  (на границе  $f_1(2, \alpha)$  эти точки сливаются с точкой  $O_1$ ). С увеличением параметра  $\Delta$  растут и минимальные значения модулей указанных положительных ( $\xi_1$ ,  $\xi_3$ ) и отрицательных ( $\xi_2$ ,  $\xi_4$ ) возмущений, необходимых для переключения на состояние равновесия  $O_4$ . В свою очередь, необходимые для переключения минимальные значения возмущений, отрицательные для  $\varphi_1$   $y_1$  и положительные для  $\varphi_2$ ,  $y_2$ , уменьшаются по модулю с ростом  $\Delta$ . Таким образом, существуют оптимальные значения параметра  $\Delta$ , при которых минимальные модули возмущений  $\xi_i$ , необходимые для переключения на состояние равновесия  $O_4$ , имеют наибольшие значения.

Установлено, что вне зависимости от конкретных значений параметров  $\mu$  и  $\alpha$ , область  $b_r$  всегда граничит (сверху и снизу) с областями  $b_s$ , содержащими значения  $\xi_i = 0$ , то есть при непрерывном увеличении или уменьшении возмущения  $\xi_i$ , начиная с нуля, точка на плоскости  $(\Delta, \xi_i)$  сначала перейдет из области  $b_s$  в  $b_r$ , то есть произойдет переключение между синхронными режимами. Далее области  $b_r$ , окружающие указанную область  $b_s$ , могут граничить с другими областями  $b_s$  или  $b_{em}$ . Имеет место чередование областей  $b_r$ ,  $b_s$  и  $b_{em}$ , которое может приводить к образованию сложной структуры разбиения плоскости  $(\Delta, \xi_i)$  (см. рис. 5.14, а,б). Поэтому, если значение  $\xi_i$  известно с некоторой погрешностью, то установить

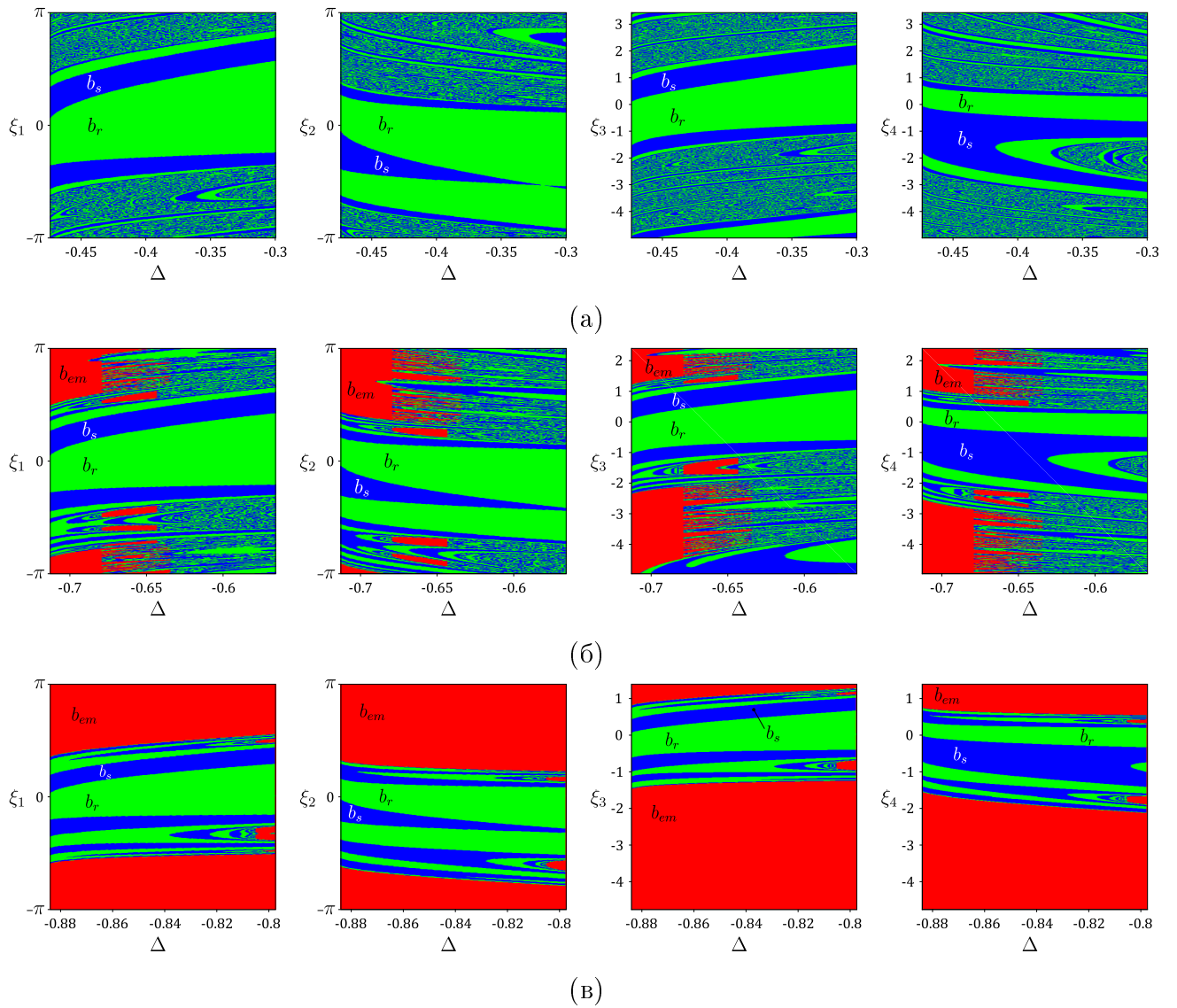


Рис. 5.14: Разбиение плоскостей  $(\Delta, \xi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  на области  $b_r$ ,  $b_s$  и  $b_{em}$ , выделенные зеленым, синим и красным цветом, соответственно. Параметр  $\mu = 0.5$ ,  $\alpha = 1.2$  (а),  $\alpha = 1.3$  (б),  $\alpha = 1.4$  (в).

результат воздействия возмущения можно лишь с определенной вероятностью [52]. Наличие множества чередующихся областей  $b_r$ ,  $b_s$  и  $b_{em}$  указывает на достаточно сложную структуру областей притяжения состояний равновесия  $O_3$  и  $O_4$ . Ниже будет рассмотрен случай, когда эти области притяжения имеют более простое строение.

### 5.6.3 Случайные колебания мощностей турбин в условиях бистабильности синхронных режимов

Задача об устойчивости синхронного режима энергосети по отношению к каким-либо возмущениям может быть сведена к задаче о нахождении границы области притяжения соответствующего устойчивого состояния равновесия. Она имеет наиболее простое и наглядное решение для двумерных динамических систем [138]. Поэтому удобно рассмотреть случай, ко-

гда система (5.63) может быть сведена к некоторой двумерной системе, а затем рассмотреть вопрос об области притяжения точки  $O_3$  ( $O_4$ ) и переключениях.

**Уравнения системы с малым параметром.** Перепишем систему (5.63) в виде

$$\begin{cases} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \Delta - \mu \frac{d\varphi_1}{dt} - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2 - \alpha), \\ \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = \Delta - \mu \frac{d\varphi_2}{dt} - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \alpha). \end{cases} \quad (5.65)$$

Введем новое время  $\tau = t/\mu$  и параметр  $\varepsilon = 1/\mu^2$ . Тогда система (5.65) может быть переписана следующим образом

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\tau} = y_1, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} = y_2, \\ \varepsilon \frac{dy_1}{d\tau} = \Delta - y_1 - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2 - \alpha) \equiv f_1(y_1, \varphi_1, \varphi_2), \\ \varepsilon \frac{dy_2}{d\tau} = \Delta - y_2 - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \alpha) \equiv f_2(y_2, \varphi_1, \varphi_2). \end{cases} \quad (5.66)$$

Если предположить, что параметр  $\mu \gg 1$  (случай сильного демпфирования), то параметр  $\varepsilon \ll 1$ . Тогда система (5.66) является динамической системой с малыми параметрами при производных  $dy_1/d\tau$ ,  $dy_2/d\tau$  (невырожденная система) [144]. В этом случае движения в фазовом пространстве  $G$  системы (5.66) разделяются на “быстрые” и “медленные”. Система уравнений быстрых движений запишется как

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dy_1}{d\tau} = f_1(y_1, \varphi_1, \varphi_2), \\ \varepsilon \frac{dy_2}{d\tau} = f_2(y_2, \varphi_1, \varphi_2), \end{cases}$$

где величины  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  считаются параметрами. Система уравнений медленных движений (вырожденная система) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\tau} = y_1, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} = y_2, \\ f_1(y_1, \varphi_1, \varphi_2) = 0, \\ f_2(y_2, \varphi_1, \varphi_2) = 0. \end{cases}$$

Совокупность третьего и четвертого уравнений системы медленных движений выделяет в фазовом пространстве  $G$  поверхность медленных движений

$$\Gamma = \{f_1(y_1, \varphi_1, \varphi_2) = 0, f_2(y_2, \varphi_1, \varphi_2) = 0\}.$$

Рассмотрим матрицу

$$\widehat{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = -\widehat{E},$$

где  $\widehat{E}$  – единичная матрица. В силу того, что матрица  $\widehat{U}$  имеет только отрицательные собственные значения во всех точках поверхности медленных движений  $\Gamma$ , то она (поверхность) является устойчивой по отношению к быстрым движениям [144]. Уравнения медленных движений на поверхности  $\Gamma$  имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \Delta - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2 - \alpha), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \Delta - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \alpha). \end{cases} \quad (5.67)$$

Система (5.67) определена в тороидальном фазовом пространстве  $T = S \times S$ .

По существу, при  $\varepsilon \ll 1$  исследование четырехмерной системы (5.66) сводится к изучению двумерной системы (5.67) в силу устойчивости поверхности  $\Gamma$  по отношению к быстрым движениям. Причем, чем меньше значение  $\varepsilon$ , тем более точно система (5.67) описывает динамику исходной системы. Следовательно, при указанных приближениях, мы перешли к двумерной системе (5.67), в рамках которой будем рассматривать вопросы об устойчивости синхронных режимов и переключениях.

Система (5.67) имеет состояния равновесия с теми же координатами  $\varphi_1^*, \varphi_2^*$ , что и система (5.63). По-прежнему, будем обозначать их через  $O_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Разбиение плоскости параметров  $(\alpha, \Delta)$  на области существования устойчивых состояний равновесия в целом останется тем же. Однако область  $c_2$  будет иметь постоянный вид, не зависящий от параметров. Она ограничена кривой  $f_1(2, \alpha)$ , горизонталью  $\Delta = 0$ ,  $\pi/3 \leq \alpha \leq \pi/2$  и вертикалью  $\alpha = \pi/2$ ,  $-1 \leq \Delta \leq 1$  (рис. 5.15). Тип состояний равновесия системы (5.67) зависит от параметров следующим образом.

- При параметрах из области  $c_1$  система (5.67) имеет единственное устойчивое состояние равновесия  $O_1$  – устойчивый узел. В подобласти  $c_{1,1}$  точка  $O_2$  – неустойчивый узел,  $O_3, O_4$  – седла. В подобласти  $c_{1,2}$  точка  $O_2$  – неустойчивый узел.
- При параметрах из области  $c_2$  система (5.67) имеет два устойчивых состояния равновесия  $O_3$  и  $O_4$ . В подобласти  $c_{2,1}$  точки  $O_1, O_2$  – седла,  $O_3, O_4$  – устойчивые фокусы. В подобласти  $c_{2,2}$  точки  $O_1, O_2$  – седла,  $O_3, O_4$  – устойчивые узлы.
- При параметрах из области  $c_3$  система (5.67) не имеет устойчивых состояний равновесия. В подобласти  $c_{3,1}$  точка  $O_1$  – седло,  $O_2$  – неустойчивый узел. В подобласти  $c_{3,2}$  точки  $O_1, O_2$  – седла,  $O_3, O_4$  – неустойчивые узлы. В подобласти  $c_{3,3}$  точки  $O_1, O_2$  – седла,  $O_3, O_4$  – неустойчивые фокусы.

Нетрудно видеть, что устойчивые состояния равновесия системы (5.67) соответствуют тем же синхронным режимам, что и аналогичные состояния равновесия системы (5.63). Система (5.67), как и исходная система (5.63), имеет область параметров  $c_2$ , отвечающую существованию двух устойчивых состояний равновесия  $O_3$  и  $O_4$ . При этом установлено, что

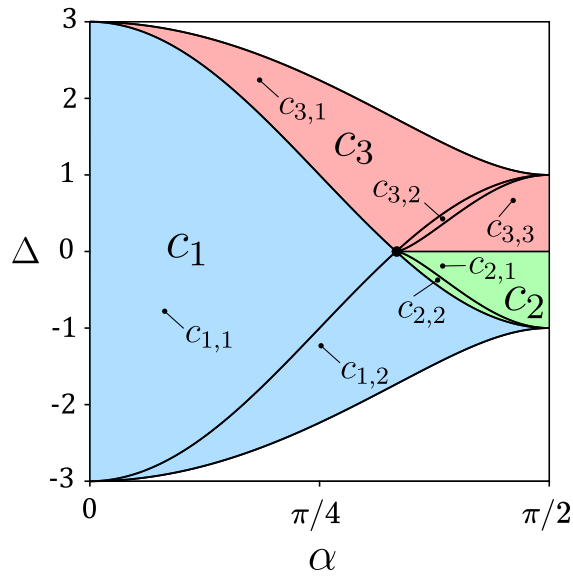


Рис. 5.15: Разбиение плоскости параметров  $(\alpha, \Delta)$  на области с различными типами состояний равновесия системы (5.67). Области  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  выделены синим, зеленым и красным цветом, соответственно.

они являются единственными аттракторами системы (5.67). Поэтому задача об их устойчивости тождественна задаче о переключениях и сводится к отысканию соответствующих областей притяжения. Установлено, что вне зависимости от выбора конкретной точки в области параметров  $a_2$ , области притяжения состояний равновесия  $O_3$  и  $O_4$  ограничены двумя гетероклиническими траекториями  $s_1^g$ ,  $s_2^g$ , идущими из седла  $O_2$  в седло  $O_1$ , и неустойчивым предельным циклом  $L^u$ , охватывающим тор  $T$  (см. след. пункт рис.5.16, а).

Таким образом, если рассматривать возмущения, действие которых сводится к однократному перемещению изображающей точки в фазовом пространстве системы (5.67), после чего она стремится к одному из аттракторов, то знание областей притяжения состояний равновесия  $O_3$  и  $O_4$  полностью определяет решение задачи о переключениях.

**Стохастическая динамика.** При параметрах из области  $c_2$  система (5.67) является бистабильной. Известно, что в бистабильных (мультистабильных) системах переключения между состояниями могут происходить под действием шума [143]. Шум является естественным возмущением, которому подвергаются системы различной природы. Рассмотрим вопрос о переключениях в системе (5.67) под действием шума.

Предположим, что мощность турбины имеет постоянную детерминированную и переменную флуктуационную составляющие. Последняя может возникать вследствие неравномерности подачи энергоносителя и несовершенства регулятора, управляющего клапанами тепловой турбины или направляющим аппаратом гидротурбины. При выводе уравнений МЭС (1.8) не делалось никаких предположений относительно мощности турбин, поэтому уравнения (5.67), которые следуют из них, останутся справедливы. При этом в их правые части необходимо добавить слагаемые, обусловленные флуктуационной составляющей мощностей турбин. Тогда система (5.67) запишется в виде системы стохастических дифференциальных

уравнений [145, 146]

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\tau} = \Delta - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2 - \alpha) + b_1 \xi_1(\tau) \equiv g_1(\varphi_1, \varphi_2) + b_1 \xi_1(\tau), \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \Delta - 2 \cos(\alpha) \sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \alpha) + b_2 \xi_2(\tau) \equiv g_2(\varphi_1, \varphi_2) + b_2 \xi_2(\tau), \end{cases} \quad (5.68)$$

где  $\xi_i(\tau)$  – случайные функции времени,  $b_i$  – постоянные коэффициенты,  $i = 1, 2$ . Выберем  $\xi_i(\tau) = W_i(\tau)$ , где  $W_i$  – статистически независимые стандартные виннеровские случайные процессы [147], описывающие влияние случайных приращений мощностей турбин. Далее для удобства будем обозначать время через  $t$ , подразумевая под ним  $\tau$ . Непрерывный случайный процесс  $W(t)$ ,  $t \in [0, T_{fin}]$  называется стандартным виннеровским случайным процессом, если выполнены три условия:

1.  $W(0) = 0$  с вероятностью равной 1.
2. Для моментов времени  $0 \leq t_i < t_j \leq T_{fin}$  случайная величина, заданная приращением  $W(t_j) - W(t_i)$ , имеет нормальное распределение с нулевым средним значением и дисперсией  $t_j - t_i$ , то есть  $W(t_j) - W(t_i) \sim N(0, t_j - t_i)$ .
3. Для моментов времени  $0 \leq t_i < t_j < t_k \leq T_{fin}$  приращения  $W(t_j) - W(t_i)$  и  $W(t_k) - W(t_j)$  являются статистически независимыми, то есть  $W(t)$  – случайный процесс с независимыми приращениями.

Систему (5.68) удобно привести к виду, который обычно используется при анализе стохастических дифференциальных уравнений [146]

$$d\vec{X}(t) = \vec{a}(\vec{X}(t), t)dt + \widehat{b}(\vec{X}(t), t)d\vec{W}(t), \quad \vec{X}(0) = \vec{X}_0, \quad 0 \leq t \leq T_{fin}, \quad (5.69)$$

где  $t \geq 0$  – время,  $\vec{X}(t) \in R^d$  – искомый  $d$ -мерный случайный процесс;  $\vec{a}$  –  $d$ -мерная вектор-функция,  $\vec{a} : R^d \times [0, \infty) \rightarrow R^d$ ;  $\widehat{b}$  – матрица размерности  $d \times m$ , составленная из функций  $b_{l,k}(\vec{X}(t), t)$ ,  $b_{l,k} : R^d \times [0, \infty) \rightarrow R$ ,  $k = 1, 2, \dots, d$ ,  $l = 1, 2, \dots, m$ ;  $\vec{W}(t) = [W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t)]$  –  $m$ -мерный стандартный виннеровский случайный процесс с компонентами  $W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t)$ ;  $d\vec{W}(t)$  – вектор приращений процесса  $\vec{W}(t)$  за время  $dt$ ;  $\vec{X}_0$  –  $d$ -мерный вектор начальных условий. В случае системы (5.68) компоненты системы (5.69) имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{a}(\vec{X}(t), t) = \begin{pmatrix} g_1(\varphi_1, \varphi_2) \\ g_2(\varphi_1, \varphi_2) \end{pmatrix}, \quad \widehat{b} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \\ \vec{W}(t) &= \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_0 = \begin{pmatrix} \varphi_1(0) \\ \varphi_2(0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Для интегрирования стохастических дифференциальных уравнений (5.69) существуют специальные методы [148]. Будем использовать модифицированный метод Эйлера – метод Эйлера-Маруямы (Euler-Maruyama method [146]). Согласно ему разобьем промежутки интегрирования  $[0, T_{fin}]$  на  $N$  равных частей длины  $\Delta t = T_{fin}/N$ , где  $\Delta t$  – шаг по времени. Точки



разбиения обозначим через  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ , где  $t_i = i\Delta t$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ . Тогда рекуррентная формула метода Эйлера-Маруямы запишется следующим образом

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \vec{a}(\vec{X}_i, t_i)\Delta t + \hat{b}(\vec{X}_i, t_i)\Delta \vec{W}(t_i), \quad (5.71)$$

где  $\vec{X}_k = \vec{X}(t_k)$  – значение случайного процесса в точке разбиения  $t_k$ ,  $\Delta \vec{W}(t_k)$  – вектор приращений виннеровского случайного процесса в той же точке. Его компоненты  $\Delta W_l(t_k) = W_l(t_{k+1}) - W_l(t_k) \sim N(0, \Delta t)$ ,  $l = 1, 2, \dots, m$ . Задаваясь начальным условием  $\vec{X}_0$  и генерируя в каждой точке разбиения  $t_k$  независимые приращения  $\Delta W_l(t_k)$ , с помощью формулы (5.71) можно получить одну из реализаций случайного процесса  $\vec{X}(t)$ .

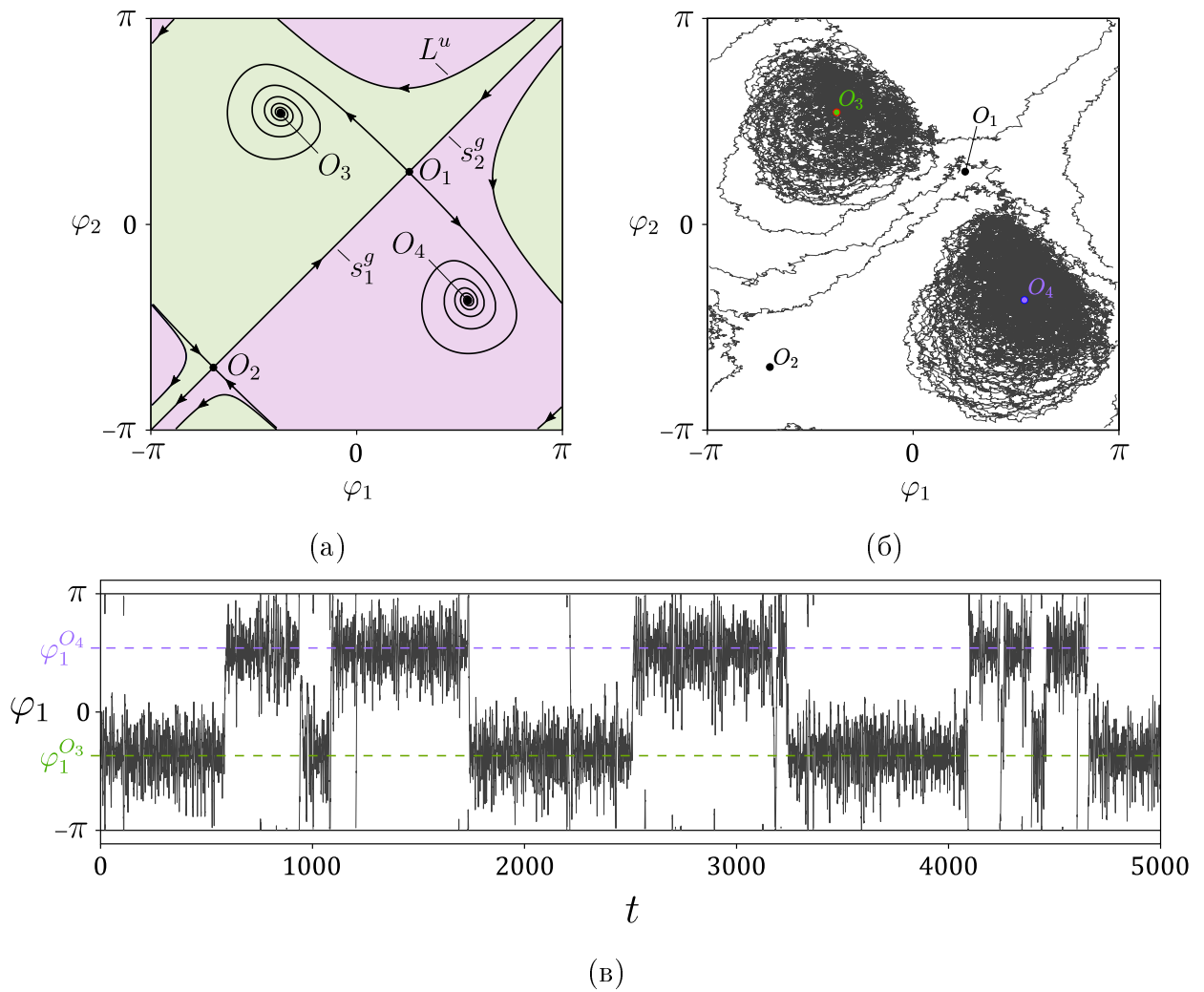


Рис. 5.16: Разбиение фазового пространства системы (5.67) на области притяжения состояний равновесия  $O_3$  (выделена серым цветом) и  $O_4$  (выделена розовым цветом) (а). Для наглядности нанесены все особые траектории и точки системы. Траектория системы (5.69) на торе  $T$ , задаваемая одной из реализаций случайных функций времени  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  (б). Вид реализации  $\varphi_1(t)$  при переключениях между окрестностями точек  $O_3$  и  $O_4$  системы без шума (5.67) (в). Фиолетовым и зеленым пунктиром показаны соответствующие координаты точек  $O_3$  и  $O_4$ . Параметры:  $\Delta = -0.1$ ,  $\alpha = 1.3$  (а),  $\Delta = -0.1$ ,  $\alpha = 1.3$ ,  $b_1 = 0.25$ ,  $b_2 = 0.15$  (б) и (в).

Далее будем рассматривать систему (5.69), которая эквивалентна системе (5.68), если учесть выражения (5.70). В рамках задачи о переключениях, предположим, что изначально система находилась в точке  $O_3$ , координаты которой задают вектор начальных условий  $\vec{X}_0$ . Эволюция состояния системы может быть наглядно показана с помощью траектории на торе  $T$ , задаваемой конкретной реализацией случайного процесса  $\vec{X}(t)$  (рис.5.16, б). Траекторией системы (5.69) будем называть кривую на торе  $T$ , заданную параметрически с помощью компонент реализации случайного процесса  $\vec{X}(t)$ , то есть случайных функций  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$ , где время  $t$  играет роль параметра. При фиксированном  $t$  получаем некоторую точку  $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  на траектории, которую, по аналогии с автономной системой без шума, будем по-прежнему называть изображающей точкой. Статистические характеристики случайного процесса  $\vec{X}(t)$ , задаваемого системой (5.69), определим с помощью совокупности его реализаций, образующих статистический ансамбль из  $N_{real}$  реализаций (или траекторий). Отдельную реализацию обозначим через  $\vec{X}^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_{real}$ ,  $i$  – номер реализации. Всего будем использовать  $N_{real} = 30000$  реализаций случайного процесса при фиксированных значениях параметров.

Установим роль параметров  $b_i$ ,  $i = 1, 2$ . Приращение  $\Delta W_i(t_k)$  является случайной величиной с дисперсией  $\Delta t$ , если же рассмотреть случайную величину  $b_i \Delta W_i(t_k)$ , то она будет иметь дисперсию  $b_i^2 \Delta t$ . Зафиксируем шаг  $\Delta t = 0.01$ . Тогда дисперсия случайной величины  $b_i \Delta W_i(t_k)$ , которая входит в рекуррентную формулу (5.71) и фактически задает величину шумового воздействия, будет определяться значением параметра  $b_i$ , который мы используем в качестве контрольного. Остальные параметры системы (5.69) зафиксируем  $\Delta = -0.1$ ,  $\alpha = 1.3$ , а также примем  $T_{fin} = 1000$ .

**Плотность вероятности.** Состояние системы (5.69) в момент времени  $t$  полностью определяется плотностью вероятности  $w(\varphi_1, \varphi_2, t)$ :

$$w(\varphi_1, \varphi_2, t) d\varphi_1 d\varphi_2 = P\{\varphi_1 \leq \varphi_{1,t} \leq \varphi_1 + d\varphi_1, \varphi_2 \leq \varphi_{2,t} \leq \varphi_2 + d\varphi_2\},$$

где  $\varphi_{1,t}, \varphi_{2,t}$  – значения случайных процессов в момент времени  $t$ . Обычно ее определяют из уравнения Фоккера-Планка, записанного для системы (5.68) [145, 147]. Отыскание его решения требует привлечения численных методов моделирования дифференциальных уравнений в частных производных. Здесь же используем более простой подход.

Значения плотности вероятности  $w(\varphi_1, \varphi_2, t)$  можно оценить с помощью ансамбля реализаций случайного процесса  $\vec{X}(t)$ , который получен с помощью метода Эйлера-Маруямы (5.71). Покроем область значений переменных  $T = \{-\pi \leq \varphi_i \leq \pi, i = 1, 2\}$  квадратной сеткой с шагом  $h = 2\pi/N_{cell}$ , тем самым разбив ее на  $N_{cell}^2$  ячеек, где  $N_{cell}$  – число ячеек по горизонтали (вертикали). Положение отдельной ячейки зададим координатами ее нижней левой вершины  $(\varphi_1^{(p)}, \varphi_2^{(q)})$ , где  $\varphi_1^{(p)} = hp$ ,  $\varphi_2^{(q)} = hq$ ,  $p, q = 0, 1, \dots, N_{cell} - 1$ . Зафиксируем момент времени  $t = t_k$  и выберем одну из ячеек. Посчитаем число точек ансамбля реализаций  $\vec{X}^{(i)}(t_k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_{real}$ , попавших в эту ячейку при  $t = t_k$ , обозначим его через  $N_{p,q}(t_k)$ . Тогда значение плотности вероятности в точке  $(\varphi_1^{(p)}, \varphi_2^{(q)})$  и момент времени  $t_k$  можно оценить как

$$w(\varphi_1^{(p)}, \varphi_2^{(q)}, t_k) \approx \frac{N_{p,q}(t_k)}{N_{real} h^2},$$

то же значение необходимо приписать всей ячейке и обозначить его, например, с помощью цвета. Перебирая все ячейки и вычисляя соответствующие значения плотности вероятности, получим оценку ее распределения по области  $T$  в момент  $t_k$ , то есть  $w(\varphi_1, \varphi_2, t_k)$ . Повторяя рассуждения для всех точек  $t_l$  разбиения отрезка  $[0, T_{fin}]$ , получим оценку  $w(\varphi_1, \varphi_2, t)$ . Приведем результаты такой оценки при разных значениях параметра  $b_2$  ( $b_2 = 0.1; 0.25$  и  $0.4$ ) и фиксированном значении параметра  $b_1 = 0.1$  (рис. 5.17, 5.18).

В качестве примера рассмотрим как изменяется во времени  $w(\varphi_1, \varphi_2, t)$  при  $b_1 = 0.25$ ,  $b_2 = 0.1$ . В этом случае имеет место следующий типичный сценарий (рис. 5.17, 5.18, первый столбец).

- При  $t = 0$  имеем  $w(\varphi_1, \varphi_2, 0) = \delta(\varphi_1 - \varphi_1^*)\delta(\varphi_2 - \varphi_2^*)$ , где  $\varphi_1^*, \varphi_2^*$  – координаты точки  $O_3$ , которые задают вектор начальных условий  $\vec{X}_0$ ,  $\delta(\varphi_i - \varphi_i^*)$  – дельта-функция.
- При  $t = 20$  распределение имеет вид горба, локализованного в окрестности точки  $O_3$ . С ростом времени вершина этого горба опускается, он занимает всю большую область (рис. 5.17, а1-б1).
- При  $100 < t < 200$  распределение приобретает характерный двугорбый вид. Второй горб локализуется в окрестности точки  $O_4$ . Горбы соединены седловиной (рис. 5.18, а1).
- При  $200 < t < 600$  вершина горба, локализованного в окрестности точки  $O_3$ , опускается, а вершина другого горба, локализованного в окрестности точки  $O_4$ , поднимается. Области локализации обоих горбов изменяются незначительно. Седловина становится более выраженной (рис. 5.18, б1).
- При  $t > 600$  распределение практически не меняется, можно говорить о его близости к стационарному значению (рис. 5.18, в1).

Во всех рассмотренных случаях (рис. 5.17, 5.18) плотность вероятности  $w(\varphi_1, \varphi_2, t)$  с течением времени стремится к некоторому стационарному значению  $w(\varphi_1, \varphi_2)$ . В качестве его оценки можно принять распределение при  $t = 1000$ . Оно имеет характерный двугорбый вид при  $b_2 = 0.1$  и  $b_2 = 0.25$  (см. рис. 5.18, в1 и в2, соответственно). Горбы локализованы около точек  $O_3$  и  $O_4$ . При  $b_2 = 0.4$  стационарное распределение не имеет каких-либо особых точек локализации (рис. 5.18, в3). Отметим, что в момент времени  $t$  распределение плотности вероятности тем ближе к стационарному распределению, чем меньше параметр  $b_2$ .

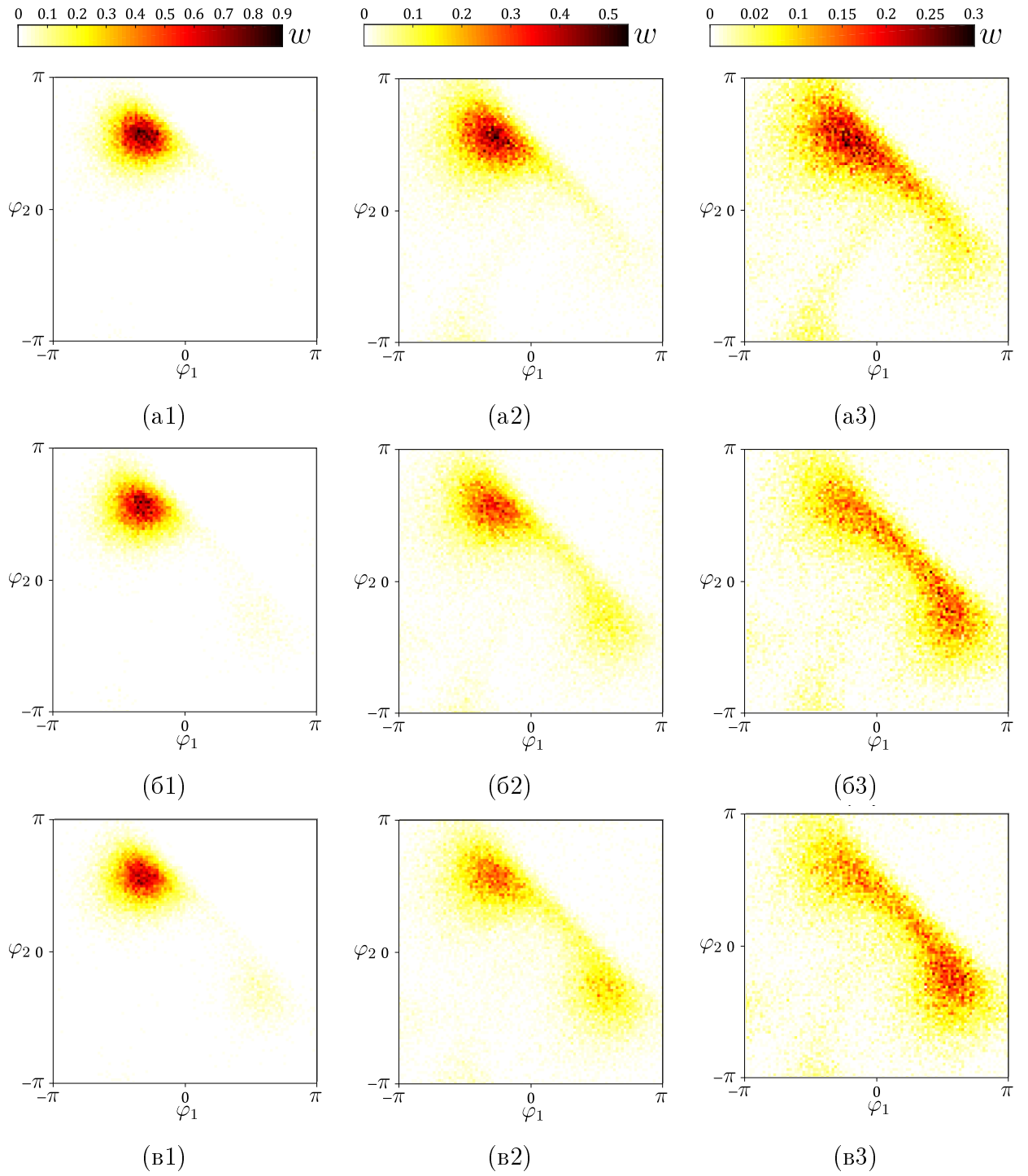


Рис. 5.17: Распределение плотности вероятности  $w(\varphi_1, \varphi_2, t)$  в фиксированные моменты времени  $t = 20$  (а),  $t = 60$  (б),  $t = 100$  (в). Параметры:  $b_1 = 0.24$  и  $b_2 = 0.1$  (а1)-(в1),  $b_2 = 0.25$  (а2)-(в2),  $b_2 = 0.4$  (а3)-(в3).

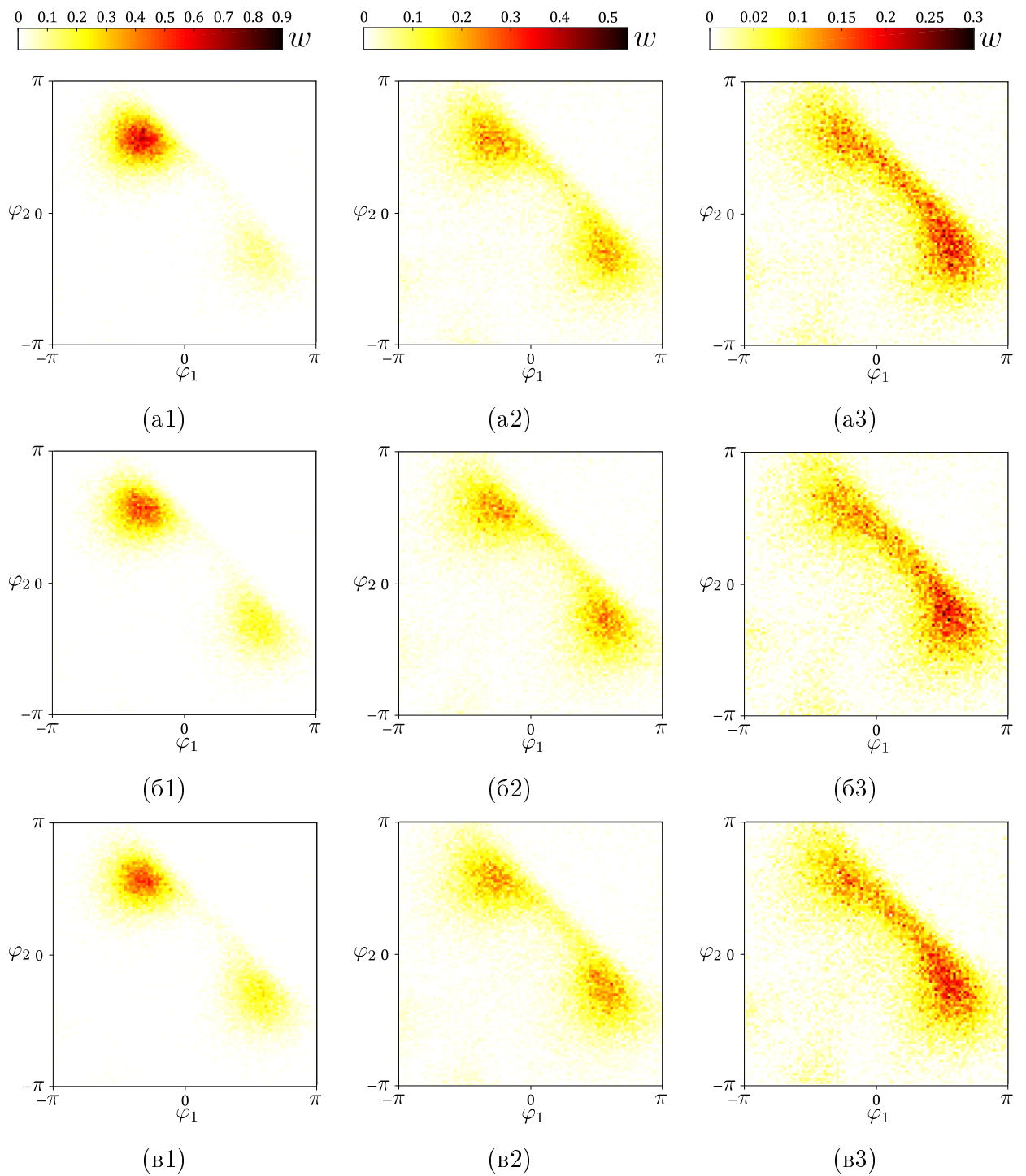


Рис. 5.18: Продолжение рисунка 5.17. Распределение плотности вероятности  $w(\varphi_1, \varphi_2, t)$  в фиксированные моменты времени  $t = 200$  (а),  $t = 600$  (б),  $t = 1000$  (в). Параметры:  $b_1 = 0.24$  и  $b_2 = 0.1$  (а1)-(в1),  $b_2 = 0.25$  (а2)-(в2),  $b_2 = 0.4$  (а3)-(в3).

Можно видеть, что указанные горбы распределения всегда сосредоточены в окрестностях состояний равновесия  $O_3$  и  $O_4$  системы без шума (5.67), а седловина – в окрестности неустойчивых сепаратрис седла  $O_1$  (рис. 5.16, а). Причем локализация тем сильнее, чем меньше параметр  $b_2$ , определяющий влияние шума на динамику системы (5.36). Логично предположить, что в общем случае локализация тем сильнее, чем меньше оба значения  $b_1$  и  $b_2$ .

Локализация распределения стационарной плотности вероятности в окрестностях точек  $O_3$  и  $O_4$  говорит о том, что изображающие точки системы (5.69) большую часть времени двигаются в тех же окрестностях. Далее дадим количественные характеристики степени локализации распределения  $w(\varphi_1, \varphi_2, t)$ .

**Вероятность нахождения в окрестностях особых точек.** Рассмотрим окрестность  $S_{r,O_i}$  точки  $O_i$ ,  $i = 3, 4$ , в виде окружности радиуса  $r$  с центром в этой точке. Степень локализации распределения плотности вероятности  $w(\varphi_1, \varphi_2, t)$  в области  $S_{r,O_i}$  в момент времени  $t$  будем характеризовать величиной вероятности нахождения изображающей точки в этой области, которую мы обозначим через  $p_{r,O_i}(t)$ . Она определяется выражением

$$p_{r,O_i}(t) = \iint_{S_{r,O_i}} w(\varphi_1, \varphi_2, t) d\varphi_1 d\varphi_2,$$

или непосредственно с помощью анализа ансамбля реализаций.

Зафиксируем значение  $r < r_{O_3-O_4}/2$ , где  $r_{O_3-O_4}$  – расстояние между точками  $O_3$  и  $O_4$ . Тогда изображающая точка системы (5.69) в момент времени  $t$  с вероятностью  $p_{r,O_3}(t)$  находится в окрестности  $S_{r,O_3}$  точки  $O_3$ . Это означает, что состояние системы, определяемое текущими координатами  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$  изображающей точки, близко к состоянию, определяемому точкой  $O_3$ , с той же вероятностью. Степень близости состояний определяется величиной  $r$ . При этом в сети с вероятностью  $p_{r,O_3}(t)$  реализуется режим, параметры которого близки к параметрам синхронного режима. Такой режим можно считать квазисинхронным. Предельное отклонение его характеристик от характеристик синхронного режима, соответствующего точке  $O_3$ , определяется величиной  $r$ . Значение  $r$  по сути определяет качество квазисинхронного режима, а окрестность  $S_{r,O_3}$  является его образом на торе  $T$ . Будем говорить, что квазисинхронный режим задается окрестностью  $S_{r,O_3}$ . Аналогичные рассуждения справедливы для точки  $O_4$  и ее окрестности  $S_{r,O_4}$ .

Таким образом, задача о переключениях между состояниями равновесия  $O_3$  и  $O_4$  (или синхронными режимами) системы (5.67) при наличии шума сводится к определению вероятностей пребывания изображающей точки системы (5.69) в окрестностях  $S_{r,O_3}$  и  $S_{r,O_4}$  этих точек, то есть к нахождению зависимостей  $p_{r,O_3}(t)$  и  $p_{r,O_4}(t)$ . При ненулевых значениях каждой из вероятностей, уместно говорить о переключениях между окрестностями  $S_{r,O_3}$  и  $S_{r,O_4}$  (или квазисинхронными режимами, задаваемыми этими окрестностями).

На рисунке 5.19 приведены зависимости  $p_{r,O_3}(t)$  и  $p_{r,O_4}(t)$  при разных значениях параметра  $b_2$ . Установлено, что вне зависимости от его конкретного значения, величина  $p_{r,O_3}$  монотонно убывает во времени, а  $p_{r,O_4}$  монотонно возрастает. При достаточно больших временах  $t$  зависимости стремятся к стационарным значениям  $p_{r,O_3}^{stat}$  и  $p_{r,O_4}^{stat}$  (рис. 5.19, г). Такой характер

изменения величин  $p_{r,O_3}(t)$  и  $p_{r,O_4}(t)$  полностью согласуется с типичным сценарием эволюции распределения плотности вероятности  $w(\varphi_1, \varphi_2, t)$ . Так как при  $t > 0$  обе вероятности отличны от нуля, то возможны переключения.

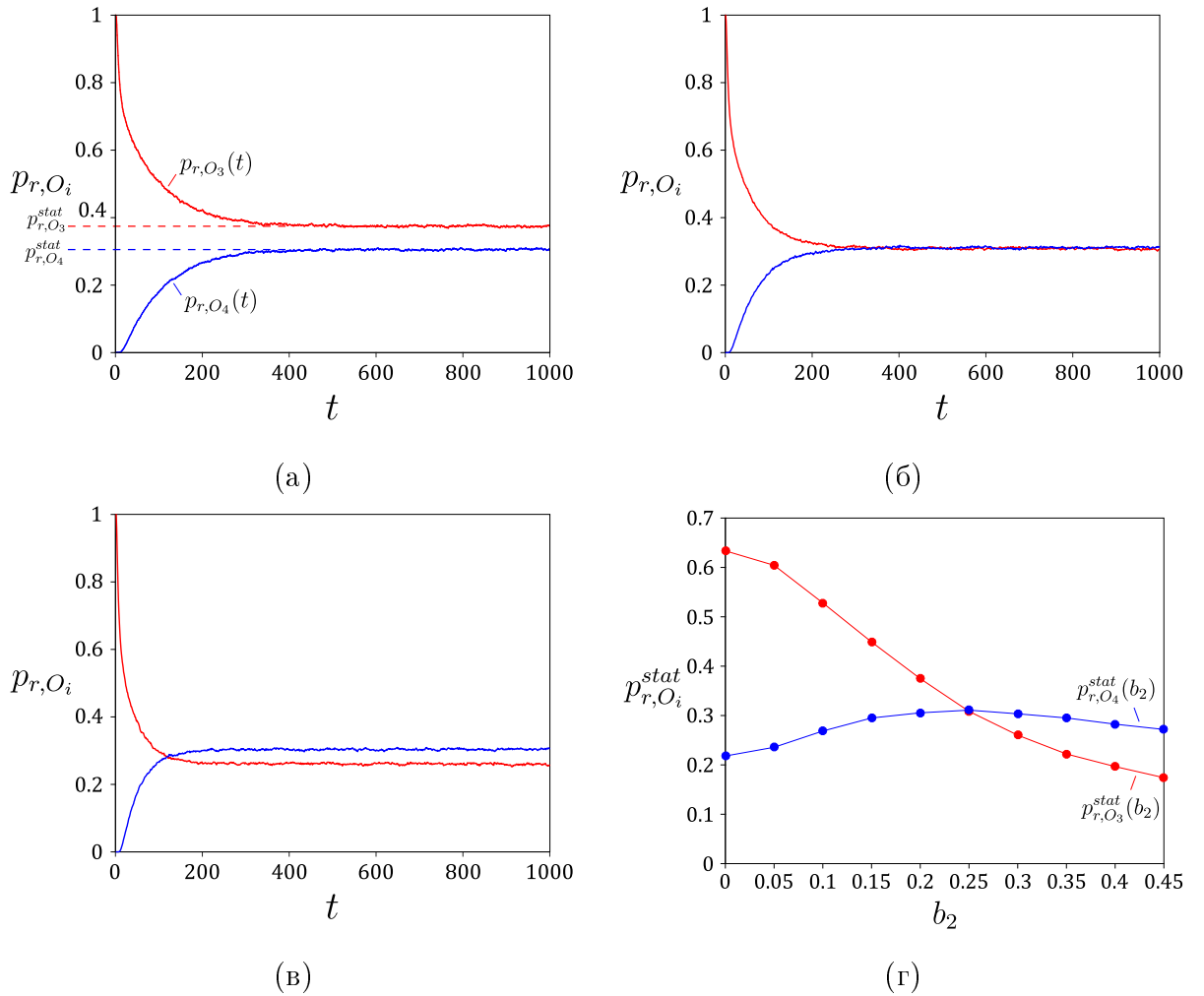


Рис. 5.19: Вероятности  $p_{r,O_3}(t)$  и  $p_{r,O_4}(t)$  при  $b_2 = 0.2$  (а),  $b_2 = 0.25$  (б) и  $b_2 = 0.3$  (в). Оценка стационарных значений вероятностей  $p_{r,O_3}^{stat}(b_2)$  и  $p_{r,O_4}^{stat}(b_2)$  (г). Параметры:  $b_1 = 0.25$ ,  $r = 1$ .

С точки зрения стационарных значений вероятностей  $p_{r,O_3}^{stat}$  и  $p_{r,O_4}^{stat}$  переключение между окрестностями  $S_{r,O_3}$  и  $S_{r,O_4}$  можно трактовать несколько иначе. Будем считать, что произошло переключение, если вероятность исходного состояния  $p_{r,O_3}^{stat}$  станет меньше, чем вероятность  $p_{r,O_4}^{stat}$  другого состояния, в которое происходит переключение, то есть  $p_{r,O_3}^{stat} < p_{r,O_4}^{stat}$ . На рисунке 5.19, г приведены зависимости  $p_{r,O_3}^{stat}(b_2)$  и  $p_{r,O_4}^{stat}(b_2)$ . Их можно интерпретировать следующим образом.

- При  $b_2 < 0.25$  вероятность реализации квазисинхронного режима, задаваемого окрестностью  $S_{r,O_3}$ , выше, чем вероятность реализации квазисинхронного режима, задаваемого окрестностью  $S_{r,O_4}$ . Причем их сумма  $p_{r,O_3}^{stat}(b_2) + p_{r,O_4}^{stat}(b_2) > 0.5$ . Это говорит о том, что с большей вероятностью реализуются указанные квазисинхронные режимы, чем какие-либо другие.

- При  $b_2 = 0.25$  вероятность  $p_{r,O_3}^{stat} \approx p_{r,O_4}^{stat}$ , то есть оба квазисинхронных режима почти равновероятны.
- При  $b_2 > 0.25$  вероятность реализации квазисинхронного режима, задаваемого окрестностью  $S_{r,O_3}$ , теперь ниже, чем вероятность реализации квазисинхронного режима, задаваемого окрестностью  $S_{r,O_4}$ . То есть происходит переключение. Однако с ростом параметра  $b_2$  сумма вероятностей  $p_{r,O_3}^{stat}(b_2) + p_{r,O_4}^{stat}(b_2)$  становится меньше 0.5, что говорит о достаточно низкой вероятности реализации квазисинхронных режимов.

Приведенные зависимости  $p_{r,O_3}(t)$  и  $p_{r,O_4}(t)$  (рис. 5.19) получены при одном значении  $r = 1$ . С увеличением или уменьшением  $r$  ( $r < r_{O_3-O_4}/2$ ) они претерпевают количественные, но не качественные изменения.

Таким образом, зависимости  $p_{r,O_3}(t), p_{r,O_4}(t)$  и  $p_{r,O_3}^{stat}(b_2), p_{r,O_4}^{stat}(b_2)$  содержат информацию о возможности переключения между квазисинхронными режимами сети и позволяют прогнозировать ее динамику во времени.

**Среднее время первого достижения границы окрестности особой точки.** Изображающие точки системы (5.69) стартуют из точки  $O_3$ , а затем в течении некоторого времени двигаются в заданной окрестности  $S_{r,O_3}$ , при этом в сети реализуется квазисинхронный режим. В этом случае среднее время первого достижения границы окрестности  $S_{r,O_3}$  изображающей точкой [147], которое мы обозначим через  $T_1$ , можно трактовать как среднее время первого нарушения квазисинхронного режима. При  $t > T_1$  становятся возможны переключения между окрестностями  $S_{r,O_3}$  и  $S_{r,O_4}$  (или квазисинхронными режимами). С учетом того, что режимы работы сети, задаваемые окрестностями  $S_{r,O_3}$  и  $S_{r,O_4}$ , имеют примерно ту же разницу, что и режимы задаваемые точками  $O_3$  и  $O_4$ , указанные переключения могут быть нежелательными. Поэтому среднее время первого нарушения квазисинхронного режима, задаваемого окрестностью  $S_{r,O_3}$ , является важной характеристикой надежности сети.

На рисунке (5.20) приведены зависимости  $T_1(r)$  при разных значениях параметра  $b_2$ , полученные с помощью ансамбля реализаций. Красными точками обозначены значения, для которых все изображающие точки ансамбля достигают границы окрестности  $S_{r,O_3}$  за время меньшее, чем время интегрирования  $T_{fin}$ . При значениях, отмеченных черными точками более чем 96% изображающих точек ансамбля достигают границы указанной окрестности, остальные же реализации не принимались в расчет при определении  $T_1$ . Возможно, что наличие таких реализаций связано с недостаточным временем интегрирования  $T_{fin}$ . В любом случае, их доля составляет менее 4% от общего числа реализаций ансамбля. Все зависимости  $T_1(r)$  являются монотонно возрастающими. С ростом параметра  $b_2$  время  $T_1$  в целом уменьшается, что обусловлено ростом дисперсии слагаемого, связанного с шумом, в уравнении (5.69).

Характеристики квазисинхронного режима, задаваемого окрестностью  $S_{r,O_3}$ , определяются ее размером, то есть радиусом  $r$ . Чем он больше, тем сильнее они отличаются от характеристик синхронного режима, задаваемого точкой  $O_3$ . Уместно говорить, что с ростом  $r$  качество квазисинхронного режима падает. Поэтому с помощью зависимостей  $T_1(r)$  можно



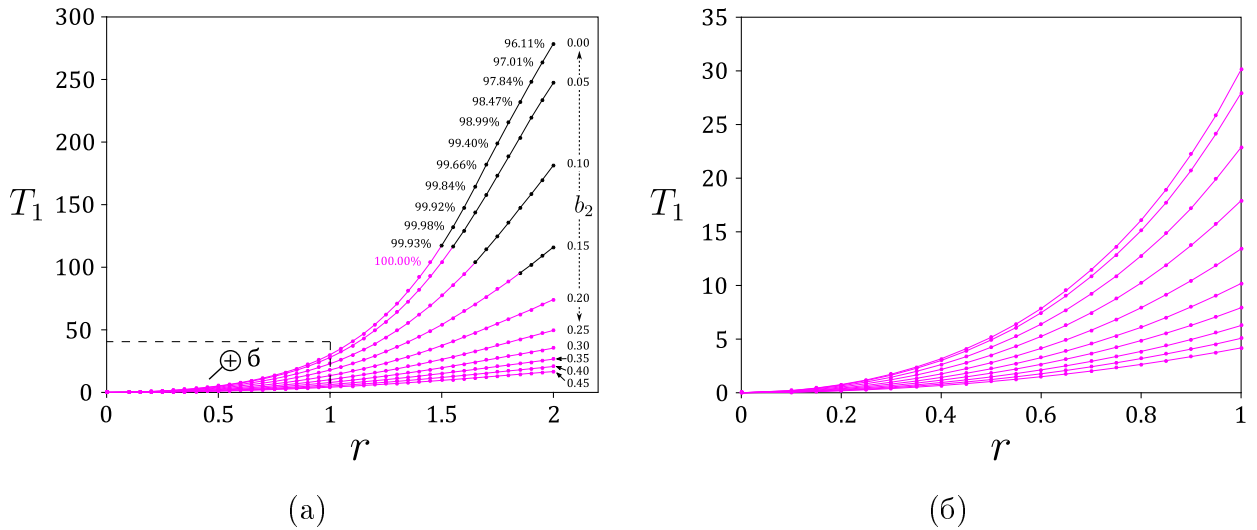


Рис. 5.20: Среднее время первого достижения границы окрестности  $S_{r,O_3} - T_1(r)$  при разных значениях параметра  $b_2$ , указанных справа от соответствующих кривых. Розовые точки соответствуют случаю, когда все изображающие точки достигли указанной границы, а черные – случаю, когда только определенная доля изображающих точек (указанная рядом с черными точками на графике) достигла границы окрестности  $S_{r,O_3}$  за время интегрирования. Параметр  $b_1 = 0.25$ .

установить некоторый компромиссный вариант между качеством квазисинхронного режима ( $r$ ) и средним временем его первого нарушения ( $T_1$ ) при заданных параметрах шума ( $b_1, b_2$ ). В этом контексте время  $T_1$  можно трактовать, как характерное время принятия решений о регулировании параметров энергосети с целью сохранения режима с заданными характеристиками.

## 5.7 Выводы

В рамках МЭС рассмотрена многомашинная энергосеть, состоящая из произвольного числа генераторов, питающих общую нагрузку, замещаемую постоянным сопротивлением. В случае, когда линия электропередачи одного из генераторов значительно короче линий остальных генераторов или/и на ней выполнена продольная компенсация, осуществлен переход от эффективной сети с глобальными связями к редуцированной эффективной сети с хаб-топологией. Установлены однородный и неоднородные синхронные режимы, которые различаются распределениями токов по цепям энергосети и стационарными мощностями генераторов, выдаваемыми в сеть. Выделена область параметров, отвечающих сосуществованию однородного и неоднородных синхронных режимов. При этом суммарная мощность генераторов в любом из неоднородных синхронных режимов превосходит таковую в случае однородного синхронного режима. Поэтому, с точки зрения генерируемой мощности, неоднородные синхронные режимы являются более выгодными. Мультистабильность (сосуществование) синхронных режимов можно трактовать как положительное, так и отрицательное свойство. С одной стороны, при возмущениях энергосеть может переключаться между син-

хронными режимами, без существенных нарушений работы, если, например, генерируемая мощность во вновь установившемся синхронном режиме достаточна для питания потребителя. С другой стороны, смена распределения токов при переключении может привести к срабатыванию релейных защит и отключению одной или нескольких линий передачи, что потенциально может привести к аварии во всей энергосети. Построены карты режимов многомашиных энергосетей с различным числом генераторов и установлено, что синхронные режима могут сосуществовать с асинхронными и квазисинхронными режимами.

Рассмотрены задачи об отключении и подключении генератора к энергосети, изначально находящейся в одном из синхронных режимов. Найдены параметры, гарантирующие установление одного из видов синхронных режимов в измененной энергосети. При это установлено, что при отключении генератора устанавливается именно однородный синхронный режим, а при подключении генератора он имеет значительно большую вероятность установления ( $\geq 87\%$ ), чем неоднородные синхронные режимы ( $\leq 13\%$ ).

На примере трехмашинной энергосети изучена устойчивость неоднородных синхронных режимов по отношению к различным возмущениям. В случае произвольных возмущений динамических переменных дана оценка минимального расстояния от устойчивого состояния равновесия, соответствующего неоднородному синхронному режиму, до границы его области притяжения. Она определяет максимальную величину указанных возмущений, не приводящих к потере синхронного режима ( $r_{max}^{safe}$ ). Установлены наиболее оптимальные параметры энергосети, соответствующие максимальному значению  $r_{max}^{safe}$ . Определены величины частотных и фазовых возмущений ( $\xi_i$ ), не нарушающих исходный синхронный режим или приводящих к переключению в другой синхронный режим или в асинхронный режим. При этом выявлена сложная зависимость реакции энергосети на каждый тип возмущений. Промежутки величин возмущений, приводящих к различным режимам, чередуются между собой и имеют длины, значительно меньшие, чем длина всего диапазона рассматриваемых возмущений. Поэтому, если величина возмущения задана с погрешностью, то можно говорить лишь о вероятности установления того или иного режима. Изучена устойчивость трехмашинной энергосети в условиях случайных колебаний мощностей турбин, которые моделируются виннеровским случайным процессом (шум). Для этого рассмотрена система стохастических дифференциальных уравнений и установлены основные статистические характеристики, задаваемого ею случайного процесса. В качестве математических образов нормальных режимов использовались круговые окрестности ( $S_{r,O_i}$ ,  $i = 3, 4$ ) устойчивых точек системы без шума. Получено характерное распределение плотности вероятности случайного процесса, которое имеет вид двух горбов, локализованных в окрестностях указанных состояний равновесия, и соединенных седловиной. Последнее свидетельствует о возможности переключений между окрестностями  $S_{r,O_i}$  или нормальными режимами. Определен характер изменения вероятностей реализации этих режимов во времени ( $p_{r,O_i}(t)$ ,  $i = 3, 4$ ). Вероятность исходного режима с течением времени убывает, а другого нормального режима – возрастает. С течением времени обе вероятности приближаются к стационарным значениям. Определено среднее время первого нарушения нормального режима, которое можно трактовать как характерное время

принятия решения о регулировании параметров энергосети с целью сохранения приемлемых показателей ее работы.

## Приложение к главе 5

Необходимо сделать два важных уточнения, касающихся системы (5.22) и результатов, полученных с ее помощью.

При выводе системы (5.22) мы пренебрегали слагаемыми с коэффициентами  $K_{m,j} \ll K_{1,j}$ ,  $m \neq j$ ,  $m, j = 2, 3, \dots, (N+1)$ . Если же этого не делать и считать, что  $K_{m,j}/K_{1,j} = \varepsilon \ll 1$ , то в правые части уравнений (5.22) для  $y_i$  нужно добавить слагаемые, содержащие множители  $\varepsilon$  перед синусами, и представляющие собой малую добавку. Такую систему будем обозначать как (5.22'). Ясно, что при достаточно малом параметре  $\varepsilon$  грубые системы (5.22) и (5.22') должны иметь схожую динамику. Например, при  $N = 2$  установлено, что для  $\varepsilon = 0.1$  система (5.22') имеет такое же количество однородных и неоднородных состояний равновесия, как и система (5.22), причем области их существования близки к аналогичным областям системы (5.22). Такие же результаты могут быть получены и при больших  $N$ , но, очевидно, меньших  $\varepsilon$ . Поэтому система (5.22) дает верный результат в контексте количества синхронных режимов и их типов, а также позволяет установить их характеристики, причем аналитически.

При выводе системы (5.22) мы полагали, что передающие системы всех генераторов, кроме первого, имели одинаковые параметры, что значительно сокращало число контрольных параметров и приводило к появлению симметрии в системе (5.22). Однако в силу грубости системы (5.22) небольшое изменение параметров одной из линий передачи должно сохранять основные результаты о количестве и типе устойчивых состояний равновесия. Величина такого изменения должна определяться исходя из конкретного набора параметров схемы замещения энергосети. Данное утверждение было проверено численно при  $N = 2$ .

Таким образом, результаты о существовании и устойчивости синхронных режимов, полученные с помощью системы (5.22), могут быть использованы как начальное приближение при исследовании энергосетей, динамика которых задается уравнениями, правые части которых близки к таковым у системы (5.22).

## Глава 6

# Устойчивость энергосети Нижнего Новгорода

В шестой главе рассматривается МСМ энергосети Нижнего Новгорода, учитывающая основные особенности ее топологии. В ее рамках установлена возможность сосуществования синхронного и различных квазисинхронных режимов. Изучена устойчивость энергосети по отношению к возмущениям динамических переменных отдельных потребителей и генераторов, а также к скачкам мощностей турбин генераторов или мощностей потребителей (нагрузок на валы синхронных моторов) в виде прямоугольных импульсов с различной длительностью. Выделены наиболее уязвимые к указанным возмущениям машины. Установлено, что существует некоторое пороговое значение длины линии передачи, при превышении которого машина (генератор), связанная с сетью только этой линией, становится особо уязвима к скачкам мощности.

### 6.1 Модель

Проведем анализ устойчивости энергосети Нижнего Новгорода. Для построения ее МСМ, учитывающей основные особенности топологии, воспользуемся картой-схемой размещения линий электропередачи и подстанций в Нижнем Новгороде [129] (рис. 6.1). Будем считать, что роль генераторов выполняют внешние, по отношению к городу, подстанции и электростанции, а потребителей – подстанции, расположенные в черте города. В этом случае граф МСМ энергосети Нижнего Новгорода содержит 5 узлов-генераторов и 9 узлов-потребителей, то есть  $N^{\text{МСМ}} = 14$  (рис. 6.2). Ребра графа соответствуют линиям передачи между подстанциями и электростанциями. Всего граф содержит  $N_{\text{edge}} = 17$  ребер. Будем предполагать, что линии передачи имеют одинаковую конструкцию и отличаются только длиной. Тогда индуктивное сопротивление линии передачи между  $i$ -ым и  $j$ -ым элементами энергосети, выраженное в условных единицах сопротивления  $x_{\text{basic}}$  (Ом), примет вид

$$x_{i,j} = \frac{x_0 l'_{i,j}}{x_{\text{basic}}} = \frac{x_0 l_{\text{basic}} l_{i,j}}{x_{\text{basic}}}, \quad (6.1)$$

где  $x_0$  (Ом/км) – погонное индуктивное сопротивление линий передачи,  $l_{basic} = 1$  км – базисная единица длины,  $l'_{i,j}$  – длина линии передачи между  $i$ -ым и  $j$ -ым элементами энергосети в километрах,  $l_{i,j} = l'_{i,j}/l_{basic}$  – соответствующая безразмерная длина той же линии. Пропускная способность линии передачи  $K_{i,j}$  (вес ребра между  $i$ -ым и  $j$ -ым узлами, см. Гл. 1) может быть записана в виде

$$K_{i,j} = \frac{K a_{i,j}}{l_{i,j}}, \quad K = \frac{u^2 x_{basic}}{x_0 l_{basic}}, \quad (6.2)$$

где  $a_{i,j} = 1$ , если  $i$ -ый и  $j$ -ый узлы связаны ребром (рис. 6.2), и  $a_{i,j} = 0$  в противном случае. Предполагается, что  $|U_i| = u$ ,  $i = 1, 2, \dots, N^{MCM}$ . Вводя в уравнения МСМ (1.3) новые параметры и время

$$p_i = \frac{P_i}{K}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{K}}, \quad t_{new} = \sqrt{K}t, \quad (6.3)$$

перепишем их в виде

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = p_i - \lambda y_i + \sum_{j=1}^{N^{MCM}} \frac{a_{i,j}}{l_{i,j}} \sin(\delta_j - \delta_i), \end{cases} \quad (6.4)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени  $t_{new}$ . Нетрудно видеть, что уравнения (6.4) совпадают с (3.5), если в них положить  $\Psi_{i,j} = \pi/2$  для всех допустимых  $i$  и  $j$ .

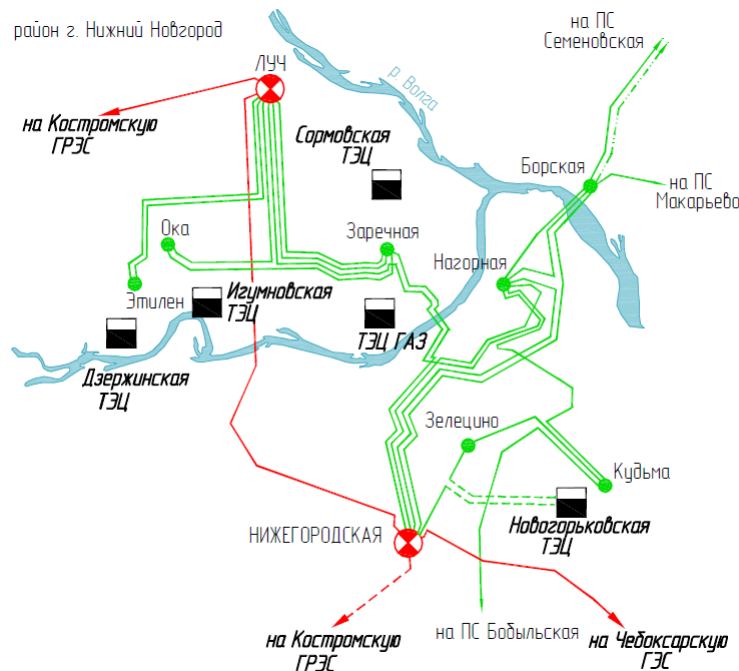


Рис. 6.1: Карта-схема размещения линий электропередачи и подстанций напряжением 220 кВ и выше, а также электростанций в Нижнем Новгороде. Зелеными и красными линиями обозначены линии электропередачи. Зелеными и красными кругами обозначены подстанции, например, "Ока" и "Луч", соответственно.

Для выполнения необходимого условия существования стационарного состояния энергосети (1.4) положим для всех узлов-генераторов  $p_i = p_{gen}$  ( $p_{gen} < 0$ ), а для всех узлов-потребителей примем  $p_j = p_{con}$ ,  $p_{con} = -p_{gen}N_{gen}/(N^{MCM} - N_{gen})$  ( $p_{con} < 0$ ), где  $N_{gen} = 5$  — число генераторов в сети (рис. 6.2).

Состояние энергосети задается разностями  $\Delta_k = \delta_i - \delta_j$ ,  $k = 1, 2, \dots, N_{edge}$  (см. рис. 6.2), которые определяют характер взаимодействия непосредственно связанных ( $a_{i,j} = 1$ ) узлов сети. Для определенности будем считать, что  $i > j$  для соответствующей пары узлов.

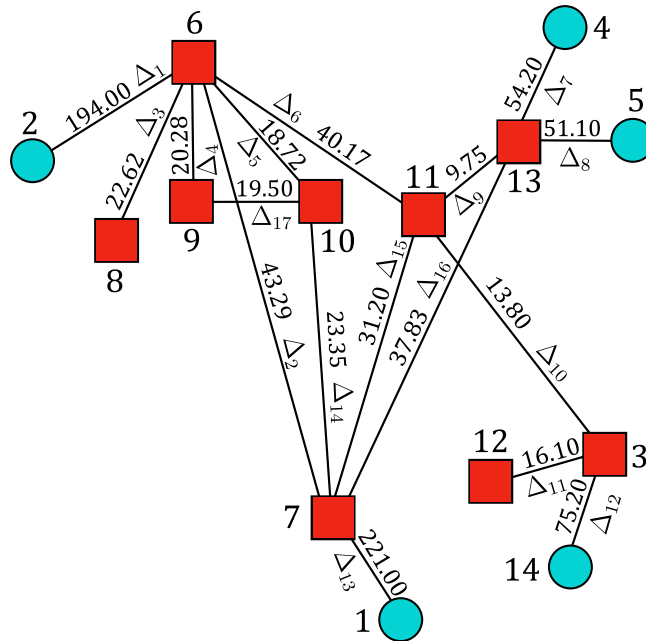


Рис. 6.2: Граф МСМ энергосети Нижнего Новгорода. Рядом с узлами, указаны их номера. Над ребрами указаны длины, соответствующих линий передачи, выраженные в километрах, и переменные  $\Delta_k = \delta_i - \delta_j$ , отвечающие за взаимодействие  $i$ -го и  $j$ -го узлов.

## 6.2 Режимы

Установлено, что в МСМ энергосети Нижнего Новгорода наряду с синхронным режимом, могут существовать различные квазисинхронные режимы. Удобно объединить их в таблицу режимов. Каждый столбец таблицы соответствует одному режиму, который характеризуется цветом составляющих его ячеек. Ячейки же соответствуют переменным  $\Delta_k$ , которые определяют характер взаимодействия связанных узлов. Если между узлами устанавливается синхронный режим, то ячейка окрашивается в зеленый цвет, если же устанавливается квазисинхронный или асинхронный режимы, то ячейка окрашивается в синий и красный цвета, соответственно (рис. 6.3 и 6.4). Очевидно, синхронному режиму работы всей сети соответствует столбец, целиком составленный из зеленых ячеек. Например, для режима под номером 4 (рис. 6.3, а и рис. 6.2) 2-ой и 6-ой, 5-ый и 13-ый, 3-ий и 14-ый, 1-ый и 7-ой узлы

(машины) взаимодействуют в асинхронном режиме, в остальных же парах узлов устанавливаются квазисинхронные режимы.

При фиксированных мощностях генераторов  $p_{gen}$  увеличение параметра  $\lambda$  приводит к уменьшению общего числа возможных режимов энергосети (рис. 6.3), при этом в рамках отдельных режимов уменьшается количество пар узлов с асинхронным режимом взаимодействия и растет число пар с квазисинхронным (рис. 6.3 б,в). Существует пороговое значение  $\lambda$  превышение которого ведет к тому, что синхронный режим во всей сети становится единственно возможным.

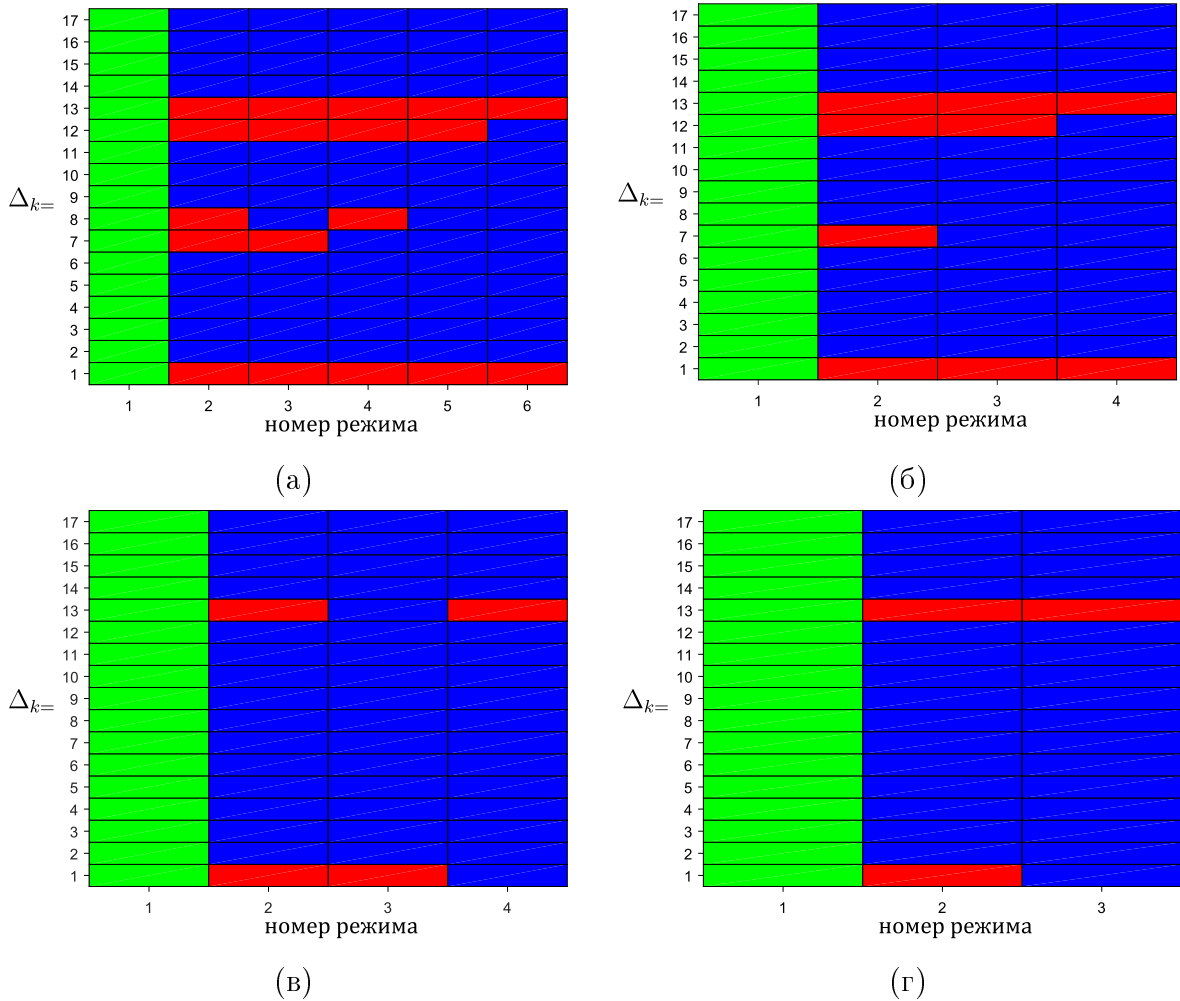


Рис. 6.3: Таблицы режимов МСМ энергосети Нижнего Новгорода при  $\lambda = 0.005$  (а),  $\lambda = 0.01$  (б),  $\lambda = 0.02$  (в),  $\lambda = 0.01$  (г). Параметр  $p_{gen} = 0.0025$ .

При фиксированном демпферном коэффициенте  $\lambda$  увеличение мощностей генераторов  $p_{gen}$  приводит к увеличению общего числа возможных режимов энергосети (рис. 6.4), при этом в отдельных режимах растет доля пар узлов с асинхронным режимом взаимодействия. Из уравнений (6.4) следует, что при  $p_{gen} > \max(p_{tr,i})$ ,  $p_{tr,i} = \max\left(\sum_{j=1}^{N^{МСМ}} a_{i,j}/l_{i,j}\right)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N^{МСМ}$ , во всей сети возможен только асинхронный режим.

Таким образом, рост мощности генераторов ( $p_{gen}$ ) при соответствующем увеличении мощности потребителей ( $p_{con}$ ) и неизменных пропускных способностях линий электропередачи ( $\sim l_{i,j}^{-1}$ ) ведет к появлению наряду с синхронным режимом, различных квазисинхронных ре-

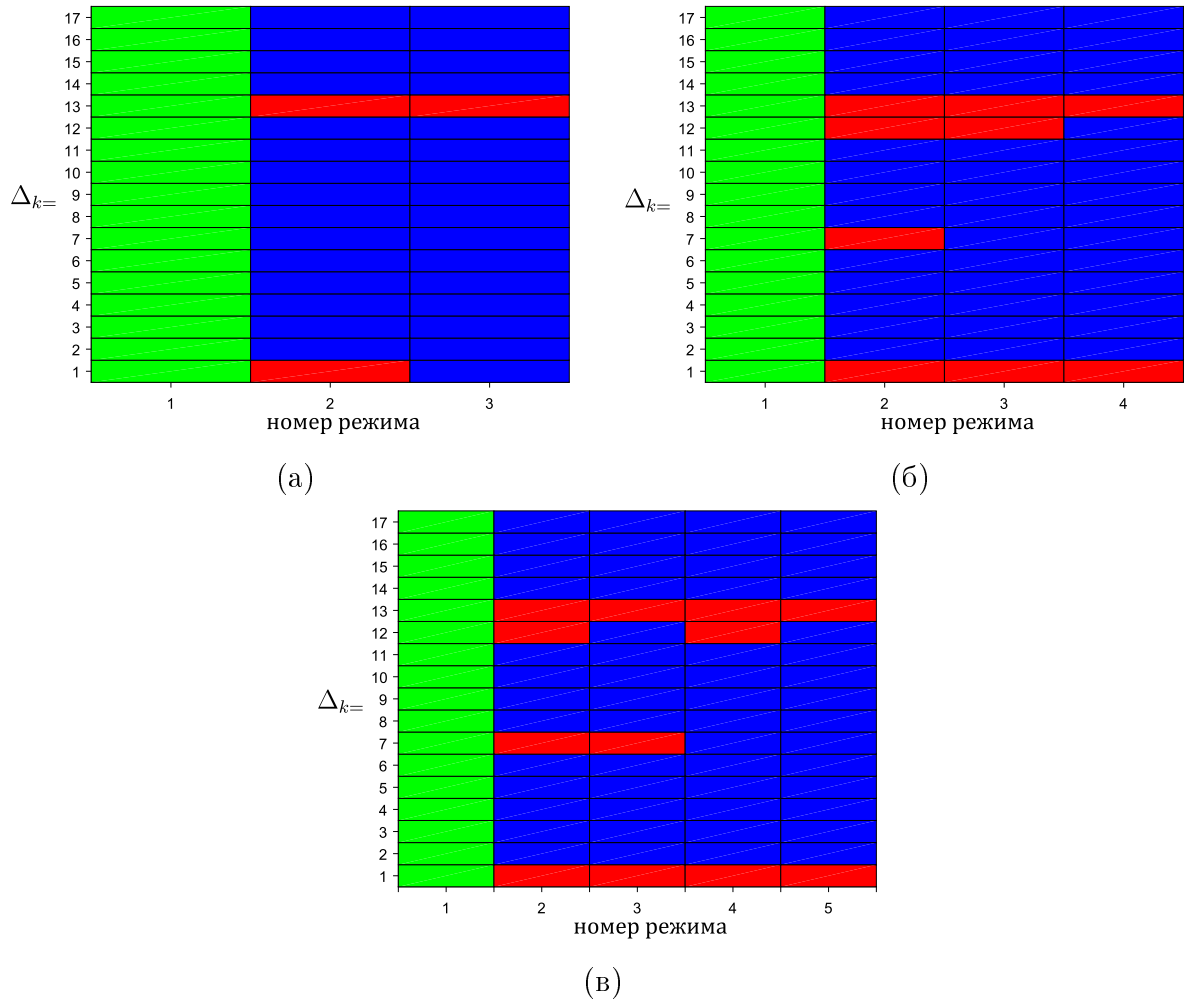


Рис. 6.4: Таблицы режимов МСМ энергосети Нижнего Новгорода при  $p_{gen} = 0.003$  (а),  $p_{gen} = 0.0035$  (б),  $p_{gen} = 0.004$  (в). Параметр  $\lambda = 0.02$ .

жимов энергосети. При этом, вне зависимости от выбора одного из них, часть пар узлов всегда взаимодействуют в асинхронном режиме (см., например, рис. 6.4, в – 1-ая и 13-ая строки). К ним относятся 2-ой и 6-ой, 1-ый и 7-ой узлы, причем первый узел каждой пары связан только со вторым, а соответствующие линии имеют наибольшую длину – 194 и 221 км (рис. 6.2).

### 6.3 Устойчивость отдельных потребителей и генераторов

С практической точки зрения, важным является вопрос об устойчивости энергосети (ее синхронного режима) при нарушениях в работе отдельных генераторов или потребителей (моторов). Будем считать, что нарушение в работе  $j$ -го узла сети сопровождается изменением координат  $\delta_j$  и  $y_j$  (см. [49]), значения которых ограничим областью

$$G_j = \{\delta_j \in S^1, y_j \in [y_j^-, y_j^+]\}, \quad (6.5)$$

где  $y_j^\pm$  – это границы поглощающей области системы (6.4), определяемой как



$$G^+ = \{\delta_i \in S^1, y_i \in [y_i^-, y_i^+], i = 1, 2, \dots, N\}, y_i^\pm = \frac{1}{\lambda} \left( p_i \pm \sum_{j=1}^{N^{\text{MCM}}} \frac{a_{i,j}}{l_{i,j}} \right). \quad (6.6)$$

Предположим, что изначально сеть находилась в синхронном режиме, при этом координаты  $\delta_i$  имели фиксированные значения  $\delta_i^s$ , а  $y_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N^{\text{MCM}}$ . Затем произошло нарушение в работе  $j$ -го узла (генератора или мотора) и характеризующие его координаты  $\delta_j, y_j$  приняли произвольные значения из области  $G_j$ . После чего начался переходный процесс, который должен закончиться установлением синхронного или какого-либо другого режима, если параметры сети допускают их сосуществование, что и будем предполагать. Интегрируя систему (6.4) при начальных условиях  $\delta_i(0) = \delta_i^s$ ,  $y_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N^{\text{MCM}}$ ,  $i \neq j$  и  $(\delta_j(0), y_j(0)) \in G_j$ , разобьем область  $G_j$  на две подобласти –  $G_j^{\text{sync}}$  и  $G_j^{\text{loss}}$  (рис. 6.5). Первая из них соответствует установлению синхронного, а вторая – квазисинхронного режима после переходного процесса, стартующего с указанных начальных условий. Подобласть  $G_j^{\text{sync}}$  является областью безопасных возмущений координат  $j$ -го узла сети при условии, что координаты  $\delta_i^s$  зафиксированы.

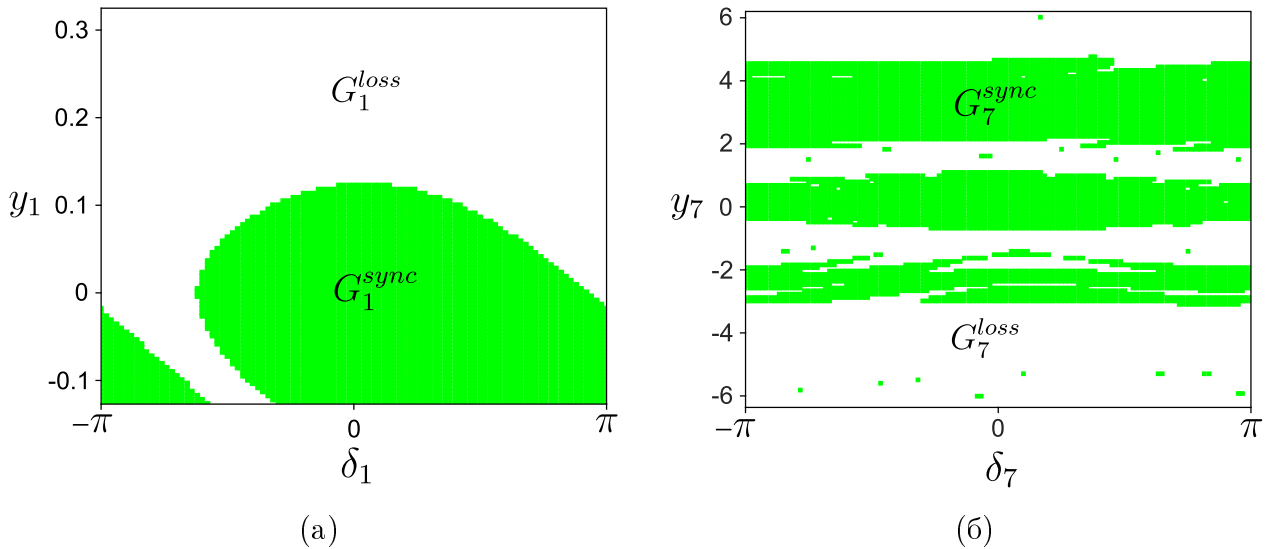


Рис. 6.5: Подобласти  $G_j^{\text{sync}}$  (выделены зеленым цветом) и  $G_j^{\text{loss}}$  (выделены белым цветом) для узлов с номерами  $j = 1$  (а) и  $j = 7$  (б). Параметры:  $\lambda = 0.02$ ,  $p_{gen} = 0.002$ .

Вид подобласти  $G_j^{\text{sync}}$  зависит от степени узла  $j$ , которая равная количеству ребер, сходящихся в нем (рис. 6.2). Обозначим ее через  $k_j$ . При  $\lambda = 0.02$ ,  $p_{gen} = 0.002$  для узла с номером  $j = 1$  и степенью  $k_1 = 1$  подобласть  $G_1^{\text{sync}}$  имеет форму односвязной области (рис. 6.5, а), то же справедливо и для второго узла. Для узла с номером  $j = 7$  и  $k_j = 5$  подобласть  $G_7^{\text{sync}}$  имеет сложный вид (рис. 6.5, б), то же справедливо и для шестого узла. Для остальных узлов подобласти  $G_j^{\text{sync}}$  совпадают с соответствующими областями  $G_j$ .

В общем случае установлено, что в МСМ энергосети Нижнего Новгорода области  $G_j^{\text{sync}}$ , построенные для хабов, то есть узлов с наибольшими значениями  $k_j$ , имеют сложную форму, а для конечных узлов с  $k_j = 1$  – форму односвязной области. Также могут присутствовать узлы, для которых подобласти  $G_j^{\text{sync}}$  совпадают с соответствующими областями  $G_j$ , поэтому

варьирование координат  $\delta_j, y_j$  в области  $G_j$  не может привести к нарушению синхронного режима.

В силу произвольности значений  $(\delta_j, y_j) \in G_j$ , удобно определить вероятность установления синхронного режима  $P_j^{sync}$  при нарушении нормальной работы  $j$ -го узла. Она может быть вычислена как отношение площади подобласти  $G_i^{sync}$  к площади области  $G_i$  (рис. 6.6, а). Видно, что наиболее уязвимым, с точки зрения возможности нарушения синхронного режима, является 7-ой узел-потребитель со степенью  $k_7 = 5$ , то есть второй по величине хаб сети (рис. 6.6). Также, к уязвимым узлам относится самый крупный хаб – 6-ой узел-потребитель со степенью  $k_6 = 6$ , два оконечных узла-генератора – 1-ый и 2-ой, а также 11-ый узел-потребитель. Для остальных узлов вероятности  $P_j^{sync} = 1$ , поэтому нарушение их нормальной работы, при котором  $(\delta_j, y_j) \in G_j$ , приводит лишь к переходному процессу, который оканчивается установлением синхронного режима во всей сети.

В предыдущем пункте было показано, что обнаруженные здесь уязвимые узлы образуют пары: 1-ый и 7-ой, 2-ой и 6-ой, где устанавливается асинхронный режим при любом квази-синхронном режиме во всей сети (см., например, рис. 6.4, в – 1-ая и 13-ая строки). Для этих пар характерно наличие самых длинных линий передачи, обуславливающих самую слабую связь между узлами (см. уравнения 6.4), что согласуется с известными представлениями об устойчивости энергосетей.

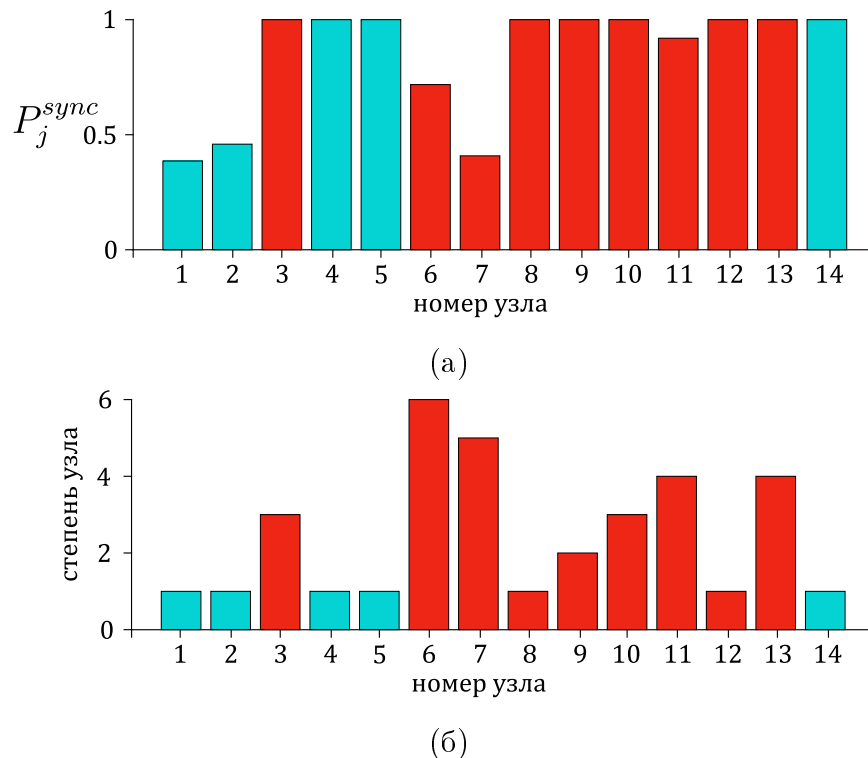


Рис. 6.6: Вероятности  $P_j^{sync}$  (а) и степени  $k_j$  (б) узлов сети. Столбцы выделены цветами, соответствующими типу узлов: голубым для узлов-генераторов и красным для узлов-потребителей (моторов). Параметры:  $\lambda = 0.02$ ,  $p_{gen} = 0.002$ .

## 6.4 Устойчивость по отношению к скачкам мощности

В предыдущем пункте рассматривалась устойчивость энергосети Нижнего Новгорода по отношению к нарушениям в работе отдельных узлов, которые сопровождаются возмущением соответствующих переменных  $\delta_i$ ,  $y_i$ . Такие возмущения могут возникать из-за кратковременного изменения мощности  $P_i$  (или  $p_i$ ), обусловленного набросом (или сбросом) нагрузки на валу синхронного двигателя [6] или увеличением (уменьшением) подачи энергоносителя (пара или воды) к турбине с последующим возвратом к исходному состоянию.

Рассмотрим устойчивость синхронного режима по отношению к скачкам мощности  $p_i$  в виде прямоугольных импульсов длительностью  $\tau$  и высотой  $\Delta p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N^{\text{МСМ}}$ . Во время скачка параметр  $p_i$  получает приращение равное  $\Delta p_i$ . Для нескольких фиксированных  $\tau$  установим интервал безопасных значений  $\Delta p_i$ , не приводящих к нарушению синхронного режима. При этом ограничимся значениями  $\Delta p_i \in (-p_i, 10p_i]$ , если  $p_i > 0$  и  $\Delta p_i \in [10p_i, -p_i)$ , если  $p_i < 0$ .

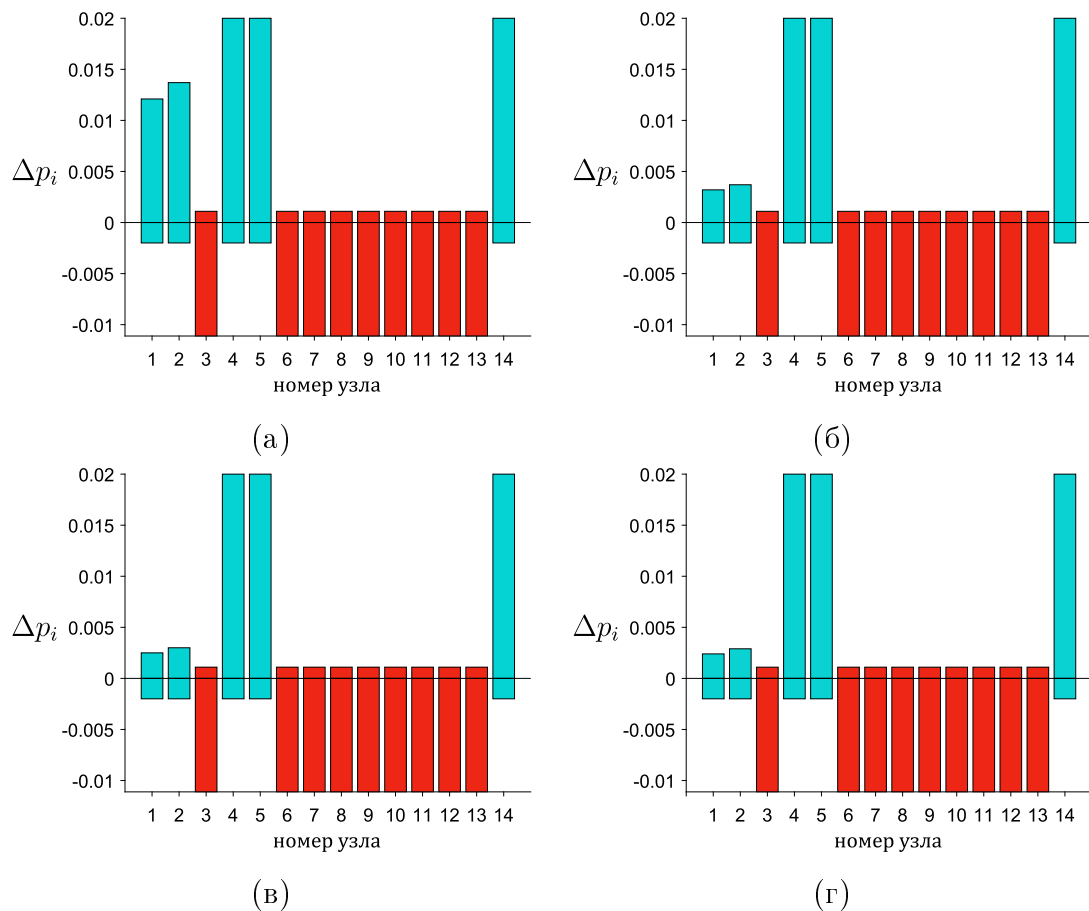


Рис. 6.7: Интервалы безопасных значений  $\Delta p_i$ , выделенные синим для генераторов и красным для моторов (потребителей) при различных длительностях скачков:  $\tau = 10$  (а),  $\tau = 50$  (б),  $\tau = 100$  (в),  $\tau = 150$  (г). Параметры:  $\lambda = 0.02$ ,  $p_{gen} = 0.002$ .

Установлено, что энергосеть Нижнего Новгорода устойчива к скачкам мощности во всех узлах, кроме первого и второго, которым соответствуют генераторы с наиболее длинными линиями передачи (рис. 6.7). Для первого и второго узлов существуют пороговые значения

параметра  $\Delta p_i > 0$ ,  $i = 1, 2$ , превышение которых приводит к нарушению синхронного режима во всей сети. С ростом  $\tau$  эти пороговые значения, как и интервалы безопасных значений  $\Delta p_i$ , уменьшаются. Заметим, что вне границ установленных интервалов безопасных значений  $\Delta p_i$  (рис. 6.7) могут существовать аналогичные интервалы, но обособленные от них.

При фиксированной величине импульса  $\Delta p_i$  реакция энергосети зависит от его длительности  $\tau$ . Это можно показать с помощью проекции траектории системы (6.4), построенной во время действия импульса, то есть при мощности  $p_i + \Delta p_i$ . Каждая точка такой траектории соответствует определенной длительности импульса  $\tau$  и служит начальным условием для интегрирования системы (6.4) после окончания его действия. Производя интегрирование установим реакцию энергосети на импульс длительности  $\tau$  и обозначим точку на проекции траектории в соответствии с этой реакцией (рис. 6.8). При этом существуют два характерных случая. В первом из них существует некоторая пороговая длительность импульса. Все импульсы с большей длительностью нарушают синхронный режим энергосети. Во втором случае существуют несколько обособленных друг от друга интервалов значений  $\tau$  (зеленые участки траектории на рис. 6.8), при которых импульсы не нарушают синхронный режим.

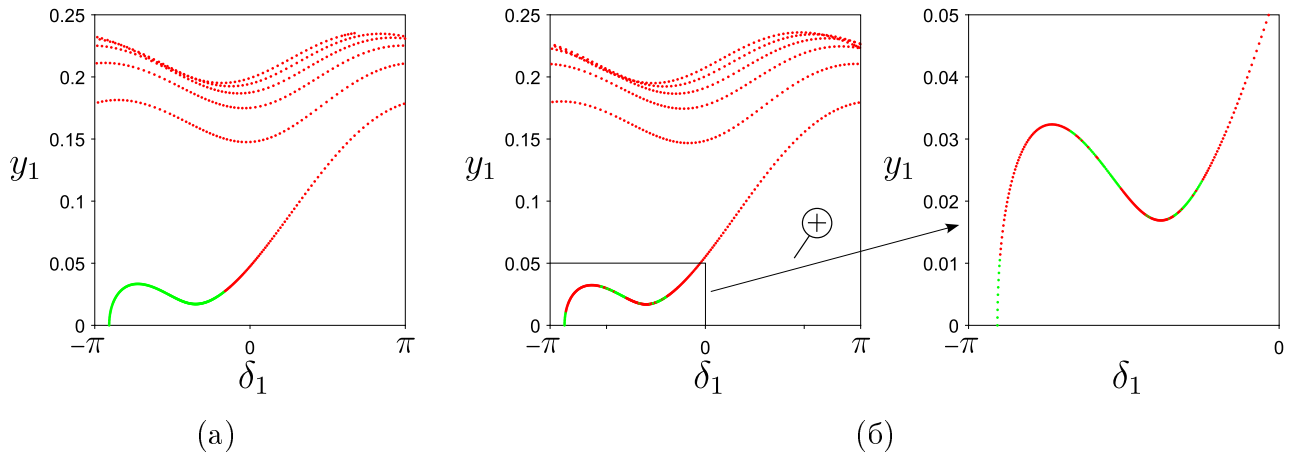


Рис. 6.8: Проекция траектории системы (6.4) на плоскость  $(\delta_1, y_1)$  в момент действия импульсов длительностью  $\tau \in [0, 300]$  при  $p_{gen} = 0.002$ ,  $\Delta p_1 = 0.0025$  (а),  $p_{gen} = 0.0025$ ,  $\Delta p_1 = 0.002$  (б). Красным и зеленым цветом обозначены точки, которые используются как начальные условия для системы (6.4) сразу после окончания действия импульса, приводящие к потере (красный цвет) или восстановлению (зеленый цвет) синхронного режима. Параметр  $\lambda = 0.02$ .

Полученные результаты свидетельствуют о том, что наиболее уязвимым к скачкам мощности является первый узел (генератор) сети с наибольшей длиной линии передачи. Поэтому детально рассмотрим как зависит значение  $(\Delta p_1)_{max}$ , ограничивающее сверху отрезок безопасных значений  $\Delta p_1$ , то есть  $[0, (\Delta p_1)_{max}]$ , от длины линии  $l_{1,7}$  и мощности  $p_{gen}$  при фиксированном  $\tau$ . Ограничимся  $\Delta p_1 \in (0, 5p_1]$ .

При параметрах из области  $a_{safe}$  (рис. 6.9) все амплитуды импульсов  $\Delta p_1$  из рассматриваемого промежутка  $(0, 5p_1]$  являются безопасными, то есть величина  $(\Delta p_1)_{max}$  должна быть больше, чем  $5p_1$ , если вообще найдется значение  $\Delta p_1$ , при котором нарушается синхронный режим. Вне области  $a_{safe}$  величина  $(\Delta p_1)_{max} < 5p_1$ . Проследим за изменением  $(\Delta p_1)_{max}$

в зависимости от длины линии  $l_{1,7}$  при фиксированном параметре  $p_{gen}$ . Слева от границы  $c_{safe}$  области  $a_{safe}$  не один из импульсов с рассматриваемой амплитудой не может нарушить синхронный режим, поэтому формально можно положить  $(\Delta p_1)_{max} = 5p_1$ . При увеличении  $l_{1,7}$  точка на плоскости параметров  $(l_{1,7}, p_{gen})$  переходит границу  $c_{safe}$ , при этом значение  $(\Delta p_1)_{max}$  убывает, испытывая резкий скачок (рис. 6.9). Дальнейшее увеличение  $l_{1,7}$  приводит к постепенному уменьшению  $(\Delta p_1)_{max}$ .

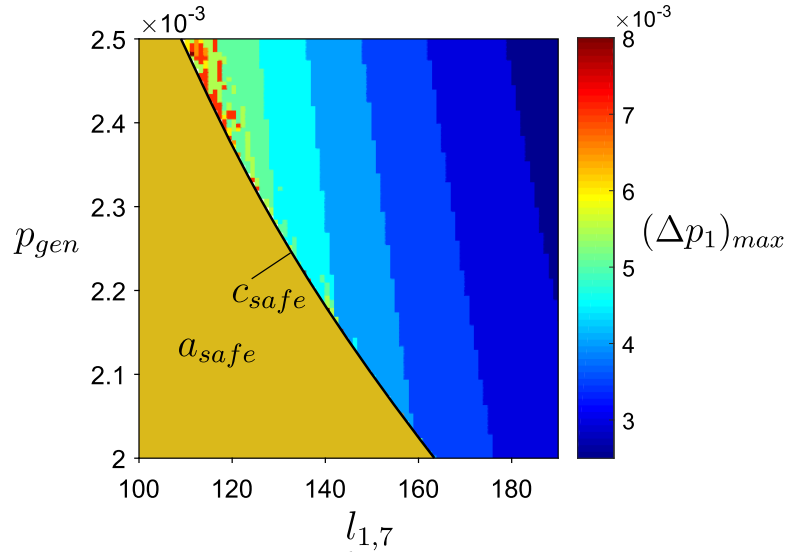


Рис. 6.9: Распределение  $(\Delta p_1)_{max} = f(l_{1,7}, p_{gen})$ . Область  $a_{safe}$  выделена коричневым цветом. Параметры:  $\tau = 100$ ,  $\lambda = 0.02$ .

Таким образом, при фиксированном параметре  $p_{gen}$  существует некоторое пороговое значение длины линии передачи  $l_{1,7}^{tr}$  такое что точка  $(l_{1,7}^{tr}, p_{gen})$  лежит на кривой  $c_{safe}$ . При  $l_{1,7} < l_{1,7}^{tr}$  синхронный режим не может быть нарушен рассматриваемыми импульсами, а при  $l_{1,7} > l_{1,7}^{tr}$  энергосеть устойчива только к скачкам мощности  $\Delta p_1 \leq (\Delta p_1)_{max}$ . Заметим, что для энергосети Нижнего Новгорода  $l_{1,7} > l_{1,7}^{tr}$  при рассматриваемых значениях  $p_{gen}$ , что и обуславливает уязвимость первого узла к скачкам мощности в рамках рассматриваемой модели.

## 6.5 Выводы

Построена МСМ энергосети Нижнего Новгорода, учитывающая основные особенности топологии реальной сети, такие как наличие линий передачи между потребителями и генераторами, а также зависимость их индуктивного сопротивления от длины.

Установлена возможность сосуществования синхронного и различных квазисинхронных режимов, которые различаются характером взаимодействия отдельных пар узлов сети. Поэтому существует вероятность нарушения синхронного режима из-за действия возмущений. Изучена устойчивость энергосети к случайным возмущениям динамических переменных отдельных узлов (машин – потребителей или генераторов). Для этого построены разбиения со-

ответствующих плоскостей переменных на области, отвечающие возмущениям (начальным условиям), не нарушающим ( $G_i^{sync}$ ) или нарушающим ( $G_i^{loss}$ ) исходный синхронный режим. Определены вероятности восстановления синхронного режима при указанных возмущениях ( $P_i^{sync}$ ). Показано, что существуют узлы, для которых любые рассмотренные возмущения не могут нарушить синхронный режим во всей сети. Среди оставшихся узлов выделены наиболее уязвимые – с наименьшими значениями  $P_i^{sync}$ . Причем среди них есть как узлы-потребители со степенью, превышающей степень остальных узлов, так и узлы-генераторы со степенью равной единице.

Изучена устойчивость модели энергосети Нижнего Новгорода по отношению к скачкам мощностей турбин генераторов или набросам (сбросам) мощностей нагрузок в виде прямоугольных импульсов. Установлено, что уязвимыми являются только два генератора, связанные с сетью наиболее длинными линиями передачи. Эти же генераторы имеют наименьшие значения (среди генераторов) вероятностей  $P_i^{sync}$ . Показано, что при фиксированной амплитуде импульса, последующая реакция энергосети зависит от его длительности так, что возможна ситуация, когда импульс с большей длительностью приводит к переходному процессу, который завершается установлением исходного синхронного режима, а импульс с меньшей длительностью приводит к его нарушению. Однако существует пороговое значение длительности импульса, при превышении которого синхронный режим нарушается безвозвратно.

На примере первого узла-генератора установлено, что существует некоторое пороговое значение длины его линии передачи, превышение которого делает узел уязвимым к скачкам мощности его турбины. Причем, чем мощнее турбины генераторов сети и следовательно, чем больше нагрузка (на валах синхронных моторов – потребителей), тем пороговое значение длины меньше.

# Заключение

Ниже приведены основные результаты диссертации.

1. Изучены режимы энергосети с хаб-топологией. Определены области параметров, при которых всегда устанавливается синхронный режим или он сосуществует с квазисинхронными и/или асинхронными режимами. В последнем случае предложен подход, позволяющий оценить величину возмущений, не нарушающих синхронный режим.
2. В трехмашинной энергосети установлен новый сценарий возникновения парадокса Браеса, который связан с возникновением мультистабильности синхронного и асинхронного режимов при добавлении новой линии передачи или увеличении пропускной способности действующей линии.
3. Получены условия безопасного объединения двух энергосетей – хаба-кластера и мотива. Установлены режимы работы объединенной энергосети, проведено их разделение на режимы безопасные как для всей сети в целом, так и для отдельных подсетей.
4. Для неоднородной энергосети с хаб-топологией получен критерий устойчивости отдельных пар потребитель-генератор.
5. Для энергосети из нескольких генераторов, работающих на общую нагрузку в виде постоянного полного сопротивления, получены условия сосуществования синхронных режимов с различными распределениями токов по цепям сети и мощностями, выдаваемыми генераторами в сеть. Найдены условия безопасного отключения и подключения генератора. На примере трехмашинной энергосети рассмотрены переключения между синхронными режимами, вызванные различными возмущениями.
6. Построена модель энергосети Нижнего Новгорода. Проведено исследование ее устойчивости, показавшее возможность сосуществования синхронного и различных квазисинхронных режимов. Выделены наиболее уязвимые к возмущениям узлы сети. Установлено существование порогового значения длины линии передачи отдельного генератора, превышение которой делает его особенно уязвимым к скачку мощности турбины.

## Список литературы

1. Системный оператор Единой энергетической системы [Электронный ресурс] – 2024. – Режим доступа: <https://www.so-ups.ru/> (дата обращения: 03.06.2024).
2. European Network of Transmission System Operators for Electricity [Электронный ресурс] – 2024. – Режим доступа: <https://www.entsoe.eu/> (дата обращения: 03.06.2024).
3. ГОСТ Р 58058—2018 Единая энергетическая система и изолированно работающие энергосистемы. Устойчивость энергосистем. Нормы и требования. – М.: Стандартинформ, 2018. – 15 с.
4. Жданов, П.С. Вопросы устойчивости электрических систем / П.С. Жданов – М.: Энергия, 1979. – 456 с.
5. Андерсон, П. Управление энергосистемами и устойчивость / П. Андерсон, А. Фуад – М.: Энергия, 1980. – 568 с.
6. Калентионок, Е.В. Устойчивость электроэнергетических систем / Е.В. Калентионок – Минск: Техноперспектива, 2008. – 375 с.
7. Bialek, J.W. Why has it happened again? Comparison between the UCTE blackout in 2006 and the blackouts of 2003 / J.W. Bialek // 2007 IEEE Lausanne Power Tech, Lausanne, Switzerland, 2007. P. 51-56.
8. Li, C. Analysis of the blackout in Europe on November 4, 2006 / C. Li, Y. Sun, X. Chen // 2007 International Power Engineering Conference (IPEC 2007), Singapore, 2007. P. 939-944
9. Vleuten, E. Interpreting transnational infrastructure vulnerability: European blackout and the historical dynamics of transnational electricity governance / E. Vleuten, V. Lagendijk // Energy Policy. – 2010. – V. 38, № 4. – P. 2053–2062.
10. Veloza, O.P. Analysis of major blackouts from 2003 to 2015: classification of incidents and review of main causes / O.P. Veloza, F. Santamaria // Electr. J. – 2016. – V. 29, № 7. – P. 42–49.
11. Shao, Y. Analysis and lessons of blackout in Turkey power grid on March 31 / Y. Shao, Y. Tang, J.Yi. A. Wang // AEPS. – 2016. – V. 40, № 9.



12. Crucitti, P. Model for cascading failures in complex networks / P. Crucitti, V. Latora, M. Marchiori // *Phys. Rev. E.* – 2004. – V. 69, № 4. – P. 045104.
13. Kinney, R. Modeling cascading failures in the North American power grid / R. Kinney, P. Crucitti, R. Albert, V. Latora // *Eur. Phys. J. B.* – 2005. – V. 46, № 1. – P. 101–107.
14. Dobson, I. Complex systems analysis of series of blackouts: cascading failure, critical points, and self- organization / I. Dobson, B.A. Carreras, V.E. Lynch, D. E. Newman // *Chaos.* – 2007. – V. 17, № 2. – P. 026103.
15. Schafer, B. Dynamically induced cascading failures in power grids / B. Schäfer, D. Witthaut, M. Timme, V. Latora // *Nat. Commun.* – 2018. – V. 9, № 1.
16. Schafer, B. Dynamical modeling of cascading failures in the Turkish power grid / B. Schäfer, G.C. Yalcin // *Chaos.* – 2019. – V. 29, № 9. – P. 093134.
17. Системный оператор Единой энергетической системы [Электронный ресурс] – 2024. – Режим доступа: <https://www.so-ups.ru/memorial-day/history-event/news/9879/> (дата обращения: 03.06.2024).
18. U.S. – Canada power system outage task force. Final report on the August 14, 2003 blackout in the United States and Canada: causes and recommendations. April, 2004.
19. Окуловская, Т.Я. Устойчивость электрических систем: учебное пособие / Т.Я. Окуловская, М.В. Павлова, Т.Ю. Паниковская, В.А. Смирнов – Екатеринбург: УГТУ, 2001. – 60 с.
20. Хрущев, Ю.В. Электромеханические переходные процессы в электроэнергетических сетях: учебное пособие / Ю.В. Хрущев, К.И. Заповодников, А.Ю. Юшков – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 160 с.
21. Жданов, П.С. Устойчивость электрических систем / П.С. Жданов – М.: Госэнергоиздат, 1948. – 399 с.
22. Горев, А.А. Переходные процессы синхронной машины / А.А. Горев – М.: Госэнергоиздат, 1950. – 553 с.
23. Веников, В.А. Переходные электромеханические процессы в электрических системах / В.А. Веников – М.: Высшая школа, 1985. – 536 с.
24. Конкордия, Ч. Синхронные машины: переходные и установившиеся процессы / Ч. Конкордия – Госэнергоиздат, 1960. – 272 с.
25. Кимбарк, Э.В. Синхронные машины и устойчивость электрических систем / Э.В. Кимбарк – М.: Госэнергоиздат, 1960. – 392 с.

26. Wiatros-Motyka, M. Global Electricity Review 2023/ M. Wiatros-Motyka, et. al. – Ember, 2023. – 163 p.
27. Blaabjerg, F. Overview of control and grid synchronization for distributed power generation systems / F. Blaabjerg, R. Teodorescu, M. Liserre, A.V. Timbus // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2006. – V. 53, № 5. – P. 1398-1409.
28. Mirafzal, B. On grid-interactive smart inverters: features and advancements / B. Mirafzal, A. Adib // IEEE Access. – 2020. – V. 8. – P. 160526–160536.
29. Li, Y. Revisiting grid-forming and grid-following inverters: a duality theory / Y. Li, Y. Gu, and T. C. Green // IEEE Trans. Power Syst. – 2022. – V. 37, № 6. – P. 4541–4554.
30. Rathnayake, D.B. Grid forming inverter. Modeling, control, and applications / D.B. Rathnayake, M. Akrami, C. Phurailatpam et al. // IEEE Access. – 2021. – V.9. – P. 114781-114807.
31. Kogler, R. Normal form for grid-forming power grid actors / R. Kogler, A. Plietzsch, P. Schultz, F. Hellmann // PRX Energy. – 2022. – V.1, № 1. – P. 013008.
32. Grzybowski, J.M.V. Power-grids as complex networks: emerging investigations into robustness and stability. / J.M.V. Grzybowski, E.E.N. Macau, T. Yoneyama // Chaotic, fractional, and complex dynamics: new insights and perspectives, Springer International Publishing. – 2019. P. 287–315.
33. Kundur, P. Power System Stability and Control / P. Kundur, N.J. Balu, M.G. Lauby – New York: McGraw-Hill Education, 1994. – 1176 p.
34. Sauer, P. Power System Dynamics and Stability / P. Sauer, A. Pai – Prentice-Hall: Englewood Cliffs, 1998. – 357 p.
35. Machowski, J. Power System Dynamics: Stability and Control / J. Machowski, J. Bialek, D. Bumby – New York: John Wiley & Sons, 2008. – 629 p.
36. Grainger, J.J. Power System Analysis / J.J. Grainger, W.D. Stevenson – New York: McGraw-Hill Education, 2016. – 787 p.
37. Gajduk, A. Stability of power grids: An overview / A. Gajduk, M. Todorovski, L. Kocarev // The European Physical Journal Special Topics. – 2014. – V. 223, № 12. – P. 2387–2409.
38. Nishikawa, T. Comparative analysis of existing models for power grid synchronization / T. Nishikawa, A.E. Motter // New J. Phys. – 2015. – V. 17, № 1. – P. 015012.
39. Motter, A.E. Spontaneous synchrony in power-grid networks / A.E. Motter, S.A. Myers, M. Anghel, T. Nishikawa // Nature Physics – 2013. – V. 9. – P. 191-197.

40. Bergen, A.R. A structure preserving model for power system stability analysis / A.R. Bergen, D.J. Hill // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. – 1981. – V. PAS-100, № 1. – P. 25-35.
41. Filatrella, G. Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model / G. Filatrella, A.H. Nielsen, N.F. Pedersen // The European Physical Journal B. – 2008. – V. 61, № 4. – P. 485–491.
42. Nardelli, P. Models for the modern power grid / P. Nardelli, N. Rubido, C. Wang, M.S. Baptista, C. Pomalaza-Raez, P. Cardieri, M. Latva-aho // Eur. Phys. J. – 2014. – Spec. Top. 223. – P. 2423-2437.
43. Anvari, M. Introduction to Focus Issue: Dynamics of modern power grids / M. Anvari, F. Hellmann, X. Zhang // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2020. – V. 31, № 4. – P. 049905.
44. Fortuna, L. Analysis of the Italian power grid based on kuramoto-like model / L. Fortuna, M. Frasca, A.S. Fiore // Physcon 2011, Leon, Spain. September 5-8, 2011.
45. Fortuna, L. A network of oscillators emulating the Italian high-voltage power grid / L. Fortuna, M. Frasca, A.S. Fiore // International Journal of Modern Physics B. – 2012. – V. 26, № 25. – P. 1246011.
46. Rohden, M. Self-organized synchronization in decentralized power grids / M. Rohden, A. Sorge, M. Timme, D. Witthaut // Phys. Rev. Lett. – 2012. – V. 109, № 6. – P. 064101
47. Witthaut, D. Braess's paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage / D. Witthaut, M. Timme // New J. Phys. – 2012. – V. 14, № 8. – P. 083036.
48. Lozano, S. Role of network topology in the synchronization of power systems / S. Lozano, L. Buzna, A. Diaz-Guilera // The European Physical Journal B. – 2012. V. 85, № 7. – P. 231.
49. Menck, P.J. How dead ends undermine power grid stability / P.J. Menck, J. Heitzig, J. Kurths, J.H. Schellnhuber // Nat. Commun. – 2014. – V. 5, № 1. – P. 3969.
50. Tetz, C.H. Control of synchronization in two-layer power grids / C.H. Tetz, S. Olmi, E. Scholl // Phys. Rev. E. – 2020. – V. 102, № 2. – P. 022311.
51. Halekotte, L. Minimal fatal shocks in multistable complex networks / L. Halekotte, U. Feudel // Scientific Reports – 2020. – V. 10, № 1. – P. 11783.
52. Halekotte, L. Transient chaos enforces uncertainty in the British power grid / L. Halekotte, A. Vanselow, U. Feudel // Journal of Physics: Complexity – 2021. – V. 2, № 3. – P. 035015.
53. Kuramoto, Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence / Y. Kuramoto – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 158 p.

54. Acebron, J.A. The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena / J.A. Acebron, L.L. Bonilla, V. Perez, J. Conrad, F. Ritort, R. Spigler // *Rev. Mod. Phys.* – 2005. V. 77, № 1. – P. 137-185.
55. Berner, R. What adaptive neuronal networks teach us about power grids / R. Berner, S. Yanchuk, E. Scholl // *Phys. Rev. E.* – 2021. V. 103, № 4. – P. 042315.
56. Dorfler, F. Exploring synchronization in complex oscillator networks / F. Dorfler, F. Bullo // 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Maui, HI, USA, 2012, P. 7157-7170.
57. Dorfler, F. Synchronization in complex oscillator networks and smart grids / F. Dorfler, M. Chertkov, F. Bullo // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* – 2013. – V. 110, № 6. – P. 2005–2010.
58. Witthaut, D. Nonlocal failures in complex supply networks by single link additions / D. Witthaut, M. Timme // *The European Physical Journal B.* – 2013. V. 86, № 9. – P. 377.
59. Coletta, T. Linear stability and the Braess paradox in coupled-oscillator networks and electric power grids / T. Coletta, P. Jacquod // *Phys. Rev. E.* – 2016. V. 93, № 3. – P. 032222.
60. Manik, D. Cycle flows and multistability in oscillatory networks / D. Manik, M. Timme, D. Witthaut // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* – 2017. – V. 27, № 8. – P. 083123.
61. Tchuisseu, E.B. Curing Braess' paradox by secondary control in power grids / E.B. Tchuisseu, D. Gomila, P. Colet, D. Witthaut, M. Timme, B. Schafer // *New J. Phys.* – 2018. V. 20, № 8. – P. 083005.
62. Witthaut, D. Collective nonlinear dynamics and self-organization in decentralized power grids / D. Witthaut, F. Hellmann, J. Kurths, S. Kettemann, H. Meyer-Ortmanns, M. Timme // *Rev. Mod. Phys.* – 2022. V. 94, № 1. – P. 015005.
63. Dorfler, F. Synchronization and transient stability in power networks and non-uniform Kuramoto oscillators / F. Dorfler, F. Bullo // *SIAM Journal on Control and Optimization.* – 2012. – V. 50, № 3. – P. 1616-1642.
64. Schafer, B. Understanding Braess' paradox in power grids / B. Schafer, T. Pesch, D. Manik, J. Gollenstede, G. Lin, H.-P. Beck, D. Witthaut, M. Timme // *Nat. Commun.* – 2022. V. 13, № 1. – P. 5396.
65. Braess, D., Uber ein paradoxon aus der verkehrsplanung / D. Braess // *Unternehmensforschung.* – 1968. – V. 12. – P. 258–268.
66. Cohen, J.E. A paradox of congestion in a queuing network / J.E. Cohen, F.P. Kelly // *J. Appl. Probab.* – 1990. – V.27. – P. 730–734
67. Cohen, J.E. Paradoxical behaviour of mechanical and electrical networks / J.E. Cohen, P. Horowitz // *Nature.* – 1991. – V. 352. – P. 699–701.

68. Nagurney, L. Physical proof of the occurrence of the Braess' paradox in electrical circuits / L. Nagurney, A. Nagurney // EPL. – 2016. – V. 115. – P. 28004.
69. Ayala, F.H.L. The Braess paradox and its impact on natural-gas-network performance / F.H.L. Ayala, S. Blumsack // Oil Gas Facilit. – 2013. – V. 2. – P. 52–64.
70. Case, D.J. Braess's paradox and programmable behaviour in microfluidic networks / D.J. Case, Y. Liu, I.Z. Kiss, J.R. Angilella, A.E. Motter // Nature. – 2019. – V. 574. – P. 647–652.
71. Roughgarden, T. How bad is selfish routing? / T. Roughgarden, E. Tardos // J. ACM. – 2002. – V. 49, № 236. – P. 93-102.
72. Roughgarden, T. On the severity of Braess's paradox: Designing networks for selfish users is hard / T. Roughgarden // J. Comput. Syst. Sci. – 2006. – V. 72, № 5. – P. 922–953.
73. Nishikawa, T. Synchronization is optimal in nondiagonalizable networks / T. Nishikawa, A. E. Motter // Phys. Rev. E. – 2006. – V. 73, № 6. – P. 065106.
74. Nishikawa, T. Network synchronization landscape reveals compensatory structures, quantization, and the positive effect of negative interactions / T. Nishikawa, A. E. Motter // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. – 2010. – V. 107, № 23. – P. 10342–10347.
75. Ravoori, B. Robustness of optimal synchronization in real networks / B. Ravoori, A.B. Cohen, J. Sun, A.E. Motter, T.E. Murphy, R. Roy // Phys. Rev. Lett. – 2011. – V. 107, № 3. – P. 034102.
76. Nitzbon, J. / Deciphering the imprint of topology on nonlinear dynamical network stability // J. Nitzbon, P. Schultz, J. Heitzig, J. Kurths, F. Hellmann. // New J. Phys. – 2017. – V. 19, № 3. – P. 033029.
77. Kim, H. Multistability and variations in basin of attraction in power-grid systems / H. Kim, S.H. Lee, J. Davidsen, S. Son // New J. Phys. – 2018. – V. 20, № 11. – P. 113006.
78. Hellmann, F. Network-induced multistability through lossy coupling and exotic solitary states / F. Hellmann, P. Schultz, P. Jaros, R. Levchenko, T. Kapitaniak, J. Kurths, Yu. Maistrenko. // Nat. Commun. – 2020. – V. 11, № 1.
79. Gupta, P.C. Chaos, multistability and coexisting behaviours in small-scale grid: impact of electromagnetic power, random wind energy, periodic load and additive white gaussian noise / P.C. Gupta, P.P. Singh // Pramana. – 2022. – V. 97, № 1.
80. Korsak, A.J. On the Question of uniqueness of stable load-flow solutions / A.J. Korsak // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. – 1972. V. 91, № 3. – P. 1093-1100.
81. Casazza, J.A. Blackouts: Is the Risk Increasing? / J.A. Casazza // Electrical World. – 1998. – V. 212, № 4. – P. 62-64.

82. Janssens, N. Loop flows in a ring AC power system / N. Janssens, A. Kamagate // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. – 2003. – V. 25, № 8. – P. 591-597.
83. Delabays, R. Multistability of phase-locking and topological winding numbers in locally coupled Kuramoto models on single-loop networks / R. Delabays, T. Coletta, P. Jacquod // Journal of Mathematical Physics. – 2016. – V. 57, № 3. – P. 032701.
84. Delabays, R. Multistability and anomalies in oscillator models of lossy power grids / R. Delabays, S. Jafarpour, F. Bullo // Nat. Commun. – 2022. – V. 13, № 1.
85. Coletta, T. Topologically protected loop flows in high voltage AC power grids / T. Coletta, R. Delabays, I. Adagideli, P. Jacquod // New J. Phys. – 2016. – V. 18, № 10. – P. 103042.
86. Venkatasubramanian, V. Voltage dynamics: study of a generator with voltage control, transmission, and matched MW load / V. Venkatasubramanian, H. Schattler, J. Zaborszky // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1992. – V. 37, № 11. – P. 1717-1733.
87. Nguyen, H.D. Voltage multistability and pulse emergency control for distribution system with power flow reversal / H.D. Nguyen, K. Turitsyn // IEEE Transactions on Smart Grid. – 2015. – V. 6, № 6. – P. 2985-2996.
88. Balestra C. Multistability in lossy power grids and oscillator networks / C. Balestra, F. Kaiser, D. Manik // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2019. – V. 29, № 12. – P. 123119.
89. Kwatny, H. Static bifurcations in electric power networks: Loss of steady-state stability and voltage collapse / H. Kwatny, A. Pasrija, L. Bahar // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1986. – V. 33, № 10. – P. 981-991.
90. Ayasun, S. Computation of singular and singularity induced bifurcation points of differential-algebraic power system model / S. Ayasun, C.O. Nwankpa, H.G. Kwatny // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. – 2004. – V. 51, № 8. – P. 1525-1538.
91. Thumler, M. Absence of pure voltage instabilities in the third-order model of power grid dynamics / M. Thumler, X. Zhang, M. Timme // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2022. – V. 32, № 4. – P. 043105.
92. Zhang, X. A real-time control framework for smart power networks with star topology / X. Zhang, A. Papachristodoulou // American Control Conference (ACC). Washington, DC, USA. June 17-19, 2013.
93. Chang, Y. Bifurcation analysis of a power system model with three machines and four buses / Y. Chang, X. Wang, D. Xu // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2016. – V. 26, № 5. – P. 1650082.

94. Zhang, W. Exponential Synchronization of the Kuramoto Model with Star Topology / W. Zhang, S. Huang, S. Mei, et al. // Proceedings of the 35th Chinese Control Conference. Chengdu, China. July 27-29, 2016.
95. Vu, T.L. Lyapunov functions family approach to transient stability assessment / T.L. Vu, K. Turitsyn // IEEE Transactions on Power Systems. – 2016. – V. 31, № 2. – P. 1269-1277.
96. Дмитричев, А.С. О глобальной устойчивости синхронного режима в хаб-кластерах энергосетей / А.С. Дмитричев, Д.Г. Захаров, В.И. Некоркин // Известия вузов. Радиофизика. – 2017. – Т. 60, № 6. – С. 564-571.
97. Schiffer J. Almost global synchronization in radial multi-machine power systems / J. Schiffer, D. Efimov, R. Ortega // 57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2018), Dec 2018, Miami Beach, FL, United States.
98. Аринушкин, П.А. Анализ синхронных режимов работы цепочки связанных осцилляторов энергосетей / П.А. Аринушкин, В.С. Анищенко // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2018. – Т. 26, № 3. – С. 62–77.
99. Аринушкин, П.А. Влияние выходной мощности генераторов на частотные характеристики энергосети в кольцевой топологии / П.А. Аринушкин, В.С. Анищенко // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2019. – Т. 27, № 6. – С. 25–38.
100. Arinushkin, P.A. Nonlinear damping effects in a simplified power grid model based on coupled Kuramoto-like oscillators with inertia / P.A. Arinushkin, T.E. Vadivasova // Chaos Solitons and Fractals. – 2021. – V. 152. – P. 111343.
101. Hellmann, F. Survivability of deterministic dynamical systems / F. Hellmann, P. Schultz, C. Grabow, J. Heitzig, J. Kurths // Sci. Rep. – 2016. – V. 6, № 1. – P. 29654.
102. Kim, H. Building blocks of the basin stability of power grids / H. Kim, S.H. Lee, P. Holme // Phys. Rev. E – 2016. – V. 93, № 6. P. – 062318.
103. Страхов, С.В. Современное состояние и возможности практического применения второго метода Ляпунова для расчета динамической устойчивости электроэнергетических систем / С.В. Страхов, М.Я. Вайман // Электричество. – 1977 – № 10. С. – 7-9.
104. Kwatny, H. Energy-like Lyapunov functions for power system stability analysis / H. Kwatny, L. Bahar, A. Pasrija // IEEE Transactions on Circuits and Systems. – 1985. – V. 32, № 11. – P. 1140–1149.
105. Menck, P.J. How basin stability complements the linear-stability paradigm / P.J. Menck, J. Heitzig, N. Marwan, J. Kurths // Nat. Phys. – 2013. – V. 9, № 2. – P. 89–92.
106. Mitra, C. Recovery time after localized perturbations in complex dynamical networks / C. Mitra, T. Kittel, A. Choudhary, J. Kurths, R.V. Donner // New J. Phys. – 2017. – V. 19, № 10. – P. 103004.

107. Kim, H. On structural and dynamical factors determining the integrated basin instability of power-grid nodes / H. Kim, M.J. Lee, S.H. Lee, S.-W. Son // *Chaos*. – 2019. – V. 29, № 10. – P. 103132.
108. Kim, H. How modular structure determines operational resilience of power grids / H. Kim // *New J. Phys.* – 2019. – V. 23, № 12. – P. 129501.
109. Wei, D.Q. Noise-induced chaos in single-machine infinite-bus power systems / D.Q. Wei, X.S. Luo // *EPL*. – 2009. – V. 86, № 5. – P. 50008.
110. Wei, D.Q. Effect of noise on erosion of safe basin in power system / D.Q. Wei, B. Zhang, D.Y. Qiu, X.S. Luo // *Nonlinear Dynamics*. – 2010. – V. 61, № 3. – P. 477–482.
111. Qin, Y.H. Random parameters induce chaos in power systems / Y.H. Qin, J.C. Li // *Nonlinear Dynamics*. – 2014. – V. 77, № 4. – P. 1609–1615.
112. Milan, P. Turbulent Character of Wind Energy / P. Milan, M. Wachter, J. Peinke // *Phys. Rev. Lett.* – 2013. – V. 110, № 13. – P. 138701.
113. Anvari, M. Short term fluctuations of wind and solar power systems / M. Anvari, G. Lohmann, M. Wachter et al. // *New J. Phys.* – 2016. – V. 18, № 6. – P. 063027.
114. Gambuzza, L.V. Analysis of dynamical robustness to noise in power grids / L.V. Gambuzza, A. Buscarino, L. Fortuna, M. Porfiri, M. Frasca // *IEEE J. Emerging Sel. Top. Circuits Syst.* – 2017. – V. 7, № 3. – P. 413–421.
115. Tumash, L. Effect of disorder and noise in shaping the dynamics of power grids / L. Tumash, S. Olmi, E. Scholl // *EPL*. – 2018. – V. 123, № 2. – P. 20001.
116. Gupta P.C. Multistability, coexisting behaviours and control of fractional order dissipative small scale grid with disturbances and noise / P.C. Gupta and P.P. Singh // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* – 2023. – V. 232, № 14. – P. 2415–2436.
117. Billings, L. Stochastic bifurcation in a driven laser system: experiment and theory / L. Billings, I.B. Schwartz, D.S. Morgan et al. // *Phys. Rev. E*. – 2004. – V. 70, № 2. – P. 026220.
118. Наровлянский, В.Г. Современные методы и средства предотвращения асинхронного режима электроэнергетической системы – М.: Энергоатомиздат, 2004. – 360 с.
119. Galindo-Gonzalez C.C. Decreased resilience in power grids under dynamically induced vulnerabilities / C.C. Galindo-Gonzalez, D. Angulo-Garcia, G. Osorio // *New J. Phys.* – 2020. – V. 22, № 10. – P. 103033.
120. Belykh, V. N. Kuramoto phase model with inertia: bifurcations leading to the loss of synchrony and to the emergence of chaos / V.N. Belykh, M.I. Bolotov, G.V. Osipov // *Modeling and Analysis of Information Systems* – 2015. – V.22, № 5. – P. 595–608.



121. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники / Л.А. Бессонов – М.: Высшая школа, 1996. – 587 с.
122. Rohden, M. Curing critical links in oscillator networks as power flow models / M. Rohden, D. Witthaut, M. Timme, M.O. Hildegard // *New J. Phys.* – 2017. V. 19, № 1. – P. 013002.
123. Gray, R.M. Toeplitz and circulant matrices: a review / R.M. Gray // *Foundations and Trends in Communications and Information Theory.* – 2006. V. 2, № 3. – P. 155-239.
124. Барбашин, Е.А. Функции Ляпунова / Е.А. Барбашин – М.: Наука, 1979. – 240 с.
125. Литкенс, И.В. Демпферные коэффициенты синхронных генераторов в многомашинных электрических системах / И.В. Литкенс, В.И. Пуго, В.М. Абдул-заде // *Электричество.* – 1980 – № 3. – С. 8-13.
126. Литкенс, И.В. Колебательные свойства электрических систем / И.В. Литкенс, В.И. Пуго – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 216 с.
127. Schlachtberger, D. The benefits of cooperation in a highly renewable European electricity network / D. Schlachtberger, T. Brown, S. Schramm, M. Greiner // *Energy.* – 2017. V. 134. – P. 469-481.
128. Brown, T. Synergies of sector coupling and transmission reinforcement in a cost-optimised, highly renewable European energy system / T. Brown, D. Schlachtberger, A. Kies, S. Schramm, M. Greiner // *Energy.* – 2018. V. 160. – P. 720-739.
129. Министерство энергетики Российской Федерации приказ № 495 от 1 августа 2014 года «Об утверждении схемы и программы развития Единой Энергетической системы России на 2014-2020 годы».
130. Witthaut, D. Nonlocal effects and countermeasures in cascading failures / D. Witthaut, M. Timme // *Phys. Rev. E.* – 2015. V. 92, № 3. – P. 032809.
131. Kaiser, F. Network isolators inhibit failure spreading in complex networks / F. Kaiser, V. Latora, D. Witthaut // *Nat. Commun.* – 2021. V. 12, № 1.
132. Bialek, J.W. Tree-partitioning as an emergency measure to contain cascading line failures / J. W. Bialek and V. Vahidinasab // *IEEE Trans. Power Syst.* – 2022. V. 37, № 1. – P. 467-475.
133. Идельчик, В.И. Электрические системы и сети / В.И. Идельчик – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 592 с.
134. Белюстина, Л.Н. О глобальной структуре разбиения цилиндрического фазового пространства одной неавтономной системы / Л.Н. Белюстина, В.Н. Белых // *Дифференциальные уравнения.* – 1973. Т. 9, № 4. С. – 595-608.

135. Белых, В.Н. О качественном исследовании многомерной фазовой системы / В.Н. Белых, В.И. Некоркин // Сибирский математический журнал. – 1977. Т. 18, № 4. С. – 723-735.
136. Brister, V.N. When three is a crowd: Chaos from clusters of Kuramoto oscillators with inertia / V.N. Brister, V.N. Belykh, I.V. Belykh // Phys. Rev. E. – 2020. V. 101, № 6. P. – 062206.
137. Tricomi, F. Integrazione di un' equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica / F. Tricomi // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze Fisiche e Matematiche. – 1933. Ser. 2(2), № 1. P. – 1-20.
138. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин – М.: Физматлит. 1959. – 916 с.
139. Некоркин, В.И. Лекции по основам теории колебаний: учебное пособие / В.И. Некоркин – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 233 с.
140. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер – М. Наука, 1966. – 576 с.
141. Емеличев, В.А. Лекции по теории графом / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич – М.: Наука. 1990. – 384 с.
142. Zhang, X. Flexible AC transmission systems: modelling and control / X. Zhang, C. Rehtanz, V.C. Pal – Berlin, Heidelberg: Springer, 2012. – 546 P.
143. Arecchi, F.T. Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system / F.T. Arecchi, R. Badii, A. Politi // Phys. Rev. A. – 1985. – V. 32, № 1. – P. 402–408.
144. Мищенко, Е.Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов – М.: Наука, 1975. – 248 с.
145. Стратонович, Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р.Л. Стратонович – М.: Сов. радио, 1961. – 558 с.
146. Higham, D.J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations / D.J. Higham // SIAM Rev. – 2001. – V. 43, № 3. – P. 525-546.
147. Тихонов, В.И. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
148. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения / Д.Ф. Кузнецов – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 816 с.

## Список публикаций автора

- A1. Khramenkov, V.A. Dynamics and stability of two power grids with hub cluster topologies / V.A. Khramenkov, A.S. Dmitrichev, V.I. Nekorkin // *Cybernetics and Physics*. – 2019. – V. 8, № 1. – P. 29-33.
- A2. Храменков, В.А. Пороговая устойчивость синхронного режима энергосети с топологией хаб-кластера / В.А. Храменков, А.С. Дмитричев, В.И. Некоркин // *Известия вузов. ПНД*. – 2020. – Т. 28, № 2. – С. 120-139.
- A3. Khramenkov, V.A. Partial stability criterion for a heterogeneous power grid with hub structures / V.A. Khramenkov, A.S. Dmitrichev, V.I. Nekorkin // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2021. – Vol. 152. – P. 111373.
- A4. Khramenkov, V.A. A new scenario for Braess's paradox in power grids / V.A. Khramenkov, A.S. Dmitrichev, V.I. Nekorkin // *Chaos*. – 2022. – Vol. 32, № 11. – P. 113116.
- A5. Храменков, В.А. Об условиях безопасного подключения к хаб кластерным энергосетям / В.А. Храменков // *Известия вузов. ПНД*. – 2022. – Т. 30, № 4. – С. 424-435.
- A6. Khramenkov, V.A. Bistability of operating modes and their switching in a three machine power grid / V.A. Khramenkov, A.S. Dmitrichev, V.I. Nekorkin // *Chaos*. – 2023. – Vol. 33, № 10. – P. 103129.
- A7. Храменков, В.А. Синхронные и асинхронные режимы в энергосети с хаб-топологией / В.А. Храменков // Тезисы докладов XVIII научной школы «Нелинейные волны 2018», Н. Новгород, 2018. С. 200.
- A8. Храменков, В.А. Новый сценарий парадокса Браеса в энергосетях / В.А. Храменков, А.С. Дмитричев, В.И. Некоркин // Тезисы докладов XX научной школы «Нелинейные волны 2022», Н. Новгород, 2022. С. 291.
- A9. Храменков, В.А. Динамический сценарий парадокса браеса в энергосетях / В.А. Храменков // Сборник материалов XVII Всероссийской молодежной научно инновационной школы «Математика и математическое моделирование», Саров, 2023. С. 344-345.
- A10. Khramenkov, V.A. Partial stability criterion for power grids / V.A. Khramenkov // Abstracts of 4th International Conference on “Integrable System & Nonlinear Dynamics (ISND 2023)”, Yaroslavl, 2023. P. 84.

- A11. Храменков В.А. Существование и переключения синхронных режимов в модели трехмашинной энергосети / В.А. Храменков // Труды XXIII Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии», Н. Новгород, 2023. С. 161-165.
- A12. Храменков, В.А. Мультистабильность синхронных режимов в многомашинной энергосети с общей нагрузкой / В.А. Храменков, А.С. Дмитричев, В.И. Некоркин // Тезисы докладов XXI научной школы «Нелинейные волны 2024», Н. Новгород, 2024. С. 279-280.
- A13. Дмитричев, А.С., Храменков, В.А., Некоркин, В.И. программа для ЭВМ «Оценка областей безопасного режима работы генераторов (потребителей) энергосетей на основе модели Курамото с инерцией», свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021660565, 28 июня 2021 г.