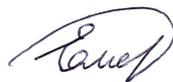


На правах рукописи



ЕМЕЛЬЯНОВА Анастасия Александровна

**СМЕШАННАЯ ДИНАМИКА
В КОЭВОЛЮЦИОННЫХ АНСАМБЛЯХ
ОСЦИЛЛЯТОРОВ КУРАМОТО**

1.3.4 — Радиофизика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород, 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук» (г. Нижний Новгород).

Научный руководитель: **Некоркин Владимир Исаакович**, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий отделом ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук» (г. Нижний Новгород).

Официальные оппоненты: **Дмитриев Александр Сергеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУН «Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук» (г. Москва);

Казаков Алексей Олегович, кандидат физико-математических наук, доктор наук по прикладной математике, профессор, главный научный сотрудник НИУ «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород).

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. И. Канта» (г. Калининград).

Защита состоится 30.09.2024 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.1.238.01 при ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук» по адресу: г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПФ РАН, а также на сайте www.ipfran.ru.

Автореферат разослан 20 августа 2024 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.1.238.01,
доктор физико-математических наук



Э. Б. Абубакиров

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие радиофизические системы состоят из взаимосвязанных автоколебательных элементов. Например, к ним относятся массивы джозефсоновских контактов, энергосети, сети фазовой синхронизации и др. В моделях, описывающих динамику таких систем, обычно используются переменные, характеризующие амплитуды и фазы колебаний, которые отражают автоколебательные свойства элементов. Однако в 1975 году японский исследователь Курамото (Y. Kuramoto), опираясь на концепцию, введённую ранее А. Winfree [1], предложил для описания динамики систем, состоящих из автоколебательных элементов с достаточно слабыми межэлементными связями, рассматривать лишь уравнения для фаз колебаний, поскольку амплитуды колебаний в таких системах менее чувствительны к внешним воздействиям и изменяются незначительно, т. е. перейти от амплитудно-фазового к фазовому описанию [2]. При этом эволюция фазы каждого элемента определяется суммарным действием всех других элементов, каждое из которых представляет собой произведение некоторой постоянной величины, характеризующей силу межэлементных связей, на синус разности фаз каждой пары элементов. Эта система фазовых уравнений стала общепризнанной и получила название классической (paradigmatic) модели, или ансамбля, Курамото, а её элементы стали называться фазовыми осцилляторами. Модель широко используется при изучении колебательных явлений в системах различной природы, в том числе химической, биологической, нейронной и др. Классическая модель Курамото получила дальнейшее развитие в работах Т. Antonsen, А. Arenas, Н. Daido, Y. Maistrenko, Е. Ott, А. Pikovsky, Н. Sakaguchi, S. Strogatz и др., в которых был сделан ряд важных обобщений на случай неоднородных межэлементных связей и частот, неограниченного числа осцилляторов, наличия в системе шума и задержки и т. д. Было получено много значимых результатов, включающих, в частности, условие полной и частичной синхронизации, коллективного хаоса, формирование кластерных состояний и др.

В настоящее время возрастающее внимание исследователей привлекает новый класс ансамблей Курамото, в котором межэлементные связи уже не являются постоянными. Коллективная динамика таких систем формируется в результате совместной эволюции состояний элементов модели и межэлементных соединений. Это так называемые коэволюционные, или адаптивные, системы. Большой вклад в изучение таких ансамблей Курамото внесли Т. Aoyagi, R. Berner, S. Boccaletti, J. Kurths, Е. Schöll, S. Yanchuk, Р. М. Борисюк, Я. Б. Казанович, Д. В. Касаткин, В. И. Некоркин, А. Е. Храмов. Было изучено влияние правила адаптации, задержки, топологии связей и многослойной организации

на динамику адаптивных сетей Курамото, показано возникновение кластерных, химерных (когда одна часть сети находится в когерентном, а другая — в некогерентном состоянии) и метастабильных химероподобных состояний, иерархических и модульных структур, мультистабильности, эффекта «колебания порядка» (когда сеть колеблется между почти синхронным и асинхронным состояниями). В обзоре [3] представлено подробное описание адаптивных динамических сетей, их применение в различных областях исследований, приведён обзор математических методов их анализа, а в обзоре [A1] представлены основные классы моделей адаптивных связей, используемых при описании коэволюционных ансамблей Курамото. Проанализированы динамические и структурные эффекты, вызванные наличием соответствующего закона адаптации связей.

В последнее время возник большой интерес, в значительной степени стимулированный проблемами построения систем машинного обучения и искусственного интеллекта, к построению новых моделей, которые могли бы воспроизводить сложную структурную организацию и пластичность (адаптивность) реальных нейронных сетей. В связи с этим была введена в рассмотрение концепция симплексных связей, или взаимодействий высокого порядка [4]. Поясним на уровне физической строгости, что симплекс — это n -мерный многогранник, имеющий $(n + 1)$ вершин, не лежащих в одной $(n - 1)$ -мерной плоскости. Применительно к ансамблям Курамото, вершинам симплексов соответствуют фазы взаимодействующих осцилляторов. Например, симплексу с $n = 1$ соответствует отрезок, и динамика ансамбля зависит от разности фаз каждой такой пар осцилляторов. При $n = 2$ симплекс представляет собой треугольник, и связи представляют собой функции от линейной комбинации фаз трёх осцилляторов, а при $n = 3$ — тетраэдр и т. д. Примерами систем с симплексными соединениями при $n \geq 2$ являются сети мозга [5; 6], сети взаимодействующих белков [7], ансамбли электрохимических осцилляторов [8] и др. Изучение автоколебательных систем с симплексными связями ($n \geq 2$) находится на начальной стадии, и их свойства остаются малоизученными. Настоящая диссертация относится к этому новому и актуальному направлению радиофизики.

Другое направление диссертации связано с хаотической динамикой, традиционным объектом радиофизики. Исследование хаотического поведения автоколебательных систем восходит к пионерским экспериментам Ван дер Поля и Ван дер Марка, которые обнаружили шумоподобные колебания в генераторе Ван дер Поля, находящегося под действием периодической внешней силы [9]. К настоящему времени в этом направлении достигнуты значительные успехи. Разработан целый ряд генераторов

шумоподобных колебаний, в основе которых лежит динамический (детерминированный) хаос: генератор Кияшко — Пиковского — Рабиновича [10; 11], кольцевой генератор Дмитриева — Кислова [12], генератор с инерционной нелинейностью Анищенко — Астахова [13], генератор Чуа [14], генератор с запаздывающей связью на лампе бегущей волны Кислова — Залогина — Мясина [15], генераторы Безручко — Кузнецова — Трубецкова [16] и Гинзбурга — Кузнецова на лампе обратной волны [17] и др. Проблемам генерации хаоса в радио- и микроволновом диапазонах частот на основе твердотельных устройств с сосредоточенными параметрами посвящена книга А. С. Дмитриева [18].

С момента формирования теории динамического хаоса сложилось его условное деление на два типа: консервативный и диссипативный. Сравнительно недавно математиками С. В. Гонченко и Д. В. Тураевым была предложена концепция третьего типа хаоса — так называемой смешанной динамики [19]. Смешанная динамика характеризуется сосуществованием в одной и той же системе консервативных и диссипативных объектов. В фазовом пространстве такой системы, наряду с диссипативными элементами — аттрактором и репеллером (аттрактором в обратном времени), существует также замкнутое инвариантное множество — так называемое обратимое ядро, образованное траекториями, одновременно принадлежащими хаотическому аттрактору и хаотическому репеллеру. Наличие такого консервативного объекта, не притягивающего и не отталкивающего другие траектории, существенно влияет на динамику диссипативной системы. Первоначально явление смешанной динамики было обнаружено в узком классе обратимых систем. В обратимых системах аттракторы и репеллеры симметричны друг другу и при соответствующем преобразовании координат полностью совпадают. Примерами обратимых систем с третьим типом хаоса являются модели кельтского камня [20], волчка Сулова [21], связанных ротаторов Пиковского — Топажа [22], вихревых потоков [23]. Результаты, полученные в работах [20–23] по смешанной динамике обратимых систем, в значительной степени получены при использовании оригинальных качественных и численных методов, разработанных А. О. Казаковым. До настоящей диссертационной работы явление смешанной динамики в системах более общего вида — необратимых, — не наблюдалось.

Таким образом, в настоящей диссертации будут рассмотрены ансамбли осцилляторов Курамото, обладающие, с одной стороны, сложными адаптивными, в том числе симплексными, межэлементными связями, а с другой, как будет установлено в диссертации, — демонстрирующие смешанную динамику.

Целью диссертационной работы является разработка моделей,

демонстрирующих смешанную динамику, в классе необратимых коэволюционных ансамблей Курамото с симплексными и адаптивными межэлементными связями (первого и второго порядков) и выявление на их основе динамических свойств и характеристик этого нового явления. Исследование режимов синхронизации в этом классе систем. Приложение полученных результатов к задачам генерации шумоподобных автоколебаний и нейродинамики.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Выделить области параметров и вид функций адаптации в ансамблях Курамото с адаптивными симплексными связями первого и второго порядков, при которых реализуется смешанная динамика.
2. Разработать аналитические и численные методы анализа третьего типа хаоса в необратимых системах.
3. Изучить влияние внешнего периодического стимула на смешанную динамику в ансамбле осцилляторов Курамото с симплексными адаптивными связями первого порядка.
4. Исследовать механизмы формирования и разрушения синхронных режимов в коэволюционных сетях осцилляторов Курамото с симплексными связями первого и второго порядка.
5. Разработать генератор шумоподобных колебаний на базе модели Курамото с адаптивными связями, демонстрирующей смешанную динамику.
6. Изучить влияние различных правил адаптации на динамику нейронных осцилляторов в рамках модели Курамото с адаптивными симплексными связями первого и второго порядков.

Научная новизна:

1. Впервые предложены необратимые системы с третьим типом хаоса, представляющие собой коэволюционные ансамбли Курамото.
2. Разработаны аналитические и численные методы установления пересечения хаотического аттрактора с хаотическим репеллером, введены и исследованы характеристики третьего типа хаоса в необратимых коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото.
3. Установлено, что при действии внешней силы на ансамбль осцилляторов Курамото с симплексными адаптивными связями первого порядка, находящийся в режиме смешанной динамики, фрактальные размерности хаотического аттрактора и обратимого ядра, характеризующие отличие их фрактальной структуры от структуры классических многообразий, уменьшаются.

4. Выделены условия на параметры функции адаптации, при которых ансамбли Курамото демонстрируют синхронизацию как в случае симплексных связей первого порядка, так и в случае симплексных связей второго порядка.
5. Впервые показано, что процесс разрушения синхронных режимов в коэволюционных сетях осцилляторов Курамото при изменении параметра, характеризующего правило адаптации, происходит иерархически. При этом в случае симплексных связей первого порядка разрушение происходит через состояния частичной синхронизации, а в случае симплексных связей второго порядка имеет место резкий скачкообразный переход к асинхронному режиму.
6. Реализован генератор шумоподобных колебаний в режиме смешанной динамики в системе с дискретным временем. Установлено, что в случае третьего типа хаоса спектральная плотность мощности колебаний более равномерно распределена по частотам, чем в случае классического диссипативного хаоса в той же системе.
7. Продемонстрировано, что ансамбли Курамото с адаптивными симплексными связями первого и второго порядков можно рассматривать как модели спайковых нейронных сетей. При этом в случае смешанной динамики ансамбль осцилляторов Курамото воспроизводит сложные спайковые последовательности, которые не могут быть реализованы в рамках хаотической диссипативной динамики.

Практическая значимость. Разработанные методы исследования третьего типа хаоса могут быть полезны при изучении других систем. Реализованный на программируемой логической интегральной схеме генератор шумоподобных колебаний в режиме смешанной динамики может быть востребован при построении новых перспективных систем коммуникации и кодирования информации. Предложенные в работе правила адаптации межэлементных связей могут быть востребованы при построении новых моделей реальных нейронных сетей, обладающих сложной структурной организацией и пластичностью.

Методология и методы исследования. В исследовании были использованы современные методы нелинейной динамики, теории бифуркаций и численного моделирования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Коэволюционные ансамбли осцилляторов Курамото с адаптивными симплексными связями первого и второго порядков демонстрируют смешанную динамику.

2. В фазовом пространстве ансамбля осцилляторов Курамото с адаптивными симплексными связями первого порядка хаотический аттрактор, хаотический репеллер и обратимое ядро локализованы в окрестности двумерной поверхности.
3. В коэволюционных ансамблях Курамото с симплексными связями первого и второго порядков синхронный режим колебаний осцилляторов существует для широкого класса функций коэволюции.
4. Разрушение синхронного режима происходит по-разному для коэволюционных ансамблей Курамото с симплексными связями первого и второго порядков.
5. Генератор с дискретным временем, построенный на основе программируемой логической интегральной схемы, демонстрирует третий тип хаоса.
6. Новая модель нейронного ансамбля Курамото, находящегося в режиме смешанной динамики, генерирует сложные спайковые последовательности, которые не могут быть реализованы в рамках диссипативной хаотической динамики.

Достоверность. Все представленные результаты диссертационного исследования являются достоверными и обоснованными. В работе применялись надежные и апробированные методы и подходы. Разработанные алгоритмы и программы для численного моделирования тщательно тестировались на известных моделях. Полученные аналитические и численные результаты хорошо согласуются между собой. Для дискретной модели Курамото результаты исследования подтверждены экспериментально при реализации генератора шумоподобных колебаний, построенного на ПЛИС. Положения и основные результаты диссертационной работы опубликованы в рецензируемых российских и зарубежных научных журналах и подвергались оценке независимых международных экспертов. Результаты докладывались на всероссийских и международных симпозиумах, конференциях, школах и обсуждались на научных семинарах.

Апробация работы. Материалы диссертации были представлены в виде докладов на следующих конференциях:

1. XXII и XXV научные конференции по радиофизике (Нижний Новгород, 2018, 2021);
2. XXIV и XXVIII Нижегородские сессии молодых учёных (Нижегородская область, 2019, 2023);
3. International Conference on Dynamical Systems “Shilnikov Workshop” (Нижний Новгород, 2018, 2019, 2020, 2022);
4. XXIII и XXVI Конкурсы работ молодых учёных ИПФ РАН (Нижний Новгород, 2021, 2024);

5. SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems (virtual conference, 2021);
6. Конференция международных математических центров мирового уровня (ФТ Сириус, 2021);
7. XX научная школа «Нелинейные волны-2022» (Нижегородская область, 2022);
8. XVII Всероссийская молодёжная научно-инновационная школа «Математика и математическое моделирование» (Саров, 2023);
9. 4th International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics (Ярославль, 2023);
10. XXIII молодежная конференция «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, 2023).

Результаты, полученные в ходе выполнения работы, были использованы в ходе исследовательских работ в рамках проектов РФФИ и РНФ. Результаты работы также обсуждались на научных семинарах ИПФ РАН. Они отмечены дипломами второй степени Конкурса работ молодых учёных ИПФ РАН (2021) и XVII Всероссийской молодёжной научно-инновационной школы «Математика и математическое моделирование» (2023), а также дипломом первой степени Нижегородской сессии молодых учёных (2023).

Личный вклад. Все приведённые в диссертации результаты получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии. В частности, автором выполнены все присутствующие в работе численные расчёты и реализованы алгоритмы разработанных методов. Численные расчёты выполнялись на основе оригинальных программ, созданных автором самостоятельно, а также с использованием программы с открытым исходным кодом [24].

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 19 печатных изданиях, 8 из которых изданы в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 11 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 2 приложений. Полный объём диссертации составляет 122 страницы, включая 68 рисунков и 8 таблиц. Список литературы содержит 129 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируются цели и

задачи, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы, перечислены основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава диссертации посвящена исследованию динамики коэволюционных ансамблей двух осцилляторов Курамото.

В разделе 1.1 приводится описание рассматриваемых в главе моделей.

Раздел 1.2 посвящён изучению динамики коэволюционного ансамбля двух осцилляторов Курамото с расстройкой собственных частот, который описывается системой следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 &= \omega_1 - \kappa_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha), \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_2 - \kappa_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \alpha), \\ \dot{\kappa}_1 &= -\varepsilon (\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) + \kappa_1), \\ \dot{\kappa}_2 &= -\varepsilon (\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) + \kappa_2), \end{cases} \quad (1)$$

где (φ_1, φ_2) — фазы осцилляторов, (κ_1, κ_2) — коэффициенты связи, а точкой сверху обозначено дифференцирование по времени. Параметр α характеризует постоянную задержку при передаче сигнала от одного осциллятора к другому. Свойства функции коэволюции можно изменять при помощи параметра β . Например, в контексте нейродинамики систему (1) можно рассматривать как модель двух взаимодействующих спайковых нейронов с пластичной связью. Тогда при $\beta = 0$ коэффициенты связи эволюционируют во времени согласно правилу адаптации, зависящей от времени появления потенциала действия, или спайка (spike-timing-dependent plasticity, или STDP), когда сила связи между парой нейронов изменяется в зависимости от разности времён генерации пре- и постсинаптического спайка предшествует постсинаптическому, то есть способствует генерации последнего, то сила такой связи увеличивается, в противном случае сила связи уменьшается. При $\beta = \frac{\pi}{2}$ связи эволюционируют по обратному правилу Хебба, когда сила связи между элементами уменьшается при уменьшении разности их фаз, а значение $\beta = \frac{3\pi}{2}$ соответствует правилу Хебба, когда она увеличивается при уменьшении разности фаз осцилляторов. Параметр ε разделяет быструю динамику фаз и медленную динамику коэффициентов связи. Собственные частоты осцилляторов обозначены как ω_1 и ω_2 .

Систему (1) можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\theta} &= \gamma - y \cos \alpha \sin \theta + z \sin \alpha \cos \theta, \\ \dot{y} &= -y - 2 \sin \beta \cos \theta, \\ \dot{z} &= -z + 2 \cos \beta \sin \theta, \end{cases} \quad (2)$$

где переменная $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$ описывает разность фаз осцилляторов, $y = \kappa_1 + \kappa_2$ — динамику суммы коэффициентов связи, $z = \kappa_2 - \kappa_1$ — динамику

разности коэффициентов связи. Значение расстройки собственных частот обозначено параметром $\gamma = \omega_1 - \omega_2$.

Исследованы динамические режимы системы (2). Установлены значения параметров, при которых в системе одновременно существуют хаотический аттрактор и хаотический репеллер. При $\gamma = 0$ они разделены (рис. 1, а). Однако в некотором диапазоне параметра γ они занимают приблизительно одну и ту же область фазового пространства и очень близки друг к другу (рис. 1, б).

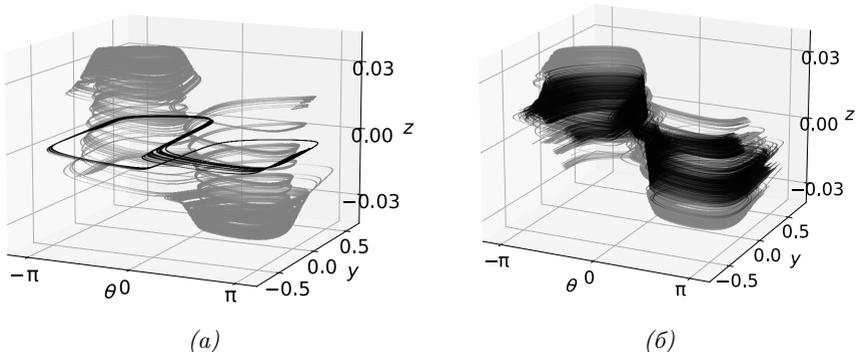


Рис. 1. Хаотический аттрактор (серый цвет) и хаотический репеллер (чёрный цвет) системы (2) в фазовом пространстве: *a* — случай $\gamma = 0$; *б* — случай $\gamma = 0.015$. $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$

Численно построены инвариантные многообразия в локальной окрестности седловых траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера. Методика построения базируется на свойстве диссипативности системы (2) и анализе расположения инвариантных кривых на секущей Пуанкаре, соответствующих этим многообразиям. Построение показало, что при определённых значениях параметров многообразия достаточно близких седловых траекторий хаотических аттрактора и репеллера трансверсально пересекаются (рис. 2).

Наличие пересечения инвариантных многообразий близких седловых траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера является критерием существования в системе (2) обратимого ядра. Установлено, что в случае смешанной динамики наблюдаемое в численном моделировании минимальное расстояние между хаотическим аттрактором и хаотическим репеллером меньше по крайней мере на три порядка по сравнению со случаем классического диссипативного хаоса (в случае диссипативного хаоса оно равно 10^{-2} , а в случае смешанной

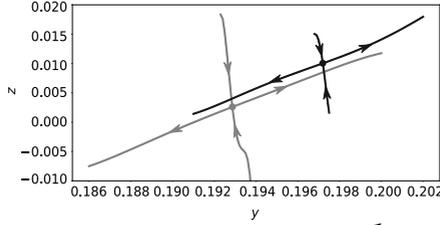


Рис. 2. Пересечение инвариантных кривых, образованных многообразиями седловых траекторий хаотического аттрактора (серый цвет) и хаотического репеллера (чёрный цвет) системы (2) на секущей Пуанкаре $\theta = -0.25\pi$. $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$, $\gamma = 0.01509$

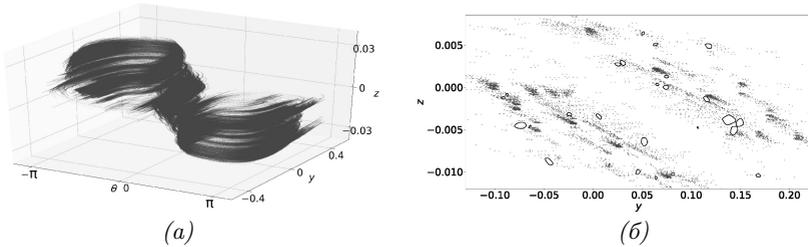


Рис. 3. Обратимое ядро системы (2): *a* — фазовое пространство; *б* — сечение Пуанкаре $\theta = \pi$. $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$, $\gamma = 0.015$

динамики 10^{-5}). На рис. 3, а представлено обратимое ядро, в котором расстояние между траекториями аттрактора и репеллера не превышает величины 0.002, а на рис. 3, б — «след» обратимого ядра на секущей Пуанкаре. В этом сечении можно видеть элементы эллиптической формы, напоминающие консервативные элементы динамики. В то же время, в сечении есть области с высокой плотностью точек и области, в которых точек практически нет, что напоминает аттрактор в диссипативных системах. Были введены и изучены характеристики обратимого ядра. Выявлен диапазон функций адаптации, при которых в системе (2) существует обратимое ядро. Установлено, что третий тип хаоса существует в некотором диапазоне функций адаптации связей, близких к обратному правилу Хебба, а на части кривой, ограничивающей область существования этого явления, хаотический аттрактор и хаотический репеллер сближаются и исчезают одновременно. Обнаружено, что фрактальная размерность обратимого ядра меньше фрактальных размерностей хаотического аттрактора и хаотического репеллера. Продемонстрировано, что при параметрах, соответствующих смешанной динамике, сумма ляпуновских показателей хаотического аттрактора оказывается ближе к нулю,

чем при других значениях параметров, когда хаотический аттрактор и хаотический репеллер не пересекаются. Это подтверждает существование третьего типа хаоса в диссипативной системе (2). Установлено, что в случае смешанной динамики спектры мощности и средние частоты колебаний переменной θ в прямом и обратном времени становятся похожи друг на друга.

Был проведён анализ ансамбля (2) с точки зрения теории быстро–медленных систем. В результате этого анализа были установлены следующие свойства системы (2):

1. Классический, так называемый S–образный возвращающий динамический механизм формирования хаоса в системе (2) отсутствует.
2. Установлено, что хаотический аттрактор и хаотический репеллер системы (2) локализованы вблизи поверхности, описываемой уравнением $z_{ap}(\theta, y) = A_z \cos \beta \sin \theta \frac{\sin \omega_z y}{\omega_z y}$ (рис. 4).

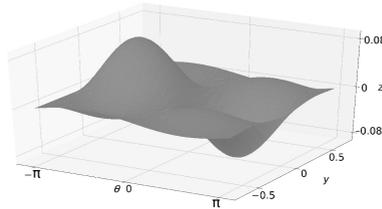


Рис. 4. Поверхность $z_{ap}(\theta, y)$ в фазовом пространстве системы (2), в окрестности которой локализованы хаотический аттрактор и хаотический репеллер. $\beta = 1.6$, $\omega_z = 10.25$, $A_z = 3.06$

Была изучена динамика двумерной системы на аппроксимирующей поверхности z_{ap} , которая может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\theta} &= \gamma - y \cos \alpha \sin \theta + A_z \cos \beta \sin \theta \frac{\sin \omega_z y}{\omega_z y} \sin \alpha \cos \theta, \\ \dot{y} &= -y - 2 \sin \beta \cos \theta. \end{cases} \quad (3)$$

Показано, что при параметрах, соответствующих смешанной динамике, *фрагменты* седловых траекторий системы (2) приближённо описываются траекториями, принадлежащими аттракторам и репеллерам системы (3) (рис. 5). Установлено, что на границе области существования третьего типа хаоса, при пересечении которой хаотические аттрактор и репеллер исчезают одновременно, в системе (3) происходят седло–узловые бифуркации двух пар колебательных предельных циклов, и после этого в системах (2) и (3) единственным устойчивым аттрактором остаётся вращательный предельный цикл.

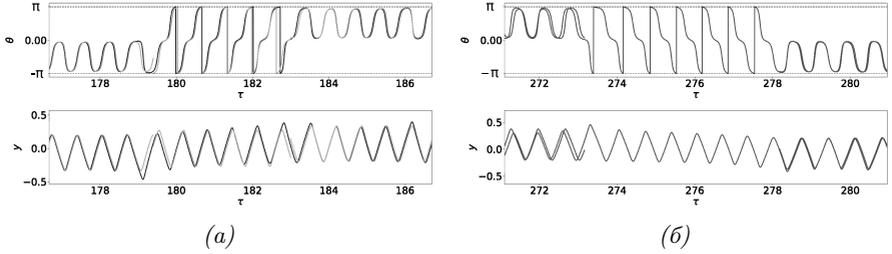


Рис. 5. Временные зависимости переменных на хаотическом аттракторе и хаотическом репеллере системы (2) в сравнении с временными зависимостями переменных на аттракторах и репеллерах системы (3): *a* — прямое время; *б* — обратное время. $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$, $\gamma = 0.015$

В разделе 1.3 приведено исследование динамики коэволюционно-го ансамбля двух осцилляторов Курамото под действием периодического внешнего стимула, который описывается системой следующего вида:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\theta} = \gamma - y \cos \alpha \sin \theta + z \sin \alpha \cos \theta + A \sin \omega_0 t, \\ \dot{y} = -y - 2 \sin \beta \cos \theta, \\ \dot{z} = -z + 2 \cos \beta \sin \theta, \end{cases} \quad (4)$$

где ω_0 и A — частота и амплитуда внешнего воздействия, соответственно. Систему (4) можно рассматривать как модель двух адаптивно связанных нейронов под действием периодического внешнего тока. Обнаружено, что даже в отсутствие расстройки собственных частот осцилляторов под действием внешней силы в этой системе возникает смешанная динамика. Выявлена область существования третьего типа хаоса в пространстве параметров системы. Продемонстрировано, что с ростом амплитуды внешней силы среднее расстояние между хаотическим аттрактором и хаотическим репеллером уменьшается, затем хаотический репеллер в системе исчезает, а хаотический аттрактор остаётся. Рассчитано расстояние Канторовича — Рубинштейна — Вассерштейна между хаотическим аттрактором и хаотическим репеллером. Это расстояние оценивает меру схожести между двумя распределениями в метрическом пространстве. Соответственно, в рассматриваемом случае оно отражает меру схожести распределений траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера в фазовом пространстве. Показано, что это расстояние уменьшается при возникновении смешанной динамики, что свидетельствует об увеличении схожести между хаотическими аттрактором и репеллером. Установлено, что в неавтономном случае смешанной динамики колебания в прямом и обратном времени имеют похожую форму. При этом они обладают наибольшей схожестью при значении частоты внешней силы, равной

частоте пика в спектрах мощности переменных θ и z в случае, когда частоты осцилляторов равны, а внешнее воздействие отсутствует. Показано, что в случае смешанной динамики не происходит совпадения частот главных спектральных компонент в спектрах переменных с частотой внешней силы, однако практически сразу после исчезновения смешанной динамики эти частоты начинают совпадать.

Изучено влияние внешней силы на обратимое ядро, сформированное вследствие расстройки собственных частот осцилляторов. Показано, что введение внешней силы при определённых параметрах может уничтожить смешанную динамику в системе (4). Установлено, что при воздействии внешней силы на систему фрактальная размерность хаотического аттрактора и обратимого ядра уменьшается.

В разделе 1.4 приведено исследование коэволюционного ансамбля следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1 - \kappa_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha) + a \sin \varphi_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2 - \kappa_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \alpha) + a \sin \varphi_2, \\ \dot{\kappa}_1 = -\varepsilon(\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) + \kappa_1), \\ \dot{\kappa}_2 = -\varepsilon(\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) + \kappa_2), \end{cases} \quad (5)$$

где $a > 0$ — параметр. Заметим, что, в отличие от систем (2), (4), колебания одиночного элемента системы (5) являются неизохронными. Выделены параметры, при которых в системе (5) реализуется третий тип хаоса. При этом наличие ненулевого параметра a может быть как причиной появления смешанной динамики, так и причиной её уничтожения. Показано, что хаотические аттракторы и репеллеры ансамбля (5) находятся вне областей существования критического многообразия, поэтому они не могут быть описаны в рамках теории быстро-медленных систем. Продемонстрировано, что поглощающие области хаотического аттрактора и хаотического репеллера пересекаются. Установлена область существования смешанной динамики на плоскости параметров $(a, \omega_1 - \omega_2)$ и показано, что сумма ляпуновских показателей хаотического аттрактора ближе к нулю внутри этой области параметров. При этом она наиболее близка к нулю вблизи границы области существования смешанной динамики, при пересечении которой хаотические аттрактор и репеллер исчезают одновременно. Продемонстрировано, что расстояние Канторовича — Рубинштейна — Вассерштейна между хаотическим аттрактором и хаотическим репеллером уменьшается при возникновении смешанной динамики под действием параметра a , а при наличии одновременно ненулевого параметра a и частотной расстройки это расстояние становится ещё меньше.

В разделе 1.5 представлена схема реализации на программируемой логической интегральной схеме генератора хаотических колебаний,

демонстрирующего режим смешанной динамики. Динамика генератора описывается системой с дискретным временем $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + h(\gamma - y_n \cos \alpha \sin \theta_n + z_n \sin \alpha \cos \theta_n + A \sin \omega h n), \\ y_{n+1} = y_n - h\varepsilon(y_n + 2 \sin \beta \cos \theta_n), \\ z_{n+1} = z_n - h\varepsilon(z_n - 2 \cos \beta \sin \theta_n). \end{cases} \quad (6)$$

Система (6) является дискретной версией системы (4), в которой параметр h принимает конечные значения. Отметим, что это первая модель генератора шумоподобных колебаний, построенная на основе смешанной динамики.

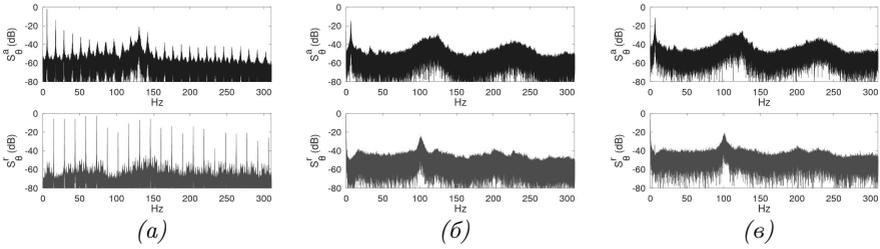


Рис. 6. Спектры мощности переменной θ генератора (6) при $h = 0.04$ (верхний ряд) и $h = -0.04$ (нижний ряд): *a* — диссипативный хаос ($\gamma = 0$, $A = 0$); *б* — смешанная динамика ($\gamma = 0.015$, $A = 0$); *в* — смешанная динамика ($\gamma = 0.015$, $\omega = 0.00475951$, $A = 0.0024$). $\alpha = 0.24$, $\beta = 1.6$, $\varepsilon = 0.01$

Генератор (6) демонстрирует возможности формирования шумоподобных колебаний, которые могут соответствовать как классическому диссипативному хаосу, так и третьему типу хаоса. Установлено, что в случае смешанной динамики распределение мощности по частотам становится более равномерным по сравнению с диссипативным хаосом в той же системе и других известных системах, описывающих генераторы шумоподобных колебаний, при этом введение внешнего периодического воздействия усиливает этот эффект (рис. 6).

В разделе 1.6 приведены выводы по первой главе.

Изложенные в первой главе результаты опубликованы в статьях [A1–A6] и тезисах докладов [A7–A16].

Вторая глава диссертации посвящена исследованию динамических режимов, возникающих в коэволюционной сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными связями первого порядка, которую можно рассматривать как модель нейронной сети с адаптивными связями.

В разделе 2.1 вводится модель коэволюционного ансамбля Курамото с симплексными связями первого порядка, имеющая вид:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{\Lambda}{N} \sum_{j=1}^N \kappa_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i), \\ \dot{\kappa}_{ij} = -\varepsilon \left(\sin(\varphi_j - \varphi_i + \beta) + \kappa_{ij} \right), \end{cases} \quad (7)$$

где параметром Λ обозначена постоянная сила связи между элементами. Собственные частоты элементов сети ω_i являются случайными величинами, равномерно распределёнными в диапазоне $[-1, 1]$. Начальные фазы выбираются равными 0 с вероятностью η и равными π с вероятностью $(1 - \eta)$. Начальные веса $\kappa_{ij}(0) = 1$ для $i \neq j$ и $\kappa_{ij}(0) = 0$ для $i = j$ и накладывается дополнительное условие, что эволюционируют во времени только изначально ненулевые коэффициенты связи, то есть в сети (7) в симплексы первого порядка объединяются элементы с различными индексами. Число элементов сети $N = 100$.

В разделе 2.2 описываются стационарные режимы системы (7), то есть режимы, при которых выполняется $\dot{\kappa}_{ij} = 0$. Показано, что в зависимости от значений параметров сеть может демонстрировать несколько таких режимов. Во-первых, в сети реализуется синхронный режим, когда усреднённые по времени частоты осцилляторов равны, а их фазы группируются в два противофазных фазовых кластера. Этот режим существует в широком диапазоне параметра β , включающем в себя правило Хебба. Во-вторых, в системе реализуется асинхронный режим, соответствующий пространственно-временному беспорядку. При промежуточных значениях параметров в сети возникает режим частичной синхронизации. Были изучены первый и второй параметры порядка, характеризующие степень синхронизации сети: $R_m = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N e^{im\theta_j} \right|$. При $R_m = 1$ в сети реализуются m фазовых кластеров, а при $R_m = 0$ для любого m реализуется асинхронный режим. Зависимость этих характеристик от параметра коэволюции β в сети (7) выглядит следующим образом: в синхронном состоянии первый параметр порядка R_1 принимает значения между 0 и 1, а второй параметр порядка $R_2 \approx 1$. В асинхронном состоянии $R_1 \approx R_2 \approx 0$. В режиме частичной синхронизации обе характеристики имеют гладкую зависимость от аргумента и принимают значения между 0 и 1 (рис. 7, а). Исследование зависимости параметров порядка от силы связи Λ показало, что существует порог по этому параметру, при превышении которого в системе (7) в некотором диапазоне по β наблюдается синхронный режим. При этом переход от асинхронного состояния к синхронному при увеличении Λ от нуля также происходит через состояния частичной синхронизации.

В разделе 2.3 описан процесс потери устойчивости синхронного состояния сети (7). Установлено, что для некогерентной части сети

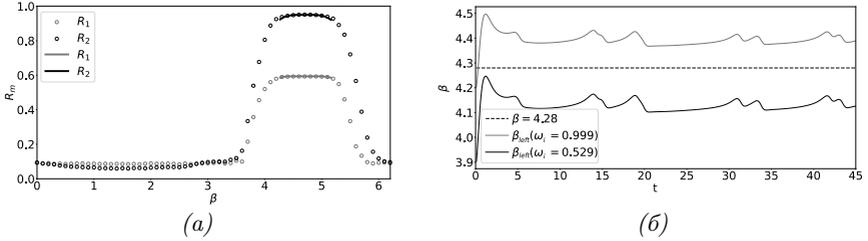


Рис. 7. Динамика сети (7) при $\Lambda = 4$, $\varepsilon = 1$, $\eta = 0.8$: *a* — зависимость параметров порядка R_1 и R_2 от параметра β , где теоретические кривые показаны сплошными линиями, а результаты счёта показаны выколотыми точками; *б* — зависимость бифуркационных значений двух осцилляторов сети (7) от времени при $\beta = 4.15$, где пунктиром показана граница устойчивости синхронного состояния сети

этот процесс начинается с осцилляторов с наибольшей собственной частотой и затем иерархически распространяется на другие осцилляторы по принципу уменьшения их собственной частоты. Это связано с тем, что бифуркационное значение параметра β для самых высокочастотных осцилляторов совпадает со значением параметра β , соответствующим границе между синхронным режимом и режимом частичной синхронизации. Потеря устойчивости одного осциллятора вызывает уменьшение параметра порядка R_2 , который входит в выражения для бифуркационных значений параметра β всех осцилляторов, и сдвигает эти значения ближе к границе устойчивости синхронного состояния всей сети. Таким образом, осцилляторы из некогерентной части один за одним теряют устойчивость и покидают синхронную группу. Однако оставшиеся осцилляторы так и не пересекают границу устойчивости сети, поэтому они остаются в её когерентной части (рис. 7, б).

В разделе 2.4 приводятся выводы по второй главе.

Изложенные во второй главе результаты опубликованы в статье [A17] и тезисах доклада [A18].

Третья глава посвящена изучению динамики коэволюционного ансамбля трёх осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка, который можно рассматривать как модель трёх нейронов со сложным видом адаптивных связей, когда они образуют симплекс второго порядка.

В разделе 3.1 приводится описание модели, которая описывается

следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1 + \Lambda \kappa_1 \sin(\varphi_2 + \varphi_3 - 2\varphi_1 + \alpha), \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2 + \Lambda \kappa_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2 + \alpha), \\ \dot{\varphi}_3 = \omega_3 + \Lambda \kappa_3 \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3 + \alpha), \\ \dot{\kappa}_1 = -\varepsilon \left(\sin(\varphi_2 + \varphi_3 - 2\varphi_1 + \beta) + \kappa_1 \right), \\ \dot{\kappa}_2 = -\varepsilon \left(\sin(\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2 + \beta) + \kappa_2 \right), \\ \dot{\kappa}_3 = -\varepsilon \left(\sin(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3 + \beta) + \kappa_3 \right). \end{cases} \quad (8)$$

В разделе 3.2 продемонстрировано, что в системе (8) при определённых значениях параметров системы реализуется третий тип хаоса. Следовательно, явление смешанной динамики обладает свойством робастности — оно сохраняется при увеличении числа осцилляторов с двух до трёх и изменении типа связей. Однако в случае системы (8) смешанная динамика имеет свои особенности. В системе (8) в режиме смешанной динамики хаотический аттрактор и хаотический репеллер выглядят практически неотличимо друг от друга, а их фрактальные размерности и ляпуновские показатели (с учётом знаков) практически совпадают. И аттрактор, и репеллер имеют два положительных, два нулевых и два отрицательных ляпуновских показателя. Это свидетельствует о том, что в системе (8) присутствует гиперхаос, а в структуре хаотических аттрактора и репеллера содержатся седловые торы [25; 26], многообразия которых в случае третьего типа хаоса имеют пересечения. Кроме того, в случае смешанной динамики сумма ляпуновских показателей хаотического аттрактора и хаотического репеллера в среднем на порядок меньше, чем в системах (2), (5), а при определённых значениях параметров достигает значений порядка 10^{-5} , т. е. консервативные свойства системы (8) выражены сильнее, чем в случае систем (2)–(6). Стоит отметить, что эти свойства выражены наиболее ярко при значении параметра адаптации $\beta = \frac{\pi}{2}$. Обнаружено одновременное появление и исчезновение хаотического аттрактора и хаотического репеллера на границах диапазона существования смешанной динамики в пространстве параметров.

В разделе 3.3 изучены характеристики смешанной динамики в системе (8) и рассмотрено приложение этого эффекта к нейродинамике. Показано, что в случае третьего типа хаоса спектральная плотность мощности фазовых переменных становится более равномерно распределена по частотам по сравнению со случаем классического диссипативного хаоса в системе (8). В приложении к нейродинамике систему (8) можно рассматривать как ансамбль пластически связанных спайковых нейронов. Если считать, что нейронный осциллятор генерирует одиночный импульс (потенциал действия, или спайк), когда его фаза пересекает некоторое значение (например, $\varphi_i = \pi$), то каждому осциллятору соответствуют определённые спайковые последовательности. Установлено, что

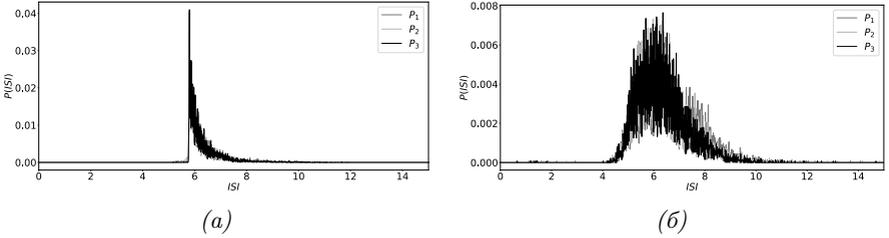


Рис. 8. Распределения межспайковых интервалов нейронных осцилляторов системы (8): *a* — диссипативный хаос ($\beta = 1.05$); *б* — смешанная динамика ($\beta = 1.1$). $\alpha = 0.24$, $\varepsilon = 0.01$, $\Lambda = 44.5$, $\omega_1 = 0.985$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 1.015$

они существенно отличаются в случае классического диссипативного хаоса и третьего типа хаоса. В случае смешанной динамики распределение межспайковых интервалов (промежутков времени между спайками) становится более широким, чем в случае классического хаоса (рис. 8), что свидетельствует о повышении информационной ёмкости сети. Установленные свойства нейронного ансамбля (8), проявляющиеся при сочетании симплексных связей и третьего типа хаоса, могут быть использованы в различных приложениях.

В разделе 3.4 приводятся выводы по третьей главе.

Изложенные в третьей главе результаты опубликованы в статье [A19] и тезисах доклада [A16].

Четвёртая глава посвящена исследованию динамики коэволюционной сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка, которую можно считать моделью нейронной сети со сложным видом пластичных связей, образующих симплексы второго порядка.

В разделе 4.1 приведено описание модели, имеющей вид

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_i &= \omega_i + \frac{\Lambda}{N^2} \sum_{j,k=1}^N \kappa_{ijk} \sin(\varphi_j + \varphi_k - 2\varphi_i), \\ \kappa_{ijk} &= -\varepsilon \left(\sin(\varphi_j + \varphi_k - 2\varphi_i + \beta) + \kappa_{ijk} \right), \end{cases} \quad (9)$$

где φ_i — фаза i -го осциллятора, а коэффициенты κ_{ijk} отражают влияние на i -ый осциллятор со стороны элементов с индексами j и k , входящих в тот же симплекс. В численных экспериментах распределения начальных частот ω_i , число элементов N и начальные условия на фазы выбраны такими же, как при изучении системы (7), а для весов выполняются начальные условия $\kappa_{ijk}(0) = 1$ для $i \neq j \neq k$ и $\kappa_{ijk}(0) = 0$ в противном случае. Эволюционируют во времени только изначально ненулевые коэффициенты связи, то есть в сети (9) в симплексы второго порядка объединяются элементы с различными индексами.

В разделе 4.2 описываются стационарные режимы системы (9) (когда $\kappa_{ijk} = 0$). Обнаружено, что в сети (9) реализуются два стационарных режима: синхронный и асинхронный. При этом переход от одного режима к другому при вариации параметров происходит резко, без промежуточных состояний частичной синхронизации, что отражается в скачке параметров порядка (рис. 9, а). Область параметров, соответствующая синхронному режиму, приблизительно совпадает с областью параметров в случае симплексных связей первого порядка (7).

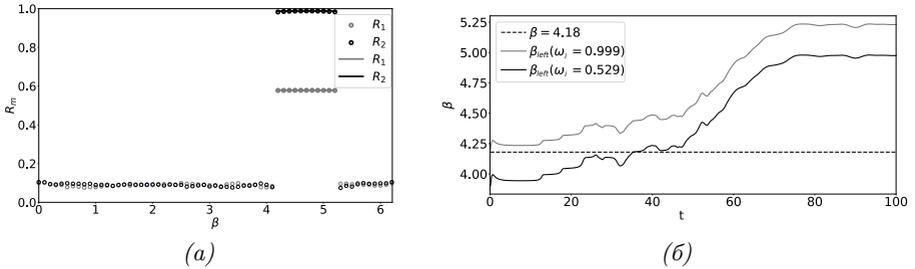


Рис. 9. Динамика сети (9) при $\Lambda = 4$, $\varepsilon = 1$, $\eta = 0.8$: *a* — зависимость параметров порядка R_1 и R_2 от параметра β , где теоретические кривые показаны сплошными линиями, а результаты счёта показаны выколотыми точками; *б* — зависимость бифуркационных значений двух осцилляторов сети (9) от времени при $\beta = 4.15$, где пунктиром показана граница устойчивости синхронного состояния сети

В разделе 4.3 приведены результаты анализа процесса потери устойчивости синхронного состояния сети (9), который показал, что в случае симплексных связей второго порядка этот процесс происходит иерархически, и потеря устойчивости одного осциллятора приводит к потере устойчивости всей сети — порог устойчивости каждого осциллятора сети пересекает граничное значение интервала синхронизации (рис. 9, б).

В разделе 4.4 приводятся выводы по четвёртой главе.

Изложенные в четвёртой главе результаты опубликованы в статье [A17] и тезисах доклада [A18].

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Разработаны методы построения инвариантных многообразий седловых траекторий хаотического аттрактора и хаотического репеллера и установления их пересечения, методы построения обратимого ядра, методика выделения когерентной части химерного состояния, методы изучения процесса разрушения синхронного

режима в коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото с адаптивными симплексными связями первого и второго порядков.

2. Выделен класс функций адаптации, соответствующих режиму синхронизации сетей неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными связями первого и второго порядков. Показано, что разрушение синхронного режима происходит по-разному для сетей с различными порядками симплексных связей. Определены закономерности формирования режимов синхронизации и десинхронизации.
3. Показана принципиальная возможность реализации смешанной динамики в физическом эксперименте. Предложена система с дискретным временем, на основе которой реализован генератор шумоподобных колебаний в режиме смешанной динамики. Установлено, что спектральные характеристики его колебаний в режиме третьего типа хаоса отличаются от характеристик шумоподобных колебаний в случае классического диссипативного хаоса.
4. Установлено, что в случае третьего типа хаоса распределение межспайковых интервалов элементов нейронного ансамбля с адаптивными симплексными связями второго порядка становится существенно более широким по сравнению со случаем диссипативного хаоса.
5. Показано, что установленные свойства коэволюционных ансамблей осцилляторов Курамото с симплексными связями первого и второго порядков позволяют описать возможные механизмы ряда сложных явлений в нейродинамике.

Публикации автора по теме диссертации

- A1. *Касаткин Д. В., Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Нелинейные явления в осцилляторных сетях Курамото с динамическими связями // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. — 2021. — Т. 29, № 4. — С. 635–675.
- A2. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators // Chaos. — 2019. — Vol. 29, no. 11. — P. 111102.
- A3. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators // Chaos. — 2020. — Vol. 30, no. 5. — P. 051105.

- A4. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Emergence and synchronization of a reversible core in a system of forced adaptively coupled Kuramoto oscillators // *Chaos*. — 2021. — Vol. 31, no. 3. — P. 033102.
- A5. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* The influence of nonisochronism on mixed dynamics in a system of two adaptively coupled rotators // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2023. — Vol. 169. — P. 113271.
- A6. *Shchapin D. S., Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* A chaotic oscillation generator based on mixed dynamics of adaptively coupled Kuramoto oscillators // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2023. — Vol. 166. — P. 112989.
- A7. *Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Динамика двух неидентичных фазовых осцилляторов с пластичными связями // Труды XXII научной конференции по радиофизике, посвященной 100-летию Нижегородской радиолaborатории. — Нижний Новгород: ННГУ, 2018. — С. 202–205.
- A8. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Attractors and repellers in a system of two nonidentical phase oscillators with adaptive couplings // *Book of Abstracts of the International Conference on Dynamical Systems “Shilnikov Workshop 2018”*. — Nizhny Novgorod, 2018. — P. 16.
- A9. *Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Смешанная динамика в системе двух неидентичных фазовых осцилляторов с пластичными связями // 24 Нижегородская сессия молодых учёных (технические, естественные, математические науки): материалы докладов. — Нижний Новгород: НРЛ, 2019. — С. 87–90.
- A10. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Mixed dynamics in a system of forced adaptively coupled Kuramoto oscillators // *Book of Abstracts of the International Conference-School “Shilnikov Workshop 2020”*. — Nizhny Novgorod, 2020. — P. 21.
- A11. *Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Третий тип хаоса в системе адаптивно связанных осцилляторов Курамото // Конференция международных математических центров мирового уровня. Программа и тезисы докладов. — ФТ «Сириус», 2021. — С. 195–196.
- A12. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Mixed dynamics in a system of two adaptively coupled nonisochronous Kuramoto oscillators // *Book of Abstracts of the International Conference-School “Shilnikov Workshop 2022”*. — Nizhny Novgorod, 2022. — P. 11.

- A13. *Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Смешанная динамика в системе двух адаптивно связанных неизохронных ротаторов // XX научная школа «Нелинейные волны-2022». Тезисы докладов. — Нижний Новгород, 2022. — С. 96.
- A14. *Емельянова А. А.* Смешанная динамика в системе адаптивно связанных фазовых осцилляторов // Математика и математическое моделирование: Сборник материалов XVII Всероссийской молодёжной научно-инновационной школы. — Саров: ООО «Интерконтакт», 2023. — С. 323–324.
- A15. *Emelianova A. A.* The third type of chaos in a system of two adaptively coupled Kuramoto oscillators // Integrable Systems & Nonlinear Dynamics (ISND-2023) : Abstracts. — Yaroslavl: YarSU, 2023. — P. 46–47.
- A16. *Емельянова А. А.* Смешанная динамика в ансамблях адаптивно связанных фазовых осцилляторов // XXVIII Нижегородская сессия молодых ученых. — Издательство «Перо», 2023. — С. 309–310.
- A17. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* Adaptation rules inducing synchronization of heterogeneous Kuramoto oscillator network with triadic couplings // Chaos. — 2024. — Vol. 34, no. 2. — P. 023112.
- A18. *Емельянова А. А., Некоркин В. И.* Влияние правила адаптации на синхронизацию в сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными взаимодействиями // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXIII Международной конференции (Н. Новгород, 13–16 ноября 2023 г.). Под ред. проф. Д. В. Баландина. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2023. — С. 51–52.
- A19. *Emelianova A. A., Nekorkin V. I.* The third type of chaos in a system of adaptively coupled phase oscillators with higher-order interactions // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, no. 19. — P. 4024.

Список литературы

1. *Winfree A. T.* Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators // Journal of Theoretical Biology. — 1967. — Vol. 16, no. 1. — P. 15–42.
2. *Kuramoto Y.* Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag. — 1975. — P. 420–422.

3. Adaptive dynamical networks / R. Berner [et al.] // Physics Reports. — 2023. — Vol. 1031. — P. 1—59.
4. The structure and dynamics of networks with higher order interactions / S. Boccaletti [et al.] // Physics Reports. — 2023. — Vol. 1018. — P. 1—64.
5. Homological Scaffolds of brain functional networks / G. Petri [et al.] // J. R. Soc. Interface. — 2014. — Vol. 11, no. 101. — P. 20140873.
6. Cliques and cavities in the human connectome / A. Sizemore [et al.] // J. Comp. Neurosci. — 2018. — Vol. 44, no. 1. — P. 115—145.
7. *Estrada E., Ross G.* Centralities in simplicial complexes. Applications to protein interaction networks // J. Theoret. Biol. — 2018. — Vol. 438. — P. 46—60.
8. Emergent hypernetworks in weakly coupled oscillators / E. Nijholt [et al.] // Nature Communications. — 2022. — Vol. 13, no. 1.
9. *Van der Pol B., Van der Mark J.* Frequency Demultiplication // Nature. — 1927. — Vol. 120, no. 3019. — P. 363—364.
10. *Пиковский А. С., Рабинович М. И.* Простой автогенератор со стохастическим поведением // Доклады Академии наук СССР. — 1978. — Т. 239, вып. 2. — С. 301—304.
11. *Кляшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И.* Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // Радиотехника и электроника. — 1980. — Т. 25, вып. 2. — С. 336.
12. *Кислов В. Я., Дмитриев А. С.* Стохастические колебания в радиотехнических и электронных системах // Проблемы современной радиотехники и электроники. — М., 1983. — С. 193—212.
13. *Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е.* Многочастотные и стохастические автоколебания в генераторе с инерционной нелинейностью // Радиотехника и электроника. — 1982. — Вып. 10. — С. 1972—1978.
14. *Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T.* The Double Scroll Family // IEEE transactions on circuits and system. — 1986. — Vol. CAS—33, issue 11. — P. 1073—1118.
15. *Кислов В. Я., Залогин Н. Н., Мясин Е. А.* Исследование стохастических автоколебательных процессов в автогенераторах с запаздыванием // Радиотехника и электроника. — 1979. — Т. 24, вып. 6. — С. 1118—1130.

16. *Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И.* Экспериментальное наблюдение стохастических автоколебаний в динамической системе «электронный пучок — обратная электромагнитная волна» // Письма в ЖЭТФ. — 1979. — Т. 29, вып. 3. — С. 180—184.
17. *Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П.* Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. Проблемы повышения мощности и частоты излучения. Горький: ИПФ АН СССР, — 1981. — С. 101.
18. Генерация хаоса / А. С. Дмитриев [и др.] ; под ред. А. С. Дмитриева. — Москва: Техносфера, 2012. — С. 424.
19. *Гонченко С. В., Тураев Д. В.* О трёх типах динамики и понятии аттрактора // Труды математического института им. В. А. Стеклова. — 2017. — Т. 297, № 1. — С. 133—157.
20. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O.* Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // Regular and Chaotic Dynamics. — 2013. — Vol. 18, no. 5. — P. 521—538.
21. *Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kazakov A. O.* Dynamics of the Suslov Problem in a Gravitational Field: Reversal and Strange Attractors // Regular and Chaotic Dynamics. — 2015. — Vol. 20, no. 5. — P. 605—626.
22. On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky-Topaj system of coupled rotators / A. S. Gonchenko [et al.] // Physica D. — 2017. — Vol. 350. — P. 45—57.
23. *Kazakov A. O.* Merger of a Hénon-like attractor with a Hénon-like repeller in a model of vortex dynamics // Chaos. — 2020. — Vol. 30, no. 1. — P. 011105.
24. *Doran G.* PyEMD: Earth mover's distance for Python. — 2014. — URL: <https://github.com/garydoranjr/pyemd>.
25. Three dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators / N. V. Stankevich [et al.] // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. — 2020. — Vol. 15, no. 11. — P. 111001.
26. *Grines E. A., Kazakov A. O., Sataev I. R.* On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators // Chaos. — 2022. — Vol. 32, no. 9. — P. 093105.

Оглавление диссертации

Введение	4
Глава 1. Динамика коэволюционных ансамблей двух осцилляторов Курамото с симплексными связями первого порядка	12
1.1 Введение	12
1.2 Система двух коэволюционно связанных осцилляторов Курамото с расстройкой собственных частот	14
1.3 Система двух коэволюционно связанных осцилляторов Курамото под действием периодического внешнего стимула	41
1.4 Система двух коэволюционно связанных активных ротаторов	48
1.5 Генератор хаотических колебаний на основе смешанной динамики в системе двух коэволюционно связанных осцилляторов Курамото	55
1.6 Выводы по первой главе	66
Глава 2. Динамика коэволюционной сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными связями первого порядка ...	69
2.1 Введение	69
2.2 Стационарные режимы	70
2.3 Переходные режимы	78
2.4 Выводы по второй главе	81
Глава 3. Динамика коэволюционного ансамбля трёх осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка	82
3.1 Введение	82
3.2 Смешанная динамика	83
3.3 Приложение к нейродинамике	87
3.4 Выводы по третьей главе	89
Глава 4. Динамика коэволюционной сети неоднородных осцилляторов Курамото с симплексными связями второго порядка ...	91
4.1 Введение	91
4.2 Стационарные режимы	92
4.3 Переходные режимы	101
4.4 Выводы по четвертой главе	104
Заключение	105
Список литературы	107
Приложение А. Характеристики смешанной динамики в коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото	120
Приложение Б. Синхронизация в коэволюционных ансамблях осцилляторов Курамото в задачах нейродинамики	121

ЕМЕЛЬЯНОВА Анастасия Александровна

**СМЕШАННАЯ ДИНАМИКА В КОЭВОЛЮЦИОННЫХ
АНСАМБЛЯХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ КУРАМОТО**

Автореферат

Подписано к печати 20.05.2024.

Формат 60×90 ¹/₁₆. Усл. печ. л. 1,75.

Тираж 100 экз. Заказ № 27(2024).

Отпечатано в типографии ФИЦ Институт прикладной физики
им. А.В. Гапонова-Грехова РАН, 603950, г. Н. Новгород, ул. Ульянова, 46