

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики
им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук»

На правах рукописи

Самсонов Александр Сергеевич

**Влияние реакции излучения и генерации
электрон-позитронных пар на взаимодействие лазерного
излучения и потоков заряженных частиц с веществом**

Специальность 1.3.9. —
«Физика плазмы»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Костюков Игорь Юрьевич

Нижний Новгород — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Общие свойства движения заряженных частиц в экстремально сильных электромагнитных полях	17
1.1 Введение	17
1.2 Асимптотическая теория движения заряженной частицы в условиях экстремальных радиационных потерь	22
1.3 Свойства и примеры асимптотических траекторий	25
1.3.1 Асимптотические траектории в стоячих волнах	26
1.3.2 Асимптотические траектории в линейно-поляризованной стоячей волне	27
1.3.3 Асимптотические траектории в лазерном пучке конечного диаметра	28
1.4 Поправки к асимптотической теории	32
1.4.1 Обобщённая задача Зельдовича	36
1.4.2 Плазменный ускоритель	39
1.5 Движение в плоских волнах с учётом реакции излучения	42
1.5.1 Скрещенные постоянные поля	47
1.5.2 Монохроматическая циркулярно-поляризованная плоская волна	48
1.5.3 Монохроматическая линейно-поляризованная плоская волна	49
1.5.4 Обсуждение	50
1.6 Выводы	53
Глава 2. Взаимодействие экстремально интенсивного лазерного излучения с твердотельной мишенью	55
2.1 Введение	55
2.2 Влияние квантово-электродинамических эффектов на взаимодействие лазерного импульса с твердотельной мишенью	58
2.2.1 QED-PIC моделирование	59
2.2.2 Ключевые особенности и механизм развития КЭД каскада	62

2.3	Аналитическое описание самоподдерживающегося КЭД каскада в плоской волне	65
2.3.1	Общие предположения модели	66
2.3.2	Конфигурация электромагнитного поля	71
2.3.3	Функция распределения активных гамма-квантов	72
2.3.4	Динамика e^-e^+ пар в вакуумной области	75
2.3.5	Динамика e^-e^+ пар в плазменной области	79
2.3.6	Электродинамические свойства e^-e^+ плазмы	82
2.4	Формулировка модели и сравнение с QED-PIC моделированием	85
2.4.1	Аналитические оценки	86
2.4.2	Численное решение	88
2.5	Выводы	94

Глава 3. Взаимодействие сильноточных пучков

ультрарелятивистских частиц друг с другом и плазменными мишенями

97

3.1	Введение	97
3.2	Влияние реакции излучения на разрушение сильноточных пучков ультрарелятивистских частиц при их столкновении . . .	98
3.2.1	Постановка задачи	101
3.2.2	Режим преобладания излучения	104
3.2.3	Взаимодействие длинных пучков	112
3.2.4	QED-PIC моделирование	114
3.2.5	Обсуждение	119
3.3	Генерация гамма-излучения при взаимодействии сильноточного пучка ультрарелятивистских электронов с плазмой	124
3.4	Особенности численного моделирования ультрарелятивистских пучков	134
3.4.1	Описание схемы численного решения уравнений Максвелла, с подавленной численной черенковской неустойчивостью	138
3.5	Выводы	143

	Стр.
Заключение	145
Приложение А. Численное решение релятивистских уравнений движения заряженной частицы	147
Список литературы	149
Список работ автора по теме диссертации	171
Список рисунков	174

Введение

Актуальность темы.

Квантовая электродинамика (КЭД), описывающая взаимодействие заряженных частиц и электромагнитного (ЭМ) поля, на данный момент является наиболее точной теорией, с точки зрения экспериментального подтверждения её теоретических предсказаний. Однако ряд аналитических результатов нелинейной КЭД, основным из которых является образование электрон-позитронных пар из вакуума (эффект Завутера-Швингера) [1; 2] в сильном постоянном поле, впервые сделанных ещё в работах 30-х годов прошлого столетия, до сих пор не были подтверждены экспериментально. С ожидаемым в ближайшие годы вступлением в строй лазерных установок нового поколения мультитераваттного и субэкзаваттного уровня мощности, таких как ELI [3], Apollon [4], SULF [5], SEL [6], XCELS [7] и др., станет доступным экспериментальное исследование взаимодействия излучения с веществом в режиме экстремальной интенсивности, что открывает новые возможности для наблюдения эффектов *сильнополевой КЭД*. За определение, какое поле является сильным согласно КЭД, отвечают 4 Лоренц-инвариантных параметра: a_0 , \mathcal{F} , \mathcal{G} , χ .

Параметр a_0 — классический параметр нелинейности — определяет безразмерную амплитуду внешнего ЭМ поля и существенность релятивистских эффектов

$$a_0 = \frac{e}{mc} \sqrt{-A_\mu A^\mu} \equiv \frac{eE_0}{mc\omega} \approx 0.85 \sqrt{I [10^{18} \text{ Вт/см}^2] \lambda [\text{мкм}]}, \quad (1)$$

где m и $e > 0$ — масса и модуль заряда электрона соответственно, c — скорость света, A_μ — вектор-потенциал ЭМ поля, E_0 и ω — характерная величина напряжённости и характерная частота изменения ЭМ поля соответственно. При $a_0 > 1$ движение заряженных частиц становится релятивистским. Прогресс лазерных технологий в 20-м веке позволил реализовать идею Векслера о когерентном ускорении частиц [8] за счёт генерации высоких ускоряющих градиентов в плазме при распространении в ней интенсивного лазерного излучения. В настоящее время лазерное ускорение электронов [9–18], ионов [19–26] и даже позитронов [27–30] рассматривается как одна из са-

мых многообещающих альтернатив классическим ускорителям и одной из самых важных задач как экспериментальной, так и теоретической физики.

Параметры \mathcal{F} , \mathcal{G} фактически определяют взаимодействие ЭМ поля с вакуумом

$$\mathcal{F} = \frac{E^2 - B^2}{E_S^2}, \quad (2)$$

$$\mathcal{G} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{E_S^2}, \quad (3)$$

где $E_S = m^2 c^3 / e \hbar$ — критическое поле КЭД или поле Заутера-Швингера [31; 32], \hbar — постоянная Планка. Эффект образования электрон-позитронных пар из вакуума является экспоненциально подавленным при $|\mathcal{F}| \lesssim 1$, что объясняет трудность его экспериментального наблюдения. При этом, например, двулучепреломление вакуума [33–36], также являющееся одним из наиболее ранних предсказаний КЭД, и которое определяется величинами \mathcal{F} и \mathcal{G} , подтверждается в экспериментах в области $|\mathcal{F}| \ll 1$ как косвенно [37; 38], так и напрямую [39]. Отметим, что поля лазерных импульсов и пучков заряженных частиц (см. ниже) являются скрещенными, поэтому в таких конфигурациях значения параметров \mathcal{F} и \mathcal{G} близки к нулю. Далее в работе всегда будет предполагаться выполнение условия $\mathcal{F} = \mathcal{G} = 0$.

Наконец, параметр χ определяет существенность чисто квантовых эффектов при взаимодействии ЭМ поля с частицами

$$\chi = \frac{e \hbar \sqrt{-(F_{\mu\nu} p^\nu)^2}}{m^3 c^4} = \frac{1}{E_S m c} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{c} \mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{B}\right)^2 - (\mathbf{pE})^2}, \quad (4)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор ЭМ поля, ε и \mathbf{p} — энергия и импульс частицы. Данное выражение записывается для фотонов аналогичным образом с учётом того, что $\varepsilon = \hbar\omega$, $p^\nu = \hbar k^\nu$. Здесь необходимо указать на важную дистинкцию между квантовым описанием ЭМ поля как совокупности фотонов и классическим описанием через напряжённости поля. При больших числах заполнения квантовое описание совпадает с классическим, таким образом относительно сильные внешние поля описываются классически, а единичные фотоны, образующиеся в результате КЭД процессов, с помощью собственно квантового подхода. Более того взаимодействие электронов (и позитронов) с сильным классическим полем ($a_0 > 1$) должно учитываться непертурбативно, т.е.

во всех порядках теории возмущений, что делается с помощью представления Фарри [40] и использования Волковских функций для описания состояния электронов [41] (более подробно данная особенность описана, например, в обзоре [42]). Классическое внешнее поле также зачастую существенно отличается от фотонов, образующихся при движении частиц в этом внешнем поле, со спектральной точки зрения. Так, экстремально сильные ЭМ поля доступны сейчас преимущественно в оптическом диапазоне $\hbar\omega_L \sim 1$ эВ, тогда как характерная частота излучения частиц в таком поле, которую можно оценить по синхротронным формулам как $\hbar\omega \sim \gamma^2 \hbar\omega_L$, обычно лежит в области рентгена или даже гамма-диапазоне.

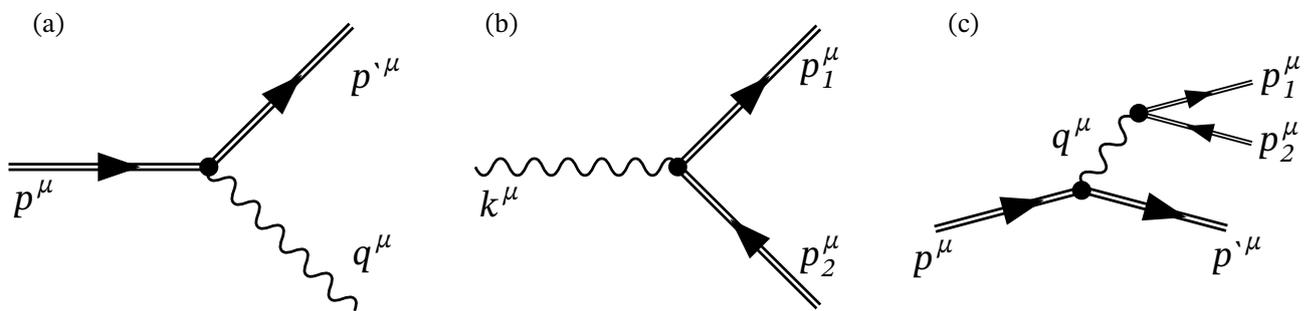


Рисунок 1 — Некоторые КЭД процессы во внешнем поле. (a) Комптоновское рассеяние, (b) процесс Брейта-Уилера, (c) трайидент процесс. Двойная прямая линия соответствует «одетому» состоянию электрона во внешнем поле, описываемому Волковской функцией (см. текст).

В режиме $\chi > 1$ становятся вероятными квантовые процессы приводящие к образованию электрон-позитронных пар. К ним относятся, например, процесс Брейта-Уилера [43], в котором жёсткий фотон «распадается» на электрон-позитронную пару, и так называемый *трайидент* процесс, в котором электрон или позитрон излучает виртуальный фотон, который распадается на электрон-позитронную пару (см. Рис. 1). Отметим, что вероятность процесса Брейта-Уилера существенно превосходит вероятность трайидент процесса в области больших интенсивностей [44], поэтому последний не будет учитываться в данной работе. Эти процессы являются экспоненциально подавленными при $\chi \lesssim 1$ и во многом аналогичны процессу образования электрон-позитронных пар по механизму Заутера-Швингера. Однако, даже в этом режиме, когда образование электрон-позитронных пар подавлено, взаимодействие заряженных частиц с ЭМ полем может существен-

но изменяться за счёт реакции излучения. Сам факт того, что заряженные частицы испытывают силу отдачи при излучении известен уже более века и изначально был описан в рамках классической электродинамики, однако привёл к противоречивости понятия об электро́не как о точечном объекте и обозначил границу применимости классической ЭД, которую можно определить условием $E_{cl} = m^2 c^4 / e^3 = E_S / \alpha$. Поле такой напряжённости создаёт электрон на расстоянии своего классического радиуса $r_e = e^2 / mc^2$. Отметим, что оно в $1/\alpha \approx 137$ раз больше критического поля КЭД, поэтому квантовые эффекты появляются «раньше», чем становится противоречивой классическая ЭД. Квантовая же электродинамика описывает излучение фотонов электронами непротиворечивым образом и ожидаемо совпадает с результатами классической ЭД в пределе $\chi \ll 1$. Отдельный интерес, однако, представляет модификация спектра излучения и существенный эффект отдачи в режиме $\chi \sim 1$, который до сих пор практически не исследован экспериментально. До недавнего времени существовал лишь единственный пример из 1990-х годов, а именно эксперимент E-144 на ускорителе SLAC, где электронный пучок с энергией 46.6 ГэВ взаимодействовал с лазерным импульсом мощностью $I \sim 10^{18}$ Вт/см² ($a_0 \lesssim 1$, $\chi \ll 1$), производя фотоны высокой энергии, которые, в свою очередь, превращались в электрон-позитронные пары в электромагнитном поле лазерного импульса [45; 46]. Недавно концептуально схожие эксперименты были проведёны на установке Astra Gemini, где один лазерный импульс использовался для ускорения электронов, а второй — для рассеяния на ускоренных электронах [47; 48]. Важно отметить, что несмотря на неоспоримую ценность этих экспериментов, их результаты содержат определённый уровень погрешности, который пока не позволяет с уверенностью заявлять о подтверждении предсказаний КЭД в режиме $\chi \sim 1$. Благодаря развитию технологий как лазерных установок, так и ускорителей, в ближайшем будущем ожидаются новые эксперименты по физике сильных полей, в частности прямой наследник эксперимента E-144 — эксперимент E-320, на котором ожидается достижение существенно квантового режима взаимодействия [49] ($a_0 > 1$, $\chi > 1$). Тем временем стремительно растёт число теоретических исследований, предсказывающих новые эффекты, вызванные влиянием реакции излучения на коллективные процессы при взаимодействии излучения экстремальной интенсивности с веществом. Эти эффекты крайне различны и включают в себя, например, изменение механизмов

ускорения частиц [50—59], радиационный захват частиц [60—65], крайне эффективное поглощение лазерного излучения [66], подавление релятивистской прозрачности [67; 68], обратный эффект Фарадея [69; 70], поляризацию частиц [71—79] и много других. Сильные радиационные потери также могут оказывать существенное влияние на динамику частиц вблизи различных астрофизических объектов, и в частности могут определять верхний предел энергии ускоренных частиц [80—82], динамику магнитосферы пульсаров [83; 84], характер магнитного пересоединения [85; 86] и пр.

В режиме $\chi \gtrsim 1$ предполагается, что поведение вещества в экстремальных ЭМ полях в большом числе конфигураций во многом определяется развитием *квантово-электродинамических каскадов* [44; 87—99]. Суть КЭД каскада состоит в излучении жёстких фотонов ультрарелятивистскими частицами в результате нелинейного комптоновского рассеяния и последующий «распад» первых на электрон-позитронные пары в результате процесса Брейта-Уилера¹. Вторичные частицы также становятся вовлечены в образовании следующего поколения пар, что приводит к лавинообразному росту числа частиц. Развитие таких каскадов качественно похоже на другой физический процесс — лавинообразную ионизацию при пробое в газе [100]. Активное исследование микроволнового пробоя в газах выявило достаточно сложную динамику данного процесса, сопровождаемую образованием плазмы и генерацией волн пробоя [101; 102]. Аналогия между рождением пар в вакууме и ионизацией газа, или между *пробоем вакуума* в результате развития КЭД каскада и газового пробоя имеет глубокое физическое обоснование [90; 103; 104]. Считается, что процессы развития КЭД каскадов играют немаловажную роль в различных астрофизических феноменах, таких как космические ливни [105], гамма-вспышки [106], процессах в магнитосфере пульсаров [107—110] и др. Разнообразие и сложность образующихся в результате развития КЭД каскада структуры электрон-позитронной плазмы объясняет их активное исследование, далёкое от завершения.

Лабораторное моделирование астрофизических процессов (*лабораторная астрофизика*) за счёт использования экстремально интенсивных лазеров является одной из востребованных но при этом и крайне нетривиальных задач экспериментальной физики [111]. Во многом это связано с тем,

¹Как было отмечено выше образование электрон-позитронной пары также возможно напрямую из электрона во внешнем поле в результате трайидент процесса

что ключевую роль в таких процессах играет взаимодействие потоков частиц друг с другом, которые необходимо контролируемым образом создавать за счёт взаимодействия лазерного излучения в веществе. В этой связи, также исследуются альтернативные возможности, например, использование коллайдеров, являющихся основным инструментом исследований в области физики элементарных частиц, и которые основаны на лобовом столкновении пучков заряженных частиц высокой энергии. В настоящее время существует несколько проектов, нацеленных на строительство высоко-энергетических лептонных коллайдеров с рекордными параметрами, такие как ILC [112] и CLIC [113]. Относительно недавно плазменное ускорение стало рассматриваться в качестве привлекательного альтернативного метода создания линейных коллайдеров с большим ускоряющим градиентом [114]. В области взаимодействия на таких коллайдерах могут генерироваться сильные ЭМ поля, благодаря чему возможно проявление таких эффектов, как *разрушение* пучков (*disruption*) [115–117], *пучковое излучение* (*beamstrahlung*) [118–120], образование вторичных электрон-позитронных пар [121; 122], и даже эффектов *непертурбативной* сильнополевой КЭД [123; 124]. Так как достижение всё больших интенсивностей излучения на лазерных установках предъявляет всё более жёсткие требования к контрасту, стабильности, качеству пучка, пока не достигнутые на практике [125], сильноточные высокоэнергетические коллайдеры, отличающиеся высоким качеством и стабильностью пучка, могут стать привлекательной «безлазерной» альтернативой для экспериментов в области физики сильного поля. Наиболее активно в таком контексте обсуждается проект FACET-II, посвященный изучению плазменного ускорения [49; 123; 126; 127].

Таким образом, исследование физики сильных полей представляет как фундаментальный интерес, так и практическое значение.

Целью данной работы является исследование влияния реакции излучения и образования электрон-позитронных пар на процессы, происходящие в экстремально сильных электромагнитных полях в различных конфигурациях, в частности при взаимодействии лазерного излучения с твердотельной мишенью, столкновении сильноточных пучков ультрарелятивистских частиц друг с другом и с плазменной мишенью.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Разработать теорию движения отдельных заряженных частиц в сильных полях в режиме экстремальных радиационных потерь. Определить общие свойства движения частиц согласно разработанной модели. Применить теорию в различных конфигурациях электромагнитного поля. Определить область применимости модели, в частности путём сравнения полученных результатов с результатами, полученными численными методами.
2. Исследовать взаимодействие лазерного импульса экстремальной интенсивности с твердотельной мишенью с помощью численного моделирования. Определить особенности и механизм развития квантово-электродинамического каскада при таком взаимодействии.
3. Разработать аналитическую модель развития квантово-электродинамического каскада в поле плоской волны. Определить точность разработанной модели путём сравнения с результатами численного моделирования.
4. Исследовать влияние реакции излучения на процесс фокусировки пучков ультрарелятивистских частиц при их лобовом столкновении. Разработать модель для вычисления параметра разрушения с учётом реакции излучения. Сравнить полученные аналитические результаты с результатами численного моделирования.
5. Исследовать процесс генерации гамма-излучения при взаимодействии сильнофокусированного пучка ультрарелятивистских электронов с плазменной мишенью с помощью численного моделирования. Разработать модели для вычисления эффективности конверсии энергии пучка в энергию гамма-излучения. Определить параметры пучка на установке FASET-II, оптимальные с точки зрения генерации гамма-излучения.
6. Разработать численную схему решения уравнений Максвелла на сетке с подавленной черенковской неустойчивостью.

Научная новизна:

1. Разработана асимптотическая теория движения заряженных частиц в режиме экстремальных радиационных потерь. Определены общие свойства движения частиц в таком режиме, существенно отличающиеся от таковых в режиме слабой реакции излучения. Продемонстрирован новый метод получения приближённого решения уравнений движения в различных конфигурациях.
2. Обнаружен и качественно описан эффект развития самоподдерживающегося квантово-электродинамического каскада в поле, приближенном к полю плоской волны. Разработана аналитическая модель, описывающая развитие такого каскада.
3. Разработана модель для вычисления параметра разрушения при лобовом столкновении сильноточных пучков ультрарелятивистских частиц с учётом реакции излучения. Достоверность модели подтверждена полноразмерным численным трёхмерным моделированием.
4. С помощью полноразмерного трёхмерного численного моделирования продемонстрирована схема эффективной генерации гамма-излучения при взаимодействии сильноточного пучка ультрарелятивистских электронов с протяжённой плазменной мишенью. Разработана аналитическая модель для вычисления эффективности конверсии энергии пучка в энергию гамма-излучения. Найдены параметры пучка для установки FASET-II, оптимальные с точки зрения генерации гамма-излучения.
5. Разработана и реализована в коде QUILL альтернативная схема для численного решения уравнений Максвелла на регулярной сетке, отличающаяся существенно подавленной численной черенковской неустойчивостью, и подходящей для моделирования пучков ультрарелятивистских частиц.

Практическая значимость:

1. Разработанная теория движения частиц в условиях экстремальных радиационных потерь может быть использована в качестве дополнительного аналитического инструмента для определения динамики частиц в различных конфигурациях электромагнитного поля.
2. Проведённое численное моделирование процесса взаимодействия экстремально интенсивного слабо-сфокусированного лазерного из-

- лучения с тонкой твердотельной мишенью расширяет класс конфигураций электромагнитного поля, в которых возможно наблюдение самоподдерживающегося квантово-электродинамического каскада.
3. Разработанная аналитическая модель развития квантово-электродинамического каскада в плоской волне, учитывающая пространственную, а не только временную, динамику частиц может быть адаптирована для исследования развития квантово-электродинамических каскадов в других конфигурациях, например, при взаимодействии лазерного излучения с различными мишенями, пучками частиц, взаимодействии пучков друг с другом.
 4. Проведённое численное моделирование и разработанная аналитическая модель усиления фокусировки сильноточных пучков при их столкновении за счёт реакции излучения может быть использована для уточнения требуемых параметров пучков при проведении экспериментов на коллайдерах и ускорителях нового поколения, таких как CLIC, ILC, FACET-II.
 5. Проведённое численное моделирование взаимодействия сильноточного пучка ультрарелятивистских частиц с протяжённой плазменной мишенью может быть использовано для планирования экспериментов на коллайдерах и ускорителях нового поколения по генерации яркого гамма-излучения.
 6. Разработанная схема для численного решения уравнений Максвелла на сетке с подавленной черенковской неустойчивостью может быть реализована в PIC-кодах для существенного увеличения достоверности результатов моделирования процессов с участием пучков ультрарелятивистских частиц.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Уравнения динамики заряженных частиц в режиме экстремальных радиационных потерь могут быть укорочены в силу приближения вектора скорости частицы к безрадиационному направлению. Решения этих уравнений могут существенно отличаться от решений уравнений движения, не учитывающих реакцию излучения, и включают в частности, периодические траектории частиц в стоячих волнах,

- неограниченный рост средней энергии частицы в плоских волнах, снижение среднего темпа ускорения частиц в линейном ускорителе.
2. Квантово-электродинамический каскад может развиваться в плоской волне экстремальной интенсивности в самоподдерживающемся режиме. Образующаяся в результате электрон-позитронная плазма расширяется навстречу излучению и эффективно поглощает его. Данный эффект может наблюдаться при взаимодействии лазерного импульса с тонкой твердотельной мишенью в режиме «светового паруса».
 3. Учёт пучкового излучения увеличивает скорость фокусировки или дефокусировки сильноточных пучков ультрарелятивистских частиц при их лобовом столкновении и приводит к увеличению параметра разрушения.
 4. При взаимодействии сильноточного пучка ультрарелятивистских электронов с протяжённой плазменной мишенью происходит эффективная конверсия энергии пучка в энергию гамма-квантов. При доступных на данном этапе проекта FASET-II параметрах пучка возможна конверсия энергии пучка в гамма-излучение с энергией отсечки около 5 ГэВ с эффективностью более 10%.
 5. Модификация шаблона численной схемы и определённый выбор свободных параметров могут существенно подавить нефизичную генерацию волн частицами в вакууме за счёт черенковского механизма, возникающую из-за наличия дисперсии электромагнитных волн при численном решении уравнений Максвелла на сетке с использованием схем, основанных на методе конечных разностей.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием надёжных физических моделей и применением теоретических методов, имеющих строгое математическое обоснование, таких как теория возмущений, разложение в ряд по малому параметру, усреднение по «быстрому» времени и др. Результаты сопоставлялись с результатами, полученными с помощью различных проверенных численных методов, в частности полномасштабного трехмерного численного моделирования, основанного на базовых физических принципах, а также с результатами, полученными ранее другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах ИПФ РАН, а также на следующих конференциях, в том числе лично:

1. XXII Научная конференция по радиофизике, Нижний Новгород, Россия, 2018;
2. XXVIII Научная школа «Нелинейные волны 2018», Нижний Новгород, Россия;
3. XXIII Научная конференция по радиофизике, Нижний Новгород, Россия, 2019;
4. VII International Conference “Frontiers of Nonlinear Physics”, Nizhny Novgorod, Russia, 2019;
5. XIX Научная школа «Нелинейные волны 2020», Нижний Новгород, Россия, 2020;
6. IV International Conference «UltrafastLight-2020», Moscow, Russia, 2020;
7. ELI-NP Autumn School, Magurele, Romania, 2020;
8. 20 международная конференция и молодёжная школа «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии», Нижний Новгород, Россия, 2020;
9. 63-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Москва, Россия, 2020;
10. The 2nd China-Russia Frontier Seminar on Ultra Intense Laser Technology and Intense Field Physics, Nizhny Novgorod, Russia, 2020;
11. EPS 47th Conference on Plasma Physics, Sitges, Spain, 2021;
12. 29th annual International Laser Physics Workshop, Lyon, France, 2021;
13. V International Conference «UltrafastLight-2021», Moscow, Russia, 2021;
14. 18th International Workshop Complex Systems of Charged Particles and Their Interactions with Electromagnetic Radiation, Moscow, Russia, 2022;
15. 30th annual International Laser Physics Workshop, Lyon, France, 2022.

Личный вклад. Основные положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 печатных изданиях, 10 из которых изданы в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus [A1—A10], 10 — в тезисах докладов [A11—A20].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 176 страниц, включая 39 рисунков. Список литературы содержит 220 наименований.

Глава 1. Общие свойства движения заряженных частиц в экстремально сильных электромагнитных полях

1.1 Введение

В настоящий момент наиболее полный ответ на вопрос о природе реакции излучения даёт квантовая электродинамика. С помощью данной теории, например, может быть рассчитана вероятность излучения электроном фотона с заданной энергией [31; 32]. Несмотря на то, что описание процесса излучения с помощью КЭД является наиболее точным, оно чаще всего не может быть применено напрямую в практических задачах, подразумевающих сложное взаимодействие излучения с веществом. Это связано с тем, что конечные аналитические выражения в КЭД можно получить для вероятностей переходов между некоторыми квази-стационарными электронными состояниями, чаще всего описываемыми с помощью Волковских функций [41]. Для описания же динамической проблемы, в которых электронные состояния и ЭМ поле эволюционируют, необходимо совместно решать нестационарное уравнение Дирака и уравнения Максвелла, что чаще всего является невозможным по крайней мере с практической точки зрения. Однако, при выполнении определённых условий данная процедура оказывается излишней и задача существенно упрощается. Первый параметр, отвечающий за выполнение одного из таких условий, является безразмерной амплитудой ЭМ поля a_0

$$a_0 = \frac{eE_0}{mc\omega}, \quad (1.1)$$

где m и $e > 0$ — масса и модуль заряда электрона соответственно, E_0 и ω — характерная величина и частота изменения ЭМ поля соответственно. В режиме $a_0 \gg 1$ характерная длина формирования излучения λ_f в большинстве конфигураций поля может быть оценена как $\lambda/a_0 \ll \lambda$, где $\lambda = 2\pi c/\omega$, т.е. отдельные акты излучения фотона электроном происходят практически мгновенно, по сравнению с характерным временем изменения ЭМ поля. В связи с этим на длине формирования излучения ЭМ поля можно считать постоянными. В литературе данное приближение часто называют *приближением локально-постоянного поля* или *locally constant field approximation* (LCFA) [31; 128; 129]. В данном приближении вероятность и спектр излучения зависят от одного

КЭД параметра χ , определяемого следующим образом

$$\chi = \frac{\gamma}{E_S} \sqrt{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 - (\mathbf{vE})^2}, \quad (1.2)$$

где γ и \mathbf{v} — Лоренц-фактор и скорость электрона, нормированная на c , соответственно, \mathbf{E} и \mathbf{B} — электрическое и магнитное поля соответственно, $E_S = m^2 c^3 / e \hbar$ — критическое поле КЭД или поле Заутера-Швингера [31], \hbar — постоянная Планка. В классическом ($\chi \ll 1$) или существенно квантовом ($\chi \gg 1$) режимах вероятность может быть приближённо рассчитана следующим образом

$$W_{\text{rad}} \approx \alpha \frac{mc^2}{\gamma \hbar} \times \begin{cases} 1.4\chi, & \chi \ll 1, \\ 0.7\chi^{2/3}, & \chi \gg 1, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\alpha = e^2 / \hbar c$ — постоянная тонкой структуры. Отметим, что предложены различные подходы для вычисления вероятности излучения за рамками приближения LCFA [130–134]. В рамках LCFA характерное расстояние, которое проходит ультрарелятивистский электрон между двумя последовательными актами излучения λ_W может быть оценена как c/W_{rad} , что как в классическом, так и в квантовом режимах по крайней мере в $1/\alpha \approx 137$ больше длины формирования излучения. Отношение длины свободного пробега электрона λ_W к характерной длине волны ЭМ поля может быть оценено следующим образом

$$\frac{\lambda_W}{\lambda} \approx \frac{1}{\alpha a_0} \times \begin{cases} 1, & \chi \ll 1, \\ \chi^{1/3}, & \chi \gg 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Отметим, однако, что длина свободного пробега на самом деле зависит от энергии излучаемого фотона [135], и приведённая оценка может быть неточна при $\chi \gtrsim 10$. Так как для ожидаемых в ближайшем будущем экспериментов заведомо выполняется условие $\chi \lesssim 10$, характерные масштабы в рассматриваемой задаче находятся в следующей иерархии

$$\lambda_f \ll \lambda_W \ll \lambda. \quad (1.5)$$

Данное неравенство можно интерпретировать таким образом, что электрон движется классически между короткими, но частыми актами излучения. В таком случае эффект отдачи от излучения можно приближённо учитывать в виде некой дополнительной непрерывной силы, действующей на частицу,

т.е. уравнения движения можно записать в следующем виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} - F_{\text{rr}}\mathbf{v}, \quad (1.6)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\mathbf{v}\mathbf{E} - F_{\text{rr}}v^2, \quad (1.7)$$

где импульс электрона \mathbf{p} нормирован на mc , время t — на $1/\omega$, электрическое и магнитное поля — на $mc\omega/e$, F_{rr} — полная мощность излучения, нормированная $mc^2\omega$ и задаваемая выражением

$$F_{\text{rr}} = \frac{\alpha a_S}{3\sqrt{3}\pi} \int_0^\infty \frac{4u^3 + 5u^2 + 4u}{(1+u)^4} K_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right) du, \quad (1.8)$$

где $a_S = eE_S/mc\omega \equiv mc^2/\hbar\omega$ — нормированное поле Заутера-Швингера, K_ν — модифицированная функция Бесселя второго рода. В предельных случаях данное выражение существенно упрощается

$$F_{\text{rr}} \approx \alpha a_S \times \begin{cases} 0.67\chi^2, & \chi \ll 1, \\ 0.37\chi^{2/3}, & \chi \gg 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

Такой подход к описанию динамики электрона с учётом реакции излучения в литературе часто называется *полуклассическим* [136–140], т.к. используется приближение непрерывной классической силы радиационного трения, однако её величина рассчитывается исходя из результатов КЭД. Важно отметить, что в существенно квантовом режиме ($\chi \gg 1$) единичный излученный фотон может забрать существенную часть энергии электрона. И так как процесс излучения является стохастическим, то электроны, в какой-то момент времени заключённые в бесконечно малом фазовом объёме, могут существенно разойтись в фазовом пространстве за конечное время. В таком случае записанные выше уравнения (1.6)–(1.7) фактически описывают нулевой момент функции распределения электронов, или траекторию их центра масс. Эффекты, вызванные вероятностной природой излучения, такие как «блуждание» (straggling) и «гашение» (quenching) [140–143], приводят к диффузии функции распределения и соответственно не могут быть описаны в полуклассическом подходе. В таком случае динамику электронов можно описывать с помощью более высоких моментов функции распределения. Такой подход был, например, использован для вычисления средней значения и дисперсии энергии частиц в различных конфигурациях в публикациях [139; 144; 145]. В

противоположном пределе, $\chi \lesssim 1$, отдача от излучения единичного фотона мала и приближение непрерывной силы является оправданным.

Ещё одним важным аспектом процесса излучения является его зависимость от внутренней свободы электрона — спина. Строго говоря, квазиклассический предел уравнения Дирака приводит к уравнениям, в которых орбитальное движение электрона и эволюция его спина связаны. В частности, в уравнения орбитального движения (1.6)–(1.7) необходимо добавить силу Штерна-Герлаха [146], а спиновую динамику описывать уравнением Томаса-Баргманна-Мишеля-Телегди (Т-ВМТ) [147; 148]. Отметим, что последнее уравнение является верным либо в строго однородных ЭМ полях, либо в неоднородных полях, когда силой Штерна-Герлаха можно пренебречь [149]. Отношение между силой Лоренца и силой Штерна-Герлаха может быть грубо оценено как $F_L/F_{SG} \sim \hbar\omega/mc^2$, поэтому для оптического диапазона длин волн ($\hbar\omega \sim 1$ эВ), в котором работают все лазерные установки экстремальной интенсивности, силой Штерна-Герлаха можно пренебрегать с большим запасом точности. В таком случае динамика спина отвязывается от движения электрона и может быть вычислена после нахождения его траектории. Реакция излучения может снова связать динамику спина и движение электрона, т.к. вероятность излучения зависит от спина электрона (и поляризации излучаемого фотона). Отметим, что оценки по порядку величины, приведённые выше, и основанные на выражении вероятности излучения, усреднённой по начальным и просуммированной по конечным поляризационным состояниям, остаются справедливыми. Однако в определённых задачах предположение о том, что электроны в среднем являются неполяризованными, может быть неверным, т.к. вероятность излучения из условных состояний «спин вверх» и «спин вниз» различаются. Учёт данного факта может приводить к таким эффектам, как существенное увеличение выхода электрон-позитронных пар при развитии КЭД каскада [150], образование потоков сильно поляризованных высокоэнергичных частиц [15; 76], пространственно неоднородной поляризации [79] и др. В данной работе данные эффекты, связанные с динамикой спина электрона не рассматриваются.

Оказывается, что задача о динамике электрона в ЭМ поле с учётом реакции излучения может быть ещё более упрощена. В частности, при определённых условиях реакция излучения может быть учтена неявно, т.е. без добавления дополнительных слагаемых в уравнения движения. Чтобы понять

причину возможности такого упрощения, кратко рассмотрим хорошо известную задачу о движении релятивистского электрона в однородном постоянном ЭМ поле без учёта реакции излучения [151]. Наиболее просто такая задача решается путём перехода в систему отсчёта K' , где электрическое и магнитное поля становятся параллельными или одно из них отсутствует. Предположим для определённости, что в K' поля направлены по оси z' . Опустим из рассмотрения частный случай чисто магнитной конфигурации $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, $B > E$, при которой в K' электрон вращается в магнитном поле. В более общем случае, когда в K' присутствует электрическое поле, электрон также совершает вращение в плоскости $x'y'$ (если магнитное поле отлично от нуля), и при этом постоянно ускоряется вдоль оси z' . Таким образом, в K' траектория электрона представляет собой винтовую линию с монотонно растущим шагом и продольной скоростью, стремящейся к скорости света. Асимптотическим пределом такой траектории является прямая линия вдоль оси z' , по которой электрон движется со скоростью света. Учёт реакции излучения в данном случае качественно не изменяет полученный результат. Несложно показать, что реакция излучения приводит к постепенному уменьшению импульса электрона в плоскости вращения $x'y'$ и замедляет рост продольного импульса¹. Однако, траектория электрона также асимптотически стремится к прямой линии вдоль оси z' , т.е. фактически это утверждение не зависит от учёта реакции излучения. Согласно преобразованию Лоренца, в лабораторной системе отсчёта асимптотическая траектория также представляет собой прямую линию вдоль некоего направления \mathbf{v}_0 . Характерное время τ_v , за которое траектория электрона приближается к асимптотике, может быть оценено как $\gamma_0 mc / eE$, где γ_0 — начальная энергия электрона, E — напряжённость электрического поля. Так как данное асимптотическое направление \mathbf{v}_0 определяется лишь соотношением между электрическим и магнитным полем, его можно построить для каждого момента времени в каждой точке пространства даже если ЭМ поле неоднородно и непостоянно. Если характерная частота изменения ЭМ поля равна ω , то и локально заданное направление \mathbf{v}_0 изменяется с той же частотой. Без учёта реакции излучения в переменном ЭМ поле характерная энергия электрона может быть оценена как $\gamma \sim eE / mc\omega \equiv a_0$, поэтому время приближения скорости электрона к локальному асимптотическому на-

¹Идентичный результат предсказывает и точное решение задачи о движении электрона в постоянном однородном ЭМ поле с учётом реакции излучения, найденное в публикации [152].

правлению \mathbf{v}_0 совпадает со временем изменения последнего: $\tau_v \sim 1/\omega$. Таким образом, взаимное расположение вектора скорости электрона и локального асимптотического направления является произвольным. Однако, в режиме *экстремальных радиационных потерь* последнее утверждение не является точным. Это связано с тем, что в таком режиме связь между энергией электрона и безразмерной амплитудой ЭМ поля определяется неравенством $\gamma \ll a_0$. Из-за этого ЭМ поле ориентирует вектор скорости электрона в сторону локального асимптотического направления за время, много меньшее времени изменения самого ЭМ поля. Таким образом, для приближённого описания динамики электрона в ЭМ поле в условиях экстремальных радиационных потерь, можно считать, что скорость электрона определяется асимптотическим направлением \mathbf{v}_0 , которое зависит только от локальной конфигурации ЭМ поля, и таким образом понизить порядок уравнений движения на единицу. В следующем разделе описанная выше качественно процедура выводится математически строго.

1.2 Асимптотическая теория движения заряженной частицы в условиях экстремальных радиационных потерь

Приступим к построению асимптотической теории движения электронов в условиях экстремальных радиационных потерь. Для этого рассмотрим уравнение движения электрона во внешнем ЭМ поле с учётом реакции излучения с помощью полуклассического подхода, записанные относительно его скорости \mathbf{v} и энергии γ

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\mathbf{v}\mathbf{E} - F_{\text{rr}}v^2, \quad (1.10)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\gamma} \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}) + \frac{F_{\text{rr}}\mathbf{v}}{\gamma^2} \right) \equiv -\frac{\mathbf{F}_{\perp}}{\gamma}, \quad (1.11)$$

Так как реакция излучения способна существенно изменять динамику только ультрарелятивистских частиц ($\gamma \gg 1$), то последнее слагаемое в (1.11) можно опустить. У написанных выше уравнений существует формальное стационарное решение \mathbf{v}_0 , отвечающее занулению поперечной силы, действующей на электрон, и соответственно занулению реакции излучения. Из-за последнего свойства, такое решение называется *безрадиационным* (*radiation-free direction* — RFD). Оно находится из следующего уравнения

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} - \mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0\mathbf{E}) = 0. \quad (1.12)$$

Отметим сначала, решение данного уравнения существует всегда и оно может быть вычислено алгебраически или геометрически [153]. Построим алгебраическое решения уравнения (1.12).

В частном случае выполнения равенств $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ и $B > E$, согласно преобразованиям Лоренца существует система отсчёта K' , в которой поле является чисто магнитным. При этом в K' магнитное поле \mathbf{B}' параллельно магнитному полю \mathbf{B} в лабораторной системе K . В системе отсчёта K' траектория электрона представляет собой винтовую линию с осью, параллельной направлению магнитного поля \mathbf{B}' . Соответствующая дрейфовая скорость электрона в лабораторной системе отсчёта является скоростью движения K' относительно K и может быть найдена следующим образом:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = 0. \quad (1.13)$$

Отметим, что уравнение (1.13) не зависит от компоненты скорости вдоль магнитного поля, поэтому она может быть выбрана произвольным образом, ограничиваясь лишь условием $|\mathbf{v}_0| < 1$. В качестве примера, приведём решение, удовлетворяющее условию $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{B} = 0$:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (1.14)$$

Как будет показано в п. 1.3.3, неоднозначность решения (1.13) может быть устранена исходя из дополнительных физических соображений.

В общем случае решение уравнения (1.12) можно получить путём последовательного скалярного умножения его на вектора \mathbf{B} , \mathbf{E} и $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{v}_0 \mathbf{B} = \frac{\mathbf{E} \mathbf{B}}{\mathbf{v}_0 \mathbf{E}}, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B} = E^2 - (\mathbf{v}_0 \mathbf{E})^2, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{v}_0 \mathbf{E} = -\sqrt{\frac{E^2 - B^2 + \sqrt{(E^2 - B^2)^2 + 4(\mathbf{E} \mathbf{B})^2}}{2}}, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{v}_0 \mathbf{E})(\mathbf{E} \mathbf{B}) - (\mathbf{v}_0 \mathbf{B})E^2. \quad (1.18)$$

Отметим, что правая часть в выражении (1.17) является Лоренц-инвариантом. Знак « $-$ » в этом же выражении выбран исходя из следующего рассуждения. В случае $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$ и/или $E > B$ согласно преобразованиям Лоренца существует система отсчёта K' в которой $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}'$ и/или $B' = 0$. В таком случае траектория электрона асимптотически стремится к прямой

линии, параллельной вектору \mathbf{E}' , и при этом выполняется условие $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}' < 0$. Отметим, что вектора \mathbf{E} , $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ и $\mathbf{E} \times [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ образуют ортогональный базис, поэтому выражения (1.16)–(1.18) однозначно задают вектор \mathbf{v}_0 .

Второе замечание относительно уравнения (1.12) заключается в том, что его скалярное умножение на \mathbf{v}_0 приводит к результату $|\mathbf{v}_0| = 1$. Это означает, что решение \mathbf{v}_0 не является строго физическим, и в действительности электрон не способен двигаться в ЭМ поле и не испытывать поперечного ускорения. Для того, чтобы понять связь построенного нами безрадиационного решения с настоящим решением уравнений движения электрона, проведём следующее рассуждение. По определению в режиме экстремальных радиационных потерь энергия электрона существенно меньше энергии некоего гипотетического электрона, находящегося в том же ЭМ поле, но не испытывающего реакции излучения. Энергия такого электрона обычно оценивается по порядку величины безразмерной амплитудой электрического поля a_0 . В таком случае энергия электрона, испытывающего экстремальные радиационные потери, удовлетворяет условию $\gamma \ll a_0$. При выполнении данного условия из уравнения (1.11) следует, что ЭМ поле ориентирует вектор скорости электрона на масштабе времени много меньшем, чем характерное время изменения самого ЭМ поля. Таким образом на масштабе изменения скорости электрона ЭМ поле можно считать постоянным и однородным. А в постоянном однородном ЭМ поле скорость электрона асимптотически приближается к безрадиационному направлению \mathbf{v}_0 . Пренебрегая временем такого приближения, можно построить так называемую асимптотическую траекторию, которая в некотором смысле является аттрактором для настоящих электронных траекторий

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0 (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)), \quad (1.19)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} - \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \mathbf{E}) = 0. \quad (1.20)$$

Таким образом, порядок уравнений движения электрона понижается на единицу. Решение данных уравнений $\mathbf{r}(t)$ здесь и далее будем называть *асимптотической* траекторией, т.к. во-первых, данная траектория локально соответствует траектории электрона в приближении постоянного поля на асимптотически больших временах ($t \rightarrow \infty$), а во-вторых, она описывает траекторию электрона в асимптотически сильном поле ($a_0 \rightarrow \infty$).

1.3 Свойства и примеры асимптотических траекторий

Рассмотрим уравнения (1.19) и (1.20) и исследуем общие свойства траекторий, основываясь на известной симметрии уравнений Максвелла. Следующее преобразование:

$$t' = -t, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{E}, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad (1.23)$$

$$\rho' = -\rho, \quad (1.24)$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j}. \quad (1.25)$$

не изменяет уравнения Максвелла в том смысле, что оно приводит к таким же уравнениям для штрихованных переменных. Дальше будем обозначать величины \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{j} , изменяющиеся со временем t , *начальной* системой, \mathbf{E}' , \mathbf{B}' , \mathbf{j}' , изменяющиеся со временем t' , *штрихованной* системой. Приведённая выше симметрия — это соотношение между системой токов, излучающих некоторые поля, и системой токов, поглощающих поля. Данное соотношение заключается в том, что вектор Пойнтинга, скалярное произведение $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ и направление времени в штрихованной системе противоположны таковым в начальной системе. Согласно уравнению (1.20), в штрихованной системе поле скорости \mathbf{v}' соотносится с полем скорости в начальной системе \mathbf{v} следующим образом:

$$\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t') = -\mathbf{v}(\mathbf{r}, -t'), \quad (1.26)$$

То есть в штрихованной системе поле скорости и направление времени противоположны таковым в начальной системе, что приводит к траекториям в штрихованной системе $\mathbf{r}'(t')$ таким же, как и в начальной системе, но проходимым электроном в обратном направлении: $d\mathbf{r}'/dt' = \mathbf{v}'(\mathbf{r}', t') = -\mathbf{v}(\mathbf{r}', -t')$. Отметим фундаментальную разницу между асимптотической траекторией, описываемой уравнениями (1.20)–(1.19), и пондеромоторным описанием. Пондеромоторная сила определяется распределением величин E^2 и B^2 и соответственно инвариантна относительно преобразования (1.21)–(1.25), в то время как это преобразование обращает направление движения электрона, описываемое уравнениями (1.20) и (1.19), справедливыми при сильной реакции излучения.

Продemonстрируем отличие пондеромоторного и асимптотического описания на следующем примере. Рассмотрим рассеяние электрона двумя лазерными импульсами, распространяющимися навстречу друг другу, расположенными изначально на некотором удалении друг от друга. Пусть первый импульс распространяется вдоль оси x , а второй получается из первого преобразованием (1.21)–(1.23) и соответственно распространяется против оси x . Пусть электрон находится ближе к первому импульсу. Тогда, согласно пондеромоторному описанию, первый импульс рассеивает электрон в сторону. В таком случае электрон может оказаться вдали от обоих импульсов и второй импульс вообще не окажет влияние на движение электрона. Однако, если электрон обильно излучает, то справедливо асимптотическое описание его движения. В таком случае траектория электрона в поле второго импульса такая же, как и в поле первого, но проходит в обратном направлении. Поэтому в режиме сильных радиационных потерь электрон после движения в поле первого импульса возвращается на своё изначальное положение, двигаясь в поле второго импульса. Такое поведение крайне отличается от поведения согласно пондеромоторному описанию.

Таким образом, асимптотическое описание подразумевает, что электроны не рассеиваются, а долгое время остаются в поле лазерного пучка. Это заключение находится в хорошем согласии с результатами теоретических соображений и численного моделирования, которые показывают, что пондеромоторная сила может быть значительно подавлена реакцией излучения [61; 154].

1.3.1 Асимптотические траектории в стоячих волнах

В данном разделе мы покажем, что уравнения (1.19) и (1.20) всегда приводят к периодическим траекториям в широком классе полей, которые в общем случае записываются в следующем виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{r}, -t), \quad (1.27)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{r}, -t), \quad (1.28)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, t)$ — решения уравнений Максвелла для плотности заряда ρ и плотности тока \mathbf{j} (для простоты будем рассматривать случай $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$). Такое представление обозначает, что поля представляют собой сумму

полей в какой то системе и полей в соответствующей штрихованной системе. В таком случае преобразование (1.21)–(1.25) приводит к таким же полям в штрихованной системе, что и в начальной системе, т.е. $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t') = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t')$, $\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t') = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t')$, что приводит к такому же полю скоростей $\mathbf{v}'(\mathbf{r}, t') = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t')$. С учётом выражения (1.26) мы имеем:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, -t) = -\mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (1.29)$$

т.е. поле скорости в полях (1.27)–(1.28) — нечётная функция времени. Если помимо прочего поля (1.27)–(1.28) являются периодическими функциями времени, то поле скорости также периодически во времени с тем же периодом, T . Поэтому среднее по периоду значение скорости равно нулю:

$$\langle \mathbf{v} \rangle_T = \int_0^T \mathbf{v}(t') dt' = \int_{-T}^0 \mathbf{v}(-t') dt' = - \int_0^T \mathbf{v}(t') dt' = -\langle \mathbf{v} \rangle_T. \quad (1.30)$$

В связи с этим

$$\mathbf{r}(t+T) = \int_0^{t+T} \mathbf{v}(t') dt' = \int_0^t \mathbf{v}(t') dt' + \int_t^{t+T} \mathbf{v}(t') dt' = \mathbf{r}(t) + \langle \mathbf{v} \rangle_T = \mathbf{r}(t). \quad (1.31)$$

Таким образом, в периодических полях (1.27)–(1.28) в рамках асимптотического описания, электрон периодически движется по одному и тому же пути.

Ниже рассмотрим несколько конкретных примеров конфигураций стоячих волн, в которых сравним асимптотические траектории и численное решение неукороченных уравнений движения.

1.3.2 Асимптотические траектории в линейно-поляризованной стоячей волне

Конфигурация полей в стоячей линейно-поляризованной достаточно проста, поэтому асимптотические траектории можно найти в явном виде. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 \cos(t) \cos(x)$, $\mathbf{B} = \mathbf{z}_0 \sin(t) \sin(x)$, тогда

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{x}_0 \operatorname{tg}(t) \operatorname{tg}(x) + \mathbf{y}_0 \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2(t) \operatorname{tg}^2(x)}, & \text{если } E > B; \\ \mathbf{x}_0 \operatorname{ctg}(t) \operatorname{ctg}(x), & \text{если } E < B. \end{cases} \quad (1.32)$$

Так как поля однородны вдоль оси y , то движение вдоль неё не представляет большого интереса. Зависимость $x(t)$ определяется из уравнений:

$$\begin{cases} \sin(x) \cos(t) = \sin(x_0) \cos(t_0), & \text{если } E > B; \\ \cos(x) \sin(t) = \cos(x_0) \sin(t_0), & \text{если } E < B. \end{cases} \quad (1.33)$$

Пусть электрон в момент времени $t = 0$ находится в точке $x = x_0$ такой, что $E > B$ (иначе электрон будет покоиться до момента, пока не будет выполнено это условие). Траектория электрона определяется первым уравнением в (1.33), пока он не дойдёт до точки, в которой $E = B$; после этого траектория определяется вторым уравнением в (1.33) вплоть до следующей точки, в которой выполняется условие $E = B$ и так далее. Такие точки определяются из условия $\operatorname{tg}(x) \operatorname{tg}(t) = 1$. Отсюда можно явно найти точку изменения траектории, до которой дойдёт электрон, стартуя в момент $t = 0$ из точки x_0 :

$$\operatorname{ctg} x_1 = \operatorname{tg} t_1 = \sqrt{\frac{1}{\sin(x_0)} - 1} \quad (1.34)$$

Легко показать, что электрон достигнет следующей ближайшей точки изменения траектории в момент времени $t_2 = \pi - t_1$ с координатой $x_2 = x_1$, а следующей в $t_3 = \pi + t_1$ с координатой $x_3 = x_1$ и дальше траектория будет периодически повторяться. Траектории электронов, стартующих из других точек, находятся аналогичным образом. Явный вид траекторий $x(t)$ и их сравнение с численным решением неукороченных уравнений движения представлены на Рис. 1.1. Согласно рассуждениям в п. 1.3.1, асимптотические траектории электрона в стоячей линейно-поляризованной волне являются периодическими. Однако известно, что поведение электронов в сильной стоячей волне сопровождается так называемым *аномальным радиационным захватом* [60] — приближением частиц к узлу магнитного поля, который является неустойчивым положением равновесия без учёта реакции излучения. Аномальный радиационный захват вызван дрейфом электрона между различными асимптотическими траекториями (1.33), который занимает много периодов поля [60] и поэтому не описывается представленной асимптотической теорией. Отметим, что в случае $a_0 = 10^5$ траектории электронов, вычисленные с помощью метода Монте-Карло, приближаются к узлу магнитного поля с каждым следующим периодом, что и является аномальным радиационным захватом (см. Рис. 1.1).

1.3.3 Асимптотические траектории в лазерном пучке конечного диаметра

Покажем, что большое число конфигураций электромагнитного поля может быть представлено в виде периодических полей обладающих

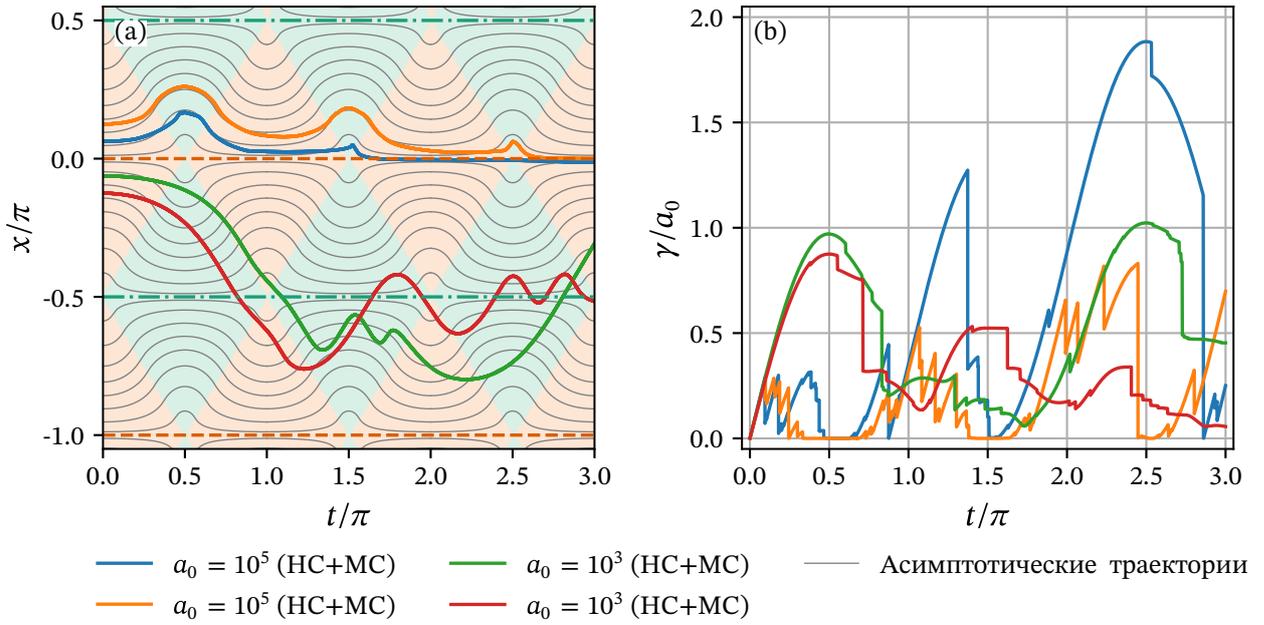


Рисунок 1.1 — Динамика электрона в линейно-поляризованной стоячей электромагнитной волне. (а) Сплошные серые линии — асимптотические траектории, вычисленные по уравнению (1.19). Области преобладания электрического и магнитного поля отмечены светло-оранжевым и светло-зелёным цветами соответственно. Сплошные цветные линии — численные траектории, вычисленные по классическим уравнениям движения с учётом квантовой реакции излучения с помощью метода Монте-Карло (см. Приложение А) для $a_0 = 10^3$ и $a_0 = 10^5$ (стартующие из $x < 0$ и $x > 0$ соответственно). Штриховые оранжевые линии соответствуют магнитному узлу стоячей волны ($B = 0$), штрих-пунктирные зелёные линии — электрическому узлу стоячей волны ($E = 0$). (б) Энергия частицы как функция времени для численных траекторий, нормированная на величину a_0 .

«излучательно-поглощательной» симметрией (1.21)–(1.25). Также мы представим один из способов разрешения неоднозначности поля скорости, задаваемого уравнением (1.14).

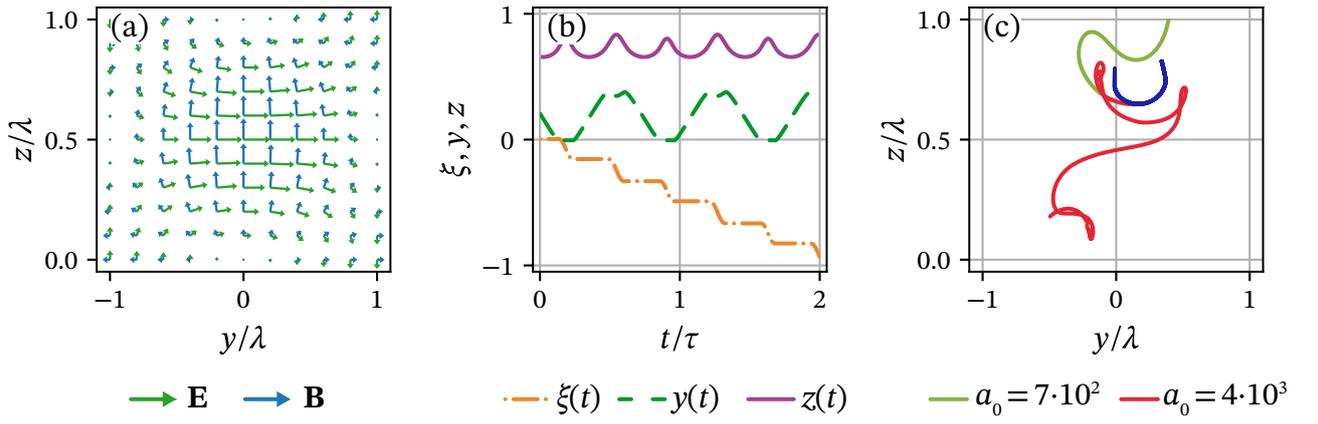


Рисунок 1.2 — (а) Электрическое и магнитное поля (зелёные и синие стрелки соответственно) ТЕ11 моды волновода (1.35)–(1.40) при $t = 0$. (б) Асимптотические траектории, вычисленные по уравнениям (1.19), (1.14) и (1.15)–(1.18) в лабораторной системе отсчёта; $\xi = x - v_g t$, где v_g — групповая скорость ТЕ11 моды. (с) Та же асимптотическая траектория (синяя линия) и траектории электронов, рассчитанные численно (см. Приложение А), стартующих из точки $x = 0$, $y = 0.2\lambda$, $z = 0.65\lambda$ ($\lambda = 1$ мкм, $t \in [0, 2\tau]$), для $a_0 = 700$ (зелёная линия) и $a_0 = 4 \cdot 10^3$ (красная линия).

Рассмотрим поля ТЕ11 моды в прямоугольном металлическом волноводе:

$$E_x = 0, \quad (1.35)$$

$$E_y = a_0 \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(t - k_x x), \quad (1.36)$$

$$E_z = -\frac{a_0 k_y}{k_z} \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(t - k_x x), \quad (1.37)$$

$$B_x = \frac{a_0(k_z^2 + k_y^2)}{k_z} \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(t - k_x x), \quad (1.38)$$

$$B_y = -k_x E_z, \quad (1.39)$$

$$B_z = k_x E_y, \quad (1.40)$$

где угловая частота волны $\Omega = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} = 1$ (мы используем нормировочную частоту ω равную частоте волны и, как раньше, время нормировано на $1/\omega$, координаты — на c/ω , \mathbf{k} — волновое число, нормированное на ω/c). Данные поля имеют металлические граничные условия при $y = 0, \pm\ell_y, \pm 2\ell_y, \dots$ ($E_z = 0$) и при $z = 0, \pm\ell_z, \pm 2\ell_z, \dots$ ($E_y = 0$), где $\ell_y = \pi/k_y$ и $\ell_z = \pi/k_z$ — размеры волновода вдоль осей y и z соответственно.

Поля (1.35)–(1.40) являются решениями уравнения Максвелла не только внутри волновода, но и в вакууме, т.к. они могут быть представлены в виде суммы плоских волн. Будем рассматривать эти поля в области $y \in [-\ell_y/2, \ell_y/2]$ и $z \in [0, \ell_z]$ в качестве модели лазерного пучка конечного диаметра. Асимптотическая траектория в таких полях представлена на Рис. 1.2 (а), где $\xi = x - v_g t$, $v_g = k_x$ — групповая скорость TE11 моды. Траектория начинается при $t = 0$ в точке $x = 0$, $y = 0.2$, $z = 0.65$ и заканчивается при $t = 2\tau$, где τ — характерный временной масштаб задачи:

$$\tau = \frac{2\pi}{k_x(v_\varphi - v_g)} = \frac{2\pi}{1 - k_x^2} \quad (1.41)$$

где $v_\varphi = 1/v_g$ — фазовая скорость волны.

Из Рис. 1.2 видно, что асимптотическая траектория квазипериодическая, что достаточно хорошо согласуется с траекторией реального электрона при $a_0 = 4 \cdot 10^3$, который долгое время остаётся в области сильного поля. Однако, как будет показано ниже, вдоль асимптотических траекторий, вычисленных в лабораторной системе отсчёта, значения ξ и период траектории плохо совпадают с таковыми для реальных траекторий электрона. Это связано с тем, что выражение (1.14) не является Лоренц-инвариантом, поэтому вычислив скорость \mathbf{v} с помощью этого выражения в одной системе отсчёта, в какой-то другой системе отсчёта, мы получим $\mathbf{v}' = \mathbf{E}' \times \mathbf{B}' + a\mathbf{B}'$, где a — константа.

Рассмотрим поля (1.35)–(1.40) в системе отсчёта K' , движущейся вдоль оси x с групповой скоростью v_g :

$$E'_y = a_0 k_\perp \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(k_\perp t'), \quad (1.42)$$

$$E'_z = -\frac{a_0 k_\perp k_y}{k_z} \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(k_\perp t'), \quad (1.43)$$

$$B'_x = \frac{a_0(k_z^2 + k_y^2)}{k_z} \cos(k_y y) \cos(k_z z) \sin(k_\perp t'), \quad (1.44)$$

$$E'_x = B'_x = B'_y = B'_z = 0, \quad (1.45)$$

где $k_\perp = \sqrt{1 - k_x^2}$. Эти поля не зависят от x' и для всех электронов а таком поле компонента силы Лоренца вдоль оси x' отсутствует. Более того, из-за радиационных потерь электроны «забывают» своё начальное направление движения, поэтому мы будем полагать, что в полях (1.42)–(1.45) средняя скорость электронов $v'_x = 0$. Поэтому в лабораторной системе отсчёта K средняя скорость электронов $v_x = v_g$ и следовательно $\xi = \text{const}$. Отметим, что

это утверждение неверно для асимптотических траекторий, вычисленных в лабораторной системе отсчёта (см. Рис. 1.2 (а)), что в частности приводит к отличному значению периода y и z координат.

Замены $t' \rightarrow t' + \pi/2k_{\perp}$ и $t' \rightarrow -t'$ указывают на то, что электрические поля (1.42)–(1.43) являются нечётными функциями времени, а магнитные (1.44) — чётными в K' и все поля являются периодическими. В соответствии с разделом 1.3.1 в таком случае в рамках асимптотического описания траектории электронов также периодические с периодом $2\pi/k_{\perp}$ в K' . В таком случае в лабораторной системе отсчёта электроны движутся вдоль оси x с групповой скоростью лазера и, т.к. $y' = y$ и $z' = z$, траектории электрона периодические в плоскости yz с периодом

$$T = \frac{2\pi}{k_{\perp}\sqrt{1 - v_g^2}} = \tau. \quad (1.46)$$

Таким образом, неоднозначность поля скорости в асимптотическом подходе может быть разрешена выбором правильной системы отсчёта.

Итак, мы показали, что асимптотическое описание (1.19) и (1.20) приводит к периодическим траекториям в широком классе стоячих волн (например, сформированных лазерными пучками конечного диаметра) и движению электронов вдоль оси распространения лазерного импульса с его групповой скоростью и периодическим поперечным движением. Последнее может объяснять эффект захвата частиц за счёт реакции излучения [61].

1.4 Поправки к асимптотической теории

Разработанная выше теория позволяет описывать динамику электрона в условиях экстремальных радиационных потерь без уточнения конкретного вида мощности последних, и таким образом представляет собой полезный аналитический инструмент, с помощью которого нами были получены некоторые новые результаты. Однако, такой подход обладает двумя существенными ограничениями. Во-первых, как показано выше настоящие траектории электрона сходятся к асимптотическим достаточно быстро только при экстремальных интенсивностях, превышающих 10^{25} Вт/см² (при длине волны

$\lambda = 1$ мкм). Это связано с тем, что для большинства реалистичных конфигураций ЭМ поля характерное время, за которое вектор скорости электрона приближается к безрадиационному направлению, недооценивается в наших рассуждениях, приведённых фактически для постоянного ЭМ поля. Во-вторых, с помощью разработанного нами подхода оказывается невозможным вычислить энергию и радиационные потери электрона, при приближении к асимптотической траектории, т.к. энергия электрона предполагается неограниченно большой, хотя при этом и много меньшей безразмерной амплитуды ЭМ поля. Несмотря на указанные недостатки, схожий подход может быть успешно применён для описания динамики электронов в некоторых астрофизических задачах [83; 155; 156].

Для избавления от указанных выше недостатков построим теорию возмущений, предположив, что скорость электрона отклоняется от безрадиационного направления, но это отклонение мало, т.е. представим скорость электрона в следующем виде

$$\mathbf{v} = \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad (1.47)$$

где $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_0$ и δ могут быть найдены из связи с энергией электрона $|\mathbf{v}|^2 = 1 - \gamma^{-2}$ следующим образом

$$\delta^2 \approx v_1^2 + \gamma^{-2}. \quad (1.48)$$

Подставим данное представление скорости в уравнение (1.11) и разложим его до слагаемых не выше второго порядка по δ . Отдельно рассмотрим слагаемое \mathbf{F}_\perp в правой части получившегося уравнения:

$$\mathbf{F}_\perp = -\frac{\delta^2}{2} [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}] + [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}] + \delta^2 \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \mathbf{E}) - \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_1 \mathbf{E}) - \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_0 \mathbf{E}) - \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \mathbf{E}) + \mathcal{O}(\delta^3) \quad (1.49)$$

Рассмотрим отдельно выражение $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}$:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B} = -(\mathbf{v}_0 \mathbf{B}) [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1] + \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}]). \quad (1.50)$$

Произведём скалярное умножение уравнения (1.12) на \mathbf{v}_1

$$(\mathbf{v}_1 \mathbf{E}) + \mathbf{v}_1 [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}] = 0. \quad (1.51)$$

Выполнив циклическую перестановку в смешанном произведении, получим

$$\mathbf{v}_0 [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}] = (\mathbf{v}_1 \mathbf{E}). \quad (1.52)$$

Таким образом,

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B} = \mathbf{v}_0(\mathbf{v}_1 \mathbf{E}) - [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1](\mathbf{v}_0 \mathbf{B}) \quad (1.53)$$

Выполняя аналогичные действия, можно записать слагаемое $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}$ в следующем виде:

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} = -\mathbf{v}_1 \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{E})}{v_1^2} + [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1] \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{B})}{v_1^2} \quad (1.54)$$

Таким образом поперечная сила \mathbf{F}_\perp может быть записана в виде разложения в ортогональном базисе $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1$ следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\perp = & \mathbf{v}_0(\mathbf{v}_0 \mathbf{E})\delta^2 - \\ & - \mathbf{v}_1 \left((\mathbf{v}_0 \mathbf{E}) + (\mathbf{v}_1 \mathbf{E}) \frac{v_1^2 - \gamma^{-2}}{2v_1^2} \right) - \\ & - [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1] \left((\mathbf{v}_0 \mathbf{B}) + (\mathbf{v}_1 \mathbf{B}) \frac{v_1^2 + \gamma^{-2}}{2v_1^2} \right). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Рассмотрим левую часть уравнения (1.11)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} - \frac{\mathbf{v}_0}{2} \left(\frac{dv_1^2}{dt} + \frac{d\gamma^{-2}}{dt} \right) + \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \quad (1.56)$$

Для вычисления слагаемого dv_1^2/dt умножим скалярно уравнение (1.11) на \mathbf{v}_1 , учитывая, что $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0 = 0$, и отбрасывая слагаемые высших порядков малости

$$\frac{1}{2} \frac{dv_1^2}{dt} = -\mathbf{v}_1 \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{v_1^2(\mathbf{v}_0 \mathbf{E})}{\gamma}. \quad (1.57)$$

Разложим слагаемое, содержащее $d\gamma^{-2}/dt$, воспользовавшись уравнением (1.11):

$$\frac{1}{2} \frac{d\gamma^{-2}}{dt} = -\frac{1}{\gamma^3} \frac{d\gamma}{dt} \approx \frac{\mathbf{v}_0 \mathbf{E}}{\gamma^3} \quad (1.58)$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} \frac{d\delta^2}{dt} = -\mathbf{v}_1 \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \delta^2 \frac{(\mathbf{v}_0 \mathbf{E})}{\gamma}. \quad (1.59)$$

Подставляя выражения (1.59) и (1.55) обратно в уравнение (1.11), получим

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{F}_1}{\gamma} - \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} - \mathbf{v}_0 \left(\mathbf{v}_1 \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \right), \quad (1.60)$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{v}_1 \left((\mathbf{v}_0 \mathbf{E}) + (\mathbf{v}_1 \mathbf{E}) \frac{v_1^2 - \gamma^{-2}}{2v_1^2} \right) + [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1] \left((\mathbf{v}_0 \mathbf{B}) + (\mathbf{v}_1 \mathbf{B}) \frac{\delta^2}{2v_1^2} \right). \quad (1.61)$$

Наконец, найдём выражение для КЭД параметра χ , исходя из его определения (1.2) и проведённых выше вычислений

$$\chi = \frac{\gamma\delta}{a_s} \sqrt{[(\mathbf{v}_0\mathbf{E})^2 + (\mathbf{v}_0\mathbf{E})(\mathbf{v}_1\mathbf{E}) + (\mathbf{v}_0\mathbf{B})(\mathbf{v}_1\mathbf{B})] + \frac{\delta^2}{4v_1^2} [(\mathbf{v}_1\mathbf{E})^2 + (\mathbf{v}_1\mathbf{B})^2]} \quad (1.62)$$

В итоге мы получили следующую систему общих уравнений, описывающих динамику электрона в условиях экстремальных радиационных потерь

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{F}_1}{\gamma} - \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} - \mathbf{v}_0 \left(\mathbf{v}_1 \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}\right), \quad (1.63)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\mathbf{v}_0\mathbf{E} \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) - \mathbf{v}_1\mathbf{E} - F_{\text{rr}}(\chi), \quad (1.64)$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{v}_1 \left((\mathbf{v}_0\mathbf{E}) + (\mathbf{v}_1\mathbf{E}) \frac{v_1^2 - \gamma^{-2}}{2v_1^2} \right) + [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1] \left((\mathbf{v}_0\mathbf{B}) + (\mathbf{v}_1\mathbf{B}) \frac{\delta^2}{2v_1^2} \right), \quad (1.65)$$

$$\chi = \frac{\gamma\delta}{a_s} \sqrt{[(\mathbf{v}_0\mathbf{E})^2 + (\mathbf{v}_0\mathbf{E})(\mathbf{v}_1\mathbf{E}) + (\mathbf{v}_0\mathbf{B})(\mathbf{v}_1\mathbf{B})] + \frac{\delta^2}{4v_1^2} [(\mathbf{v}_1\mathbf{E})^2 + (\mathbf{v}_1\mathbf{B})^2]}. \quad (1.66)$$

Отметим, что несмотря на то, что величина χ пропорциональна малому параметру δ , она может быть произвольно большой за счёт множителя γ . В связи с этим слагаемое F_{rr} должно быть сохранено во всех порядках разложения, что приводит к тому, что укороченные уравнения движения остаются нелинейными. Также важно отметить, что полные производные в уравнениях выше должны пониматься в смысле производной векторного поля \mathbf{v}_0 вдоль траектории частицы $\mathbf{r}(t)$, т.е.

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}_0. \quad (1.67)$$

Рассмотрим уравнение на малый параметр δ^2

$$\frac{1}{2} \frac{d\delta^2}{dt} = -\mathbf{v}_1 \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{\delta^2(\mathbf{v}_0\mathbf{E})}{\gamma}. \quad (1.68)$$

Из этого уравнения можно оценить характерное время приближения траектории электрона к асимптотической безрадиационной траектории в постоянном ЭМ поле ($d\mathbf{v}_0/dt = 0$)

$$\tau_v = \frac{\gamma}{|\mathbf{v}_0\mathbf{E}|} \sim \frac{\gamma}{a_0}. \quad (1.69)$$

Однако, для ЭМ поля общего вида знак первого слагаемого в уравнении (1.68) может быть произвольным, а его величина сравнимой с v_1 , поэтому одного условия $\gamma \ll a_0$ недостаточно для того, чтобы оправдать асимптотическое описание динамики электрона в нулевом порядке (1.19) в произвольном

ЭМ поле. Таким образом, необходимо использовать именно систему уравнений (1.63)–(1.64), в которых учитывается отклонение вектора скорости от безрадиационного направления. Кроме того, с помощью данных уравнений можно найти энергию электрона и его радиационные потери при движении в ЭМ поле.

Приведём объяснение процедуры, произведённой для получения укороченных уравнений движения, с помощью простых шагов. Во-первых, было показано, что существует некое выделенное безрадиационное направление, к которому в постоянном ЭМ поле стремится вектор скорости электрона. Раскладывая вектор скорости в базисе, в котором одна ось совпадает с безрадиационным направлением, можно разбить уравнения движения электрона на две составляющие. Движение вдоль безрадиационного направления фактически описывается энергией частицы, тогда как уравнения на поперечную скорость могут быть разложены в ряд, который очевидно сходится, т.к. длина вектора скорости электрона строго меньше единицы. Несмотря на то, что полученная система укороченных уравнений остаётся нелинейной и не допускает решения в общем виде, ниже будут рассмотрены примеры, которые показывают, что данный подход может быть более продуктивным, чем решение неукороченных уравнений движения. Отметим также, что недавно в публикации [157] было использовано похожее разложение для нахождения равновесных решений уравнений (1.63)–(1.64).

Рассмотрим далее конкретные примеры конфигураций ЭМ поля, в которых уравнения (1.63)–(1.64) в том или ином виде могут быть явно разрешены.

1.4.1 Обобщённая задача Зельдовича

Уравнения движения электрона с учётом реакции излучения могут быть аналитически решены в однородном вращающемся электрическом поле, что было впервые продемонстрировано Я. Б. Зельдовичем [158]. Недавно в публикации [91] решение Зельдовича было расширено на случай, когда помимо электрического поля присутствует параллельное ему однородное магнитное поле, вращающееся с той же частотой. Данная конфигурация ЭМ поля вызывает интерес в первую очередь потому, что она, за исключением однородности, образуется при интерференции двух циркулярно-поляризованных волн, распространяющихся навстречу друг другу. В данной

модельной конфигурации поля было построено одно из первых приближённых решений задачи о развитии КЭД каскада [159; 160]. Построим решение задачи о движении электрона в таком ЭМ поле, воспользовавшись разработанной нами теорией. Предположим, что электрическое и магнитное поля однородны, параллельны и вращаются с угловой частотой Ω . Безрадиационное направление в таком случае противоположно направлению электрическому полю: $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{E}/E \equiv -\mathbf{e}$. Будем интересоваться стационарным решением, при котором вектор скорости электрона синхронно вращается с электрическим и магнитным полем. В таком случае в уравнении (1.63) можно заменить производные по времени на векторное произведение $\Omega \times$

$$\Omega \times \mathbf{v}_1 = -\frac{E}{\gamma} \mathbf{v}_1 + \frac{B}{\gamma} \mathbf{e} \times \mathbf{v}_1 + \Omega \times \mathbf{e} + v_1 \mathbf{e}. \quad (1.70)$$

Используя тот факт, что $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_0$, вектор \mathbf{v}_1 можно разложить по компонентам следующим образом

$$\mathbf{v}_1 = v_{\perp} \Omega \times \mathbf{e} + v_x \Omega. \quad (1.71)$$

В таком случае уравнение (1.70) разделяется на систему линейных уравнений, решение которых легко находится

$$v_x = \frac{\gamma B}{E^2 + B^2}, \quad (1.72)$$

$$v_{\perp} = \frac{\gamma E}{E^2 + B^2}, \quad (1.73)$$

$$v_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{E^2 + B^2}}. \quad (1.74)$$

Стационарность решения также подразумевает, что набор энергии электроном в электрическом поле точно скомпенсирован радиационными потерями там, что $d\gamma/dt = 0$. В таком случае связь между энергией электрона и амплитудой электрического поля находится из следующего уравнения

$$E \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) = F_{\text{rr}} \left(\frac{\gamma \delta E}{a_s}\right), \quad (1.75)$$

$$\delta = \sqrt{v_1^2 + \gamma^{-2}} = \sqrt{\frac{\gamma^2}{E^2 + B^2} + \frac{1}{\gamma^2}}. \quad (1.76)$$

Полученный результат в точности совпадает с результатом, полученным в публикации [91]. Рассмотрим отдельно частный случай $B = 0$, рассмотренный в оригинальной публикации Я. Б. Зельдовича [158]. В таком случае решение записывается в следующем виде

$$v_{\perp} = \frac{\gamma}{E}, \quad (1.77)$$

$$E \approx F_{\text{тр}} \left(\frac{\gamma^2}{a_S} \right). \quad (1.78)$$

Рассмотрим классический предел излучения $\chi \ll 1$, в котором мощность радиационных потерь определяется выражением $F_{\text{тр}} = 2/3\alpha a_S \chi^2$, тогда

$$E = \alpha \frac{2\gamma^4}{3a_S}. \quad (1.79)$$

В таком случае условие применимости решения $v_{\perp} \ll 1$, записывается в следующем виде

$$E \gg a_0^* \equiv \sqrt[3]{\frac{3a_S}{2\alpha}}. \quad (1.80)$$

Данное условие часто используется в качестве определения режима экстремальных радиационных потерь безотносительно конфигурации ЭМ поля, что однако не всегда является точным, как это будет показано ниже на примере задачи о движении электрона в плоских волнах.

Сравнение полученного решения с результатом численного решения неукороченных уравнений движения (1.10)–(1.11) с учётом реакции излучения как с помощью полуклассического, так и квантового подхода, представлено на Рис. 1.3. Параметры ЭМ поля в данном случае были выбраны таким образом, чтобы среднее значение КЭД параметра χ электрона составляло около 5. Данный выбор был осуществлён для демонстрации границ применимости нашего подхода. В нашей теории, которая основывается на полуклассическом подходе к описанию реакции излучения, предполагается, что величина КЭД параметра χ существенно не различается в процессе движения для электронов с близкими начальными условиями. В таком случае можно считать, что усреднённая по функции распределения электронов сила радиационного трения может быть вычислена, как сила трения, действующая на «средний» электрон, т.е. $\langle F_{\text{тр}}(\chi) \rangle \approx F_{\text{тр}}(\langle \chi \rangle)$, где угловые скобки означают усреднение по функции распределения электронов. Однако, как видно из Рис. 1.3 параметры электронов с одинаковыми начальными условиями, в процессе движения приобретают существенный разброс, связанный со стохастичностью

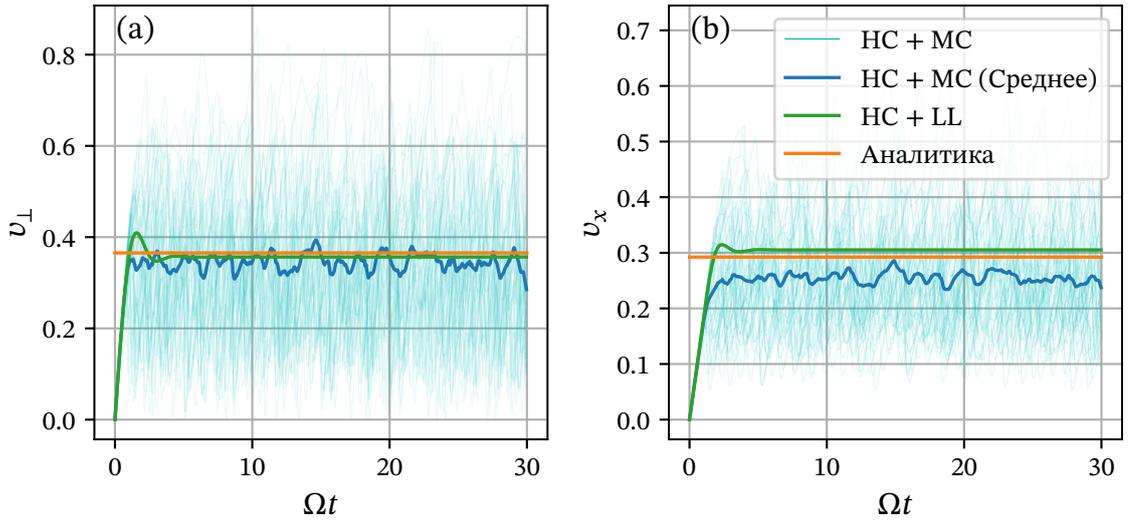


Рисунок 1.3 — Динамика электрона в электрическом поле с безразмерной амплитудой $eE/mc\Omega = 2500$ и параллельном магнитном поле с безразмерной амплитудой $eB/mc\Omega = 2000$, синхронно вращающихся с угловой частотой Ω , соответствующей длине волны $\lambda = 2\pi c/\Omega = 1$ мкм: (а) компонента скорости электрона поперёк электрического поля в плоскости вращения, (б) компонента скорости электрона вдоль вектора угловой скорости $\mathbf{\Omega}$. Зелёные (голубые) линии соответствуют численному решению неукороченных уравнений движения электрона (1.10)–(1.11) с учётом реакции излучения с помощью полуклассического (квантового) подхода (см. Приложение А), синие линии соответствуют величинам, усреднённым по 100 реализациям «квантовых» решений. Оранжевые линии соответствуют аналитическому решению (1.72)–(1.73).

процесса излучения. В связи с этим и характером зависимости $F_{\text{гр}}(\chi)$ в существенно квантовом режиме справедливо неравенство $\langle F_{\text{гр}}(\chi) \rangle < F_{\text{гр}}(\langle \chi \rangle)$, что объясняет различие между значениями v_x и v_{\perp} , полученными согласно аналитическому решению (1.72)–(1.73) и полученными в результате усреднения по различным реализациям квантовых численных решений, наблюдаемое на Рис. 1.3 (b).

1.4.2 Плазменный ускоритель

Рассмотрим «игрушечную модель» плазменного ускорителя и найдём известное устойчивое квазистационарное решение в режиме экстремальных радиационных потерь [52; 59] с помощью разработанной нами теории. Для

этого будем считать, что ЭМ поле является суммой однородного ускоряющего электрического поля $\mathbf{z}_0 E_{\text{acc}}$ и линейно зависящего от поперечных координат фокусирующего электрического поля $y E_{\text{foc}}$, в котором электроны совершают бетатронные колебания. Чтобы найти решение, которое соответствует постоянству радиационных потерь, усреднённых по периоду бетатронных колебаний, предположим, что произвольная функция КЭД параметра χ является строго периодической функцией времени, т.е. её среднее является константой. Математически данное условие записывается следующим образом

$$\frac{d\langle\chi^2\rangle}{dt} = 0, \quad (1.81)$$

где функция χ^2 использована для удобства дальнейших рассуждений. В рассматриваемой конфигурации ЭМ поля из уравнения (1.66) легко получить выражение для χ

$$\chi = \frac{\gamma\delta E}{a_S}. \quad (1.82)$$

Здесь и далее будем считать, что выполняется условие $\gamma \approx \langle\gamma\rangle$, т.е. амплитуда колебаний энергии электрона существенно меньше величины самой энергии. В таком случае энергию γ во всех вычислениях можно выносить из под знака усреднения. Так как мы предполагаем, что электрон ускоряется, т.е. величина γ растёт со временем, но при этом величина χ в среднем остаётся постоянной, то из выражения (1.82) следует, что амплитуда колебаний δ уменьшается со временем. В таком случае уместно предположить, что на больших временах электрон испытывает преимущественно ускоряющее поле, т.е. $E \approx E_{\text{acc}} = \text{const}$. Справедливость обоих этих предположений надёжно подтверждается численным решением неукороченных уравнений движения и итоговым аналитическим решением, полученным ниже. Пользуясь указанными предположениями, уравнение (1.81) можно переписать в следующем виде

$$\langle F_{\text{rr}} \rangle \langle \delta^2 \rangle + \gamma \left\langle \mathbf{v}_1 \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \right\rangle = 0. \quad (1.83)$$

Продифференцируем данное выражение

$$\frac{\langle F_{\text{rr}} \rangle}{\gamma} (3\langle F_{\text{rr}} \rangle - 2E_{\text{acc}}) \langle \delta^2 \rangle + \gamma \left\langle \mathbf{v}_1 \frac{d^2\mathbf{v}_0}{dt^2} - \left(\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \right)^2 \right\rangle = 0. \quad (1.84)$$

Для вычисления последних двух слагаемых в выражении выше, запишем уравнения на траекторию электрона

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad (1.85)$$

где

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{-z_0 E_{\text{acc}} + y E_{\text{foc}}}{E} \approx \mathbf{z}_0 - y \frac{E_{\text{foc}}}{E_{\text{acc}}} \equiv \mathbf{z}_0 - \kappa y. \quad (1.86)$$

Предположим, что бетатронные колебания являются гармоническими, т.е.

$$y = y_0 \cos \omega t, \quad (1.87)$$

тогда из проекции уравнения (1.85) на ось y получаем

$$v_{1,y} = y_0(\kappa \cos \omega t - \omega \sin \omega t). \quad (1.88)$$

Для вычисления средней величины суммы двух последних слагаемых в уравнении (1.84) заметим, что $d\mathbf{v}_0/dt = -\kappa dy/dt$

$$\left\langle \mathbf{v}_1 \frac{d^2 \mathbf{v}_0}{dt^2} - \left(\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \right)^2 \right\rangle = y_0^2 \omega^2 \kappa \left(\kappa \langle \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t \rangle - \omega \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle \right) = 0. \quad (1.89)$$

В итоге получаем следующее соотношение для модельного ускорителя

$$\langle F_{\text{rr}} \rangle = \frac{2}{3} E_{\text{acc}}. \quad (1.90)$$

Таким образом, в режиме экстремальных радиационных потерь электрон в среднем ускоряется втрое медленнее, чем в случае без учёта реакции излучения, что является известным результатом [52; 59]. На Рис. 1.4 продемонстрировано хорошее совпадение полученного решения с результатом численного решения неукороченных уравнений движения (1.10)–(1.11). Необходимо отметить, что в наших рассуждениях явно не использовалось выражение для мощности радиационных потерь, хотя более строгий вывод соотношения (1.90) показывает, что результат на самом деле зависит от функциональной зависимости мощности радиационных потерь от параметра χ . В частности, согласно публикации [59], в существенно квантовом режиме $\chi \gg 1$, когда $F_{\text{rr}} \propto \chi^{2/3}$, соотношение (1.90) слегка модифицируется

$$\langle F_{\text{rr}} \rangle = \frac{12}{19} E_{\text{acc}}, \quad (1.91)$$

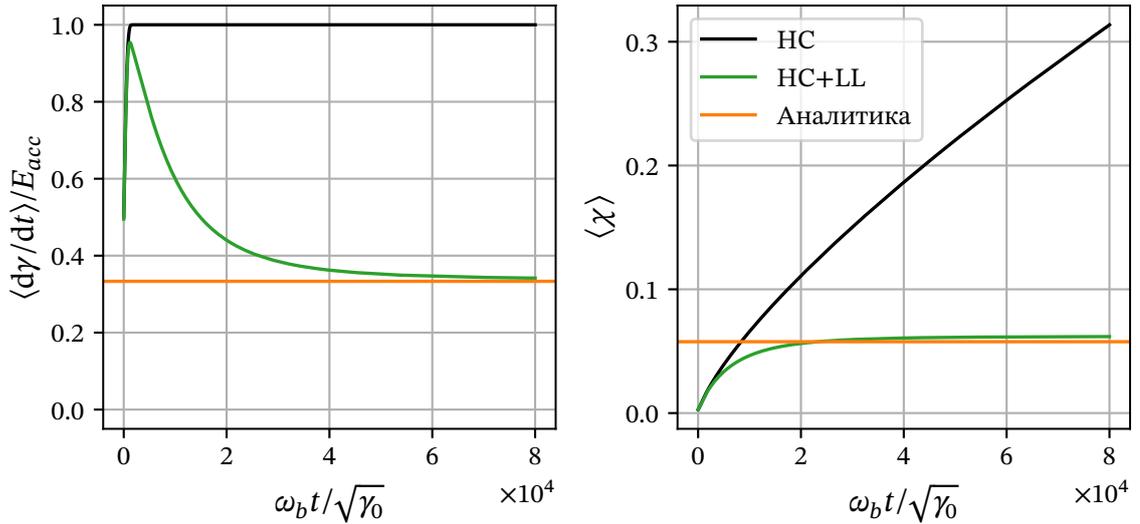


Рисунок 1.4 — Динамика электрона в модельном ускорителе с величиной ускоряющего поля $E_{acc} = 30$ ТВ/м и фокусирующим полем E_{foc} , линейно растущим от 0 до 30 ТВ/м при поперечном смещении на 0.1 мкм: (а) средний темп ускорения, (б) средняя величина КЭД параметра χ . Время нормировано на начальное значение обратной частоты бетатронных колебаний электрона $\omega_b / \sqrt{\gamma_0}$. Чёрная линия соответствует усреднённому по периоду бетатронных колебаний решению неукороченных уравнений движения (1.10)–(1.11) без учёта реакции излучения, зелёная — с учётом реакции излучения с помощью полуклассического подхода (см. Приложение А). Оранжевая линия соответствует аналитическому решению (1.90).

что лишь не более чем на 5% отличается от соотношения (1.90), верного в классическом режиме $\chi \gg 1$, когда $F_{rr} \propto \chi^2$. Приведённые выше рассуждения с помощью разработанного нами подхода не могут в точности воспроизвести данное несущественное различие из-за использованных приближений, в частности пренебрежения слагаемыми следующих порядков малости по δ .

1.5 Движение в плоских волнах с учётом реакции излучения

Применим разработанную выше теорию для решения задачи о движении электрона в плоской ЭМ волне с учётом реакции излучения. Для опреде-

лённости рассмотрим следующую конфигурацию плоской волны:

$$\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E_y(\varphi) + \mathbf{z}_0 E_z(\varphi) \quad (1.92)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{y}_0 E_z(\varphi) - \mathbf{z}_0 E_y(\varphi) \quad (1.93)$$

$$\varphi = t - x \quad (1.94)$$

В такой конфигурации поля безрадиационное направление совпадает с направлением вектора Пойнтинга и является постоянным

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{E^2}. \quad (1.95)$$

Запишем укороченные уравнения движения (1.63), (1.64)

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{\mathbf{F}_1}{\gamma}, \quad (1.96)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\mathbf{v}_1 \mathbf{E} - F_{rr}. \quad (1.97)$$

Найдём выражение для \mathbf{F}_1 согласно (1.65)

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}) \frac{v^2 - \gamma^{-2}}{2v^2} + [\mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}](\mathbf{v}\mathbf{B}) \frac{\delta^2}{2v^2}, \quad (1.98)$$

где у \mathbf{v}_1 был опущен индекс. Отметим, что в данном выражении присутствуют только слагаемые второго порядка малости по δ . Найдём уравнение на величину v , скалярно умножив уравнение (1.96) на \mathbf{v}

$$\frac{dv}{dt} = \frac{E \cos \psi}{2\gamma} \left(v^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right), \quad (1.99)$$

где ψ — угол между вектором \mathbf{v} и электрическим полем \mathbf{E} , отсчитывающийся так, что при $\psi = +\pi/2$, скорость \mathbf{v} сонаправлена с магнитным полем \mathbf{B} , и следовательно $\mathbf{v}\mathbf{B} = vB \sin \psi$. Запишем уравнение на скалярное произведение $\mathbf{v}\mathbf{E}/E \equiv \mathbf{v}\mathbf{e} = v \cos \psi$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}\mathbf{e}) = \mathbf{e} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{d\mathbf{e}}{dt} \quad (1.100)$$

Согласно (1.98) первое слагаемое в правой части этого уравнения записывается следующим образом

$$\mathbf{e} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{E \cos^2 \psi}{2} \left(v^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right) - \frac{E \sin^2 \psi}{2} \left(v^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right), \quad (1.101)$$

где был использован тот факт, что в плоской волне $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, $|E| = |B|$. Второе слагаемое в правой части (1.100) перепишем следующим образом

$$\mathbf{v} \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{v} \frac{d\mathbf{e}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -v \sin \psi \Omega \frac{d\varphi}{dt}, \quad (1.102)$$

где мы предположили, что направление электрического поля вращается с угловой скоростью $\Omega \mathbf{v}_0$. В таком случае, $\Omega = 0$ соответствует монохроматической линейно-поляризованной волне, $\Omega = \pm 1$ — монохроматической эллиптически- или циркулярно-поляризованной волне (при соответствующей зависимости $E(\varphi)$). Таким образом, уравнение (1.100) переписывается в следующем виде

$$\frac{dv}{dt} \cos \psi - v \sin \psi \frac{d\psi}{dt} = \frac{E \cos^2 \psi}{2} \left(v^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right) - \frac{E \sin^2 \psi}{2} \left(v^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) - v \sin \psi \Omega \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.103)$$

Воспользовавшись уравнением (1.99), наконец получаем

$$\frac{d\psi}{dt} - \Omega \frac{d\varphi}{dt} = \frac{E \sin \psi}{2v} \left(v^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right). \quad (1.104)$$

Введём поперечный импульс $p = \gamma v$ и запишем уравнение на его величину, воспользовавшись (1.97) и (1.99)

$$\frac{dp}{dt} = \gamma \frac{dv}{dt} + v \frac{d\gamma}{dt} = -E \cos \psi \frac{1 + p^2}{2\gamma^2} - F_{\text{rr}} \frac{p}{\gamma}, \quad (1.105)$$

Перейдём к переменной интегрирования φ , учитывая, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1 - v_x = 1 - \sqrt{1 - \delta^2} \approx \frac{\delta^2}{2} = \frac{1 + p^2}{2\gamma^2}, \quad (1.106)$$

и получим следующую систему уравнений

$$\frac{dp}{d\varphi} = -E \cos \psi - F_{\text{rr}} \frac{2p\gamma}{1 + p^2}, \quad (1.107)$$

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = -E \cos \psi \frac{2p\gamma}{1 + p^2} - F_{\text{rr}} \frac{2\gamma^2}{1 + p^2}, \quad (1.108)$$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{E \sin \psi}{p} + \Omega. \quad (1.109)$$

Заметим, что

$$2p\gamma \frac{dp}{d\varphi} - (1 + p^2) \frac{d\gamma}{d\varphi} = -2F_{\text{rr}}(\chi) \gamma^2 \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}. \quad (1.110)$$

Преобразуем левую часть уравнения

$$2p\gamma \frac{dp}{d\varphi} - (1 + p^2) \frac{d\gamma}{d\varphi} = \gamma^2 \left(\frac{2p}{\gamma} \frac{dp}{d\varphi} - (1 + p^2) \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\gamma}{d\varphi} \right) = \gamma^2 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1 + p^2}{\gamma} \right) \quad (1.111)$$

Таким образом, получаем

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1 + p^2}{2\gamma} \right) = -F_{\text{rr}}(\chi) \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}. \quad (1.112)$$

Правая часть этого уравнения в классическом пределе зануляется и, таким образом, величина $p_- \equiv (1 + p^2)/2\gamma$ является интегралом движения при отсутствии реакции излучения. Несложно показать, что величина p_- есть ни что иное, как известный интеграл движения $\gamma - p_x$ (в зарубежной литературе часто обозначается как *light-front momentum*) в задаче о движении в плоских волнах [151]. Примечательно, что данный интеграл сохраняется точно в приближённых уравнениях. Выражение для χ согласно (1.66) имеет следующий вид

$$\chi = \frac{\gamma|E|}{a_s} \frac{1}{2} \left(v^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) = \frac{|E|}{a_s} \frac{1 + p^2}{2\gamma} = \frac{|E|}{a_s} p_-. \quad (1.113)$$

Так как величина p_- уменьшается при учёте реакции излучения², то аналогичное утверждение верно и для величины параметра χ . Таким образом, за конечное время электрон с любыми начальными условиями достигнет классического режима излучения $\chi \ll 1$. Ограничимся рассмотрением только этого случая, тогда

$$F_{\text{rr}}(\chi) = \frac{2}{3} \alpha a_s \chi^2 = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{a_s} E^2 p_-^2. \quad (1.114)$$

Запишем уравнение на величину p_-

$$\frac{dp_-}{d\varphi} = -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{a_s} |E|^2 p_-^2 \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1}. \quad (1.115)$$

Рассмотрим отдельно последний множитель в правой части этого уравнения

$$\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} = \frac{1 - p^{-2}}{1 + p^{-2}} = 1 - 2p^{-2} + \mathcal{O}(p^{-4}) \approx 1, \quad (1.116)$$

где последнее равенство справедливо при выполнении условия

$$p^2 \gg 2 \quad (1.117)$$

При выполнении этого условия, уравнение (1.115) разрешается в квадратурах

$$p_- = p_{-,0} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha p_{-,0} E_0^2}{a_s} \int \frac{E^2}{E_0^2} d\varphi \right)^{-1} \quad (1.118)$$

² Данное утверждение верно, если $p > 1$. Как будет показано ниже, в среднем за период волны величина p может быть оценена как a_0 . Таким образом, величина p_- строго уменьшается в среднем за период волны.

Заметим, что

$$\frac{2\alpha p_{-,0} E_0^2}{3 a_S} = \frac{2}{3} \alpha \chi_0 |E_0| \equiv \mathcal{A}, \quad (1.119)$$

и величина \mathcal{A} является Лоренц-инвариантом в силу инвариантности χ_0 и E_0 . Определим величину Φ следующим образом

$$\Phi \equiv \frac{1}{E_0^2} \int E^2 d\varphi, \quad (1.120)$$

тогда

$$\frac{p_-}{p_{-,0}} = \frac{1}{1 + \mathcal{A}\Phi}. \quad (1.121)$$

Отметим, что данное соотношение также является Лоренц-инвариантом. Используемое ранее определение $p_- = (1 + p^2)/2\gamma$ является справедливым в пределе $\gamma \gg 1 + p^2$. Преобразуем выражение для p_- в общем случае

$$p_- = \gamma - p_x = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - 1 - p^2}. \quad (1.122)$$

Разрешая данное уравнение относительно γ , получаем

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + p^2}{p_-} + p_- \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(1 + p^2)(1 + \mathcal{A}\Phi)}{p_{-,0}} + \frac{p_{-,0}}{1 + \mathcal{A}\Phi} \right). \quad (1.123)$$

Аналогичным образом находится выражение для p_x

$$p_x = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + p^2}{p_-} - p_- \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(1 + p^2)(1 + \mathcal{A}\Phi)}{p_{-,0}} - \frac{p_{-,0}}{1 + \mathcal{A}\Phi} \right). \quad (1.124)$$

Перепишем соответствующим образом уравнения на p и ψ

$$\frac{dp}{d\varphi} = -E \cos \psi - \frac{\mathcal{A}p}{1 + \mathcal{A}\Phi} \frac{E^2}{E_0^2}, \quad (1.125)$$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{E \sin \psi}{p} + \Omega. \quad (1.126)$$

Введём также величины $p_e = p \cos \psi$ и $p_b = p \sin \psi$, являющиеся проекциями импульса электрона на направление электрического и магнитного поля соответственно. Уравнения на эти величины несложно получить

$$\frac{dp_e}{d\varphi} = -E - \Omega p_b - \frac{\mathcal{A}}{1 + \mathcal{A}\Phi} \frac{E^2}{E_0^2} p_e, \quad (1.127)$$

$$\frac{dp_b}{d\varphi} = \Omega p_e - \frac{\mathcal{A}}{1 + \mathcal{A}\Phi} \frac{E^2}{E_0^2} p_b. \quad (1.128)$$

Умножим эти уравнения на $1 + \mathcal{A}\Phi$ и заметим, что $d\Phi/d\varphi \equiv E^2/E_0^2$, тогда

$$(1 + \mathcal{A}\Phi) \frac{dp_e}{d\varphi} + \mathcal{A} \frac{d\Phi}{d\varphi} p_e = -(E + \Omega p_b)(1 + \mathcal{A}\Phi), \quad (1.129)$$

$$(1 + \mathcal{A}\Phi) \frac{dp_b}{d\varphi} + \mathcal{A} \frac{d\Phi}{d\varphi} p_b = \Omega p_e(1 + \mathcal{A}\Phi). \quad (1.130)$$

Вводя переменные $\epsilon = (1 + \mathcal{A}\Phi)p_e$ и $\beta = (1 + \mathcal{A}\Phi)p_b$, получаем

$$\frac{d\epsilon}{d\varphi} = -\Omega\beta - E(1 + \mathcal{A}\Phi), \quad (1.131)$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \Omega\epsilon. \quad (1.132)$$

Таким образом, уравнения (1.120), (1.121), и (1.131), (1.132) определяют движение электрона в плоской волне с учётом реакции излучения. Заметим, что уравнения (1.131), (1.132) представляют собой систему *линейных* дифференциальных уравнений. Несмотря на то, что данная система допускает аналитическое решение в общем случае, в данной работе оно не приводится, однако ниже отдельно рассматриваются три частных случая.

1.5.1 Скращенные постоянные поля

Начнём с рассмотрения постоянных скращенных полей, когда $\Omega = 0$, $E = a_0 = \text{const}$. В таком случае

$$\Phi = \varphi, \quad (1.133)$$

$$p_- = \frac{p_{-,0}}{1 + \mathcal{A}\varphi}. \quad (1.134)$$

Перепишем уравнения (1.131), (1.132), которые в данном случае становятся независимыми

$$\frac{d\epsilon}{d\varphi} = -a_0(1 + \mathcal{A}\varphi), \quad (1.135)$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = 0. \quad (1.136)$$

Решая эти уравнения и возвращаясь к переменным p_e , p_b , находим

$$p_e = \frac{p_{e,0} - a_0\varphi \left(1 + \frac{\mathcal{A}\varphi}{2}\right)}{1 + \mathcal{A}\varphi}, \quad (1.137)$$

$$p_b = \frac{p_{b,0}}{1 + \mathcal{A}\varphi} \quad (1.138)$$

Величины γ и p_x выражаются через p_- и $p = \sqrt{p_e^2 + p_b^2}$, согласно формулам (1.123), (1.124).

Стоит отметить, что так как поля являются постоянными, то все выражения должны быть записаны через комбинации не зависящие от условной нормировочной частоты ω . Так как в наших обозначениях, $\mathcal{A} \propto a_0 \propto \omega^{-1}$, $\varphi \propto \omega$, то данное требование выполняется.

1.5.2 Монохроматическая циркулярно-поляризованная плоская волна

Перейдём к рассмотрению монохроматической циркулярно-поляризованной плоской волны, которая в наших обозначения соответствует случаю $\Omega = 1$, $E = a_0 = \text{const}$, где знак Ω выбран для определённости. В таком случае,

$$\Phi = \varphi, \quad (1.139)$$

$$p_- = \frac{p_{-,0}}{1 + \mathcal{A}\varphi}, \quad (1.140)$$

следовательно

$$\frac{d\epsilon}{d\varphi} = -\beta - a_0(1 + \mathcal{A}\varphi), \quad (1.141)$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \epsilon. \quad (1.142)$$

Решение данных уравнений, фактически описывающих гармонический осциллятор под действием линейно растущей силы, известно

$$\epsilon = -a_0\mathcal{A} - (\beta_0 + a_0) \sin \varphi + (\epsilon_0 + a_0\mathcal{A}) \cos \varphi, \quad (1.143)$$

$$\beta = -a_0(1 + \mathcal{A}\varphi) + (\beta_0 + a_0) \cos \varphi + (\epsilon_0 + a_0\mathcal{A}) \sin \varphi. \quad (1.144)$$

Наконец, возвращаясь к переменным p_e и p_b , получаем

$$p_e = \frac{-\mathcal{A}a_0 - (p_{b,0} + a_0) \sin \varphi + (p_{e,0} + a_0\mathcal{A}) \cos \varphi}{1 + \mathcal{A}\varphi}, \quad (1.145)$$

$$p_b = -a_0 + \frac{(p_{b,0} + a_0) \cos \varphi + (p_{e,0} + a_0\mathcal{A}) \sin \varphi}{1 + \mathcal{A}\varphi} \quad (1.146)$$

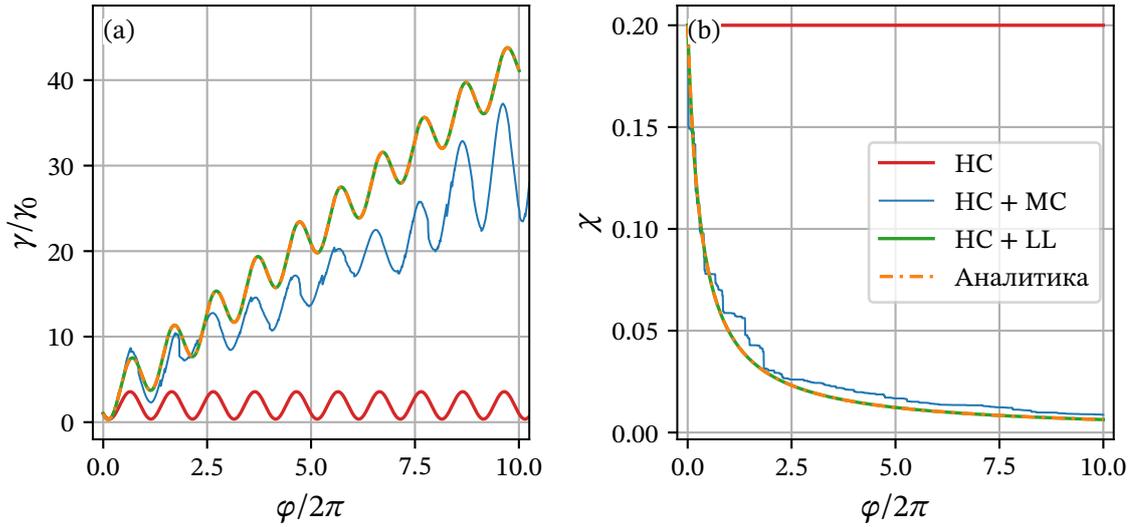


Рисунок 1.5 — Динамика электрона с начальными значениями импульса $p_{x,0} = 400$, $p_{y,0} = p_{e,0} = 240$, $p_{z,0} = p_{b,0} = -320$ ($\gamma_0 \approx 568$) в плоской циркулярно-поляризованной монохроматической волне с безразмерной амплитудой $a_0 = 500$ и длиной волны $\lambda = 1$ мкм ($\chi_0 = 0.2$, $\mathcal{A} \approx 0.5$), распространяющейся вдоль оси x : (а) энергия электрона, нормированная на начальное значение, (б) значение КЭД параметра χ : $a_0 p_- / a_s$. Красная линия соответствует классическому решению без учёта реакции излучения, зелёная (синяя) линия — численному решению неукороченных уравнений движения (1.10)–(1.11) с учётом реакции излучения с помощью полуклассического (квантового) подхода (см. Приложение А). Оранжевая штрих-пунктирная линия соответствует аналитическому решению (1.140), (1.145), (1.146).

1.5.3 Монохроматическая линейно-поляризованная плоская волна

Наконец, рассмотрим монохроматическую линейно-поляризованную плоскую волну: $E_y = a_0 \cos \varphi$, $E_z = 0$, $\Omega = 0$. В таком случае

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right), \quad (1.147)$$

$$p_- = \frac{p_{-,0}}{1 + \frac{\mathcal{A}}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right)}, \quad (1.148)$$

соответственно

$$\frac{d\epsilon}{d\varphi} = -a_0 \cos \varphi \left(1 + \frac{\mathcal{A}}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \right), \quad (1.149)$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = 0. \quad (1.150)$$

Интегрируя данные уравнения и записывая результат через переменные p_e , p_b , получаем

$$p_e = \frac{p_{e,0} + a_0 \sin \varphi \left(1 + \frac{\mathcal{A}\varphi}{2}\right) - \frac{2\mathcal{A}a_0}{3}(2 + \cos \varphi) \sin^4 \frac{\varphi}{2}}{1 + \frac{\mathcal{A}}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)} \quad (1.151)$$

$$p_b = \frac{p_{b,0}}{1 + \frac{\mathcal{A}}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)} \quad (1.152)$$

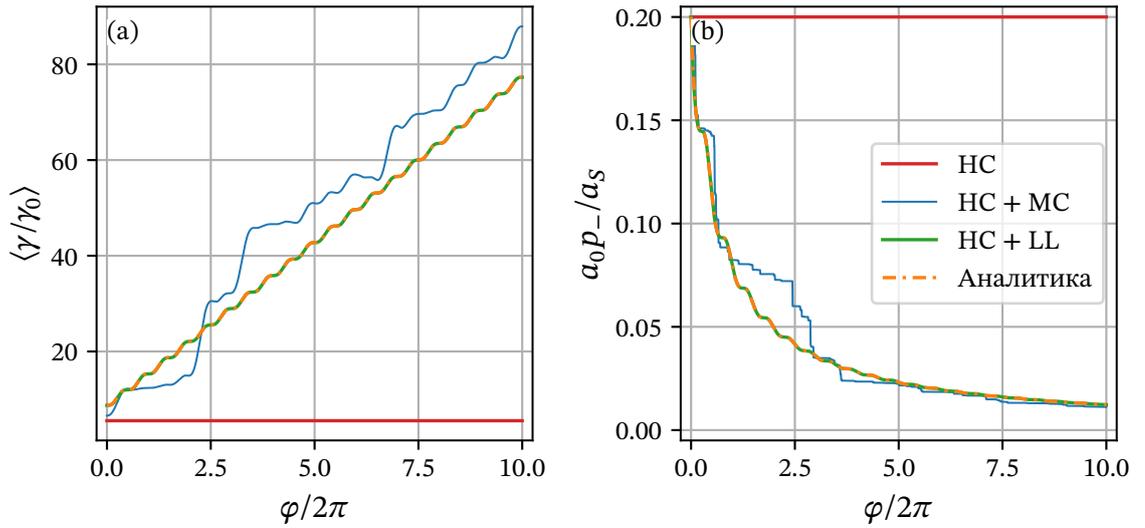


Рисунок 1.6 — Динамика электрона с начальными значениями импульса $p_{x,0} = -81$, $p_{y,0} = p_{e,0} = -12$, $p_{z,0} = p_{b,0} = 16$ ($\gamma_0 \approx 84$) в плоской линейно-поляризованной монохроматической волне с безразмерной амплитудой $a_0 = 500$ и длиной волны $\lambda = 1$ мкм ($\chi_0 = 0.2$, $\mathcal{A} \approx 0.5$), распространяющейся вдоль оси x : (а) средняя за период волны энергия электрона, нормированная на начальное значение, (б) максимальное значение КЭД параметра χ : $a_0 p_- / a_s$. Красная линия соответствует классическому решению без учёта реакции излучения, зелёная (синяя) линия — численному решению неукороченных уравнений движения (1.10)–(1.11) с учётом реакции излучения с помощью полуклассического (квантового) подхода (см. Приложение А). Оранжевая штрих-пунктирная линия соответствует аналитическому решению (1.148), (1.151), (1.152).

1.5.4 Обсуждение

Отметим, что точное решение неукороченных уравнений движения электрона без учёта реакции излучения в рассмотренных частных случаях

хорошо известно (см. например [151]) и оно совпадает с полученными нами решениями в пределе $\mathcal{A} = 0$. Более того, в публикации [161] найдено точное решение уравнений движения электрона с реакцией излучения, записанной в форме Ландау-Лифшица, которая использована и в нашем решении, однако оно записано в неявной форме, достаточно сложной для анализа. Полученное с помощью разработанной нами теорией решение записывается в простой форме и совпадает с точным решением. Отметим общее свойство полученных решений: реакция излучения существенно не изменяет поперечную динамику электрона в плоской волне, однако приводит к увеличению энергии электрона в $\mathcal{A}\varphi$ раз (с точностью до численного множителя) по сравнению со случаем без реакции излучения. Это приводит к довольно неожиданному результату, что в монохроматической плоской волне (циркулярно или линейно-поляризованной) среднее за период волны значение энергии электрона, связанной преимущественно с продольным движением, неограниченно растёт. Несмотря на то, что о таком поведении было известно довольно давно (см. [158; 161–165]) и оно подтверждается численным решением неукороченных уравнений движения (1.10)–(1.11) (см. Рис. 1.6), оно не кажется достаточно известным в широких кругах. Довольно простые рассуждения могут разрешить кажущуюся противоречивость данного результата. Для этого удобнее описывать реакцию излучения с квантовой точки зрения. Повторяя рассуждения, сделанные во введении к данной главе, в релятивистски сильной плоской волне ($E \gg 1$) длина формирования излучения может быть оценена как $\lambda/E \ll \lambda$, из чего делается вывод, что электрон движется классически между короткими актами излучения. Без учёта реакции излучения величина $\gamma - p_x$ является хорошо известным интегралом движения, где p_x — импульс электрона вдоль направления распространения волны (красная линия на Рис. 1.6 (b)) Вероятность излучения зависит от величины КЭД параметра χ , который в плоской волне может быть выражен следующим образом

$$\chi = \frac{E(\varphi)}{a_S} (\gamma - p_x). \quad (1.153)$$

Так как длина формирования излучения существенно меньше длины волны, то можно считать, что излучение происходит в постоянных полях. В таком случае из законов сохранения импульса и энергии следует, что величина параметра χ строго уменьшается в процессе излучения. Данный факт хорошо

продемонстрирован синей линией на Рис. 1.6 (b), на которой видны характерные скачки, соответствующие излучению отдельных фотонов. Таким образом, можно заключить, что при учёте реакции излучения величина $\gamma - p_x$ асимптотически стремится к нулю, что может быть выполнено только в случае, когда продольный импульс p_x (и энергия γ соответственно) неограниченно растёт.

Данный пример также является очень показательным с точки зрения границ применимости нашего подхода. Разработанная выше асимптотическая теория изначально строится исходя из основного предположения, что скорость электрона «притягивается» к безрадиационному направлению быстрее, чем изменяется ЭМ поле. При этом условие выполнения данного предположения записывается в виде $\gamma \ll a_0$, которое в свою очередь исходит из оценки характерной энергии электрона в плоской волне без учёта реакции излучения $\gamma \approx \sqrt{1 + a_0^2}$. Однако, как показывает построенное выше решение, энергия электрона в плоской волне с учётом реакции излучения неограниченно растёт, а амплитуда волны a_0 очевидно остаётся постоянной. Поэтому за конечное время условие $\gamma \ll a_0$ перестает выполняться на большей части траектории электрона. Тем не менее, построенное нами решение с поразительной точностью совпадает с численным решением данной задачи. Данное разногласие может быть разрешено лишь путём отбрасывания условия $\gamma \ll a_0$ как определяющего применимость безрадиационного описания в общем случае. Более того, единственным условием необходимым для справедливости полученного решения в плоской волне является условие $a_0 > 1$, которое также существенно отличается от условия применимости, например, решения Зельдовича (1.80), которое записывается как $a_0 \gg a_0^*$, где $a_0^* \gg 1$ (по крайней мере для оптических частот). Таким образом, по видимому граница применимости разработанной нами теории оказывается шире, чем изначально предполагалось, поэтому вопрос об определённости этих границ пока остаётся открытым. Некоторую определённость даёт тот факт, что разработанная нами теория есть не более чем разложение уравнений движения электрона, записанных относительно его скорости, в ряд относительно некоторого предположения \mathbf{v}_0 . Так как модуль вектора скорости электрона строго меньше единицы, то разложение относительно произвольного изначального предположения $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ сходится. Оказывается, что в режиме экстремальных радиационных потерь при выборе безрадиационного направления \mathbf{v}_0 в каче-

стве нулевого приближения, разложение в ряд сходится наиболее быстро, поэтому в некоторых задачах оказывается достаточным разложение только до линейных или квадратичных слагаемых. Отметим также, что в недавней работе [157] были предприняты попытки унификации данных условий, однако их достоверность пока не была проверена на большом числе конфигураций ЭМ поля, в частности, рассмотренных в данной работе.

1.6 Выводы

Таким образом, было показано, что в режиме экстремальных радиационных потерь скорость \mathbf{v} а не её производная заряженных частиц приближенно определяется только полями (1.20). Это означает, что траектория электрона может быть найдена из уравнения первого порядка (1.19). Данное направление скорости мы называем *асимптотическим*, поскольку она совпадает с асимптотической ($t \rightarrow \infty$) скоростью электрона в приближении постоянного поля. Причина понижения порядка уравнения заключается в том, что энергия электронов в режиме экстремальных радиационных потерь мала ($\gamma \ll a_0$), т.е. электроны оказываются «лёгкими» и быстро поворачиваются сильным полем к асимптотическому направлению за время, много меньшее, чем характерное время изменения самого ЭМ поля. Поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ соответствует отсутствию поперечной составляющей силы Лоренца, и соответственно силы радиационного трения, поэтому \mathbf{v} также называют безрадиационным направлением [166].

В ряде конфигураций электромагнитного поля найдены численные решения укороченных и полных уравнений движения электронов с учетом реакции излучения. Сравнение этих решений показывает, что укороченные уравнения можно использовать для качественного описания траекторий электронов при a_0 больших или порядка тысячи для оптических длин волн. В связи с этим построенное описание также является асимптотическим с точки зрения напряжённости полей, т.е. $a_0 \rightarrow \infty$.

Также было показано, что разработанная асимптотическая теория является полезным аналитическим инструментом. Например, асимптотическая теория предсказывает к периодическим траекториям электронов в широком классе стоячих электромагнитных полей (включая случай встречных

остросфокусированных лазерных импульсов, см. раздел 1.3), что принципиально отличается от результатов, полученных в пондеромоторном приближении. Этот результат хорошо согласуется с работой [154], демонстрирующей уменьшение пондеромоторной силы в режиме сильных радиационных потерь. Кроме того, было показано, что в определенной конфигурации лазерного импульса в режиме экстремальных радиационных потерь не отталкивает электроны, а захватывает их и уносит их с групповой скоростью импульса. Этот результат, вероятно, может объяснять радиационный захват частиц, наблюдаемый в численном моделировании в различных конфигурациях [60—65]. Таким образом пондеромоторное приближение становится неприменимым в режиме преобладания излучения и должно быть заменено асимптотическим описанием. Последнее также означает, что скорости всех электронов в небольшой окрестности практически совпадают, следовательно, их коллективная динамика может быть описана в рамках гидродинамического подхода. Такой гидродинамический подход будет применён в следующей главе для описания развития КЭД каскада в поле плоской волны.

Наконец, были найдены поправки высшего порядка малости к асимптотической теории, с помощью которых можно более точно описывать динамику частиц в режиме экстремальных радиационных потерь. Примечательно, что разработанный метод позволяет получить качественно новые результаты по сравнению с асимптотической теорией в «нулевом порядке». Применение этого подхода было продемонстрировано в различных конфигурациях электромагнитного поля. В частности, было воспроизведено решение обобщённой задачи Зельдовича о движении электрона во вращающихся параллельных электрическом и магнитном полях [91; 158], продемонстрировано снижение среднего темпа ускорения электронов в модельном плазменном ускорителе [52; 59], и описана малоизвестная особенность движения электрона в сильных плоских волнах — неограниченное продольное ускорение [161—165].

Основные полученные в данной главе результаты опубликованы в работах [A2; A10; A16; A19; A20]

Глава 2. Взаимодействие экстремально интенсивного лазерного излучения с твердотельной мишенью

2.1 Введение

В предыдущей главе было показано, что реакция излучения может существенно влиять на динамику частиц в сильных ЭМ полях. Помимо реакции излучения, существует еще один важный эффект, который оказывает значительное влияние на поведение вещества в экстремальных ЭМ полях — развитие КЭД каскадов [44; 87—91; 99; 107; 109; 123; 167]. Они возникают в результате излучения жестких фотонов ультрарелятивистскими частицами, и последующего распада первых на электрон-позитронные пары в результате нелинейного процесса Брейта-Уилера или нелинейного трайидент процесса. Вторичные частицы также вовлекаются в излучение фотонов и фоторождение пар, что приводит к лавинообразному росту количества частиц. Одной из главных причин того, что развитие КЭД каскадов пока ещё не было продемонстрировано экспериментально, состоит в том, что данный феномен является пороговым по интенсивности ЭМ поля. Это в свою очередь связано с экспоненциально малой вероятностью процесса Брейта-Уилера и трайидент процесса в области параметров $\chi \lesssim 1$, где χ — КЭД параметр фотонов, определяемый следующим образом

$$\chi = \frac{\varepsilon}{a_s} \sqrt{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 - (\mathbf{vE})^2}, \quad (2.1)$$

где ε и $\mathbf{v} \equiv \mathbf{k}/k$ — энергия, нормированная на mc^2 , и направление распространения фотона соответственно, \mathbf{k} — волновой вектор фотона. Для оценки параметров лазерного излучения, требуемых для наблюдения КЭД каскада, обычно предполагают, что характерная энергия электрона в поле лазера равна по порядку величины a_0 . Таким образом, условие $\chi > 1$, требуемое для развития КЭД каскада, записывается через интенсивность излучения как $I[10^{23} \text{ Вт/см}^2]\lambda[\text{мкм}] \gtrsim 5$. Данная оценка кажется довольно оптимистичной применительно к упомянутым во введении лазерным установкам нового поколения, работающим в оптическом диапазоне $\lambda \approx 1 \text{ мкм}$, и на которых ожидаются интенсивности порядка $I \sim 10^{24} \text{ Вт/см}^2$. Однако, из-за порогового характера КЭД каскада, представленная выше грубая оценка явля-

ется недостаточной, а более точные оценки существенно зависят от конфигурации взаимодействия. В связи с этим в настоящее время ведётся активный поиск таких оптимальных конфигураций, при которых пороговое значение интенсивности для развития КЭД каскада было бы минимальным [44; 66; 91—98; 168—178]. Данные схемы можно преимущественно разделить на две группы: в первой предлагается взаимодействие лазерного пучка с предварительно ускоренной затравкой, во второй предлагается использование многопучковой конфигурации лазерного излучения и взаимодействие с неподвижной затравкой. Причиной оптимальности таких конфигураций является максимизация КЭД параметра χ . Однако между этими двумя подходами есть принципиальное различие. В первом случае энергия каскада ограничивается начальной энергией затравки, и такой каскад называется *ливневым* или каскадом S-типа (shower). К каскадам S-типа также относят, например, атмосферные ливни, вызванные космическими лучами [179]. Во втором случае каскад черпает энергию из электромагнитного поля, такой каскад называется *самоподдерживающимся, лавинообразным* или каскадом A-типа (avalanche). При использовании нескольких и/или остро-сфокусированных лазерных пучков итоговая конфигурация ЭМ поля существенно отличается от поля одиночной плоской волны, которая считается неоптимальной для наблюдения КЭД эффектов, т.к. в таком случае изначально покоящийся электрон не может быть ускорен таким образом, чтобы излучать достаточно жёсткие фотоны [90; 137; 175; 180]. КЭД каскад также может развиваться в поле, формируемом лазерным излучением при взаимодействии с твердотельными мишенями [91]. Влияние КЭД эффектов на взаимодействие лазера с твердотельным веществом в основном исследуется в режиме «лазерного бурения» («hole boring» — НВ) [23; 181], когда толщина мишени намного превышает глубину проникновения лазера в мишень. В частности, в численном моделировании [55; 89; 91; 96] наблюдается образование электрон-позитронных плазменных «подушек» [182], которые, однако, не останавливают ускорение ионов. Такой режим взаимодействия в целом характеризуется значительным отражением падающего лазерного излучения, поэтому развитие КЭД каскада в такой конфигурации во многом аналогично конфигурации с двумя встречными импульсами. Если же толщина мишени не превышает глубины скин-слоя, то реализуется режим «светового паруса» («light sail» — LS) [20; 23]. В этом случае фольга непрерывно ускоряется как единое целое, а отраже-

нием лазера можно пренебречь. Хотя в последние годы режим светового паруса вызвал значительный интерес как одна из наиболее эффективных схем лазерного ускорения ионов [24], он довольно слабо исследован в области экстремально высоких интенсивностей лазерного излучения, когда КЭД эффекты играют ключевую роль.

Таким образом, КЭД каскад — это сложный нелинейный процесс, построение аналитического описания которого весьма затруднено, а экспериментальное наблюдение пока невозможно. В связи с этим наиболее частым инструментом для исследования КЭД каскадов является численное моделирование, среди методов которого наиболее плодотворным является метод *частиц-в-ячейках* или *particles-in-cells* (PIC). PIC моделирование служит отправной точкой большинства современных исследований в данной области, и позволяет получать ценную информацию о природе данного феномена. Однако, данный метод является крайне требовательным к вычислительным ресурсам, поэтому получение каких-либо феноменологических законов или скейлингов занимает много времени, т.к. обычно для этого требуется сканирование по многомерному пространству параметров задачи. Тем не менее такие закономерности имеют важное значение для подготовки экспериментов на лазерных установках нового поколения.

Данная глава посвящена описанию нового обнаруженного эффекта — распространению волны пробоя вакуума в виде самоподдерживающегося КЭД каскада в экстремально интенсивной плоской волне, т.е. в конфигурации, обычно считающейся неподходящей для развития КЭД каскада. При этом, требуемая для наблюдения этого эффекта напряжённость поля волны оказывается существенно ниже порога Заутера-Швингера для рождения пар из вакуума [1; 2], и немного выше порога развития самоподдерживающегося каскада в конфигурации стоячей волны [92]. Эффект наблюдается при QED-PIC моделировании взаимодействия лазера экстремальной интенсивности с фольгой в режиме светового паруса. Показано, что лазерный «пробой вакуума», сопровождающийся развитием КЭД каскада, приводит к образованию сверхплотной электронно-позитронной плазменной «подушки» между лазерным излучением и движущейся фольгой. Передний по отношению к лазерному импульсу фронт этой подушки распространяется навстречу излучению, что качественно напоминает волну микроволнового пробоя газа, распространяющуюся навстречу источника СВЧ излучения [101; 102]. Об-

разующаяся электрон-позитронная плазма эффективно поглощает лазерное излучение и отделяет излучение от фольги, тем самым прерывая ускорение ионов. Однако КЭД каскад продолжает развиваться даже после отделения фольги от лазерного поля, что позволяет отнести такой каскад к самоподдерживающимся.

2.2 Влияние квантово-электродинамических эффектов на взаимодействие лазерного импульса с твердотельной мишенью

Приступим к рассмотрению взаимодействия интенсивного лазерного излучения с закритической плазмой. Большая часть публикаций, посвящённых развитию самоподдерживающихся КЭД каскадов (каскадов А-типа), рассматривает конфигурацию с несколькими лазерными импульсами, распространяющимися навстречу друг другу и формирующими стоячую волну. В строго плоской волне развитие КЭД каскада невозможно, так как параметр χ для электронов и позитронов в такой конфигурации поля является интегралом движения без учёта реакции излучения (см., например, главу 1). Поэтому образование гамма-фотонов и пар возможно лишь до тех пор, пока параметр χ всех частиц не уменьшится до значений $\lesssim 1$ и вероятности КЭД процессов станут экспоненциально малыми. Однако, данные рассуждения не означают невозможности развития самоподдерживающегося КЭД каскада в поле единичного лазерного импульса, т.к., например, в узко-сфокусированном лазерном импульсе конфигурация поля значительно отлична от плоской волны. Ниже мы приводим результаты численного моделирования процесса взаимодействия лазерного импульса с конфигурацией поля близкой к плоской волне с тонкой твердотельной мишенью. В результате такого взаимодействия конфигурация поля изменяется, что приводит к возможности формирования самоподдерживающегося каскада. Известно, что подобное образование КЭД каскада возможно в случае взаимодействия лазерного импульса с толстой мишенью, т.к. в таком случае присутствует сильное отражение, которое формирует стоячую волну. В нашем же случае отражение практически отсутствует и развитие КЭД каскада возможно из-за того, что внутри электрон-позитронной плазмы магнитное поле больше электрического (см. раздел 2.2.2). Так как поперечная ограниченность лазерного импульса и мишени в численном моделировании не влияет на принципиальную схему раз-

вития каскада, можно считать, что развитие каскада А-типа в плоской волне возможно в случае подходящей затравки, например, в виде твердотельной мишени.

2.2.1 QED-PIC моделирование

Взаимодействие лазерного излучения с мишенью моделируется с помощью комплекса QUILL [183], реализующий метод частиц-в-ячейках и метод Монте-Карло для моделирования вероятностных КЭД процессов: нелинейного комптоновского рассеяния и нелинейного процесса Брейта-Уилера. В моделировании циркулярно-поляризованный лазерный импульс с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega_L = 1$ мкм, амплитудой $a_0 = eE/m_e c \omega_L$ распространялся вдоль оси x и имел следующую огибающую:

$$a(x, y, z, t = 0) = a_0 \cos^2\left(\frac{\pi x^4}{2 \sigma_x^4}\right) \cos^2\left(\frac{\pi y^4}{2 \sigma_y^4}\right) \cos^2\left(\frac{\pi z^4}{2 \sigma_z^4}\right) \cos\left(\frac{x\omega_L}{c}\right), \quad (2.2)$$

где координаты x, y, z отсчитываются от центра лазерного импульса. Поперечные размеры импульса составляли $2\sigma_y = 2\sigma_z = 10.4$ мкм, длительность — 45 фс ($2\sigma_x = 13.4$ мкм). Таким образом, структура лазерного поля приближена к плоской волне. Мишень толщиной d и начальной концентрацией электронов n_e имела поперечные размеры несколько больше поперечных размеров лазерного импульса. Область моделирования с размером $20\lambda \times 30\lambda \times 30\lambda$ была разбита на сетку $2000 \times 300 \times 300$ (по осям x, y и z соответственно). Была проведена серия численных моделирований с различными параметрами a_0, n_e и d , удовлетворяющие при этом соотношению $a_0 = \eta n_e d \lambda r_e$, которое необходимо для реализации ускорения ионов в режиме «светового паруса» (см. например [23]). Здесь $r_e = e^2/m_e c^2$ — это классический радиус электрона, η — числовой коэффициент порядка единицы (во всех счётах $\eta = 1.5$). Такие параметры подбираются для оценки влияния КЭД эффектов на ускорение ионов. Так как характерные значения a_0 в наших моделированиях составляют порядка 10^3 , то характерное значение концентрации электронов мишени составляет $n_e \sim 10^{23} \text{ см}^{-3}$, что соответствует характерной концентрации твердотельных веществ.

Временная эволюция плотности частиц и электромагнитной энергии представлена на Рис. 2.1 для счёта с параметрами: $n_e = 5.9 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3} \approx 530 n_{\text{cr}}$ ($n_{\text{cr}} = m_e \omega_L^2 / 4\pi e^2 \approx 1 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$ — критическая концентрация), $d = 1$ мкм,

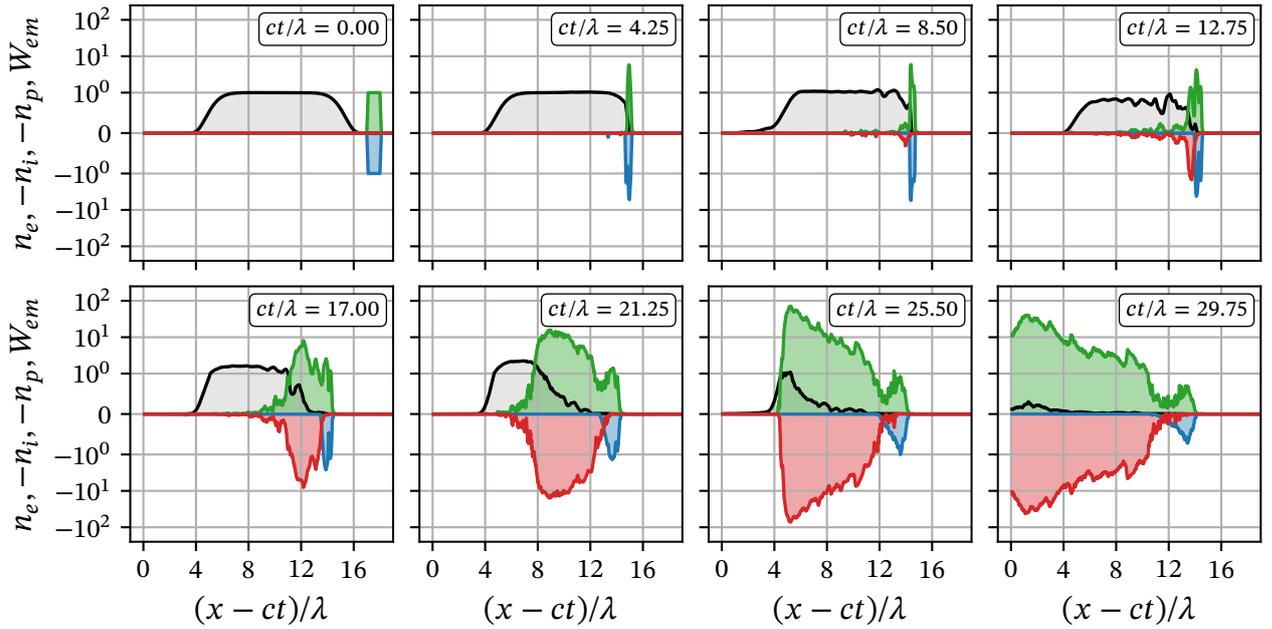


Рисунок 2.1 — Распределение плотности частиц (зелёная линия — электроны, синяя — ионы, красная — позитроны) и электромагнитной энергии (чёрная линия) вдоль оси x в различные моменты времени. Значения нормированы на максимальные начальные значения. Масштаб вертикальной оси линейный для значений $[-1, 1]$ и логарифмический для остальных значений.

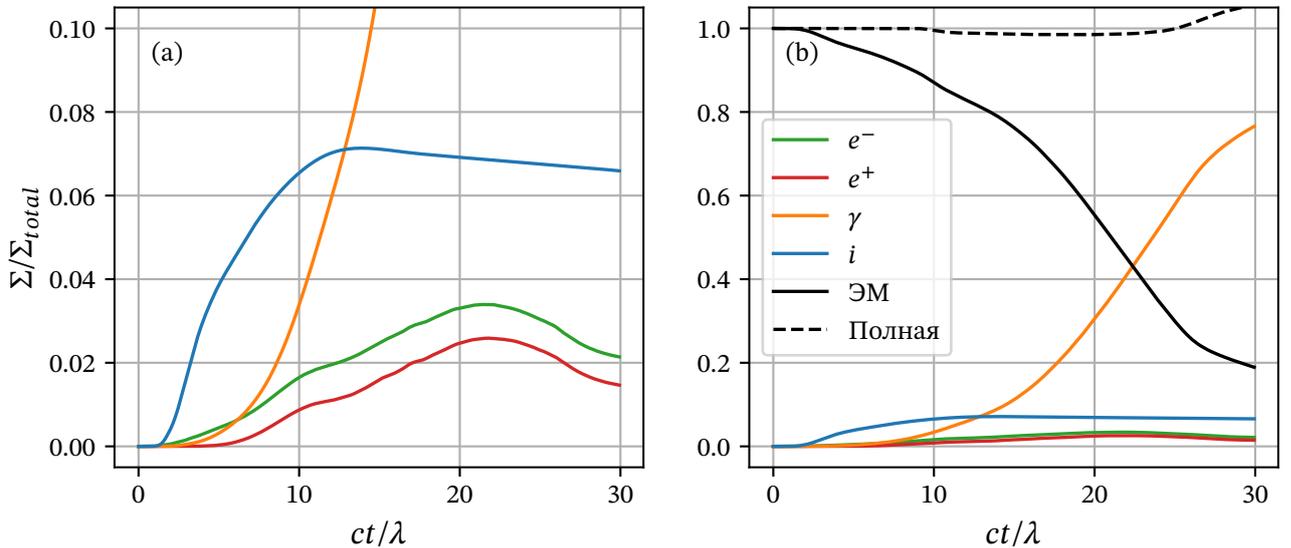


Рисунок 2.2 — (а) Часть энергии лазерного импульса, перешедшая в энергию частиц, как функция времени. (б) Полная энергия системы, энергия лазерного импульса и энергия гамма-квантов, нормированные на начальное значение полной энергии.

$a_0 = 2500$. Из анализа результатов численного моделирования следует, что до времени $ct/\lambda \lesssim 8$ мишень сжимается в тонкий слой и ускоряется в про-

дольном направлении до скорости, близкой к скорости света, т.е. происходит типичное ускорение ионов в режиме «светового паруса» (см. Рис. 2.2 (а)). Число электрон-позитронных пар, образованных в течение этого времени, незначительно. В интервал времени $8 \lesssim ct/\lambda \lesssim 14$ начинает формироваться неоднородная электрон-позитронная плазма, которая частично поглощает излучение, что приводит к снижению эффективности ускорения ионов (см. Рис. 2.2 (а)). В период времени $14 \lesssim ct/\lambda \lesssim 28$ КЭД каскад развивается в самоподдерживающемся режиме, т.е. без участия частиц начальной затравки. При этом передний (по отношению к лазерному импульсу) фронт распределения электрон-позитронной пары движется со скоростью v_{fr} меньшей, чем скорость света; задний фронт при этом по инерции движется вместе с мишенью практически со световой скоростью.

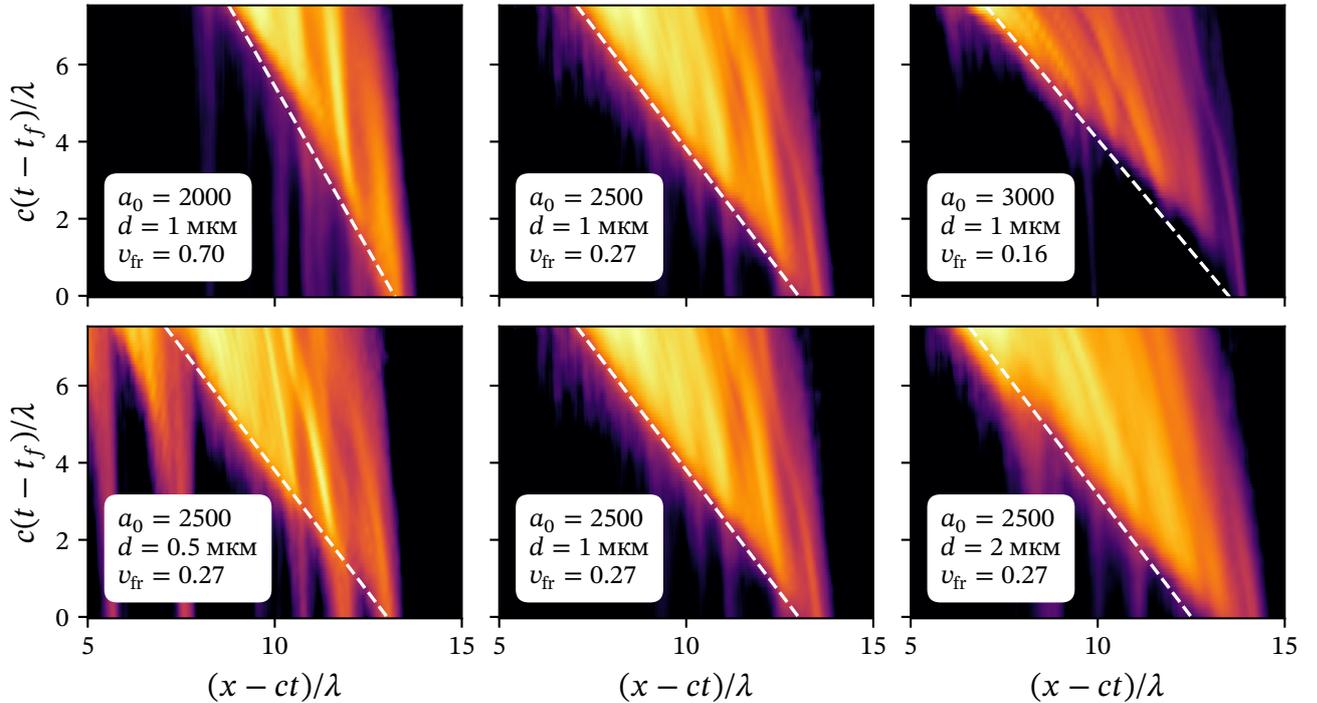


Рисунок 2.3 — Распределение позитронов в плоскости $x - t$. Более яркий цвет обозначает большую плотность. Значения скорости фронта каскада (белые штриховые линии) даны в лабораторной системе отсчёта. t_f — приблизительное время начала образования подушки. $ct_f/\lambda \approx 17.5$ для $a_0 = 2000$, $ct_f/\lambda \approx 15.0$ для $a_0 = 2500$, $ct_f/\lambda \approx 12.5$ для $a_0 = 3000$.

Был проведён ряд численных счётов с различными значениями $a_0 = 1500, 2000, 2500, 3000$ и мишенью толщиной $d = 1$ мкм и с различными значениями $d = 0.5$ мкм, 1 мкм, 2 мкм для $a_0 = 2500$. На Рис. 2.3 видно, что

скорость фронта каскада слабо зависит от времени и толщины мишени, тогда как сильно зависит от интенсивности лазерного импульса, уменьшаясь (в лабораторной системе отсчёта) с её ростом. Также стоит отметить, что на поздних стадиях взаимодействия концентрация электрон-позитронной плазмы в несколько раз превышает значение релятивистской критической концентрации $a_0 n_{cr}$. Во всех проведённых счётах каскад эффективно развивается, однако, при $a_0 = 1500$ концентрация плазмы достигает значения $0.6a_0 n_{cr}$ к концу моделирования ($t = 30\lambda/c$). Поэтому мы предполагаем, что значение $a_0 = 1500$ является грубым пороговым значением для развития самоподдерживающегося каскада в плоской волне.

Для того, чтобы определить роль ионов мишени в образовании КЭД каскада, мы провели моделирование взаимодействия лазерного импульса с закритической электрон-позитронной мишенью. Геометрия мишени и импульса выбрана такой же, как описано выше. Толщина мишени составляла $d = 1$ мкм, концентрация электронов $n_e = 0.7a_0 n_{cr}$, $a_0 = 2500$. Анализ результатов моделирования показывает, что самоподдерживающийся КЭД каскад развивается таким же образом, как и при затравке из электрон-ионной мишени; более того, совпадает и скорость фронта каскада. Из этого можно сделать вывод, что при определённом выборе затравки и достаточно высокой интенсивности лазерного импульса возможно развитие КЭД каскада А-типа в поле с конфигурацией, близкой к плоской волне.

2.2.2 Ключевые особенности и механизм развития КЭД каскада

Рассмотрим более подробно распределение электромагнитного поля и динамику частиц внутри электрон-позитронной плазмы для определения механизма развития каскада. Из Рис. 2.4 (а) следует, что структура поля близка к циркулярно-поляризованной волне с перпендикулярными электрической и магнитной компонентами, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, и поле затухает в плазме на масштабе в несколько длин волн. Ключевая особенность конфигурации поля — преобладание магнитного поля над электрическим, $B > E$. В таком поле электроны и позитроны не набирают энергию (см. линию $\bar{\gamma}/a_0$ на Рис. 2.4 (b)), поэтому развитие каскада внутри плазмы подавлено. Более того в таком поле траектории частиц представляют собой винтовые линии (см. Рис. 2.5 (a)). Это легко объясняется, если мы перейдём в систему отсчёта, движущуюся со

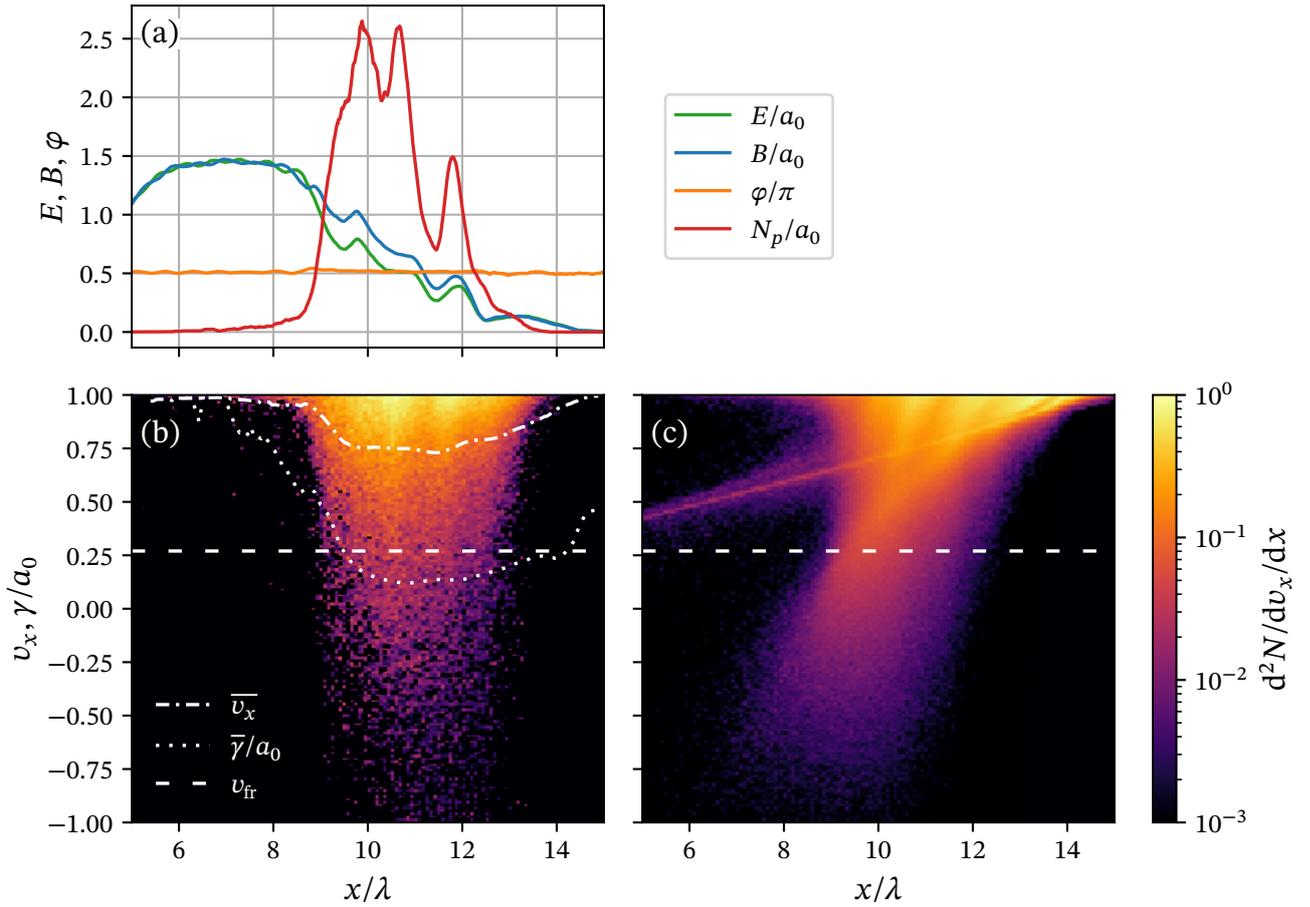


Рисунок 2.4 — Результаты численного моделирования в момент времени $t = 20\lambda/c$. (a) Распределение амплитуды электрического поля E , амплитуды магнитного поля B , угла φ между ними и концентрации позитронов N_p . Распределение (b) позитронов и (c) гамма-квантов в плоскости $x - v_x$ (плотность частиц обозначена цветом), их средняя продольная скорость $\overline{v_x}$ (белая штрихпунктирная линия) и Лоренц-фактор $\overline{\gamma}$ (белая пунктирная линия) как функции x . Белой штриховой линией обозначена скорость фронта каскада v_{fr} (равная 0.27 в данном моделировании).

скоростью $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_x/B^2$, в которой электрическое поле параллельно магнитному и меньше его. В таком поле частицы вращаются в плоскости, перпендикулярной магнитному полю и могут иметь компоненту скорости вдоль магнитного поля. В лабораторной системе электроны и позитроны в среднем обгоняют фронт каскада, однако, из-за вращения частиц их мгновенная скорость вдоль оси x иногда может быть меньше скорости фронта (см. Рис. 2.4 (b) и Рис. 2.5 (b)). В такие моменты частицы могут излучить гамма-квант, который попадёт в вакуумную область (большое количество гамма-квантов, распространяющихся медленнее фронта каскада и даже навстречу лазерному излу-

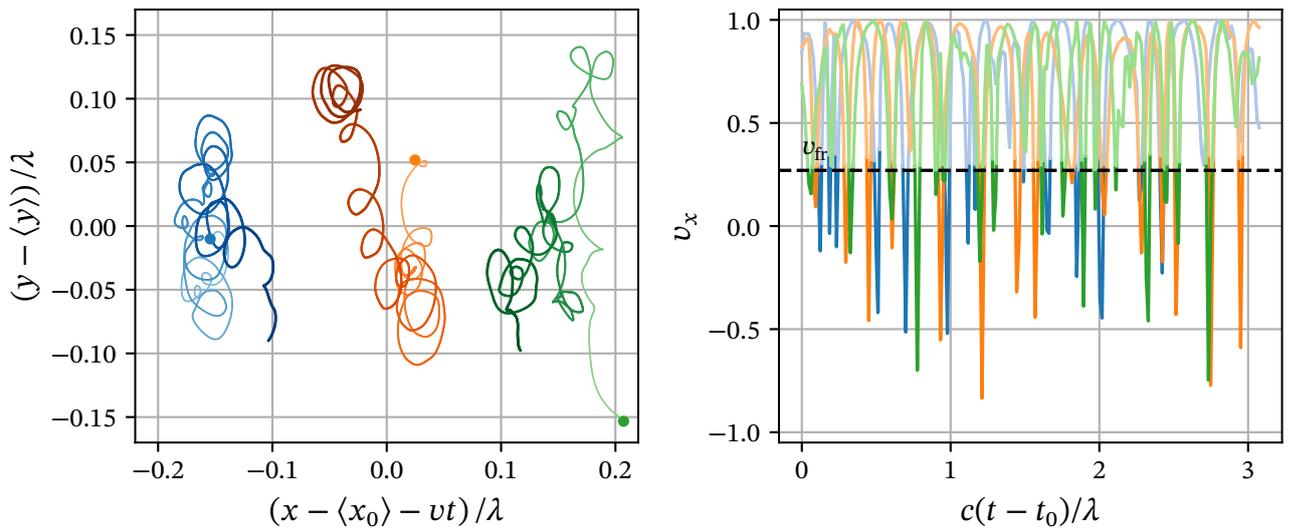


Рисунок 2.5 — Характеристики движения трёх электронов, находящихся внутри электрон-позитронной подушки. (а) Траектории электронов в плоскости xu , в системе отсчёта, движущейся со скоростью $v = 0.7$. Положение частицы в более поздние моменты времени обозначено более тёмным цветом, начальное положение частицы отмечено кружком. (б) Зависимость продольной скорости в зависимости от времени. Чёрная пунктирная линия соответствует скорости фронта каскада $v_{fr} = 0.27$.

чения, наблюдается в численном моделировании, что продемонстрировано на Рис. 2.4 (с)) и образует в сильном поле новую электрон-позитронную пару. Эта пара затем ускоряется сильным полем внутри плазмы, где магнитное поле больше электрического и процесс повторяется. Таким образом, самоподдерживающееся развитие каскада происходит на границе вакуума и подушки. Важно подчеркнуть принципиальное различие между *вакуумной* и *плазменной* областями: в первой электромагнитная энергия передается каскадным частицам, а во второй частицы не ускоряются, а «высвобождают» полученную энергию в виде гамма-излучения. Некоторая часть этого излучения возвращается обратно в область вакуума и обеспечивает положительную обратную связь, необходимую для поддержания каскада. Механизм поддержания КЭД каскада в плоской волне схематически представлен на рисунке 2.6.

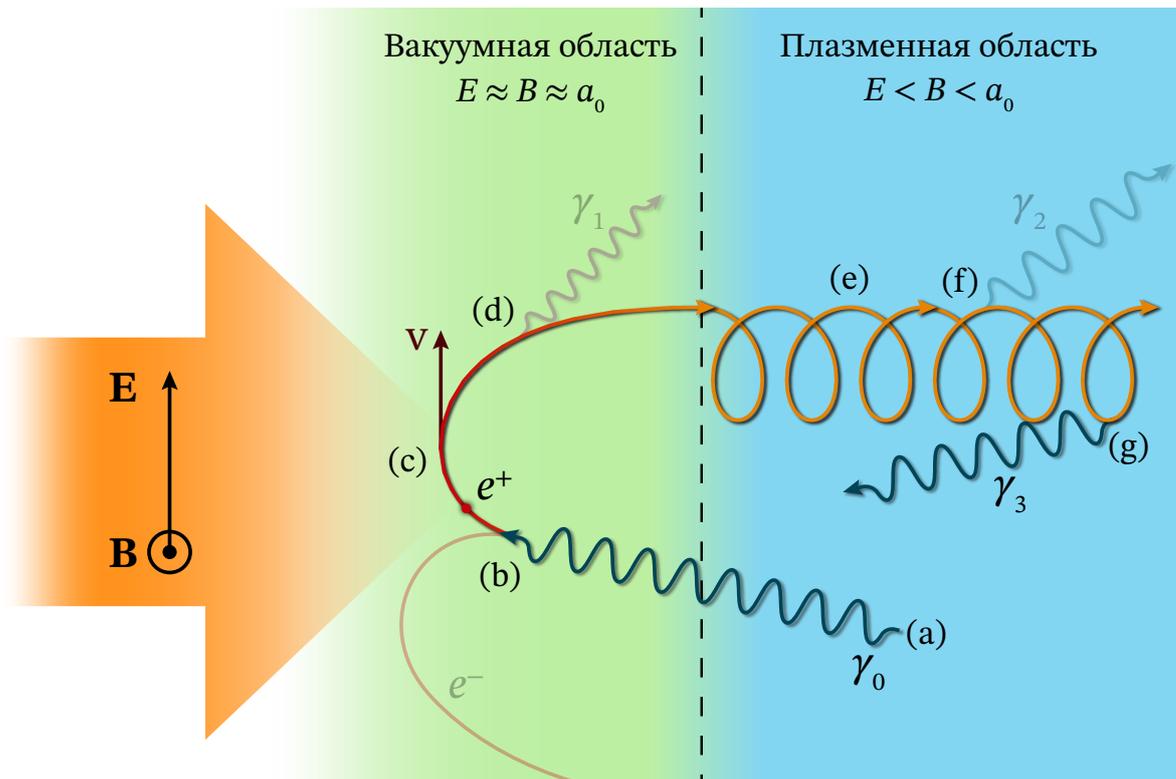


Рисунок 2.6 — Схематическое изображение механизма поддержания КЭД каскада. (a), (f), (g) Излучение *активного* (см. ниже) гамма-кванта в плазменной области, (b) распад *активного* гамма-кванта в вакуумной области, (c) ускорение электрона и позитрона в плоской волне, (d) излучение *пассивного* гамма-кванта в вакуумной области, (e) движение позитрона по винтовой линии в плазменной области.

2.3 Аналитическое описание самоподдерживающегося КЭД каскада в плоской волне

Приступим к аналитическому описанию описанных выше процессов. Аналогично работам [160; 169] запишем кинетические уравнения для электронов, позитронов и гамма-квантов, предполагая, что КЭД каскад находится на стадии самоподдержания, поэтому затравочные частицы, например, электроны и ионы начальной мишени, не влияют на его развитие. Кинетические уравнения совместно с уравнениями Максвелла (в виде теоремы Пойнтинга)

записываются в следующем виде

$$\frac{\partial f_{e^\pm}}{\partial t} + \mathbf{v}_{e^\pm} \nabla f_{e^\pm} \pm (\mathbf{E} + [\mathbf{v}_{e^\pm} \times \mathbf{B}]) \frac{\partial f_{e^\pm}}{\partial \mathbf{p}} = \int f_\gamma(\mathbf{p}') w_{\text{pair}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\mathbf{p}' + \quad (2.3)$$

$$+ \int f_{e^\pm}(\mathbf{p}') w_{\text{rad}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\mathbf{p}' - \\ - \int f_{e^\pm}(\mathbf{p}) w_{\text{rad}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}',$$

$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial t} + \mathbf{v}_\gamma \nabla f_\gamma = \int f_{e^\pm}(\mathbf{p}') w_{\text{rad}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{p}) d\mathbf{p}' - \quad (2.4)$$

$$+ \int f_\gamma(\mathbf{p}) w_{\text{pair}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}',$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{2} \right) + \nabla[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \int f_{e^-}(\mathbf{p})(\mathbf{v}_{e^-} - \mathbf{E}) d\mathbf{p} - \quad (2.5)$$

$$- \int f_{e^+}(\mathbf{p})(\mathbf{v}_{e^+} + \mathbf{E}) d\mathbf{p}, \quad (2.6)$$

где $f_{e^\pm, \gamma}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ — функции распределения электронов, позитронов и гамма-квантов соответственно, \mathbf{v} — скорость частиц, равная $\mathbf{p}/\sqrt{1 + p^2}$ для электронов и позитронов и равная \mathbf{p}/p для гамма-квантов, $w_{\text{rad}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\mathbf{p}'$ — вероятность излучения электроном или позитроном с импульсом \mathbf{p}' гамма-кванта с импульсом $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ в единицу времени, $w_{\text{pair}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) d\mathbf{p}'$ — вероятность распада гамма-кванта с импульсом \mathbf{p}' на электрон с импульсом \mathbf{p} и позитрон с импульсом $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ в единицу времени. Здесь также используется уже описанная выше релятивистская нормировка, при которой электрическое и магнитное поля нормируются на величину $m_e c \omega_L / e$, концентрация частиц — на критическую концентрацию $n_{\text{cr}} = m_e \omega_L^2 / 4\pi e^2$, энергия и импульс — на $m_e c^2$ и $m_e c$ соответственно, координаты и время — на c/ω_L и $1/\omega_L$ соответственно.

2.3.1 Общие предположения модели

Применим ряд упрощений к записанным выше уравнениям. Во-первых, т.к. исследуется взаимодействие с плоской ЭМ волной, то будем считать задачу пространственно одномерной. Более того, будем рассматривать взаимодействие с циркулярно-поляризованной волной и считать, что задача симметрична относительно поворота вокруг оси распространения волны (для определённости оси x здесь и далее). Данные предположения приводят к тому, что функции распределения частиц становятся функциями только трёх переменных (исключая время) вместо шести, т.е.

$f(t; \mathbf{r}, \mathbf{p}) = f(t; x, p, \theta)/2\pi$, где p — импульс частицы, θ — угол между вектором импульса частицы и осью симметрии x .

Во-вторых, предположим, что функции распределения являются локально моноэнергитическими, т.е. $f \propto \delta(p - \bar{p}(x))/p^2$, где $\bar{p}(x)$ — среднее значение импульса частиц, расположенных в малой окрестности x . Обозначим среднюю энергию гамма-квантов как ε_γ , и среднюю энергию электрон-позитронных пар как ε_p , предполагая, что они ультрарелятивистские, поэтому $\varepsilon_p^2 = 1 + p_p^2 \approx p_p^2$. Несмотря на то, что моноэнергитическое приближение является сильно упрощающим, мы предполагаем, что механизм развития и КЭД каскада, описанный выше, принципиально не зависит от каких-либо особенностей спектра частиц. Поэтому мы утверждаем, что учет эволюции энергетических спектров в нашей модели вызовет только количественные, а не качественные изменения, при этом сильно усложняя уравнения. Для гамма-квантов мы используем двухпотокное приближение, разделяя гамма-кванты на те, которые излучаются в вакуумной области и распространяются в основном вдоль направления распространения лазерного импульса и, таким образом, не дают вклада в развитие каскада (мы обозначим их как *пассивные* гамма-кванты) и те, которые излучаются в области плазмы в различных направлениях и обеспечивают положительную обратную связь, необходимую для развития каскада (мы обозначаем их либо как *активные* гамма-кванты, либо просто гамма-кванты). Как видно из Рис. 2.7 энергетический спектр гамма-квантов является достаточно широким, однако если исключить пассивные гамма-кванты, то ширина спектра значительно уменьшается, что оправдывает наше предположение. Поскольку пассивные гамма-кванты влияют на развитие каскада только забирая часть общей энергии, их пространственное распределение не имеет значения для развития каскада.

Для того, чтобы опустить интегрирование по энергиям и азимутальному углу φ (в плоскости yz), переопределим функции распределения f следующим образом

$$f(x, \varepsilon, \theta, \varphi) \rightarrow \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(x, \varepsilon, \theta, \varphi) 2\pi \varepsilon^2 d\varphi d\varepsilon = n(x)\Phi(\theta), \quad (2.7)$$

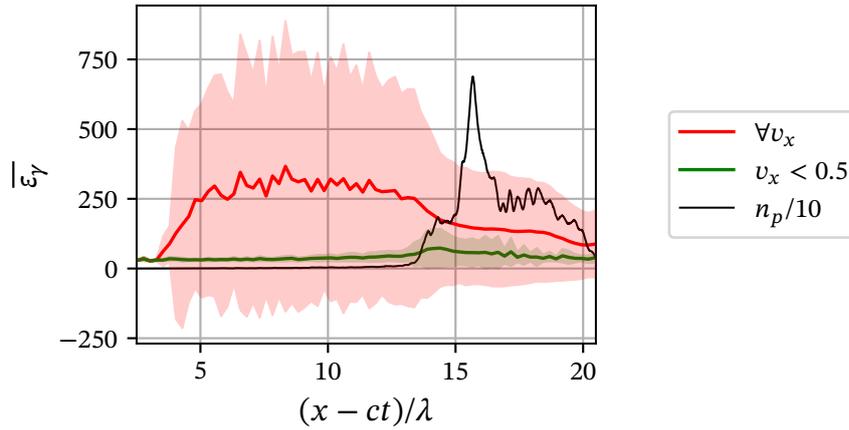


Рисунок 2.7 — Средняя энергия ε_γ гамма-квантов в зависимости от координаты x , рассчитанная по всем частицам (красная линия) и только по частицам со скоростью вдоль оси x не превышающей 0.5, что по нашим предположениям включает только активные гамма-кванты (зелёная линия). Закрашенные цветные области отображают среднеквадратичное отклонение энергии. Данные взяты из результатов PIC моделирования в момента времени $ct/\lambda = 18$. Параметры моделирования обсуждаются в п. 2.4.2. Начальные условия такие же, как на Рис. 2.15. Чёрная линия соответствует распределению плотности электрон-позитронной плазмы.

где $n(x)$ — концентрация частиц, $\Phi(\theta)$ — функция распределения импульса частиц по углу θ , причём

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(x) dx = N, \quad (2.8)$$

$$\int_0^\pi \Phi(\theta) \sin \theta d\theta = 1, \quad (2.9)$$

где N — полное число частиц.

Предположение о моноэнергитичности фактически соответствует переходу от кинетического к гидродинамическому описанию, т.е. записи уравнений на моменты функций распределения. Чтобы записать гидродинамиче-

ские уравнения предварительно введём несколько дополнительных величин

$$W_{\text{pair}}(\chi_\gamma, \varepsilon_\gamma) = \int w_{\text{pair}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}', \quad (2.10)$$

$$W_{\text{rad}}(\chi_p, \varepsilon_p) = \int w_{\text{rad}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d\mathbf{p}', \quad (2.11)$$

$$I_{\text{rad}}(\chi_p) = \int w_{\text{rad}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (\varepsilon_p - \varepsilon_p') d\mathbf{p}', \quad (2.12)$$

где $W_{\text{pair}}, W_{\text{rad}}, I_{\text{rad}}$ — полная вероятность фотообразования электрон-позитронных пар, полная вероятность и мощность излучения гамма-квантов соответственно [32]. Как неоднократно указывалось выше, данные величины зависят от Лоренц-инвариантного КЭД параметра χ

$$\chi = \frac{\varepsilon}{a_S} \sqrt{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})^2}, \quad (2.13)$$

где ε — энергия частицы, $a_S = eE_S/m_e c \omega_L = m_e c^2 / \hbar \omega_L$ и $E_S = m_e^2 c^3 / \hbar e$ — поле Завутера-Швингера [31]. В общем виде гидродинамические уравнения выглядят как уравнения переноса (непрерывности)

$$\frac{\partial D_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} = \sum_\beta S[\alpha, \beta], \quad (2.14)$$

где D_α и F_α — плотность и поток некоторой физической величины α , $S[\alpha, \beta]$ — источник, приводящий к изменению величины α в результате процесса β . Отметим, что несмотря на то, что мы определили функцию распределения частиц по энергиям, для вычисления источников $S[\alpha, \beta]$ также необходимо знать угловое распределение частиц, которое обсуждается ниже. Основываясь на качественном объяснении механизма развития и поддержания КЭД каскада, описанном в п. 2.2.2, мы предполагаем, что следующая система урав-

нений достаточно полно описывает данный процесс

$$\frac{\partial}{\partial t} n_p + \frac{\partial}{\partial x} (v_x n_p) = S[n, pp], \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_p n_p) + \frac{\partial}{\partial x} (v_x \varepsilon_p n_p) &= S[\varepsilon, pp] + S[\varepsilon, \text{acc}] \psi_{\text{vac}} - \\ &- S[\varepsilon, \text{rad}_a] \psi_{\text{pl}} - S[\varepsilon, \text{rad}_p] \psi_{\text{vac}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_\gamma + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_{\gamma\parallel}} n_\gamma) = -S[n, pp] + 2S[n, \text{rad}_a] \psi_{\text{pl}}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{v_{\gamma\parallel}} n_\gamma) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_{\gamma\parallel}^2} n_\gamma) = -S[v, pp] + 2S[v, \text{rad}_a] \psi_{\text{pl}}, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_\gamma n_\gamma) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_{\gamma\parallel}} \varepsilon_\gamma n_\gamma) = -S[\varepsilon, pp] + 2S[\varepsilon, \text{rad}_a] \psi_{\text{pl}}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + B^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_x = -2S[\varepsilon, \text{acc}] \psi_{\text{vac}} \equiv -\mathbf{jE}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \Sigma_\gamma}{\partial t} = 2 \int_0^\infty S[\varepsilon, \text{rad}_p] \psi_{\text{vac}} dx, \quad (2.21)$$

где $n_p = n_{e^+} = n_{e^-}$ — половина концентрации электрон-позитронной плазмы в предположении её квазинейтральности, v_x — средняя продольная скорость пар, рассчитываемая в п. 2.3.2, $\overline{v_{\gamma\parallel}}$ и $\overline{v_{\gamma\parallel}^2}$ — средняя величина и средний квадрат величины продольной скорости гамма-квантов. Последние рассчитываются из углового распределения следующим образом

$$\overline{v_{\gamma\parallel}} = \int_0^\pi \Phi(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad (2.22)$$

$$\overline{v_{\gamma\parallel}^2} = \int_0^\pi \Phi(\theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta. \quad (2.23)$$

Уравнение (2.20) является записью теоремы Пойнтинга, и которое фактически является уравнением переноса плотности электромагнитной энергии. Источники $S[n, \beta]$, $S[v, \beta]$ и $S[\varepsilon, \beta]$ соответствуют изменению концентрации, продольной скорости и энергии частиц соответственно, источники $S[\alpha, pp]$, $S[\alpha, \text{acc}]$, $S[\alpha, \text{rad}_a]$ и $S[\alpha, \text{rad}_p]$ соответствуют процессам фотообразования пар, ускорения пар в плоской волне, излучению активных гамма-квантов парами в плазменной области и излучению пассивных гамма-квантов парами в вакуумной области соответственно (отмечены соответственно буквами (b), (c), (d) и (f) на Рис. 2.6), Σ_γ — полная энергия пассивных гамма-квантов. Множитель $\psi_{\text{vac}}(\psi_{\text{pl}})$ считается равным 1 в вакуумной (плазменной) области и 0

в плазменной (вакуумной) области. Вычисление данных множителей будет приведено ниже. Отметим, что $\psi_{\text{vac}} + \psi_{\text{pl}} = 1$. Для удобства будем опускать дынные множители, когда рассматриваемая область очевидна.

2.3.2 Конфигурация электромагнитного поля

Согласно результатом трёхмерного QED-PIC моделирования электрическое и магнитное поля в плазменной области остаются практически перпендикулярными друг другу, а величина магнитного поля всюду превосходит величину электрического: $B > E$. Пространственное распределение ЭМ поля имеет характерный масштаб λ как в вакуумной, так и в плазменной области. В таком поле заряженные частицы дрейфуют в направлении перпендикулярном, как электрическому, так и магнитному полю, т.е. вдоль оси x со скоростью

$$v_x \approx E/B. \quad (2.24)$$

В вакуумной области ЭМ поле представляет собой поле падающей плоской волны. В таком случае электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны и равны друг другу по величине. Если энергия ϵ частицы, попавшей в вакуумную область, меньше безразмерной амплитуды поля E , то согласно построенной в первой главе асимптотической теории за время, много меньшее периода волны, такая частица ускорится в продольном направлении практически до скорости света. Таким образом можно считать, что в вакуумной области выполняется соотношение $v_x \approx 1 = E/B$, т.е. уравнение (2.24) в действительности справедливо как в плазменной, так и в вакуумной области.

В данном рассуждении мы не учитываем отражённую от границы e^-e^+ плазмы волну по нескольким причинам. Во-первых, в трёхмерном QED-PIC моделировании не наблюдается существенного отражения при развитии каскада на стадии его самоподдержания. Во-вторых, отражение, возникающее на начальном этапе лазерного взаимодействия с тонкой твердой мишенью, согласно теории относительности, быстро истощается по мере ускорения частиц в направлении распространения лазерного импульса и, таким образом, становится несущественным для более поздних стадий развития каскада. Однако наша модель не описывает электрон-ионную плазму, поэтому мы исследуем взаимодействие лазерного импульса с затравкой в виде встречного

гамма-сгустка (см. п. 2.4.2), где отражения не происходит даже на начальном этапе взаимодействия. Кроме того, отражение незначительно изменило бы процесс фоторождения пар в связи с тем, что наибольшей вероятностью распада обладают гамма-кванты, распространяющиеся навстречу лазерному импульсу, т.е. попутно отраженному излучению. А поля попутной волны не увеличивают значение определяющего КЭД-параметра χ гамма-квантов. Наконец, в вакуумной области, где лазерное поле наиболее сильное, находятся в основном ультрарелятивистские электроны и позитроны, образованные из фотонов с наиболее высокой энергией. Рассеяние релятивистски сильного лазерного поля ($a_0 \gg 1$) на ультрарелятивистских электронах и позитронах ($\gamma \gg 1$) происходит как в нелинейном, так и в квантовом режиме. Из-за этого, а также из-за того, что положение частиц нескоррелировано, результирующее рассеянное излучение некогерентно и его частота сильно сдвинута вверх. Такое излучение лучше всего описывается отдельными фотонами, как это и реализовано в коде QUILL. Часть этих фотонов, распространяющихся навстречу лазерному импульсу, действительно можно рассматривать как отражение. Хотя такие фотоны могут увеличить общий выход электрон-позитронных пар и гамма-квантов за счет КЭД процессов более высокого порядка, они значительно менее вероятны, чем нелинейное комптоновское рассеяние и процесс Брейта-Уилера, и поэтому не учитываются ни в QED-PIC моделировании, ни в нашей модели. Отметим, однако, что в нашей модели учитываются потери энергии из-за некогерентного гамма-излучения как в вакуумной, так и в плазменной областях.

2.3.3 Функция распределения активных гамма-квантов

Как описано в разделе 2.2.2 активные гамма-кванты излучаются парами в процессе их движения по винтовым траекториям в плазменной области. В связи с этим их угловое распределение является широким. Предположим также, что это распределение плавное и может быть описано всего одним параметром. Данным параметром является скорость v мгновенной системы отсчёта K' , в которой угловое распределение фотонов, находящихся вблизи малой окрестности координаты x , является практически изотропным, т.е.

$$\Phi'(\theta') \equiv \frac{dN'}{d \cos \theta'} = \frac{1}{2}, \quad (2.25)$$

где $dN' = dN$ — число частиц с продольной скоростью в диапазоне $[\cos \theta', \cos \theta' + d \cos \theta']$ и

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - v}{1 - v \cos \theta}. \quad (2.26)$$

В лабораторной системе отсчёта такое распределение выглядит следующим образом [151]

$$\Phi(\theta, v) = \frac{dN}{d \cos \theta} = \frac{dN'}{d \cos \theta'} \frac{d \cos \theta'}{d \cos \theta} = \frac{1 - v^2}{2(1 - v \cos \theta)^2}. \quad (2.27)$$

Таким образом, функция распределения активных гамма-квантов имеет следующий вид

$$f_\gamma(t; x, \theta) = \Phi(\theta, v_{\gamma\parallel}(x, t)) n_\gamma(x, t). \quad (2.28)$$

Средняя величина $\overline{v_{\gamma\parallel}}$ и средний квадрат величины $\overline{v_{\gamma\parallel}^2}$ продольной скорости рассчитываются следующим образом

$$\overline{v_{\gamma\parallel}} = \int_0^\pi \Phi(\theta, v) \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{v_{\gamma\parallel}} - \frac{1 - v_{\gamma\parallel}^2}{v_{\gamma\parallel}^2} \text{ath}(v_{\gamma\parallel}), \quad (2.29)$$

$$\overline{v_{\gamma\parallel}^2} = \int_0^\pi \Phi(\theta, v) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\overline{v_{\gamma\parallel}}}{v_{\gamma\parallel}} - 1, \quad (2.30)$$

где $\text{ath}(x)$ — обратная функция гиперболического тангенса. Отметим, что согласно преобразованиям Лоренца средняя скорость гамма-квантов $\overline{v_{\gamma\parallel}}$ отличается от скорости $v_{\gamma\parallel}$ системы отсчёта K' , в которой их распределение изотропно. Результаты QED-PIC моделирования показывают, что выражение (2.27) является достаточно хорошей аппроксимацией углового распределения активных гамма-квантов (см. Рис. 2.8 (a), (b)).

Значение величины КЭД параметра χ для гамма-квантов, находящихся в скрещенных электрическом и магнитном полях, что справедливо как для вакуумной, так и для плазменной области, вычисляется следующим образом

$$\chi_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma |B - E \cos \theta|}{a_S} = \frac{\varepsilon_\gamma E}{a_S} \frac{1 - v_x \cos \theta}{v_x}, \quad (2.31)$$

где было использовано выражение (2.24).

Полностью определив функцию распределения гамма-квантов, можно вычислить источники $S[\alpha, pp]$, соответствующие процессу фоторождения

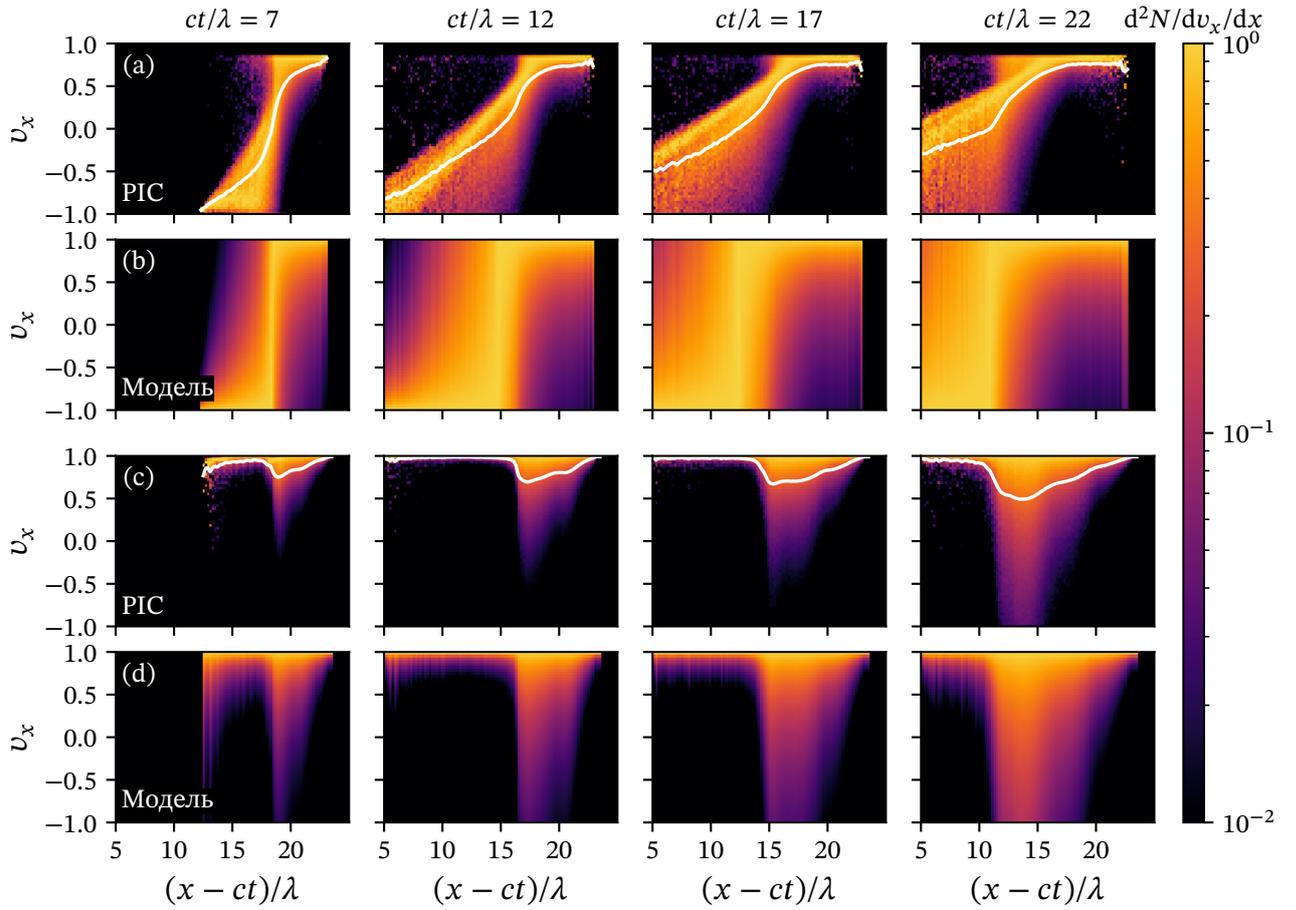


Рисунок 2.8 — Проверка приближения, использованного для описания углового распределения частиц. Угловое распределение частиц ((a) — гамма-квантов, (c) — e^-e^+ пар), расположенных в малой окрестности координаты x (цветовая карта) и их средняя продольная скорость, рассчитанная по этому распределению (белая линия) согласно результатам численного QED-PIC моделирования. (b), (d) — модельное угловое распределение гамма-квантов и e^-e^+ пар соответственно, восстановленное по средней скорости с помощью выражения (2.27).

пар

$$S[n, pp] = n_\gamma \int_0^\pi \Phi(\theta, v_{\gamma\parallel}) W_{\text{pair}}(\chi_\gamma, \varepsilon_\gamma) \sin \theta d\theta \equiv \overline{W_{\text{pair}}} n_\gamma, \quad (2.32)$$

$$S[\varepsilon, pp] = \varepsilon_\gamma n_\gamma \int_0^\pi \Phi(\theta, v_{\gamma\parallel}) W_{\text{pair}}(\chi_\gamma, \varepsilon_\gamma) \sin \theta d\theta \equiv \overline{W_{\text{pair}}} \varepsilon_\gamma n_\gamma, \quad (2.33)$$

$$S[v, pp] = n_\gamma \int_0^\pi \Phi(\theta, v_{\gamma\parallel}) W_{\text{pair}}(\chi_\gamma, \varepsilon_\gamma) \cos \theta \sin \theta d\theta \equiv \overline{V_{\text{pair}}} n_\gamma. \quad (2.34)$$

2.3.4 Динамика e^-e^+ пар в вакуумной области

Рассмотрим электроны и позитроны, образовавшиеся в вакуумной области, где их число настолько мало, что коллективными плазменными эффектами можно пренебречь, поэтому ЭМ поле в данной области представляет собой поле падающей плоской волны. Динамика единичного электрона в поле экстремально интенсивной плоской волны подробно рассмотрена в п. 1.5.2 данной работы. Как упоминалось выше, для вычисления источников $S[\alpha, \beta]$ в правой части уравнений (2.15)–(2.20) необходимо знание углового распределения частиц. Несмотря на то, что траектории электронов в плоской волне находятся аналитически, явное вычисление функции распределения по этим траекториям является фактически невозможным, т.к. частицы рождаются в этой области в случайные моменты времени с различными начальными условиями. Однако, следующие рассуждения позволяют рассчитать источники $S[\alpha, \beta]$, исходя из другого подхода. Во-первых, в очередной раз отметим, что релятивистски сильная плоская волна «толкает» частицы в направлении своего распространения, т.е. в нашем случае вдоль оси x . Поэтому вне зависимости от начальных условий за короткий промежуток времени импульс частицы ориентируется практически вдоль оси x , и в вакуумной области мы считаем $v_x \approx 1$. Пренебрегая временем такой ориентации, можно приближенно вычислить поток частиц и энергии путём умножения плотности этих величин на скорость $v_x \approx 1$. Так как в вакуумной области по определению нет коллективных эффектов и в ней не развивается КЭД каскад, то уравнения непрерывности в этой области фактически служат лишь для того, чтобы рассчитать потоки частиц и энергии (включая электромагнитную) на фронте каскада в плазменную область. Таким образом, нам необходимо знать лишь суммарный вклад в эти потоки от каждой частицы за время от момента её образования в вакуумной области до достижения границы с плазмой. В связи с этим, источники $S[\epsilon, \beta]$ можно вычислить следующим образом

$$S[\epsilon, \beta] = \int_0^\pi f_\gamma(x, \theta) W_{\text{pair}}(\chi_\gamma, \epsilon_\gamma) \Delta\epsilon_\beta \sin \theta d\theta, \quad (2.35)$$

где $\Delta\epsilon_\beta$ — суммарное изменение энергии в процессе β частицы, образовавшейся в точке с координатой x в момент времени t , за всё время её нахождения в плазменной области. Определяя источник $S[\epsilon, \beta]$ таким образом, мы

фактически считаем, что частица приобретает изменение энергии $\Delta\varepsilon_\beta$ в момент рождения, а затем без изменения энергии движется со скоростью света до границы с плазменной областью.

Для вычисления изменения энергии частицы при движении в циркулярно-поляризованной плоской волне воспользуемся результатами раздела 1.5.2.

$$\Delta\varepsilon_{\text{acc}} = \frac{2Ep_0}{p_{-,0}} \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \left(\frac{E}{p_0} \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - \sin \theta \sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right), \quad (2.36)$$

где мы не учитываем поправки, связанные с реакцией излучения, которые сказываются на большом числе периодов волны. Так как частицы рождаются в произвольный момент времени и мы считаем распределение частиц по азимутальному углу изотропным, то выражение (2.36) необходимо усреднить по φ_0 . В таком случае получим

$$\Delta\varepsilon_{\text{acc}} = \frac{2E^2}{p_{-,0}} \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (2.37)$$

Для определения величины $\Delta\varepsilon_{\text{acc}}$ необходимо вычислить время нахождения частиц в вакуумной области. Для этого будем искать величину $\Delta\varphi$ из условия достижения продольной скорости частиц v_x некоего порогового значения v_{th} , близкого к 1. В таком случае, после достижения этого порогового значения величина $\Delta\varphi$ и соответственно $\Delta\varepsilon_{\text{acc}}$ практически не изменяются. Запишем данное условие следующим образом

$$v_{\text{th}} = v_x = \frac{p_x}{\gamma} = \frac{\gamma - p_-}{\gamma_0 + \Delta\varepsilon_{\text{acc}}} \approx \frac{p_{x,0} + \Delta\varepsilon_{\text{acc}}}{\gamma_0 + \Delta\varepsilon_{\text{acc}}} \approx \frac{\gamma_0 \cos \theta + \Delta\varepsilon_{\text{acc}}}{\gamma_0 + \Delta\varepsilon_{\text{acc}}}, \quad (2.38)$$

где в предпоследнем равенстве использовался факт, что $p_- = \text{const} = \gamma_0 - p_{x,0}$ без учёта реакции излучения, а в последнем — предполагалось, что $\gamma_0 \gg 1$, поэтому $p_0 = \sqrt{\gamma_0^2 - 1} \approx \gamma_0$. Рассматривая данное выражение как уравнение на величину $\Delta\varepsilon_{\text{acc}}$, получим

$$\Delta\varepsilon_{\text{acc}} = 2\gamma_0\gamma_{\text{th}}^2(1 - \cos \theta), \quad (2.39)$$

где $\gamma_{\text{th}} = 1/\sqrt{1 - v_{\text{th}}^2}$ — достаточно большое число, поэтому в конечном выражении было положено $v_{\text{th}} = 1$. Заметим, что при фотообразовании электрон-позитронной пары их средняя энергия равна половине энергии родительского фотона ε_γ , поэтому $\gamma_0 = \varepsilon_\gamma/2$. Строго говоря, время нахождения частицы

в вакуумной области определяется её начальным положением и динамикой фронта каскада. Однако, скорость и положение фронта не могут быть рассчитаны, исходя из величин, с которыми оперирует наша модель. Таким образом, для определения динамики фронта требуется либо построение отдельной независимой модели, либо использование какого-либо эвристического приближения. Несмотря на то, что в п. 2.4.1 нами строится упрощённое аналитическое решение модельных уравнений, из которого можно определить скорость фронта каскада, использование этого решения для определения времени нахождения частиц в вакуумной области непрактично. Более того найденное решение получено в приближениях, которые в действительности соблюдаются достаточно плохо. В связи с этим, мы будем полагать, что изменение энергии частицы при нахождении в вакуумной области достаточно хорошо описывается выражением (2.39), где величина γ_{th}^2 является свободным параметром нашей модели, который мы обозначим как μ . Определение величины μ таким образом производится на основании сравнения решения уравнений нашей модели с результатами полноразмерного трёхмерного QED-PIC моделирования. Кроме того, из определения следует что $\mu \sim 1-10$. Таким образом,

$$\Delta\varepsilon_{\text{acc}} = \varepsilon_{\gamma}\mu(1 - \cos\theta), \quad (2.40)$$

и конечное выражение для $S[\varepsilon, \text{acc}]$ записывается в следующем виде

$$S[\varepsilon, \text{acc}] = \varepsilon_{\gamma}\mu n_{\gamma} \int_0^{\pi} \Phi(\theta, v_{\gamma\parallel}) W_{\text{pair}}(\chi_{\gamma}, \varepsilon_{\gamma})(1 - \cos\theta) \sin\theta d\theta \equiv \varepsilon_{\gamma}\mu \overline{G_{\text{rad}}} n_{\gamma}. \quad (2.41)$$

Проверка корректности данного приближенного выражения показана на Рис. 2.9 (а). Отметим, что поглощение лазерного излучения значительно в вакуумной области, где плотность частиц мала, и достаточно мало в области плотной плазмы, как обсуждалось в п. 2.2.2. Также отметим, что явный вид выражения (2.41) в действительности не представляет существенного значения для нашей модели. Это связано с тем, что в вакуумной области неизвестные величины практически не зависят от координаты и времени. Таким образом, выражение (2.41) можно полностью обозначить за некую константу — свободный параметр нашей модели. В связи с этим строгость используемых предположений для определения вида выражения (2.41) также не является существенной. Основная причина уточнения данного выражения состоит лишь в том, чтобы свободный параметр μ имел смысл числа, не зависящего

от начальных параметров задачи, таких как амплитуда лазерного поля, энергия пучка фотонов и т.д. Косвенным подтверждением данному утверждению является также тот факт, что в оригинальной публикации [A5], в которой была разработана данная модель, были использованы другие выражения для вычисления $\Delta\varepsilon_{\text{acc}}$, однако решения модельных уравнений практически идентичны таковым, представленным в данной работе.

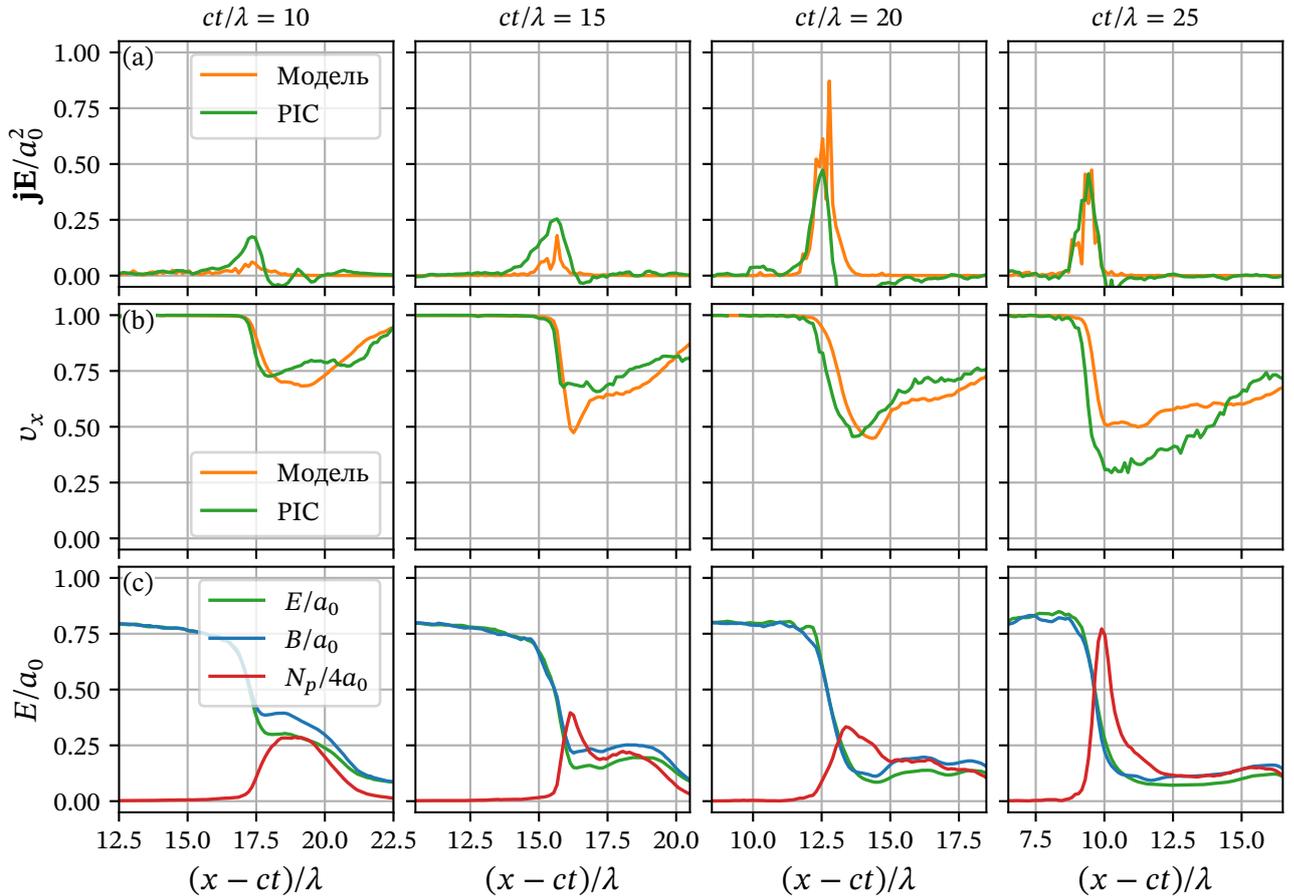


Рисунок 2.9 — Проверка приближений модели. (а), (б) Значение величины \mathbf{jE} и среднее значение скорости пар v_x , рассчитанные по формулам (2.41) и (2.54) соответственно (оранжевые линии), и взятые напрямую из результатов QED-PIC моделирования (зелёные линии) в различные моменты времени. (с) Распределение амплитуды электрического (зелёные линии) и магнитного (синие линии) полей и концентрации e^-e^+ плазмы (красные линии).

Предполагая, что время нахождения частицы в вакуумной области достаточно мало, поэтому реакция излучения не успевает существенно влиять на динамику частицы, будем считать, что $\chi \approx \chi_0 = \text{const}$. Тогда

$$\Delta\varepsilon_{\text{rad}} = I_{\text{rad}}(\chi_0)\Delta\varphi. \quad (2.42)$$

Для вычисления величины $\Delta\varphi$ воспользуемся выражениями (2.37) и (2.40)

$$\mu\varepsilon_\gamma(1 - \cos\theta) = \frac{E^2}{\varepsilon_\gamma(1 - \cos\theta)} \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad (2.43)$$

откуда получаем

$$\Delta\varphi = \frac{2\varepsilon_\gamma(1 - \cos\theta)}{E} \sqrt{\mu} \quad (2.44)$$

Учитывая, что $\chi_0 = \chi_\gamma/2$, выражение для источника $S[\varepsilon_p, \text{rad}]$ записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} S[\varepsilon, \text{rad}] &= \frac{2\varepsilon_\gamma n_\gamma \sqrt{\mu}}{E} \int_0^\pi \Phi(\theta, v_{\gamma\parallel}) W_{\text{pair}}(\chi_\gamma, \varepsilon_\gamma) I_{\text{rad}}\left(\frac{\chi_\gamma}{2}\right) (1 - \cos\theta) \sin\theta d\theta \equiv \\ &\equiv I_{\text{vac}} \frac{\varepsilon_\gamma n_\gamma \sqrt{\mu}}{E}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.3.5 Динамика e^-e^+ пар в плазменной области

Согласно рассуждениям в п. 2.2.2 в области плотной e^-e^+ плазмы в каждой точке пространства существует мгновенная система отсчёта K' , движущаяся со скоростью $v_x(x, t) \approx E/B$, в которой присутствует только магнитное поле. В связи с простотой конфигурации ЭМ поля в K' , удобно проводить вычисления в этой системе отсчёта. В K' электроны и позитроны движутся вдоль магнитного поля со скоростью v'_B , а также вращаются в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, со скоростью v'_\perp (см. Рис. 2.10). Предположим, что частицы остаются в данной системе отсчёта ультррелятивистскими (что подтверждается результатами QED-PIC моделирования), тогда справедливо равенство $v'^2_\perp + v'^2_B \approx 1$. Отметим, что движение заряженных частиц вдоль магнитного поля может приводить к появлению ненулевого тока, который необходимо учитывать в уравнениях Максвелла, тогда как их вращение в магнитном поле в среднем не создаёт ток, однако приводит к генерации гамма-квантов. Вычислим значение КЭД параметра χ , являющегося Лоренц-инвариантом, в K'

$$\chi_p = \frac{v'_\perp \varepsilon'_p B'}{a_s}. \quad (2.46)$$

Величины в K' могут быть вычислены по соответствующим величинам в лабораторной системе отсчёта следующим образом: $B' = B\sqrt{1 - (E/B)^2}$, $\varepsilon'_p = \varepsilon_p\sqrt{1 - (E/B)^2}$, где мы использовали тот факт, что средний импульс частиц

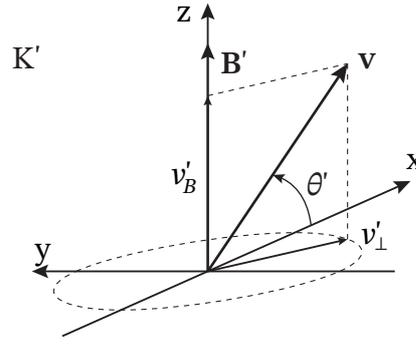


Рисунок 2.10 — Геометрическое расположение скорости и магнитного поля в системе отсчёта K' , движущейся со скоростью $v_x = E/B$.

вдоль оси x равен γv_x и $v_x = E/B$. Таким образом значение χ может быть вычислено следующим образом

$$\chi_e = \frac{v'_\perp \varepsilon_p E}{a_s} \frac{1 - v_x^2}{v_x}. \quad (2.47)$$

В связи с вращением частиц в магнитном поле, можно предположить, что их угловое распределение в K' близко к изотропному. В таком случае, аналогично процедуре с гамма-квантами в п. 2.3.3, функция распределения пар в лабораторной системе отсчёта записывается в следующем виде

$$f_p(t, x, \theta) = \Phi(\theta, v_x(x, t)) n_p(x, t). \quad (2.48)$$

где Φ определяется так же, как в уравнении (2.27)

$$\Phi(\theta, v) = \frac{1 - v^2}{2(1 - v \cos \theta)^2}.$$

Результаты QED-PIC моделирования, представленные на Рис. 2.8 (c), (d) демонстрируют, что выражение (2.48) является хорошей аппроксимацией для вычисления углового распределения пар. Ниже будет показано, что величина v_x может быть приближённо рассчитана из локальных значений электрического поля и концентрации плазмы. В связи с этим, мы не пишем уравнения переноса величины v_x , подобно уравнению (2.18). Отметим также, что в случае пар мы пренебрегаем разницей между скоростью v системы отсчёта, в которой распределение частиц является изотропным, и средней скоростью частиц \bar{v} , вычисленной по такому распределению, т.к. их максимальная разница не превышает 0.2 согласно выражению (2.29).

Так как величина χ_p не зависит от угла θ , то источники $S[\alpha, rad_a]$ вычисляются следующим образом

$$S[n, rad_a] = n_p \int_0^\pi \Phi(\theta, v_x) W_{rad}(\chi_p, \varepsilon_p) \sin \theta d\theta \equiv \overline{W}_{pl} n_p, \quad (2.49)$$

$$S[\varepsilon, rad_a] = n_p \int_0^\pi \Phi(\theta, v_x) I_{rad}(\chi_p) \sin \theta d\theta \equiv \overline{I}_{pl} n_p, \quad (2.50)$$

$$S[v, rad_a] = n_p \int_0^\pi \Phi(\theta, v_x) \cos \theta W_{rad}(\chi_p, \varepsilon_p) \sin \theta d\theta \equiv \overline{W}_{pl} v_x n_p. \quad (2.51)$$

Суммарная плотность тока частиц, усреднённая по характерному периоду Ларморовского вращения $\tau_B = \varepsilon_p/B$, вычисляется следующим образом

$$\mathbf{j} = 2n_p \frac{\mathbf{B}}{B} v_B \sqrt{1 - v_x^2}, \quad (2.52)$$

$$v_B = v'_B \frac{2 \arccos(v_x \sqrt{1 - v_x^2})}{\pi \sqrt{1 - v_x^2(1 - v_x^2)}} \equiv v. \quad (2.53)$$

Множитель 2 учитывает тот факт, что токи электронов и позитронов сонаправлены. Это в свою очередь объясняется из наблюдения, что в лабораторной системе отсчета электрическое и магнитное поля нестрого перпендикулярны. Таким образом, в системе отсчета K' существует небольшое электрическое поле, направленное вдоль или против магнитного (в зависимости от знака произведения $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$). Наличие этого поля приводит к тому, что средняя скорость электронов противоположна ему, а средняя скорость позитронов сонаправлена ему. При этом продольный дрейф частиц не зависит от знака заряда, поэтому токи электронов и позитронов вдоль оси x компенсируют друг друга, а в плоскости yz суммируются. Этот факт также указывает на то, что электрон-позитронная плазма является проводящей средой, поэтому некоторое поглощение электромагнитной энергии также происходит в этой области, хотя оно и значительно меньше, чем поглощение в вакуумной области, наблюдаемое в QED-PIC моделировании (см. Рис. 2.9 (а)) и, таким образом, мы не учитываем его в нашей модели. Значение v_B , усреднённое по

частицам, которое мы обозначили как ν , является вторым свободным параметром нашей модели. Его можно грубо оценить, заметив, что для одиночной частицы значение ν'_B может лишь незначительно изменить своё начальное значение в связи с присутствием слабого электрического поля в K' . При этом частицы входят в область плазмы после ускорения лазерным импульсом с преимущественно продольной скоростью, т.е. скоростью вдоль оси x , поэтому начальная проекция скорости частиц на магнитное поле, лежащее в плоскости yz , является маленькой величиной. Таким образом, можно ожидать, что наша модель должна давать достоверные результаты при значениях ν , близких к нулю.

Вычисление электродинамических свойства среды, отклик которой на плоскую ЭМ волну состоит в генерации тока вдоль магнитного поля, рассмотрено в следующем разделе. Основной вывод состоит в том, что соотношение между электрическим и магнитным полями в такой среде может быть выражено через плотность и амплитуду электрического поля следующим образом

$$\frac{E}{B} = v_x = \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + (4n_p\nu/E)^2}}}. \quad (2.54)$$

Справедливость выражения (2.54) также подтверждается путём прямого сравнения с результатами QED-PIC моделирования, продемонстрированного на Рис. 2.9 (b).

2.3.6 Электродинамические свойства e^-e^+ плазмы

Рассмотрим распространение плоской циркулярно-поляризованной ЭМ волны вдоль оси x в слабо неоднородной (также вдоль оси x) среде, отклик которой на эту волну заключается в генерации тока $\mathbf{j} = 2n_p\mathbf{v}$, «опережающего» электрическое поле волны на половину периода. Для этого запишем уравнения Максвелла

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial t} - 2n_p v_y, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial t} + 2n_p v_z. \quad (2.58)$$

Перейдём к следующим комплексным переменным

$$\epsilon = E_y + iE_z, \quad (2.59)$$

$$\beta = B_z - iB_y, \quad (2.60)$$

$$v_y + iv_z = \frac{\epsilon}{|\epsilon|} iv_{\perp}, \quad (2.61)$$

Введём также вектор-потенциал a следующим образом

$$\epsilon = -\frac{\partial a}{\partial t}, \quad (2.62)$$

$$\beta = \frac{\partial a}{\partial x}. \quad (2.63)$$

В новых переменных уравнения (2.55)–(2.58) переписываются в следующем виде

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2n_p \frac{\partial a}{\partial t} \left| \frac{\partial a}{\partial t} \right|^{-1} iv_{\perp}. \quad (2.64)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде монохроматической плоской волны с амплитудой, зависящей от координаты x

$$a = E(x) \exp \left\{ i \int^x \kappa(x') dx' - it \right\}, \quad (2.65)$$

где $E(x)$ и $\kappa(x)$ — действительные функции координаты x , имеющие смысл амплитуды и волнового числа волны. В итоге уравнения имеют следующий вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + E(1 - \kappa^2) + 2n_p v_{\perp} = 0, \quad (2.66)$$

$$E \frac{\partial \kappa}{\partial x} + 2\kappa \frac{\partial E}{\partial x} = 0. \quad (2.67)$$

Если плазма является слабо неоднородной, то можно применить приближение ВКБ для решения данного уравнения. Предполагая, что масштаб неоднородности плазмы L существенно превышает длину волны λ , можно пренебречь слагаемыми со второй производной: $\partial^2 E / \partial x^2 \sim E / L^2 \ll \kappa^2 E = (2\pi)^2 E / \lambda^2$. В таком случае имеем

$$E(1 - \kappa^2) + 2n_p v_{\perp} = 0. \quad (2.68)$$

Решая это уравнение, получаем

$$\kappa \equiv \frac{B}{E} = \sqrt{1 + \frac{2n_p v_{\perp}}{E}}, \quad (2.69)$$

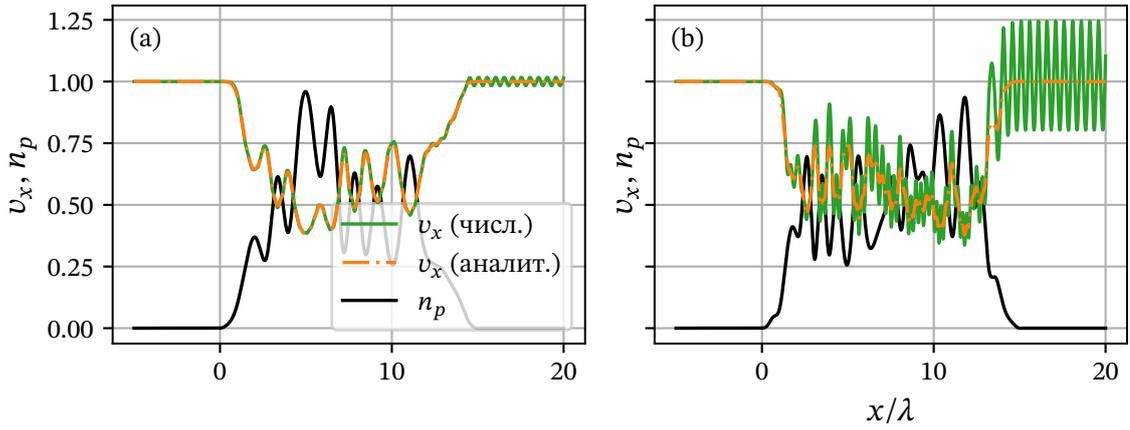


Рисунок 2.11 — Дрейфовая скорость $v_x = E/B$, рассчитанная из численного решения уравнений (2.66)–(2.67) (зелёная линия) и с помощью аналитического выражения (2.72) (оранжевая линия) для случайно-неоднородного распределения плазмы (чёрная линия). Масштаб неоднородности превышает длину волны на подрисунке (а), что делает приближение ВКБ справедливым, и меньше её на подрисунке (b).

Воспользуемся выражением (2.52) для v_{\perp} , т.е.

$$v_{\perp} = v\sqrt{1 - v_x^2}. \quad (2.70)$$

Отметим, что при $v > 0$, $B > E$ согласно (2.69), и поэтому $1/\kappa$ имеет смысл дрейфовой скорости v_x . Таким образом,

$$\frac{1}{v_x} = \sqrt{1 + \frac{2n_p v}{E} \sqrt{1 - v_x^2}}. \quad (2.71)$$

Решение данного уравнения имеет следующий вид

$$v_x = \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 + S^2}} \right)^{1/2}, \quad (2.72)$$

$$S = \frac{4n_p v}{E}. \quad (2.73)$$

Сравнение полученного решения с численным решением уравнений (2.66)–(2.67) продемонстрировано на Рис. 2.11 как в случае применимости, так и неприменимости приближения ВКБ. Решение (2.72) получено в предположении, что $v^2 = 1$, таким образом оно справедливо в системе отсчёта, где частицы являются ультррелятивистскими, в частности в лабораторной системе отсчёта.

2.4 Формулировка модели и сравнение с QED-PIC моделированием

Последние оставшиеся неопределёнными величины — это параметры ψ_{vac} и ψ_{pl} , которые разделяют в пространстве вакуумную и плазменную области. Отметим, что по продольной скорости пар v_x , определяемой согласно уравнению (2.54), можно легко различить эти области: в вакууме $v_x \approx 1$, тогда как в плазменной области $v_x < 1$. Поэтому можно выбрать ψ_{vac} и ψ_{pl} следующим образом

$$\psi_{\text{vac}} = v_x^M \quad (2.74)$$

$$\psi_{\text{pl}} = 1 - v_x^M \quad (2.75)$$

где $M \sim 10$ — достаточно большая константа. Значение данной константы подбирается исходя из некоего условного порога величины v_x , при превышении которого можно предположить, что плазма достаточно редкая и коллективными эффектами можно пренебречь. Далее будем полагать, что данный порог соответствует величине 0.7, и $M = 8$.

Таким образом, уравнения, описывающие развитие КЭД каскада в плоской волне, имеют следующий окончательный вид

$$\frac{\partial}{\partial t} n_p + \frac{\partial}{\partial x} (v_x n_p) = \overline{W_{\text{pair}}} n_\gamma, \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_p n_p) + \frac{\partial}{\partial x} (v_x \varepsilon_p n_p) &= \overline{W_{\text{pair}}} n_\gamma \frac{\varepsilon_\gamma}{2} + \mu \overline{G_{\text{rad}}} n_\gamma \varepsilon_\gamma \psi_{\text{vac}} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{\mu}}{E} \overline{I_{\text{vac}}} n_\gamma \varepsilon_\gamma \psi_{\text{vac}} - \overline{I_{\text{pl}}} n_p \psi_{\text{pl}}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_\gamma + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_{\gamma\parallel}} n_\gamma) = -\overline{W_{\text{pair}}} n_\gamma + 2\overline{W_{\text{rad}}} n_p \psi_{\text{pl}}, \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{v_{\gamma\parallel}} n_\gamma) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_{\gamma\parallel}^2} n_\gamma) = -\overline{V_{\text{pair}}} n_\gamma + 2\overline{V_{\text{rad}}} n_p \psi_{\text{pl}}, \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_\gamma n_\gamma) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{v_{\gamma\parallel}} \varepsilon_\gamma n_\gamma) = -\overline{W_{\text{pair}}} n_\gamma \varepsilon_\gamma + 2\overline{I_{\text{pl}}} n_p \psi_{\text{pl}}, \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2 + E^2/v_x^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E^2}{v_x} \right) = -2\mu \overline{G_{\text{rad}}} n_\gamma \varepsilon_\gamma \psi_{\text{vac}}, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma_\gamma = \frac{2\sqrt{\mu}}{E} \overline{I_{\text{vac}}} n_\gamma \varepsilon_\gamma \psi_{\text{vac}}. \quad (2.82)$$

Отметим, что в нашей модели сохраняется полная энергия, т.е.

$$\int \left(2n_p \varepsilon_p + n_\gamma \varepsilon_\gamma + \frac{E^2 + B^2}{2} \right) dx + \Sigma_\gamma = \text{const}. \quad (2.83)$$

2.4.1 Аналитические оценки

Перед переходом к численному решению данных уравнений и сравнению в результатами QED-PIC моделирования, сделаем некоторые очень грубые, но аналитические оценки. Для этого будем предполагать, что электроны и позитроны излучают гамма-кванты строго против оси x . Распределение лазерной интенсивности будем считать постоянным и однородным. В связи с последним предположением, вероятности $\overline{W_{\text{pair}}}$ и $\overline{W_{\text{rad}}}$ также будем считать постоянными величинами. В таком случае уравнения непрерывности для концентрации плазмы n_p и фотонов n_γ записываются следующим образом в системе отсчёта, движущейся со средней скоростью плазмы v_x

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = W_{\text{pair}} n_\gamma, \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial n_\gamma}{\partial t} - \frac{\partial n_\gamma}{\partial x} = -W_{\text{pair}} n_\gamma + 2W_{\text{rad}} n_p. \quad (2.85)$$

Если пренебречь в (2.85) слагаемым с ∂_x , характеризующим пространственную дисперсию, то уравнения непрерывности переходят в уравнения, описывающие КЭД каскад во вращающемся электрическом поле без пространственной динамики [92; 172]. Уравнения (2.84)–(2.85) можно решить с помощью одностороннего преобразования Фурье [184], т.е. разложения решения на сумму экспонент с действительными значениями k и комплексными значениями ω

$$n_{p,\gamma}(t, x) = \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} n_{p,\gamma}(\omega, k) \frac{dk}{2\pi}. \quad (2.86)$$

где

$$n_{p,\gamma}(\omega, k) = \int_0^{+\infty} e^{i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} n_{p,\gamma}(t, x) dx, \quad (2.87)$$

и σ — такое действительное число, что контур интегрирования лежит в области аналитичности $n_{p,\gamma}$. Для начальных распределений плотности плазмы и гамма-квантов равных $n_p(0, x)$ и $n_\gamma(0, x)$ соответственно, решение находится следующим образом

$$n_p(t, x) = \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{W_{\text{pair}} n_p(0, x') + i(\omega + k) n_\gamma(0, x')}{\Delta(\omega, k)} e^{ik(x-x')-i\omega t} \quad (2.88)$$

где $\Delta(\omega, k) = \omega^2 + \omega(k + iW_{\text{pair}}) + 2W_{\text{pair}}W_{\text{rad}}$. Возмущения начального распределения распространяются вдоль характеристик, определяемых дисперсионным уравнением $\Delta(\omega, k) = 0$, имеющим следующее решение

$$\omega = \frac{-k - iW_{\text{pair}} \pm \sqrt{(k + iW_{\text{pair}})^2 - 8W_{\text{pair}}W_{\text{rad}}}}{2}. \quad (2.89)$$

Групповая скорость этих возмущений равна $v_{\text{gr}} = \partial \text{Re}[\omega] / \partial k$. Анализ дисперсионного соотношения показывает, что возмущения с малыми волновыми числами ($k \ll W_{\text{pair}}$) наиболее неустойчивы и обладают следующим инкрементом неустойчивости

$$\Gamma \equiv \text{Im}[\omega] = \frac{W_{\text{pair}}}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8W_{\text{rad}}}{W_{\text{pair}}}} - 1 \right), \quad (2.90)$$

что совпадает с инкрементом неустойчивости КЭД каскада во вращающемся электрическом поле [92; 172]. Из (2.89) получим дисперсионное соотношение для неустойчивых возмущений:

$$\omega \approx \frac{\mu - 1}{2}k + i\Gamma \quad (2.91)$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 8W_{\text{rad}}/W_{\text{pair}}}}. \quad (2.92)$$

В пределе $a_0 \rightarrow \infty$, $W_{\text{rad}}/W_{\text{pair}} \approx 4$ и $\mu \approx 0.17$ [31]. Поэтому возмущения с малыми волновыми числами распространяются со скоростью $v_{\text{gr}} \approx -0.41$. Это значение совпадает с результатами численного решения уравнений (2.84)–(2.85) с различными формами начальных распределений пар и гамма-квантов (см. пример такого решения на Рис. 2.12). В системе отсчёта, движущейся со средней продольной скоростью плазмы, скорость фронта каскада v_{fr} совпадает с найденной групповой скоростью $v_{\text{gr}} \approx -0.41$. Переход в лабораторную систему отсчёта позволяет связать среднюю продольную скорость частиц плазмы и скорость фронта каскада:

$$v_{\text{fr}} = \frac{v_x + v_{\text{gr}}}{1 + v_x v_{\text{gr}}/c^2} \quad (2.93)$$

Решая это уравнение относительно v_x получаем:

$$v_x = \frac{v_{\text{fr}} - v_{\text{gr}}}{1 - v_{\text{gr}} v_{\text{fr}}/c^2} \quad (2.94)$$

Эти рассуждения предсказывают $v_x = 0.61$ для $v_{fr} = 0.27$ ($a_0 = 2500$, см. Рис. 2.3), что достаточно близко к усреднённой скорости позитронов ≈ 0.75 , полученной из численного моделирования (см. Рис. 2.4 (b)).

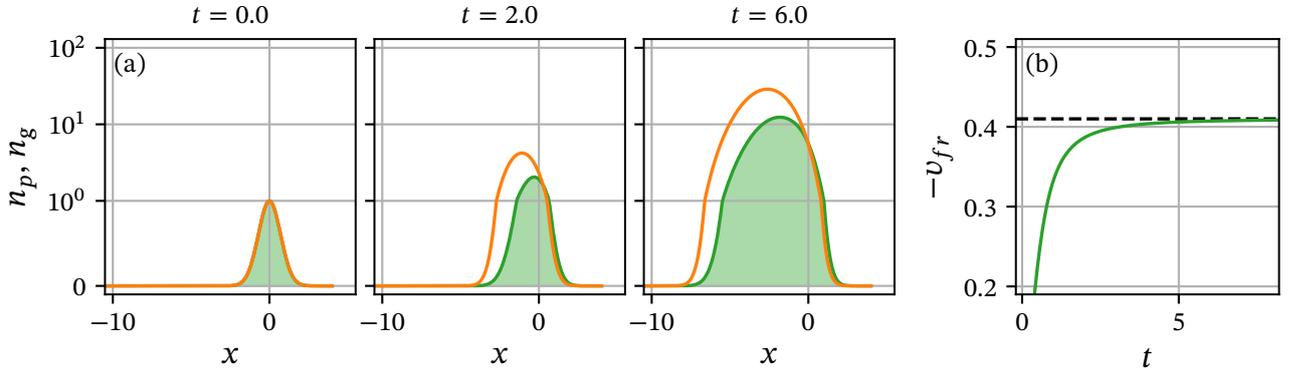


Рисунок 2.12 — Численное решение уравнений (2.84)–(2.85): (a) Распределение плотности позитронов n_p (зелёная линия) и гамма-квантов n_γ (оранжевая линия) в различные моменты времени. Масштаб вертикальной оси линейный для значений $[-1, 1]$ и логарифмический для остальных значений. Координаты, время и плотности нормированы таким образом, что $W_{\text{rad}} = 1.0$, $W_{\text{pair}} = 0.25$. (b) Скорость фронта распределения плотности n_p , определяемая по порогу $n_p = 0.1$, как функция времени.

2.4.2 Численное решение

Численное решение уравнений (2.76)–(2.81) находится по методу линий: частные производные $\partial/\partial x$ аппроксимируются конечными разностями для получения системы ОДУ, которая решается с помощью явного метода Рунге-Кутты. Так как метод Рунге-Кутты не является симплектическим, то сохранение энергии на каждом шаге интегрирования соблюдается путем отсечения производной $\partial n_\gamma/\partial t$ так, чтобы полная энергия не росла. Относительная ошибка, полученная в результате этой процедуры, оказывается приемлемо малой. Свободные параметры оценивались вручную путем сравнения решения с результатами трехмерного QED-PIC моделирования на основе двух макроскопических параметров: скорости фронта каскада и энергетического баланса в системе. Тестирование модели показывает, что существует положительная корреляция между параметром ν и скоростью распространения

фронта каскада. Параметр μ в основном определяет передачу энергии от лазера к каскадным частицам, поэтому, изменяя этот параметр, можно управлять характерным временем поглощения энергии лазера. Нами были найдены значения свободных параметров модели, при которых наблюдается хорошее согласие с результатами моделирования с различными начальными условиями (см. рис. 2.15–2.13).

Трёхмерное QED-PIC моделирование было выполнено с использованием кода QUILL [183], который позволяет моделировать КЭД эффекты с помощью метода Монте-Карло. Начальное распределение ЭМ полей имеет вид плоской волны с длиной волны $\lambda = 2\pi c/\omega_L = 1$ мкм и амплитудой a_0 , распространяющееся вдоль оси x с пространственно-временной огибающей, задаваемой следующим выражением

$$a(x, y, z) = \cos^2\left(\frac{\pi x^4}{2\sigma_x^4}\right) \cos^2\left(\frac{\pi(y^2 + z^2)^2}{2\sigma_r^4}\right) \quad (2.95)$$

Поперечный пространственный размер лазерного импульса составлял $2\sigma_r = 18$ мкм, а длительность импульса 60.5 фс ($2\sigma_x = 18.15$ мкм). Размер области модулирования составлял $30\lambda \times 30\lambda \times 30\lambda$, количество ячеек $3000 \times 300 \times 300$. Как обсуждалось в п. 2.2.2, финальная стадия развития каскада КЭД в одиночном лазерном импульсе практически не зависит от затравки, поэтому в качестве затравки был задавался короткий гамма-сгусток, распространяющегося навстречу лазерного импульса, чтобы не учитывать взаимодействие с электрон-ионной плазмой, существенно отличающейся от формирующейся электрон-позитронной плазмы. Начальная затравка в таком виде в нашей модели может быть задана путём инициализации $v_{\gamma\parallel}(t = 0) \approx -1$. Распределения плотности в нашей модели и PIC-моделировании совпадают и выражаются следующей формулой: $n_\gamma(t = 0) = n_0 \max\{0, 1 - (x - x_0)^2/w_\gamma^2\}$, где w_γ — полуширина сгустка, а x_0 — положение его центра. Начальная энергия гамма-квантов была установлена равной $200m_e c^2$.

Прямое сравнение между решениями уравнений (2.76)–(2.81) и результатами QED-PIC моделирования показано на Рис. 2.15–2.13. Наша модель качественно совпадает с результатами QED-PIC моделирования с точки зрения распределения частиц и электромагнитного поля, а также энергетического баланса. Также отчетливо различаются режимы развития каскада как в нашей модели, так и в QED-PIC моделировании.

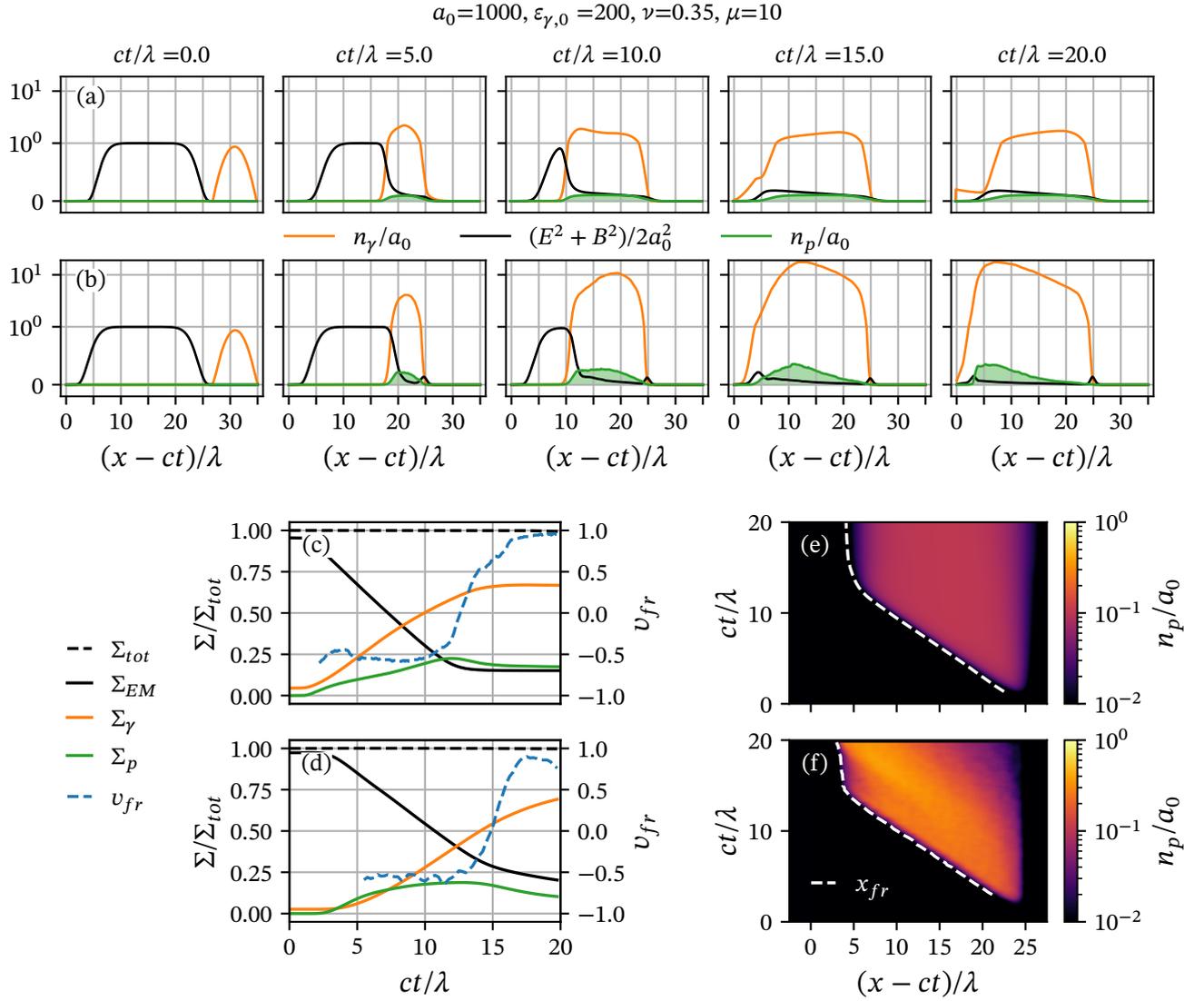


Рисунок 2.13 — Сравнение между (а, с, е) решением уравнений (2.76)–(2.81) и (b, d, f) результатами QED-PIC моделирования для начальных параметров $a_0 = 1000, n_{\gamma,0} = a_0 n_{cr}$. (а, b) Распределение концентрации гамма-квантов n_γ (оранжевая линия), плотности ЭМ энергии $(E^2 + B^2)/2$ (чёрная линия) и концентрации плазмы n_p (зелёная линия) в различные моменты времени. Вертикальная шкала является линейной в диапазоне $[0, 1]$ и логарифмической в диапазоне $[1, +\infty]$. (с, d) Баланс энергии в системе: полная энергия e^-e^+ пар Σ_p (зелёная линия), гамма-квантов Σ_γ (оранжевая линия) и ЭМ энергия Σ_{EM} (чёрная линия), нормированные на полную начальную энергию системы Σ_{tot} ; скорость фронта каскада v_{fr} (синяя штриховая линия). (е, f) Распределение e^-e^+ пар в плоскости x, t и положение фронта каскада x_{fr} (белая штриховая линия). Значения свободных параметров модели: $\nu = 0.35, \mu = 10$.

Первый режим (см. Рис. 2.13) реализуется, когда значение a_0 лазерного импульса недостаточно велико или гамма-сгусток недостаточно плотный. В этом случае плотность образующейся электрон-позитронной плазмы не достигает релятивистской критической плотности, так что $v_x \approx 1$, т.е. не возникают коллективные плазменные эффекты. В этом случае плазменная область вообще отсутствует, а вновь рождающиеся частицы движутся в неизменном поле лазерного импульса, близком к плоской волне. Как обсуждалось в работах [90; 137; 175; 180] и главе 1 данной работы, в этом случае значение параметра χ пар не растёт при движении в плоской волне. Но после каждого акта испускания гамма-кванта величина χ делится между родительской и дочерней частицами, так что через несколько поколений χ всех частиц становится пренебрежимо малым и развитие каскада прекращается. Таким образом, при достаточно малых a_0 гамма-кванты гамма-сгустка распадаются на пары, оставляющие «шлейф» электронов и позитронов, которые ускоряются вперёд и распространяются вместе с лазерным импульсом. Хотя плотность плазмы мала, общее количество пар может быть достаточно большим для того, чтобы им передавалась значительная часть лазерной энергии (см. Рис. 2.13 (с), (d)). Поскольку в этом режиме все частицы распространяются независимо друг от друга, фронт каскада распространяется с почти постоянной скоростью $v_{fr} \approx -0.5$.

Во втором режиме (см. Рис. 2.15) каскад развивается, как обсуждалось в п. 2.2.2. Пик плотности пар распространяется в сторону лазера со значительно меньшей скоростью (относительно переднего фронта лазерного импульса), чем в первом режиме. При этом плотность плазмы растёт во времени в отличие от первого режима, когда плотность плазмы в каждой точке остаётся практически неизменной после прохождения этой точки начальным гамма-сгустком. Как указывалось в п. 2.3.5, плотная электрон-позитронная плазма практически не поглощает лазерное поле, поэтому, несмотря на то, что в этом режиме общее число пар значительно больше, чем в первом, скорости передачи энергии от ЭМ поля к парам близки друг к другу в обоих режимах.

Если a_0 лежит между значениями, при которых наблюдается либо первый, либо второй режим (см. Рис. 2.14), то на начальном этапе каскад напоминает каскад S-типа, на что явно указывает отрицательное значение скорости фронта каскада (см. синюю пунктирную линию на Рис. 2.14 (с), (d)). В какой-то момент плотность пар становится достаточно большой, чтобы изменить

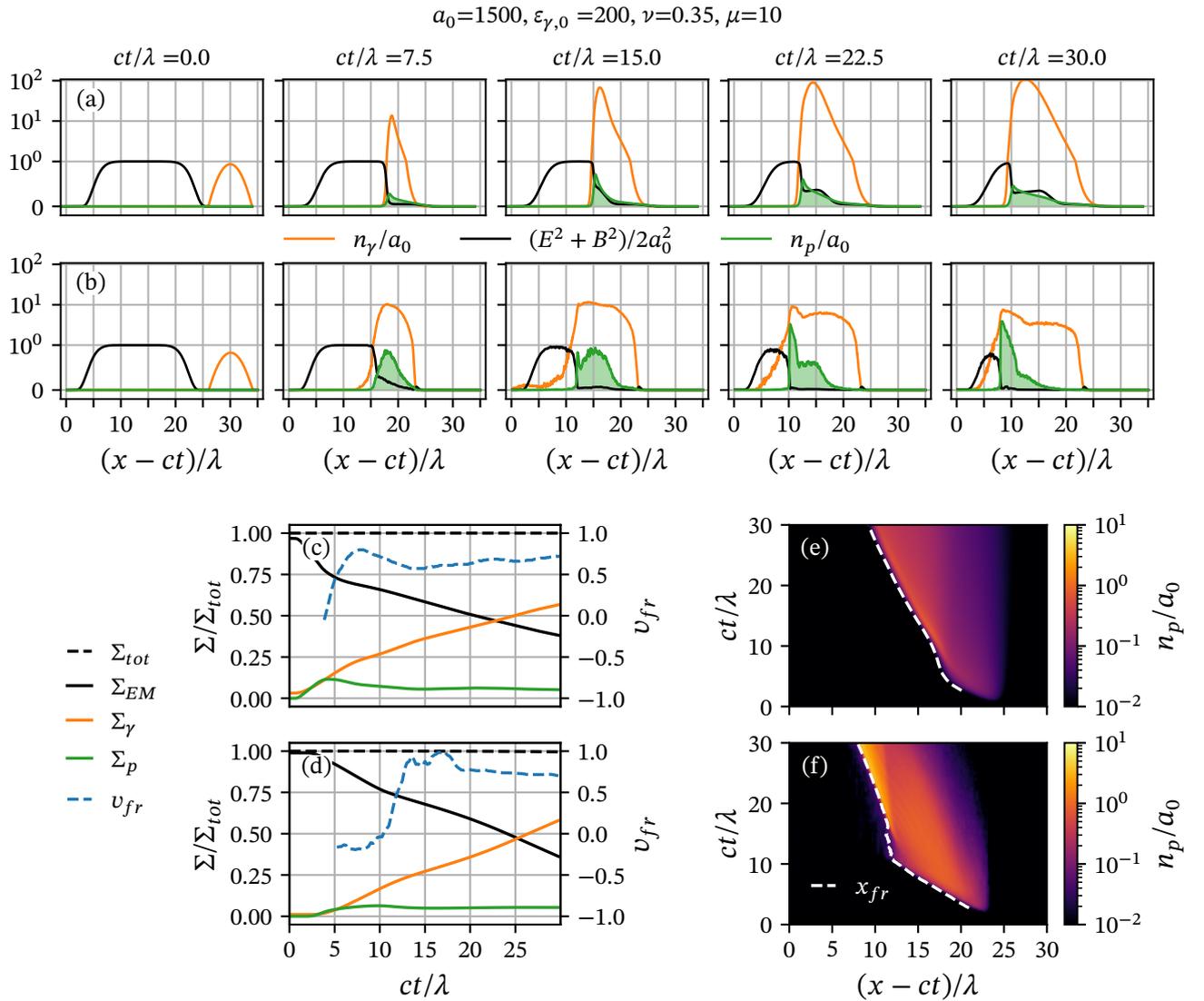


Рисунок 2.14 — То же, что на Рис. 2.13 для начальных параметров $a_0 = 1500$, $n_{\gamma,0} = a_0 n_{cr}$. Значения свободных параметров модели: $\nu = 0.35$, $\mu = 10$.

распространение лазера и каскад переходит в режим самоподдержания. На смену этих двух режимов указывает резкое изменение скорости фронта каскада. Начальная стадия (стадия каскада S-типа) просматривается и при больших значениях a_0 (см. рис. 2.15), однако она значительно короче и слабо выражена в результатах QED-PIC моделирования.

Мы также проверили разработанную выше аналитическую оценку (2.94), из которой была получена связь между средней продольной скоростью частиц каскада и скоростью фронта каскада. Как показано на Рис. 2.16 скорость фронта каскада, рассчитанное из этой оценки на основе средней скорости частиц, примерно совпадает с реальной скоростью фронта, наблюдаемой в модельном решении на стадии самоподдерживания каскада.

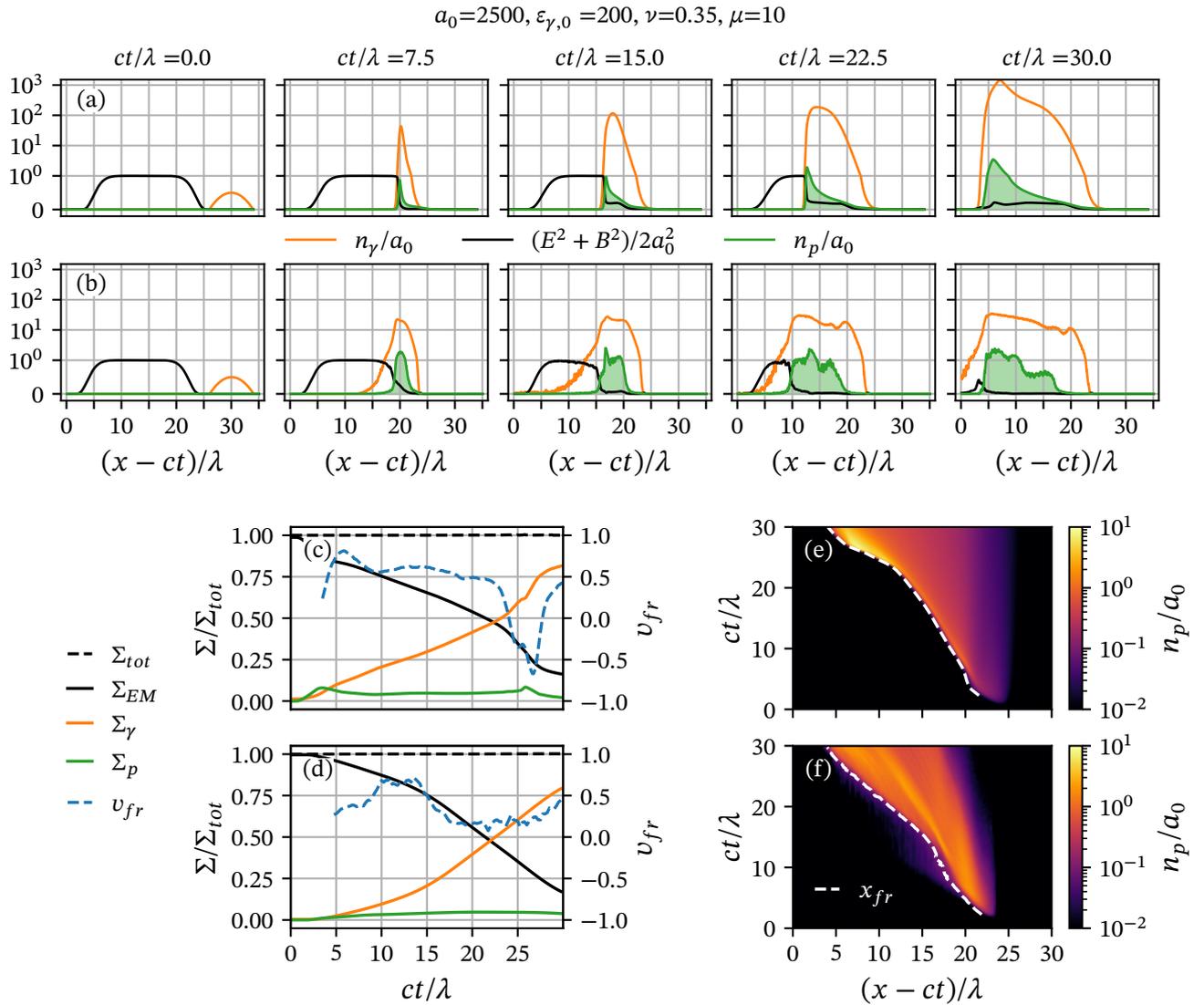


Рисунок 2.15 — То же, что на Рис. 2.13 для начальных параметров $a_0 = 2500$, $n_{\gamma,0} = 0.5a_0n_{cr}$. Значения свободных параметров модели: $\nu = 0.35$, $\mu = 10$.

Поскольку, как отмечено выше, эта стадия никогда не начинается в моделировании при $a_0 = 1000$, эта упрощенная модель не может быть применена в этом случае.

Стоит отметить некоторые особенности развития КЭД каскада не воспроизводятся в нашей модели. Например, в PIC моделировании отчетливо виден «хвост» пространственного распределения гамма-квантов, распространяющийся навстречу лазерному импульсу. Эти гамма-кванты имеют относительно низкую энергию и, следовательно, не могут образовать электрон-позитронные пары. Наша модель предсказывает, что края распределения плазмы и гамма-квантов почти полностью совпадают. Суммарная энергия, уносимая такими гамма-квантами, незначительна, поэтому для развития

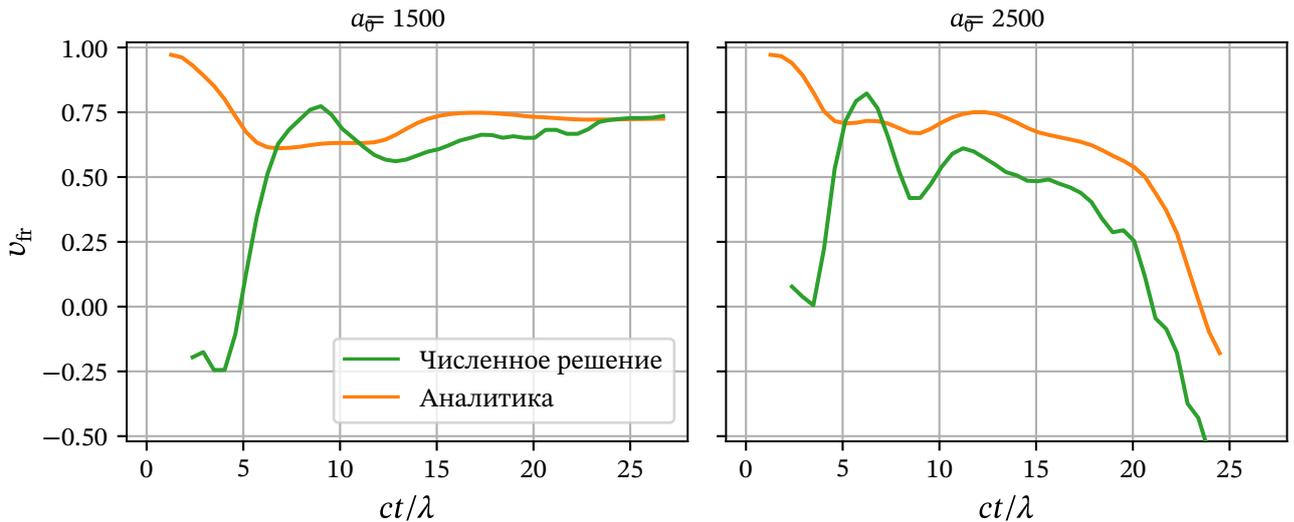


Рисунок 2.16 — Скорость фронта каскада, наблюдаемая в модельном решении (зеленая линия) и полученная из аналитической оценки (2.94) (оранжевая линия), рассчитанная по средней скорости частиц, находящихся на расстоянии 2λ вглубь электрон-позитронной плазмы от фронта каскада.

каскада эта особенность не является решающей. Причина, по которой наша модель не может отразить эту особенность, заключается в том, что мы предполагаем, что функции распределения являются моноэнергетическими. Более высокую точность можно получить, если разбить гамма-кванты на несколько групп с разными энергиями и описать их отдельно; тогда эта особенность присутствовала бы в наших решениях. Но, как уже упоминалось в п. 2.3.1, это сильно усложнит модель, но не приведет к существенным качественным изменениям решений.

2.5 Выводы

Таким образом, мы показали, что самоподдерживающийся КЭД каскад может развиваться в плоской волне, вопреки достаточно распространённому мнению, что такая конфигурация поля является неподходящей для наблюдения КЭД каскадов [90; 137; 175]. Однако, для наблюдения такого эффекта требуется достаточно плотная заправка, способная влиять на распространение этой плоской волны. Развитие КЭД каскада приводит к образованию плотной электрон-позитронная «подушки», фронт которой движется существенно медленнее скорости света, и которая приводит к эффективному поглощению лазерного излучения. По аналогии с волнами ионизации в физике га-

зового разряда [101; 102], распространение фронта КЭД каскада можно рассматривать как волну «пробоя вакуума». Важно отметить, что для развития такого КЭД каскада наличие отражённой волны не является принципиальным, что делает его существенно отличным от КЭД каскада в стоячей волне, который достаточно активно исследуется в силу достаточной простой конфигурации поля. Так, пороговое значение амплитуды волны a_0 , необходимое для развития КЭД каскада в стоячей волне, было рассчитано численно в публикации [92], исходя из условия удвоения числа частиц за один лазерный период, и при длине волны 1 мкм составило около 10^3 . Из наших расчетов следует, что порог развития КЭД каскада в плоской волне соответствует примерно величине $a_0 \sim 1500$, что несколько выше порога развития каскада в стоячей волне, но всё ещё значительно ниже критического поля Заутера-Швингера $a_S = mc^2/\hbar\omega_L \simeq 4 \cdot 10^5$ [1; 2]. Величина $a_0 = 1500$ соответствует интенсивности около $6 \cdot 10^{24}$ Вт/см² при длине волны 1 мкм, которая, как указывалось выше, потенциально может быть достигнута с помощью лазерных установок нового поколения, хотя и за счёт использования достаточно острой фокусировки излучения. Тем не менее, возникновение волны пробоя вакуума и последующее поглощение лазерного излучения может рассматриваться как ещё одно из фундаментальных ограничений на достижимую интенсивность лазерного излучения, впервые исследованных в публикациях [44; 159], на случай слабой фокусировки.

Также нами была разработана аналитическая самосогласованная модель развития такого КЭД каскада. Полное описание этого взаимодействия требует решения уравнений Максвелла вместе с кинетическими уравнениями для электронов, позитронов и гамма-фотонов. Эта система уравнений слишком сложна для аналитического анализа и обычно решается численно с помощью, например, QED-PIC кодов, требующих много вычислительных ресурсов. Чтобы получить редуцированные уравнения для вычислительно легкой модели, был сделан ряд предположений, основные из которых заключаются в переходе к квазиодномерному гидродинамическому описанию, использованию локально-квазиодноэнергетических функций распределения частиц и приближения плоской волны для лазерного излучения. Полученная упрощенная система уравнений записывается в замкнутом виде и также решается численно. Несмотря на сложность и нелинейность динамики каскада, оказалось, что относительно простая одномерная модель поз-

воляет качественно предсказать его развитие, например, макроскопическое пространственно-временное распределение частиц и энергетический баланс в системе. Этот факт служит обоснованием аналитического обоснования модели и, следовательно, нашего понимания процесса. Методы, используемые для разработки данной модели, вероятно могут быть применены для построения схожих моделей, описывающих астрофизические явления, такие как развитие КЭД каскадов в магнитосферах нейтронных звезд, также отличающихся сложной пространственно-временной динамикой и сопровождающихся генерацией волн пробоя вакуума [185].

Основные полученные в данной главе результаты опубликованы в работах [A3; A5; A6; A11—A14; A17]

Глава 3. Взаимодействие сильноточных пучков ультрарелятивистских частиц друг с другом и плазменными мишенями

3.1 Введение

Взаимодействие потоков частиц является фундаментальной проблемой физики плазмы и физики высоких энергий. С одной стороны, оно играет ключевую роль во многих астрофизических процессах, например, релятивистские джеты связаны с гамма-вспышками, приливными разрушениями, активными галактическими ядрами и блазарами. В коллапсарной модели гамма-всплесков [186; 187] джет взаимодействует с оболочкой звезды, образовавшейся после коллапса звезды. При развитии квантово-электродинамических (КЭД) каскадов вблизи полярных шапок нейтронных звезд [107] потоки образующихся электронов и позитронов, могут взаимодействовать друг с другом в магнитосфере нейтронной звезды и существенно определять её динамику [110]. С другой стороны, коллайдеры, являющиеся основным инструментом исследований в области физики элементарных частиц, основаны на лобовом столкновении пучков заряженных частиц высокой энергии. В настоящее время существует несколько проектов, нацеленных на строительство высоко-энергетических лептонных коллайдеров с рекордными параметрами, таких как ILC [112] и CLIC [113]. В области взаимодействия на таких коллайдерах могут генерироваться сильные ЭМ поля, благодаря чему возможно проявление таких эффектов как *разрушение* пучков (*disruption*) [115–117], *пучковое излучение* (*beamstrahlung*) [118–120], образование вторичных электрон-позитронных пар [121; 122], и даже эффектов *непертурбативной* сильнополевой КЭД [123; 124]. Как отмечалось во введении, ожидается, что в ближайшее время основным инструментом изучения физики сильных полей будут мульти-ПВт лазерные установки, такие как ELI [3], SULF [5], Apollon [4], а в будущем и установки 100-ПВт уровня, такие как XCELS [7], SEL [6], и т.д. Однако, достижение всё больших лазерных интенсивностей предъявляет всё более жёсткие требования к контрасту, стабильности, качеству пучка, пока не достигнутые на практике [125]. В этой связи сильноточные высокоэнергетические коллайдеры, отличающиеся высоким качеством и стабильностью пучка, могут стать привлекательной «без-

лазерной» альтернативой для экспериментов в области физики сильного поля. Отметим, что относительно недавно плазменное ускорение стало рассматриваться в качестве перспективного альтернативного метода создания линейных коллайдеров с большим ускоряющим градиентом [114]. Наиболее активно в таком контексте обсуждается проект FACET-II [123; 126; 127]. Ожидается, что этот ускоритель позволит оперировать с пучками электронов (или позитронов), амплитуда собственного поля которых сравнима с амплитудой поля в фокусе экстремально интенсивного лазера мультитераваттного уровня, т.е. всего на несколько порядков меньше критического поля Швингера E_S . Это обозначает, что взаимодействие такого пучка с неподвижными мишенями или другими пучками заряженных частиц также будет сопровождаться КЭД процессами. Так как собственное поле пучка ультрарелятивистских электронов в некотором смысле похоже на поле лазерного импульса (скрещенные и равные по амплитуде магнитное и электрическое поля), то при взаимодействии такого пучка с неподвижной твердотельной мишенью можно ожидать формирование плазменных структур, схожих с таковыми, возникающими при лазерно-плазменном взаимодействии, одна из конфигураций которого была подробно описана во второй главе данной работы. Данная глава посвящена исследованию КЭД эффектов в различных конфигурациях взаимодействия сильноточных пучков ультрарелятивистских частиц друг с другом и с плазменными мишенями.

3.2 Влияние реакции излучения на разрушение сильноточных пучков ультрарелятивистских частиц при их столкновении

При рассмотрении лобового столкновения пучков в ультрарелятивистском режиме, динамика частиц одного пучка преимущественно определяется ЭМ полями встречного пучка, тогда как сила со стороны поля собственного пучка является пренебрежимо малой [188; 189]. В таком приближении силу Лоренца, действующую на частицу, можно записать в следующем виде

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + (q/c) [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \simeq \pm m\omega_b^2 \mathbf{r}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{v} — скорость частицы, \mathbf{E} и \mathbf{B} — электрическое и магнитное поля встречного пучка соответственно, $q = \pm e$ — заряд частицы, r — расстояние частицы до оси пучка, $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_b / m$ — квадрат электронной (позитронной) плазменной частоты, n_b — концентрация встречного пучка. Положительный знак

в уравнении (3.1) относится к случаю электрон-электронных или позитрон-позитронных столкновений, когда результирующая сила вызывает расфокусировку обоих пучков. С другой стороны, при электрон-позитронных столкновениях частицы пучка совершают поперечные бетатронные колебания с частотой $\omega_b/\sqrt{\gamma}$ [117; 190], где γ — Лоренц-фактор частицы пучка. В таком случае вводят время фокусировки пучков, как время достижения частицей оси пучка, которое оценивается с точностью до численного множителя следующим образом

$$T_D = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\omega_b}. \quad (3.2)$$

Если длина пучка σ_z удовлетворяет условию $\sigma_z/c > T_D$, то радиусы пучков при взаимодействии существенно изменяются. Искажение пучка в области взаимодействия можно количественно оценить с помощью так называемого *параметра разрушения*, который определяется следующим образом

$$D_0 = \frac{\sigma_z^2}{c^2 T_D^2} = \frac{\omega_b^2 \sigma_z^2}{2\gamma c^2} \quad (3.3)$$

для равномерного распределения заряда пучка длиной σ_z и радиусом r_b [115]. Отметим, что это выражение даёт в $\pi^{-1/2} 2^{3/2} \approx 1.6$ раза большую величину, чем параметр разрушения для пучка с гауссовым распределением заряда, имеющего такой же общий заряд, среднеквадратичную длину, равную σ_z и среднеквадратичного радиуса, равного r_b [115; 190]. Выражение для D_0 можно обобщить для других распределений заряда пучка, а также использовать для характеристики взаимодействия пучков одного заряда. Хотя большое значение параметра разрушения может быть желательным для увеличения яркости [191], в то же время это может привести к увеличению фонового шума и препятствовать прецизионным измерениям. По этой причине условие $D_0 \ll 1$ желательно для экспериментального исследования непертурбативной КЭД в сильном поле [123].

Искривление траектории частицы в точке взаимодействия сопровождается синхротронным излучением, известным в сообществе физиков коллайдеров под термином *пучковое излучение* [119; 190]. Суммарная мощность

потерь на излучение фотонов зависит от КЭД параметра χ [32; 129; 192]

$$P_{\text{rad}} = \frac{\alpha m^2 c^4}{3\sqrt{3}\pi\hbar} \int_0^\infty \frac{4u^3 + 5u^2 + 4u}{(1+u)^4} K_{2/3}\left(\frac{2u}{3\chi}\right) du, \quad (3.4)$$

$$\chi = \frac{\gamma}{E_S} \sqrt{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})^2}, \quad (3.5)$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры, \hbar — постоянная Планка, $E_S = m^2 c^3/(e\hbar)$ — критическое поле Заутера-Швингера [192], $K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода [193]. В классическом ($\chi \ll 1$) и существенно квантовом ($\chi \gg 1$) пределах выражение (3.4) может быть сведено к простым степенным выражениям

$$P_{\text{rad}}(\chi \ll 1) \equiv P_C = \frac{2}{3} \frac{\alpha m^2 c^4}{\hbar} \chi^2, \quad (3.6)$$

$$P_{\text{rad}}(\chi \gg 1) \equiv P_Q = 0.37 \frac{\alpha m^2 c^4}{\hbar} \chi^{2/3}. \quad (3.7)$$

Если длина пучка настолько мала, что при взаимодействии одна частица пучка испускает лишь несколько фотонов, то необходимо также учитывать квантовую природу синхротронного излучения даже в пределе $\chi \ll 1$.

В дополнение к пучковому излучению в области взаимодействия возможны и другие квантовые эффекты, такие как фотообразование электрон-позитронных в сильных электромагнитных полях, трайидент процесс и т. д. [121; 194]. Взаимодействие между излучением жестких фотонов и образованием пар может привести к очень быстрому росту общего числа частиц — эффекту, известному как КЭД каскад, который в последнее время привлекает большое внимание (см. Главу 2). Такие каскады КЭД могут развиваться и при столкновении пучков. Таким образом, пучковое излучение и образование вторичных частиц в результате КЭД процессов могут вызывать существенное искажение пучков из-за истощения энергии и в целом играть негативную роль в работе коллайдера. Поэтому в контексте физики элементарных частиц коллайдеры обычно разрабатываются так, чтобы максимально уменьшить данные эффекты. Тем не менее, понимание коллективных эффектов в области взаимодействия имеет решающее значение не только для оптимальной работы коллайдера, но и для физики сильных полей. Так режим взаимодействия пучков с сильным пучковым излучением можно использовать, например, для создания ярких источников гамма-излучения

или для экспериментального исследования сильнополевой КЭД [124; 127; 195]. До сих пор аналитические модели взаимодействия пучков учитывали разрушение и пучковое излучение независимо друг от друга. В данном разделе мы исследуем взаимосвязь двух этих процессов для нахождения модифицированных выражений для параметра разрушения, учитывающих реакцию излучения как в классическом ($\chi \ll 1$), так и в квантовом ($\chi \gg 1$) пределе. Связь этих двух процессов обоснована тем, что пучковое излучение вызывает потерю энергии частицы и, поскольку время фокусировки пропорционально $\sqrt{\gamma}$ (см. уравнение (3.2)), приводит к уменьшению времени фокусировки и, следовательно, увеличению параметра разрушения D . Важно оценить силу этого эффекта не только качественно, но и количественно, независимо от того, требует ли интересующие приложения малого или большого параметра разрушения.

Далее уравнения будут записаны в нормированных величинах, где в качестве нормировочной частоты выбрана плазменная частота (нерелятивистская), соответствующая начальной максимальной концентрации частиц пучка ω_b . В таком случае время нормируется на $1/\omega_b$, координаты — на c/ω_b , импульс — на mc , ЭМ поля — на $mc\omega_b/e$.

3.2.1 Постановка задачи

Запишем уравнения движения ультрарелятивистских частиц с учётом реакции излучения

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\mathbf{E} - \frac{\mathbf{p}}{\gamma} \times \mathbf{B} - P(\chi) \frac{\mathbf{p}}{\gamma}, \quad (3.8)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma}, \quad (3.9)$$

где P относится к полной мощности излучения в нормированных единицах. Эти уравнения описывают классическое движение электрона в электромагнитном поле с учетом эффекта реакции излучения в полуклассическом приближении (с поправками КЭД, уменьшающими полную мощность излучения при больших значениях χ) (см. раздел 1.1). Хотя стохастический характер излучения приводит к тому, что отдельные частицы фокусируются по-разному, эффект разрушения относится к пучку в целом и, следовательно, должен рассчитываться путем усреднения расстояния от оси по всем частицам. Такое усреднение даже в квантовом режиме приводит к уравнениям

движения в полуклассическом приближении. Ниже будет показано, что результаты QED-PIC моделирования, в которых столкновение пучков моделируется самосогласованным образом с учетом стохастической природы квантовых процессов, достаточно хорошо совпадают с результатами нашей аналитической модели, что также оправдывает применение этого подхода.

Для аналитического исследования эффекта разрушения при лобовом столкновении электронного и позитронного пучков сделаем дополнительные предположения. Во-первых, как упоминалось в разделе 3.1, собственной силой, создаваемой ультрарелятивистским пучком, можно пренебречь в уравнении (3.8), поскольку она пропорциональна малой величине γ^{-2} [188; 189]. Во-вторых, достаточно исследовать поперечную динамику частиц, находящихся во фронте пучка, так как они раньше других начинают ощущать силу со стороны встречного пучка. И в-третьих, мы дополнительно ограничим наш анализ частицами на периферии пучка, то есть частицами, которые испытывают наибольшую силу и, следовательно, с большей вероятностью излучают фотоны. Поскольку излучение приводит к уменьшению энергии и, следовательно, уменьшению инерции частиц, ожидается, что именно частицы на периферии и фронте пучков испытают наибольшую фокусировку. Анализ движения таких частиц значительно упрощается за счет того, что на их динамику влияет только невозмущенная часть встречного пучка. Наконец, мы предполагаем, что электронные и позитронные пучки имеют одинаковые начальные параметры, и в этом случае пучки развиваются симметрично. Кроме того, считается, что пучки имеют цилиндрическую симметрию. В этом случае можно записать распределение плотности пучка в виде $n(\xi_{\pm}, r) = n_0 \eta_z(\xi_{\pm}) \eta_r(r)$, где n_0 — максимальная концентрация пучка, $\xi_{\pm} = z \pm \tau$ описывает продольную координату для пучков, движущихся со скоростью света, а функции $0 \leq \eta_{r,z} \leq 1$ определяют профиль распределения плотности. Электрическое поле, создаваемое таким пучком в основном поперечное и может быть найдено с помощью теоремы Гаусса в собственной системе отсчёта пучка и соответствующего преобразования Лоренца в лабо-

ракторную систему отсчёта

$$E_r = \frac{\eta_z(\xi_{\pm})}{r} \int_0^r \eta_r(r') r' dr' = \frac{r_b \eta_z(\xi_{\pm})}{2} \mathcal{E}(\rho), \quad (3.10)$$

$$\mathcal{E}(\rho) \equiv \frac{2}{\rho} \int_0^{\rho} \eta_r(r_b \rho') \rho' d\rho', \quad (3.11)$$

где $\rho = r/r_b$ — поперечная координата, измеренная в единицах расстояния r_b , на котором электрическое поле достигает максимума. Для электронов с $v_z = \text{const} = c$ получаем $\xi_+ = 2\tau$. Учитывая указанные выше предположения и переопределяя $\eta(\tau) \equiv \eta_z(2\tau)$, уравнения движения переписываются в следующем виде

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\frac{\mathcal{E}(\rho)}{\gamma} \eta(\tau), \quad (3.12)$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -P(\chi), \quad (3.13)$$

$$\chi = \gamma \frac{\mathcal{E}(\rho)}{a_S} r_b \eta(\tau). \quad (3.14)$$

Здесь $a_S = eE_S/mc\omega_b = mc^2/\hbar\omega_b$ — поле Заутера-Швингера в нормированных единицах. При выводе этих уравнений предполагалось, что электрическая и магнитная составляющие силы Лоренца, действующей на частицу, почти равны друг другу (отсюда множитель $1/2$ в уравнении (3.10) исчезает), что справедливо, если $v_z \simeq c \gg v_r$ и $\gamma \gg 1$. Это также позволяет предположить, что сила радиационного трения действует преимущественно вдоль оси z . Таким образом, в уравнении для поперечной координаты ρ она явно не присутствует. Как упоминалось выше, нас будут интересовать частицы, испытывающие наибольшие поля, т.е. частицы, у которых начальное смещение r_0 от оси пучка равно r_b и, следовательно, $\rho_0 \equiv \rho(\tau = 0) = 1$.

Перед решением уравнений (3.12)–(3.13) полезно оценить характерные временные масштабы, присутствующие в задаче, а именно масштаб времени изменения траектории электрона τ_{D_0} и временной масштаб потерь энергии из-за излучения τ_{BS}

$$\tau_{D_0} = \sqrt{2\gamma_0}, \quad (3.15)$$

$$\tau_{BS} = \frac{\gamma_0}{P(\chi_0)}, \quad (3.16)$$

где $\chi_0 = r_b \gamma_0 \mathcal{E}(\rho_0) / a_s$ и $\gamma_0 = \gamma(\tau = 0)$ — начальные значения параметра χ и Лоренц-фактор частиц соответственно. Введем также параметр κ следующим образом

$$\kappa = \frac{\tau_{D_0}}{\tau_{BS}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma_0} P(\chi_0)}. \quad (3.17)$$

Этот параметр определяет режим взаимодействия пучков. В случае $\kappa \gg 1$, рассмотренном в п. 3.2.2, значительные потери энергии из-за излучения происходят за время, намного меньшее, чем время, необходимое частице для достижения оси пучка. В противоположном пределе $\kappa \ll 1$, рассмотренном в п. 3.2.2, энергия пучка существенно изменяется за большое число бетатронных периодов.

Используя связь между γ_0 и χ_0 и учитывая, что $P(\chi) \equiv \alpha a_s \varphi(\chi)$, параметр κ можно также выразить следующим образом

$$\kappa = \alpha \sqrt{2r_b a_s} \frac{\varphi(\chi_0)}{\sqrt{\chi_0}}. \quad (3.18)$$

Это означает, что эффект излучения определяется двумя начальными параметрами взаимодействия: абсолютной величиной радиуса пучка r_b^1 и параметром χ_0 . Ниже будет показано, что этих двух параметров достаточно для расчета относительного изменения параметра разрушения, вызванного излучением. В классическом и КЭД-режиме определение (3.18) можно переписать следующим образом

$$\kappa \approx \alpha \sqrt{2r_b a_s} \times \begin{cases} 0.67 \chi_0^{3/2}, & \chi_0 \ll 1, \\ 0.37 \chi_0^{1/6}, & \chi_0 \gg 1. \end{cases} \quad (3.19)$$

3.2.2 Режим преобладания излучения

Приближение постоянной силы

Получение решения уравнений (3.12)–(3.13) в аналитическом виде не представляется возможным, поэтому, сначала сделаем некоторые аналитические оценки, прибегнув к приближению постоянной силы, которое соответствует замене координаты ρ в правой части уравнения (3.12) её начальным

¹В размерных величинах произведение $r_b a_s$ равно отношению радиуса пучка к комптоновской длине волны

значением $\rho_0 = 1$. В этом случае уравнения (3.12)–(3.13) принимают вид

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\frac{\mathcal{E}(\rho_0)}{\gamma}\eta(\tau), \quad (3.20)$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -P(\chi), \quad (3.21)$$

$$\chi = \chi_0 \frac{\gamma}{\gamma_0} \eta(\tau). \quad (3.22)$$

Согласно уравнениям (3.6)–(3.7) как в классическом ($\chi \ll 1$), так и в КЭД ($\chi \gg 1$) пределах функция P может быть аппроксимирована как степенная функция от χ

$$P(\chi) = \begin{cases} P_C(\chi) \approx 0.67\alpha a_S \chi^2, & \chi \ll 1, \\ P_Q(\chi) \approx 0.37\alpha a_S \chi^{2/3}, & \chi \gg 1. \end{cases} \quad (3.23)$$

В этом случае мы можем получить решение в квадратурах

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 - \frac{P_0(1-\nu)}{\gamma_0} \int_0^\tau \eta^\nu(\tau') d\tau' \right)^{\frac{1}{1-\nu}}, \quad (3.24)$$

$$\rho(\tau) = \rho_0 + \dot{\rho}_0 \tau - \mathcal{E}(\rho_0) \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} \frac{\eta(\tau'')}{\gamma(\tau'')} d\tau'', \quad (3.25)$$

где $\nu = 2$ для классического режима и $\nu = 2/3$ для квантового режима, $P_0 = P(\chi_0)$, $\dot{\rho}_0 = \dot{\rho}(\tau = 0)$. Проанализируем полученное решение для однородного пучка $\eta_z = \eta_r = \eta = 1$, для которого $\mathcal{E}(\rho) = \rho$. В этом случае все интегралы могут быть вычислены явно. В частности, решения для γ и ρ имеют следующий вид

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 \times \begin{cases} \left(1 + \kappa \frac{\tau}{\tau_{D_0}} \right)^{-1}, & \chi \ll 1, \\ \left(1 - \frac{\kappa}{3} \frac{\tau}{\tau_{D_0}} \right)^3, & \chi \gg 1, \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\rho(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{\tau_{D_0}^2} \times \begin{cases} 1 + \frac{\kappa}{3} \frac{\tau}{\tau_{D_0}}, & \chi \ll 1, \\ \left(1 - \frac{\kappa}{3} \frac{\tau}{\tau_{D_0}} \right)^{-1}, & \chi \gg 1, \end{cases} \quad (3.27)$$

где предполагается $\dot{\rho}_0 = 0$.

Интересно отметить, что в начале взаимодействия ($0 < \tau \ll \tau_{D_0}$) зависимость энергии электрона от времени одинакова как для классического, так и для КЭД-режима

$$\gamma(\tau) \approx \gamma_0 \left(1 - \kappa \frac{\tau}{\tau_{D_0}} \right). \quad (3.28)$$

Если ввести время τ_γ , после которого энергия электрона уменьшается вдвое из-за излучения, то это время в классическом режиме примерно в 1.6 меньше, чем в режиме КЭД

$$\tau_\gamma(\chi \ll 1) = \tau_{BS}, \quad (3.29)$$

$$\tau_\gamma(\chi \gg 1) = 3(1 - 2^{-1/3}) \tau_{BS}. \quad (3.30)$$

Это ожидаемый результат, так как потери на излучение согласно классическому выражению больше, чем согласно квантовому. Этот факт показывает, что столкновение пучков в квантовом режиме может быть предпочтительным, при необходимости уменьшения потерь энергии из-за излучения [196].

Время фокусировки можно найти из условия $\rho(\tau = \tau_D) = 0$. Используя отношение $D \propto \tau_D^{-2}$, выражение для параметра разрушения с учётом реакции излучения может быть записано в следующем виде

$$D \approx D_0 \begin{cases} (\chi/3)^{2/3}, & \chi \ll 1, \\ (\chi/3)^2, & \chi \gg 1. \end{cases} \quad (3.31)$$

В силу уравнения (3.18) мы можем переписать уравнение (3.3) в переменных r_b и χ_0 следующим образом

$$D \approx D_0 \begin{cases} 2.4 \sqrt[3]{r_b [\text{мкм}]} \chi_0, & \chi \ll 1, \\ 4.2 r_b [\text{мкм}] \chi_0^{1/3}, & \chi \gg 1. \end{cases} \quad (3.32)$$

На Рис. 3.1 показано, что, хотя оба решения в квантовом и классическом режимах достаточно хорошо описывают потери энергии, траектория частицы в соответствии с этим решением достаточно сильно отличается от реальной траектории, что завышает параметр разрушения, поэтому эта простая модель может служить только для грубых оценок параметра разрушения, чего может быть достаточно в тех случаях, когда интерес представляет только его порядок.

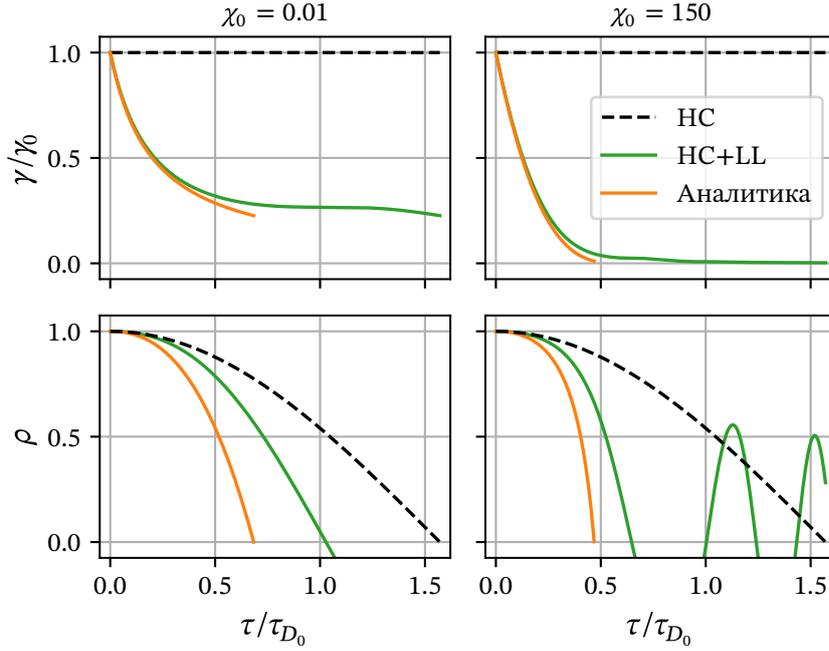


Рисунок 3.1 — Сравнение приближённого решения (3.26)–(3.27) (оранжевая линия) с численным решением уравнений (3.12)–(3.13) (зелёная линия) (см. Приложение А) при $\kappa_0 = 5$. Для левой колонки $\chi_0 = 0.01$, для правой — $\chi_0 = 150$. Чёрная штриховая линия соответствует решению уравнения (3.12) с постоянной энергией частицы γ .

Поправки модели

Точность аналитической модели можно значительно повысить за счет двух изменений. Во-первых, будем использовать среднюю поперечную координату в правой части уравнения (3.12) вместо ее начального значения ρ_0 ,

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} = -\frac{\mu}{\gamma}, \quad (3.33)$$

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -P\left(\mu\chi_0\frac{\gamma}{\gamma_0}\right), \quad (3.34)$$

$$\mu \equiv \frac{1}{\tau_D} \int_0^{\tau_D} \rho(\tau') d\tau' < 1. \quad (3.35)$$

Во-вторых, «сошьём» решения в КЭД и классическом режимах в момент времени τ_1 , при котором параметр частицы χ достигает некоторого порогового значения $\chi_1 \sim 1$, если его начальное значение было достаточно велико, то есть $\chi_0 > \chi_1$. Тогда при $\tau < \tau_1$ уравнения движения имеют следующее реше-

ние

$$\gamma_Q(\tau) = \gamma_0 \left(1 - \tilde{\chi}_0 \frac{\tau}{\tau_{D_0}}\right)^3, \quad (3.36)$$

$$\rho_Q(\tau) = 1 - \frac{\tau^2}{\tau_{D_0}^2} \left(1 - \tilde{\chi}_0 \frac{\tau}{\tau_{D_0}}\right)^{-1}, \quad (3.37)$$

$$\tilde{\chi}_0 = \sqrt{\frac{2}{9\gamma_0\mu}} P_Q(\mu\chi_0). \quad (3.38)$$

Отметим, что переменная $\tilde{\chi}_0$ (а также $\tilde{\chi}_1$ ниже) включает дополнительный множитель $1/3$ по сравнению с определением χ в уравнении (3.17), что несколько сокращает последующие выражения. Момент времени τ_1 находится из условия

$$\chi = \chi_0 \frac{\gamma_Q(\tau_1)\rho_Q(\tau_1)}{\gamma_0} \equiv \chi_0 \frac{\gamma_1\rho_1}{\gamma_0} = \chi_1. \quad (3.39)$$

Для нахождения приближённого решения этого уравнения рассмотрим следующее вспомогательное уравнение относительно x

$$k_1 = \left(1 - \frac{x^2}{1 - k_2x}\right) (1 - k_2x)^3. \quad (3.40)$$

Поскольку оба множителя в правой части убывают с ростом x , очевидно, что $x < x_{1,2}$, где $x_{1,2}$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$k_1 = (1 - k_2x_1)^3, \quad (3.41)$$

$$k_1 = 1 - \frac{x_2^2}{1 - k_2x_2}. \quad (3.42)$$

Эти уравнения имеют следующие решения

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt[3]{k_1}}{k_2}, \quad (3.43)$$

$$x_2 = \frac{k_2(1 - k_1)}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{k_2^2(1 - k_1)}} - 1 \right). \quad (3.44)$$

Таким образом, приближённое решение уравнения (3.40) может быть найдено как $x = \min\{x_1, x_2\}$. Наконец τ_1 находится путём выполнения замены

$$x \rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_{D_0}}, \quad k_1 \rightarrow \frac{\chi_1}{\chi_0} = \zeta, \quad k_2 \rightarrow \tilde{\chi}_0. \quad (3.45)$$

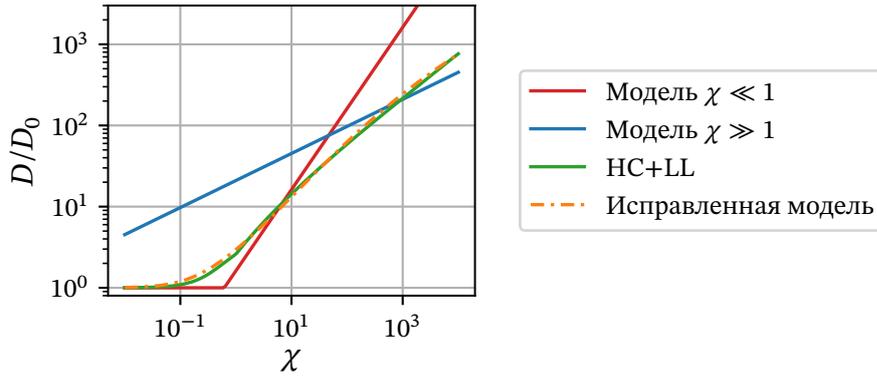


Рисунок 3.2 — Сравнение отношения D/D_0 , рассчитанного с помощью предельного выражения (3.31) (красная линия соответствует классическому пределу, синяя — квантовому), с помощью исправленной модели (оранжевая штрих-пунктирная линия) и с помощью численного решения уравнений движения (3.12)–(3.13) (зелёная линия) (см. Приложение А), как функция χ при фиксированном значении $r_b = 10$ мкм.

Из уравнения (3.39) отношение γ_1/γ_0 можно найти следующим образом

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\chi_1}{\chi_0} \frac{1}{\rho_1} \equiv \frac{\zeta}{\rho_1}, \quad (3.46)$$

где мы ввели $\zeta = \chi_1/\chi_0$.

При $\tau > \tau_1$ по определению необходимо использовать классические формулы для мощности излучения, так что решение уравнений движения имеет вид

$$\gamma_C(\tau) = \gamma_1 \left(1 + 3\tilde{\chi}_1 \frac{\tau - \tau_1}{\tau_{D_1}} \right)^{-1}, \quad (3.47)$$

$$\rho_C(\tau) = \rho_1 + \dot{\rho}_1 \frac{\tau - \tau_1}{\tau_{D_1}} - \frac{(\tau - \tau_1)^2}{\tau_{D_1}^2} \left(1 + \tilde{\chi}_1 \frac{\tau - \tau_1}{\tau_{D_1}} \right), \quad (3.48)$$

где

$$\tau_{D_1} = \sqrt{2\gamma_1}, \quad (3.49)$$

$$\tilde{\chi}_1 = \sqrt{\frac{2}{9\gamma_1\mu}} P_C(\mu\chi_1), \quad (3.50)$$

$$\dot{\rho}_1 = \tau_{D_1} \dot{\rho}_Q(\tau = \tau_1) = -\sqrt{\frac{\zeta}{\rho_1} \frac{\tau_1}{\tau_{D_0}}} \frac{2 - \tilde{\chi}_0 \frac{\tau_1}{\tau_{D_0}}}{\left(1 - \tilde{\chi}_0 \frac{\tau_1}{\tau_{D_0}} \right)^2}. \quad (3.51)$$

Время фокусировки можно вычислить из уравнения $\rho_C(\tau_D) = 0$, имеющее явное, однако слишком громоздкое решение. Найдём приближенное решение этого уравнения. Для этого рассмотрим следующее вспомогательное уравнение относительно x

$$0 = k_1 + k_2x - x^2(1 + k_3x). \quad (3.52)$$

При больших значениях k_3 решения этого уравнения можно грубо оценить следующим образом

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{k_1}{k_3}}. \quad (3.53)$$

Для меньших значений k_3 мы можем сначала найти решение, положив $k_3 = 0$, т.е.

$$0 = k_1 + k_2x' - x'^2. \quad (3.54)$$

Приведенное выше уравнение имеет решение

$$x' = \frac{k_2}{2} + \sqrt{k_1 + \frac{k_2^2}{4}}. \quad (3.55)$$

Предполагая, что решение уравнения (3.52) лишь немного отличается от x' , т.е. $x = x' + x''$, мы можем разложить это уравнение по x'' и оставить только линейные члены:

$$k_2x'' + 2x''x'(1 + k_3x') - k_3x'^3 = 0. \quad (3.56)$$

Отсюда получаем, что x можно приближённо вычислить следующим образом

$$x_2 = x' - \frac{k_3x'^3}{k_2 + 2x'(1 + k_3x')}. \quad (3.57)$$

Наконец, выбирается наименьшее из $x_{1,2}$, т.е. $x = \min\{x_1, x_2\}$. Чтобы найти τ_2 , выполним следующую замену

$$x \rightarrow \frac{\tau_2}{\tau_{D_1}}, \quad k_1 \rightarrow \rho_1, \quad k_2 \rightarrow \dot{\rho}_1, \quad k_3 \rightarrow \tilde{\chi}_1. \quad (3.58)$$

Таким образом,

$$\frac{\tau_D}{\tau_{D_0}} = \tau_1 + \tau_2 \sqrt{\frac{\zeta}{\rho_1}}, \quad (3.59)$$

$$\tau_1 = \min \left\{ \frac{1 - \zeta^{1/3} \tilde{\chi}_0 (1 - \zeta)}{\tilde{\chi}_0} \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\tilde{\chi}_0^2 (1 - \zeta)}} - 1 \right) \right\}, \quad (3.60)$$

$$\tau_2 = \min \left\{ \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\tilde{\chi}_1}}, \tau' - \frac{\tilde{\chi}_1 \tau'^3}{\dot{\rho}_1 + 2\tau' (1 + \tilde{\chi}_1 \tau')} \right\}, \quad (3.61)$$

$$\tau' = \sqrt{\rho_1 + \frac{\dot{\rho}_1^2}{4} - \frac{\dot{\rho}_1}{2}}. \quad (3.62)$$

В случае $\chi_0 < \chi_1$, $\tau_1 \equiv 0$ и χ_1 необходимо заменить на χ_0 в τ_2 .

По аналогии с уравнением (3.18) параметр, определяющий значимость излучения, может быть выражен следующим образом

$$\tilde{\chi} = \alpha \sqrt{\frac{2}{9} r_b a_S} \times \begin{cases} (\mu \chi_0)^{2/3}, & \chi_0 < \chi_1, \\ (\mu \chi_0)^{1/6}, & \chi_0 > \chi_1, \end{cases} \quad (3.63)$$

и несложно показать, что $\tilde{\chi}_1$ можно выразить через $\tilde{\chi}$. Таким образом, параметр разрушения с учётом реакции излучения в скорректированной модели равен

$$D = D_0 \left(\frac{\tau_{D_0}}{\tau_D} \right)^2. \quad (3.64)$$

Рисунок 3.2 показывает, что расчет параметра разрушения с использованием этой скорректированной модели значительно превосходит использование простых предельных выражений (3.31). Заметим, что хотя μ следует вычислять самосогласованным образом из полученного выше решения, численный анализ показывает, что значение μ близко к 0.5. Таким образом, чтобы найти аналитическое решение, мы рассматриваем μ как свободный параметр, который мы устанавливаем равным 0.5. Это также подтверждается тем, что варьирование μ в диапазоне 0.3–0.7 не приводит к существенному изменению конечного значения параметра разрушения. Согласно уравнениям (3.60)–(3.61), отношение D/D_0 может быть выражено как функция только от двух начальных параметров: радиуса пучка r_b и значения χ_0 . Данный факт позволяет провести за разумное время сканирование по параметрам с помощью полноразмерного трёхмерного QED-PIC моделирования и вычислить значение D/D_0 , основываясь на результатах такого моделирования (см. п. 3.2.4).

3.2.3 Взаимодействие длинных пучков

В данном разделе обсуждается взаимодействие длинных однородных пучков противоположно заряженных частиц, когда число бетатронных колебаний велико $\sigma_z/(c\tau_{D_0}) \gg 1$ и радиационные потери на излучение незначительны в течение одного периода, что соответствует пределу $\kappa \ll 1$. Такая конфигурация может соответствовать взаимодействию пучков с существенно различающимися плотностями энергии в системе центра масс, что может возникать из-за большей массы, Лоренц-фактора или плотности частиц одного пучка по сравнению с другим в лабораторной системе отсчета. Характерным примером такого сценария является столкновение электронного и протонного пучков. В таком случае характерный временной масштаб эволюции более энергичного пучка намного больше, чем у встречного, поэтому все частицы встречного пучка ощущают практически невозмущенное поле в отличие от случая, рассмотренного в предыдущем разделе, когда данное утверждение верно только для частиц на фронте пучка. Для простоты рассмотрим взаимодействие однородных пучков $\eta_z = \eta_r = \eta = 1$, для которых $\mathcal{E}(\rho) = \rho$. Удобно ввести следующие переменные

$$a^2 = \rho^2 + \gamma \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2, \quad (3.65)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{d\rho \sqrt{\gamma}}{d\tau \rho} \right), \quad (3.66)$$

где a и φ — амплитуда и фаза бетатронных колебаний ($\rho = a \cos \varphi$). В новых переменных уравнение (3.21) принимает вид

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{a}{2\gamma} \sin^2 \varphi P \left(\frac{\chi_0}{\gamma_0} a \gamma |\cos \varphi| \right). \quad (3.67)$$

Чтобы вычислить медленно меняющуюся амплитуду бетатронных колебаний, $A = \langle a \rangle$, усредним уравнение (3.67) по φ и пренебрежём быстрыми составляющими амплитуды a и энергии γ

$$\frac{dA}{d\tau} = -\frac{A}{2\bar{\gamma}} f_1 \left(\frac{\chi_0}{\gamma_0} A \bar{\gamma} \right), \quad (3.68)$$

$$\frac{d\bar{\gamma}}{d\tau} = -f_2 \left(\frac{\chi_0}{\gamma_0} A \bar{\gamma} \right), \quad (3.69)$$

$$(3.70)$$

где

$$f_1(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi P(v|\cos \varphi|) d\varphi, \quad (3.71)$$

$$f_2(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(v|\cos \varphi|) d\varphi, \quad (3.72)$$

и $\bar{\gamma} = \langle \gamma \rangle$. Вводя $\bar{\chi} = \langle \chi \rangle = \chi_0 A \bar{\gamma} / \gamma_0$, получаем систему, описывающую усредненную по бетатронным колебаниям динамику электрона

$$\frac{d\bar{\chi}}{d\tau} = -\frac{\bar{\chi}}{2\bar{\gamma}} [f_1(\bar{\chi}) + 2f_2(\bar{\chi})], \quad (3.73)$$

$$\frac{d\bar{\gamma}}{d\tau} = -f_2(\bar{\chi}). \quad (3.74)$$

Данная система имеет следующий интеграл движения

$$\ln \bar{\gamma} - g(\bar{\chi}) = \text{const}, \quad (3.75)$$

$$g(v) = \int \frac{2f_2(v)dv}{vf_1(v) + 2vf_2(v)}. \quad (3.76)$$

В классическом пределе ($\chi \ll 1$) $f_2(v) = 4f_1(v) = P_C(v)/2$ и интеграл движения принимает вид

$$\bar{\gamma}^{-9/8} \bar{\chi} = \text{const}. \quad (3.77)$$

Из уравнений (3.74) и (3.77) следует, что

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 S(\tau)^{-4/5}, \quad (3.78)$$

$$\bar{\rho} = \rho_0 S(\tau)^{-1/10}, \quad (3.79)$$

$$S(\tau) = 1 + \frac{5}{8} \left(\chi \frac{\tau}{\tau_{D_0}} \right). \quad (3.80)$$

В существенно квантовом пределе ($\chi \gg 1$)

$$f_2(v) = \frac{8}{3} f_1(v) = \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(4/3)\sqrt{\pi}} P_Q(v), \quad (3.81)$$

и интеграл движения принимает вид

$$\bar{\gamma}^{-19/16} \bar{\chi} = \text{const}. \quad (3.82)$$

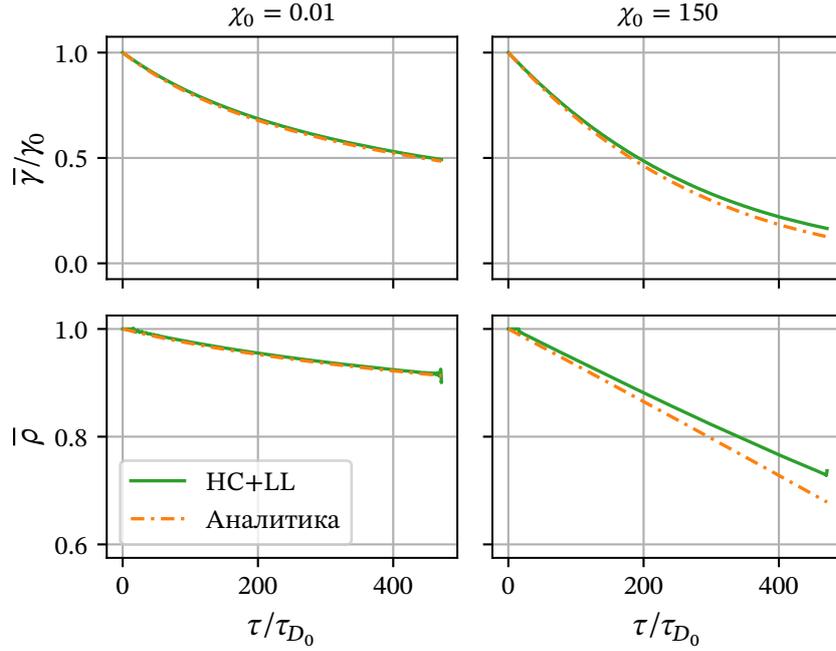


Рисунок 3.3 — Сравнение аналитического решения (3.78)–(3.79) и (3.83)–(3.84) (оранжевая штрих-пунктирная линия) и численного решения уравнений (3.12)–(3.13) (зелёная линия) (см. Приложение А) при $\chi_0 = 0.005$. В левой колонке $\chi_0 = 0.01$, в правой — $\chi_0 = 150$.

Уравнения (3.74) и (3.82) имеют следующие решения

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 S(\tau)^{24/5}, \quad (3.83)$$

$$\bar{\rho} = \rho_0 S(\tau)^{9/5}, \quad (3.84)$$

$$S(\tau) = 1 - \frac{5}{24\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(4/3)} \left(\chi \frac{\tau}{\tau_{D_0}} \right) \approx 1 - 0.149 \left(\chi \frac{\tau}{\tau_{D_0}} \right). \quad (3.85)$$

Рисунок 3.3 демонстрирует хорошее совпадение численного решения уравнений (3.12)–(3.14) и аналитического решения (3.78) и (3.83).

3.2.4 QED-PIC моделирование

Для подтверждения предсказаний модели, разработанной в п. 3.2.2 было выполнено полноразмерное трехмерное QED-PIC моделирование с использованием кода QUILL [183], который позволяет моделировать КЭД процессы с учётом их стохастичности с помощью метода Монте-Карло. Принимая z за ось распространения пучка, параметры моделирования составляли

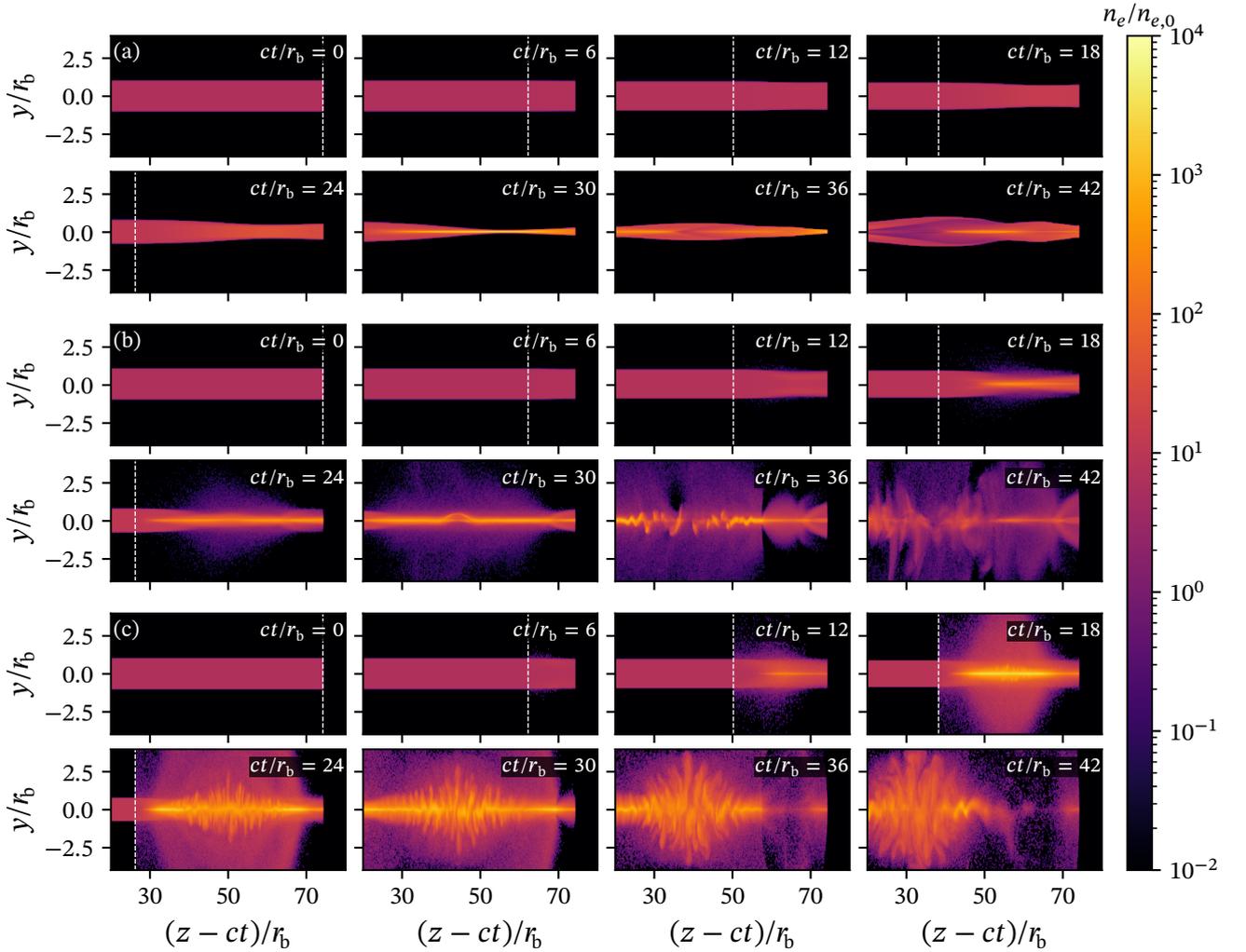


Рисунок 3.4 — Распределение плотности электронов в различные моменты времени в PIC моделировании (a) без учёта реакции излучения, и (b, c) с учётом реакции излучения. Начальные параметры пучка составляют (b) $r = 10$ мкм, $\chi = 1$ (c) $r = 1$ мкм, $\chi = 10$. Плотность и длительность пучков соответствуют значению параметра разрушения D_0 равному 10. Белая штриховая линия соответствует положению фронта встречного позитронного пучка.

$\Delta t = 0.6\Delta z$, $\Delta x = \Delta y = 2.5\Delta z$, $\Delta z = r_b/20$. Для всех проведенных моделирований шаг по времени Δt был намного меньше, чем средняя задержка между последовательными КЭД процессами (излучением гамма-кванта или рождением электрон-позитронной пары). Для численного решения уравнений Максвелла использовалась гибридная схема FDTD, подробно описанная в разделе 3.4.1. Моделирование также выполнялось с использованием кода VLPL [197–199] в сочетании с бездисперсионной схемой решения уравнений Максвелла — RIP [200]. Различия между результатами моделирования с ис-

пользованием двух разных кодов были незначительными. На рисунке 3.4, демонстрирующем пример результатов моделирования, видно, что при $\chi_0 = 10$ (см. Рис. 3.4 (с)) происходит обильное рождение вторичных электронов и позитронов. Поскольку этот процесс не влияет на движение частиц пучка на фронте, формирование и развитие такого каскада подробно не обсуждается. Также отметим развитие поперечной шланговой неустойчивости в моделированиях с учетом КЭД процессов, которая будет описана ниже.

Мы провели серию моделирований с различными значениями начального радиуса пучков r_b и величины χ_0 . Длина пучка выбиралась таким образом, чтобы для каждого моделирования параметр разрушения без учёта реакции излучения, т.е. D_0 , равнялся 10. Это было сделано для того, чтобы иметь четкий способ определения времени фокусировки, используемого при расчете параметра разрушения. В этом отношении наше QED-PIC моделирование не соответствует какому-либо конкретному эксперименту, возможному, например, на установке FАCET-II, поскольку последний требует очень короткого времени взаимодействия для подавления радиационных потерь [123]. Вместо этого QED-PIC моделирование использовалось как средство для решения уравнений движения частиц в самосогласованно вычисляемом электромагнитном поле и с учетом стохастического характера КЭД процессов. Для каждого моделирования мы отслеживали несколько сотен частиц, расположенных на фронте и периферии электронного пучка, по траекториям которых рассчитывалось среднее время пересечения оси пучка. Примеры таких траекторий, численное решение уравнений (3.12)–(3.13) и приближенное аналитическое решение показаны на Рис. 3.5. Для каждой пары значений r_b и χ_0 проводилось два моделирования: с учётом и без КЭД процессов. Сравнивая среднее время фокусировки в этих двух моделированиях, рассчитывалось отношение D/D_0 в широком диапазоне начальных параметров, что представлено на Рис. 3.6 вместе с оценкой из уравнений (3.59)–(3.61) (в котором были использованы свободные параметры $\mu = 0.5$, $\chi_1 = 1$) и результатом численного решения одночастичных уравнений движения (3.12)–(3.13).

Важно отметить, что для больших значений r_b и χ_0 (область, отмеченная красной рамкой на Рис. 3.6) для расчета параметра разрушения был использован альтернативный критерий. Это связано с тем, что при таких параметрах потери энергии из-за излучения настолько велики, что через некоторое время частицы пучка перестают быть релятивистскими, а их продольная

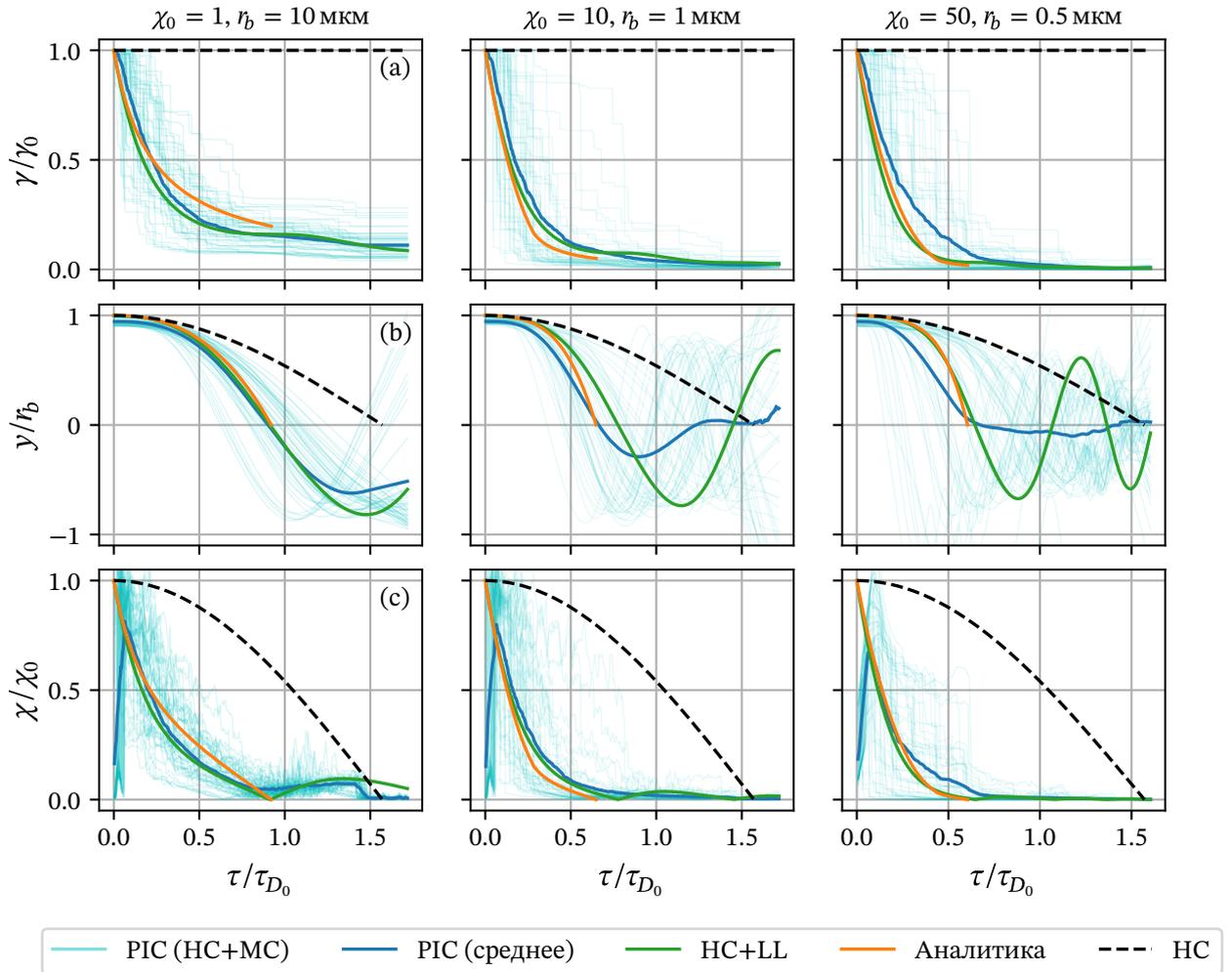


Рисунок 3.5 — Динамика электронов в поле встречного позитронного пучка. (a) Энергия электронов, (b) смещение относительно оси пучка и (c) величина параметра χ как функции времени. Тонкие голубые линии соответствуют траекториям отдельных частиц в QED-PIC моделировании, сплошная синяя линия — величинам, усреднённым по этим частицам, зелёная линия — численному решению уравнений (3.12)–(3.13) (см. Приложение A), оранжевая линия — аналитическому решению (3.36)–(3.37), (3.47)–(3.48), чёрная штриховая линия — решению уравнения (3.12) без учёта пучкового излучения, т.е. с постоянной энергией γ . Различные колонки соответствуют различным начальным параметрам r_b и χ_0 .

скорость становится сравнимой с их поперечной скоростью, так что в конце концов частицы прекращают свое направленное движение и начинают вращение, не пересекая ось пучка. В таких случаях для вычисления параметра разрушения вместо времени достижения частицей оси пучка, использовалось время, за которое продольная скорость частицы достигала значения

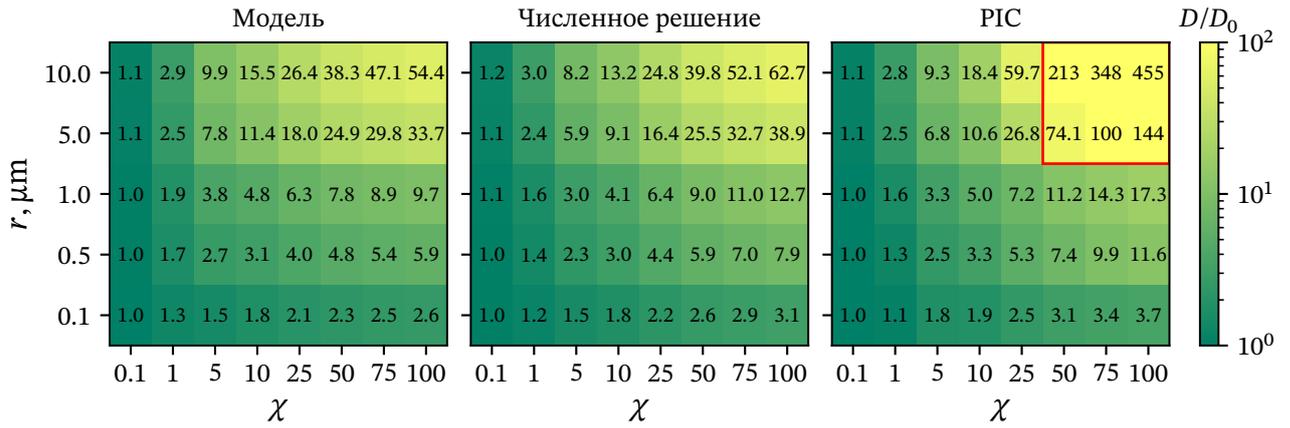


Рисунок 3.6 — Отношение D/D_0 , рассчитанное (левая колонка) по аналитическому решению (3.59)–(3.60), (средняя колонка) по численному решению уравнений (3.12)–(3.13), (правая колонка) полученная по результатам QED-PIC моделирования. Красная рамка обозначает область, в которой был использован альтернативный критерий разрушения (см. текст).

0.5с. Поскольку наша аналитическая модель предполагает, что продольная скорость всегда больше поперечной, она не может быть применена в этих случаях. Как было указано выше, наша аналитическая модель предсказывает, что отношение D/D_0 не зависит явно от энергии частиц. Для подтверждения этого нами было выполнено несколько QED-PIC моделирований с разными начальными энергиями частиц, но с одинаковыми значениями χ_0 и r_b . Результаты моделирования показывают, что до тех пор, пока энергия частицы достаточно велика, для того чтобы частицы оставались ультрарелятивистскими до достижения оси пучка, результирующее отношение D/D_0 не зависит от энергии частицы.

Сравнение предсказаний модели взаимодействия пучков в режиме слабого пучкового излучения ($\chi \ll 1$) с результатами QED-PIC моделирования не приводится в данном разделе, т.к. этот режим в большей степени связан с взаимодействием пучков с существенно различающимися плотностями энергии (в системе центра масс), при котором более энергичный из них практически не деформируется, поэтому такое взаимодействие может быть достаточно точно описано за счёт динамики лишь одной частицы в невозмущенном поле. Тем не менее, в разделе 3.3 будет показано, что данная модель может быть практически без изменений применена к задаче о взаимодействии сильнооточного пучка ультрарелятивистских частиц с протяжённой

плазменной мишенью. Там же приводится сравнение предсказаний данной модели с результатами QED-PIC моделирования.

3.2.5 Обсуждение

Схема, обсуждаемая в публикации [123], для наблюдения эффектов непертурбативной КЭД с помощью лобового столкновения электронного и позитронного пучков, требует столкновения пучков очень малому параметру разрушения. Это требование накладывает жесткие ограничения на длину и диаметр пучка. Однако, как показано выше на параметр разрушения также влияет реакция излучения, которая не учитывается при стандартном способе расчёта параметра разрушения. Наша аналитическая модель показывает, что при параметрах пучка, необходимых для достижения значения $\chi \sim 1600$ при энергии пучка 125 ГэВ, полном заряде 3 нКл и радиусе 10 нм, увеличение разрушения из-за излучения достигает 60%. Для будущих коллайдеров CLIC и ILC, наоборот, реакция излучения может несколько смягчить требования к параметрам пучка для достижения желаемой яркости в области взаимодействия, что частично достигается за счет использования плоских пучков. Хотя при выводе аналитической оценки отношения D/D_0 мы рассматривали цилиндрические пучки, полученные результаты можно применить к конфигурациям плоских пучков, предлагаемых для использования на установках CLIC и ILC. Для частиц, с начальным отклонением, лежащим на одной из осей пучка, движение остается плоским, и поэтому уравнения (3.12)–(3.13) остаются справедливыми. Таким образом, вычисляя значения χ_0 и r_b относительно распределения заряда пучка (см., например, [201] для распределения электромагнитных полей для эллиптического гауссова распределения заряда), параметр разрушения может быть вычислен для конкретной оси с использованием нашей аналитической модели. Выполнение этой процедуры, приводит к заключению, что для ожидаемых параметров пучка на установке CLIC увеличение параметра разрушения составляет примерно 35% для более длинной оси и только на 5% для более короткой. Для круглого пучка с тем же полным зарядом и площадью поперечного сечения увеличение параметра разрушения составляет около 35% по обеим осям, что подтверждает тот факт, что использование плоских пучков снижает влияние реакции излучения на столкновение пучков. Для параметров, ожидаемых на установке ILC, увели-

чение разрушения не превышает 5% по обеим осям из-за достаточно низкого значения χ .

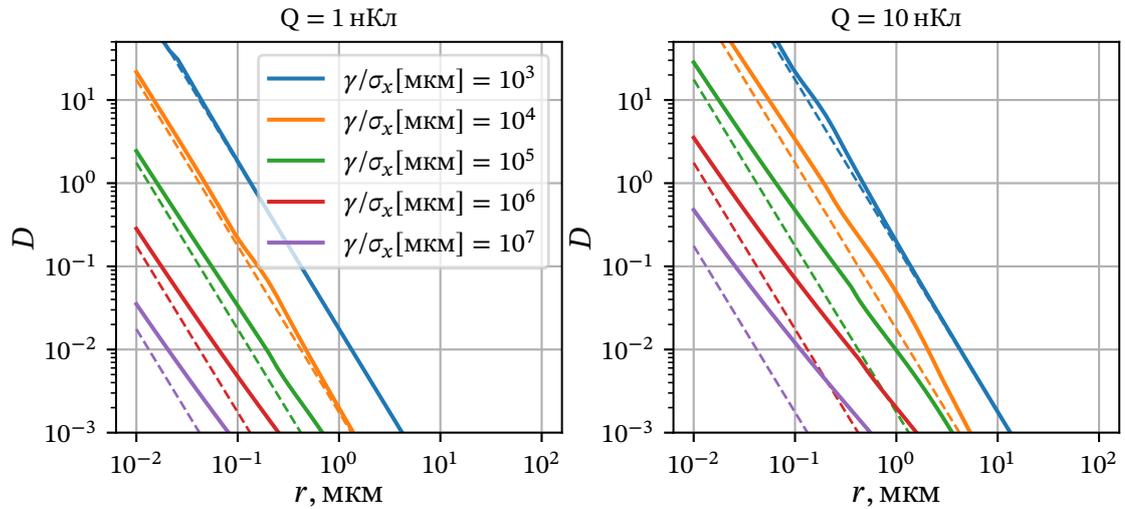


Рисунок 3.7 — Параметр разрушения, рассчитанный с учётом (сплошные линии) и без учёта (штриховые линии) пучкового излучения, для различных параметров пучка.

На Рис. 3.7 показано, как реакция излучения влияет на разрушение пучков при различных параметрах. В частности, показано, что столкновение пучков с достаточно большим полным зарядом (> 10 нКл) и малыми радиусами может быть подвержено существенному влиянию пучкового излучения. Другая интересная зависимость заключается в том, что хотя увеличение энергии частиц и/или уменьшение длины пучка (при сохранении того же общего заряда) уменьшает параметр разрушения, оно в то же время приводит к увеличению значимости пучкового излучения. Таким образом, отношение D/D_0 можно использовать для определения того, является ли излучение при столкновении пучков значительными или нет.

Столкновение пучков одного знака заряда

Разработанная выше модель, описывающая увеличение параметра разрушения за счёт реакции излучения, может быть расширена и на случай столкновения пучков с одинаковым знаком заряда. В таком случае параметр разрушения является квадратом отношения времени, за которое отклонение частиц от оси пучка увеличивается вдвое, к времени взаимодействия пучков.

Вычисление этого параметра с учётом реакции излучения может быть проведено с помощью аналогичного метода, который был использован выше, т.е. за счёт замены в правой части уравнений движения частиц мгновенного значения силы, действующей на частицу, на её среднее значение. Так же как и в случае столкновения противоположно заряженных пучков, в данном случае поперечное отклонение частицы изменяется в ограниченном интервале от r_0 до $2r_0$, поэтому такое приближение обосновано. Также данная процедура позволяет неявно учесть тот факт, что сила, действующая на частицу за пределами пучка, спадает по закону $1/r$. Отметим, что при взаимодействии пучков одного знака заряда частицы совершают инфинитное движение, а не осциллируют, поэтому оба режима взаимодействия, соответствующие столкновению либо коротких, либо длинных пучков, могут быть описаны нами одной аналитической моделью. Таким образом, оказывается, что несмотря на различный характер движения частиц в случае столкновения одинаково или противоположно заряженных пучков, конечные формулы для вычисления параметра разрушения с учётом реакции излучения идентичны в обоих этих случаях. Таким образом, область применимости предложенного нами способа вычисления параметра разрушения пучков с учётом реакции излучения распространяется и на случай взаимодействия пучков одного знака заряда. Отметим, что экспериментальная реализация столкновения, например, двух электронных пучков является более простой задачей, чем столкновение электронного и позитронного пучков, однако, например, с точки зрения достижения непертурбативного режима квантовой электродинамики такие конфигурации равнозначны.

Увеличение выхода вторичных частиц

В публикации [A8] была изучена возможность существенного увеличения выхода вторичных частиц при столкновении сильноточных пучков за счёт относительного сдвига их осей. При этом сдвиг определяется таким образом, чтобы ось одного пучка находилась в области максимального поля встречного пучка. Нами было показано что в такой конфигурации, несмотря на меньшую область геометрического перекрытия пучков, доля частиц, достигающих непертурбативного режима КЭД ($\alpha\chi^{2/3} > 1$) [123; 124], не отличается от таковой в несмещённой конфигурации. При этом преимуществом

смещённой конфигурации является более однородное распределение вторичных частиц, так как в таком случае все частицы пучка испытывают примерно одинаковую напряжённость поля встречного пучка. В случае несмещённой конфигурации максимальное поле испытывают частицы на периферии пучка, что приводит к тому, что распределение вторичных частиц имеет форму кольца. Численное моделирование также показывает увеличение выхода числа вторичных частиц в смещённой конфигурации вплоть до 5-10%. Аналогичный результат получается при вычислении числа вторичных частиц с помощью аналитических оценок, представленных в публикациях [116; 121]. Так как реализация такой конфигурации не требует никаких дополнительных усложнений с точки зрения эксперимента, очевидно её преимущество по сравнению с несмещённой конфигурацией.

Изгибная неустойчивость

Помимо излучения частицами жёстких фотонов при столкновении сильноточных пучков, важным КЭД эффектом является распад излученных фотонов на вторичные электрон-позитронные пары. Проведённое нами полноразмерное численное QED-PIC моделирование показывает, что в достаточно большом диапазоне начальных параметров (максимальное начальное значение параметра χ для частиц превышает 1) образующаяся таким образом электрон-позитронная плазма имеет существенно большую плотность, чем плотность начальных частиц. В такой плазме за счёт небольшого пространственного разделения электронной и позитронной компонент экранируется электрическое поле начальных пучков. Таким образом, задача о динамике вторичной плазмы может быть сведена к задаче о динамике нейтральных потоков во внешнем магнитном поле (начальных пучков), которая является одной из наиболее распространённых задач в астрофизике. Известно, что в такой задаче может развиваться ряд неустойчивостей. Численное моделирование показывает, что наиболее выраженной является шланговая (изгибная) неустойчивость плазменного потока в азимутальном магнитном поле, представляющая собой отклонение центра масс пучка от его средней оси симметрии (см. Рис. 3.4 (b, c)). Данный факт вероятно объясняется тем, что процесс фотообразования электрон-позитронных пар является стохастическим, что приводит к нарушению цилиндрической симметрии пучков.

Нами было определено влияние вторичных электрон-позитронных пар, образующихся в результате распада жёстких фотонов, излученных начальными частицами пучка, на развитие данной неустойчивости. Результаты полноразмерного трёхмерного QED-PIC моделирования показывают, что образование вторичных пар существенно не изменяет характерный пространственный масштаб неустойчивости и её инкремент. Данный результат объясняется тем, что такие частицы не приводят к генерации как магнитных полей, т. к. суммарный ток образованной электрон-позитронной пары равен нулю, так и электростатических, т. к. они в среднем компенсируются за счёт симметричного образования пары из встречного пучка, создающих противоположное поле. Таким образом вторичные электрон-позитронные пары создают квази-нейтральный фон достаточно большой плотности. Результаты моделирования с искусственно отключенным образованием электрон-позитронных пар показывают, что затравка для шланговой неустойчивости создаётся в результате нарушения симметричности распределения заряда пучков, вызванного стохастическим излучением фотонов частицами пучка. Последнее приводит к существенному уширению энергетического спектра пучка. Так как частицы с меньшей энергией быстрее фокусируются в поле встречного пучка, это в конечном итоге приводит к тому, что распределение заряда в пучках приобретает случайную составляющую.

Также нами были оценены характерный временной и пространственный масштабы наблюдаемой неустойчивости. Для этого была модифицирована давно разработанная теория её линейной стадии [116; 202]. Согласно этой теории эти масштабы по порядку величины совпадают с релятивистской плазменной частотой $\sqrt{4\pi e^2 n_b / m\gamma}$, где n_b и γ — концентрация и Лоренц-фактор частиц пучка. Важным отличием между исследуемой нами задачей и модельной задачей, с помощью которой описывается изгибная неустойчивость, заключается в том, что в последней предполагается постоянство энергии частиц и распределение собственных полей пучков. Оба этих предположения оказываются неверными в рассматриваемой нами задаче. Непостоянство энергии можно учесть с помощью теории, разработанной в п. 3.2.2 и описывающей увеличение параметра разрушения пучков при учёте реакции излучения. Так как релятивистская плазменная частота пропорциональна корню из параметра разрушения, то отношение характерной длины волны изгибной неустойчивости с учётом реакции излучения к таковой без учёта ре-

акции равно корню из отношения соответствующих параметров разрушения, вычисляемого с помощью нашей теории, т.е.

$$\lambda_{\text{kink}} \sim \sqrt{\frac{mc^2\gamma_0}{\pi e^2 n_b}} \sqrt{\frac{D_0}{D}}, \quad (3.86)$$

где γ_0 — начальный Лоренц-фактор частиц пучка. Фокусировка и соответствующее увеличение плотности пучков приводит к дополнительному увеличению плазменной частоты. В связи со стохастичностью излучения, максимальная концентрация сфокусированного пучка существенно меньше, чем в случае без учёта реакции излучения. Согласно результатам моделирования, отношение максимальной плотности пучка к начальной ν достигает значения порядка 10–100 (см. Рис. 3.4 (b, c)). Таким образом характерный масштаб изгибной неустойчивости по порядку величины можно оценить следующим образом

$$\lambda_{\text{kink}} \sim \sqrt{\frac{mc^2\gamma_0}{\pi e^2 n_{b,0}}} \sqrt{\frac{D_0}{D} \frac{1}{\nu}} = \lambda_{\text{kink},0} \sqrt{\frac{D_0}{D} \frac{1}{\nu}}, \quad (3.87)$$

Вычисленный таким образом пространственный масштаб совпадает по порядку величины с результатами полноразмерного QED-PIC моделирования. Отметим также, что согласно теории линейной стадии изгибной неустойчивости, считается, что порог её наблюдения соответствует значению параметра разрушения порядка 50. Согласно разработанной нами теории из-за увеличения параметра разрушения за счёт реакции излучения, условие на отсутствие изгибной неустойчивости очевидно становится более жёстким. Результаты QED-PIC моделирования хорошо согласуются с исправленной оценкой. Такое большое значение параметра разрушения чаще всего не достигается в коллайдерах, тем не менее дальнейшее исследование изгибной неустойчивости при столкновении пучков частиц в результате КЭД процессов вероятно может иметь значение с точки зрения астрофизических процессов, которые однако не являются объектом исследования данной работы.

3.3 Генерация гамма-излучения при взаимодействии сильноточного пучка ультрарелятивистских электронов с плазмой

Помимо технически сложно реализуемой конфигурации лобового столкновения двух сильноточных пучков ультрарелятивистских частиц,

наблюдение КЭД эффектов возможно в конфигурации взаимодействия одного такого пучка с протяжённой однородной мишенью. Ожидается, что на установке FACET-II будут получены пучки с плотностью электронов свыше 10^{23} см^{-3} что соответствует характерной концентрации электронов в твердом веществе. При распространении такого пучка в твердом теле может возбуждаться сильно нелинейная кильватерная волна — *баббл*, образование которого обычно рассматривается в гораздо менее плотных средах, например, газе [10; 203]. В данном разделе с помощью полноразмерного трёхмерного PIC моделирования исследуется процесс генерации гамма-фотонов при взаимодействии пучка ультрарелятивистских электронов с толстой плазменной мишенью. Численное моделирование было выполнено с помощью PIC-кода QUILL [183], в котором образование вторичных частиц учитывается с помощью метода Монте-Карло. Для численного решения уравнений Максвелла была использована гибридная схема, описанная в разделе 3.4.1, которая позволяет существенно уменьшить инкремент численной черенковской неустойчивости [204—206]. Параметры пучка были выбраны близкими к ожидаемым на установке FACET-II на финальной стадии проекта: заряд пучка составлял 3 нКл, среднеквадратичные диаметр и длина пучка составляли 400 нм и 1 мкм соответственно, энергия частиц — 10 ГэВ. В первой серии моделирований концентрация мишени изменялась в пределах от 10^{21} см^{-3} до $5 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$, толщина — от 1 до 100 мкм. Максимальная толщина в 100 мкм выбрана исходя из того, чтобы столкновительные процессы, которые приводят к дополнительным потерям энергии, были незначительны (эти процессы также не учитываются в коде QUILL, с помощью которого проводилось численное моделирование).

Результаты моделирования показывают, что распространение пучка в мишени сопровождается образованием полости, практически полностью лишённой электронов и распространяющейся синхронно с пучком (Рис. 3.8). В такой сильно нелинейной кильватерной волне образуются квазистатические радиальное электрическое и азимутальное магнитное поля, в которых частицы пучка совершают бетатронные колебания с частотой $\omega_{pl}/\sqrt{2\gamma}$, где плазменная частота ω_{pl} соответствует невозмущённой концентрации электронов мишени, а γ — мгновенное значение Лоренц-фактора частицы. При таком движении излучение электронов некогерентно и имеет синхротронную природу. Генерируемый пучок гамма-квантов повторяет пространственное рас-

пределение электронов и обладает достаточно малой расходимостью. Гамма-излучение имеет широкий спектр с отсечкой на энергии начальных электронов 10 ГэВ, который практически не изменяется в процессе взаимодействия. Помимо потерь энергии на излучение, электроны пучка также замедляются за счёт продольного поля, генерируемого в плазменной полости. Однако для достаточно плотных мишеней данный эффект является значительно менее существенным по сравнению с потерями на излучение. Стоит отметить, что в результате формирования баббла в его задней части образуется вторичный пучок электронов, аналогично тому как это происходит в разреженной плазме. Электроны этого вторичного пучка находятся в ускоряющем продольном поле и также совершают бетатронные колебания и излучают. Результаты моделирования показывают, что энергия отсечки вторичного пучка не превышает 5 ГэВ, а доля суммарной энергии относительно энергии всего гамма излучения не превышает 15%.

Отметим, что недавно была предложена схожая схема для генерации ярких гамма-пучков, основанная на столкновении сильноточного пучка ультррелятивистских частиц с последовательностью тонких металлических плёнок [207]. В данной конфигурации эффективное поле, действующее на электроны пучка, связано с «отражением» собственного поля пучка от тонкого плазменного слоя, и является по смыслу полем переходного излучения. Несмотря на различия в физическом механизме генерации гамма-квантов, эффективность генерации и спектр выходного гамма-излучения весьма похожи в конфигурации [207] и рассматриваемой нами конфигурации. Как было описано выше, электроны пучка совершают бетатронные колебания в поле сильно нелинейной кильватерной волны, структура которого описана, например, в публикации [208]. Важно, что фокусирующее поле линейно зависит от поперечной координаты. Таким образом, конфигурация ЭМ поля внутри баббла совпадает с конфигурацией поля встречного пучка, за исключением наличия также тормозящего поля в первом случае. Поэтому для аналитического описания процесса конверсии энергии частиц пучка в энергию гамма-излучения можно применить разработанную нами в разделе 3.2.3 теорию, описывающую движения частиц одного пучка при столкновении с

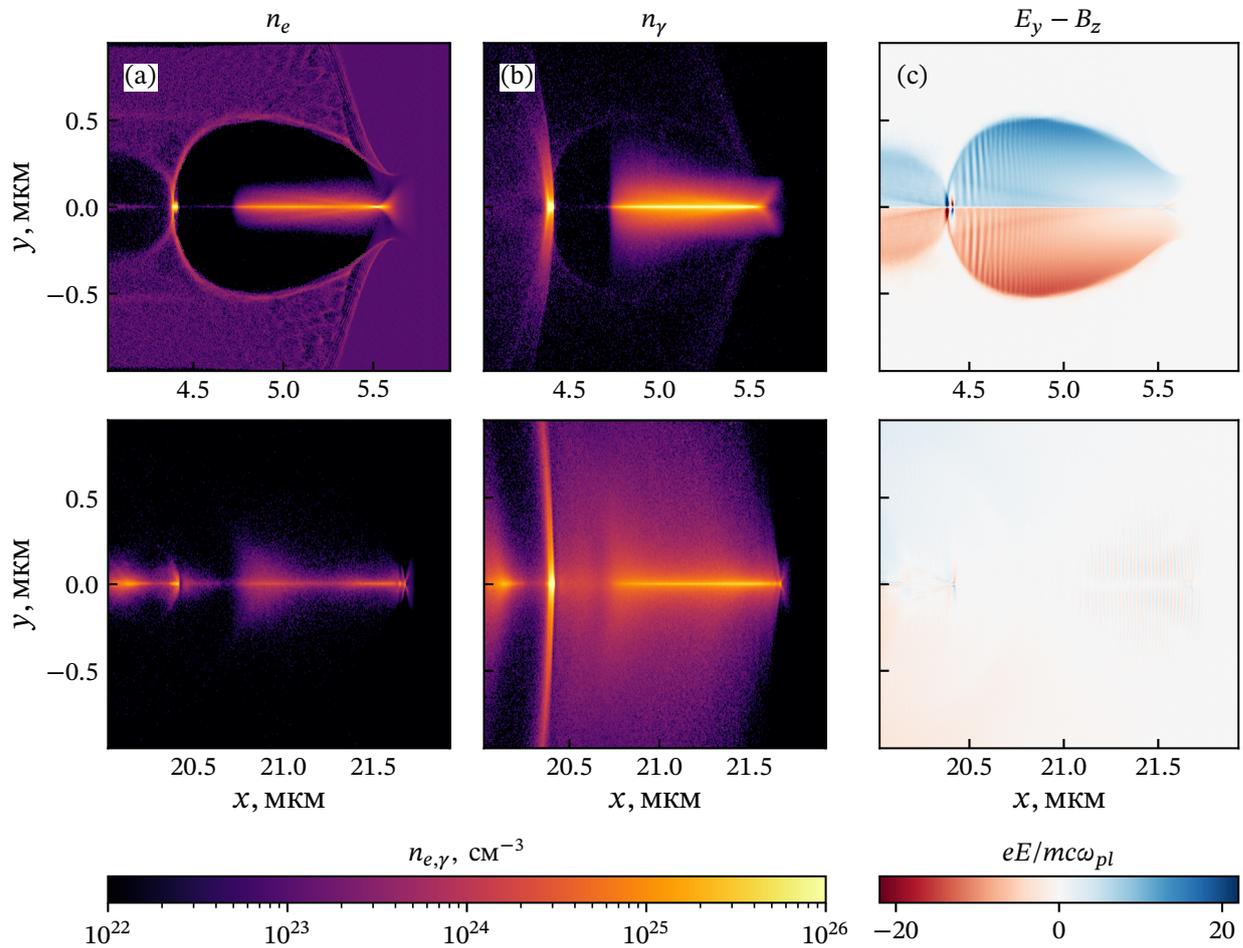


Рисунок 3.8 — (а) Распределение плотности электронов, (б) плотности гамма-фотонов и (с) поперечной силы $E_y - B_z$, действующей на электроны пучка, в моделировании распространения сильноточного пучка в твердотельной мишени с концентрацией $n_e = 10^{23} \text{ см}^{-3}$ и толщиной 10 мкм. Верхний ряд соответствует проникновению пучка в мишень на глубину 5 мкм, нижний ряд соответствует моменту выхода пучка из мишени. Координата x отсчитывается от передней границы мишени.

длинным пучком. В таком случае, можно записать

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{\Gamma} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{\rho\Gamma}{2a_S} |\cos\varphi|\right) \sin^2\varphi d\varphi, \quad (3.88)$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{\rho\Gamma}{2a_S} |\cos\varphi|\right) d\varphi, \quad (3.89)$$

где ρ — амплитуда бетатронных колебаний, Γ — энергия электрона, $a_S = mc^2/\hbar\omega_{pl}$. В данных уравнениях используется нормировка на плазменную частоту ω_{pl} , соответствующую невозмущённой концентрации электронов мишени n_e : время нормировано на $1/\omega_{pl}$, координаты — на c/ω_{pl} , импульс — на mc , напряжённость электромагнитных полей — на $mc\omega_{pl}/e$, мощность — на $mc^2\omega_{pl}$. В классическом ($\chi_0 \ll 1$) и существенно квантовом ($\chi_0 \gg 1$) случаях, когда мощность радиационных потерь $P(\chi)$ является степенной функцией χ , данные уравнения решаются аналитически:

$$\frac{\Gamma(t)}{\gamma_0} \approx \begin{cases} (1 + 0.625P(\chi_0)t/\gamma_0)^{-4/5}, & \chi \ll 1 \\ (1 - 0.149P(\chi_0)t/\gamma_0)^{24/5}, & \chi \gg 1 \end{cases} \quad (3.90)$$

где $\chi_0 = r_0\gamma_0/2a_S$, r_0 — начальное отклонение электрона от оси пучка. Учитывая количество частиц, расположенных внутри мишени, можно окончательно определить зависимость полной энергии пучка от времени:

$$\Sigma_e(t) = \Sigma_0 - \int_{-2\sigma_x}^0 \int_0^{r_b} (\gamma_0 - \gamma(x+ct)) \eta(r, x) \Theta(x+ct) 2\pi r dr dx, \quad (3.91)$$

где $\Sigma_0 = N\gamma_0$, N — число электронов в пучке, функция $\eta(x, r) = n_b(x, t)/N$ задаёт распределение заряда в пучке, $\Theta(x)$ — степ-функция Хевисайда. Пример сравнения такой оценки с результатами QED-PIC-моделирования представлен на Рис. 3.9, 3.10. Отметим, что в данной модели не учитывается наличие продольного поля в плазменной полости, которое дополнительно тормозит электроны пучка. Этим объясняется различие между оценкой энергии пучка (3.91) и её величиной в численном моделировании.

Отметим, что при использованных параметрах пучка даже при столкновении с плотной мишенью, эффективность генерации электрон-позитронных пар из гамма-квантов достаточно мала, для того чтобы существенно повлиять на процесс столкновения. В связи с этим, образование электрон-позитронных пар не рассматривается детально.

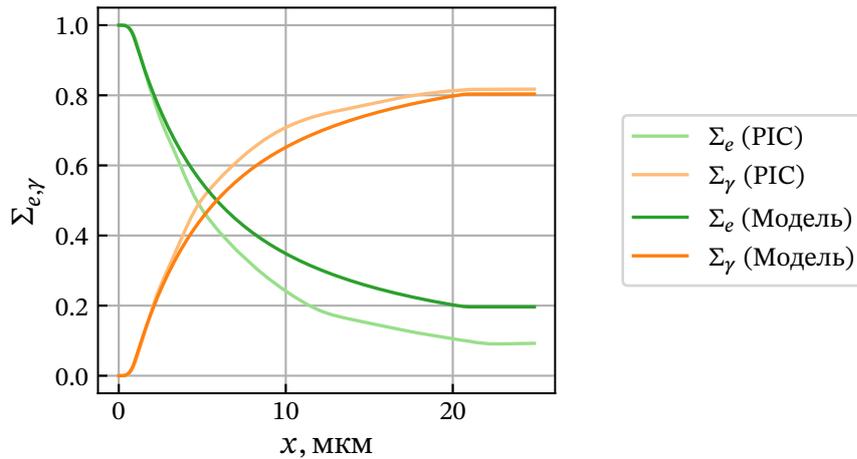


Рисунок 3.9 — Зависимость полной энергии электронов Σ_e и фотонов Σ_γ от времени, нормированная на полную начальную энергию электронов. Сплошные линии соответствуют результатам QED-PIC-моделирования, кружки и квадраты соответствуют оценке, рассчитанной с помощью выражения (3.91) и численного решения уравнений (3.88), (3.89).

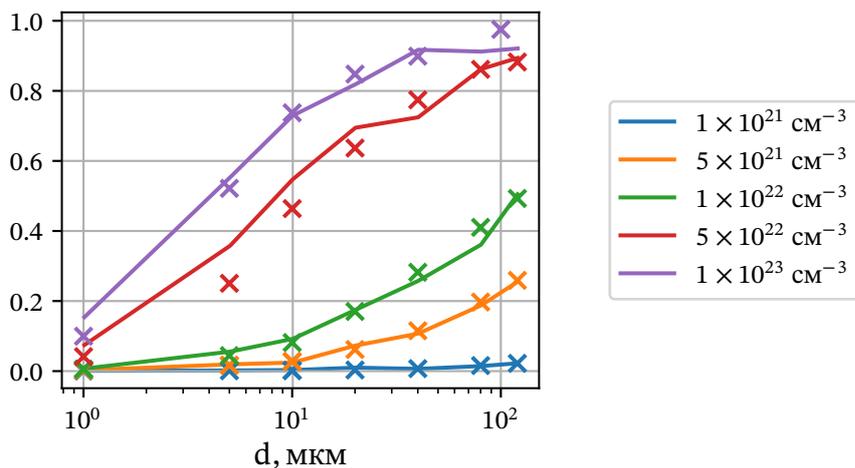


Рисунок 3.10 — Коэффициент конверсии энергии пучка электронов в энергию гамма излучения в зависимости от концентрации и толщины мишени: сплошные линии — результаты QED-PIC-моделирования, маркеры — аналитическая оценка (3.91).

Помимо влияния параметров мишени также было исследовано влияние геометрических размеров пучка на эффективность конверсии энергии электронов в энергию гамма-излучения. В качестве опорных параметров пучка были выбраны параметры, реализованные на установке FАCЕT-II к данному моменту, а именно: заряд пучка от 0.5 до 3 нКл, энергия частиц — 10 ГэВ, длина пучка l_b от 1 до 100 мкм, радиус пучка r_b от 2.5 до 100 мкм. Как продемонстрировано выше, эффективность конверсии энергии пучка в энергию гамма-излучения, растёт с ростом концентрации и протяжённости мишени. В связи с этим, в качестве концентрации мишени выбиралась величина равная 0.6 от максимальной концентрации электронов, достигаемой в центре пучка. Такой выбор обосновывается тем, что при данном соотношении концентраций электронный пучок создаёт в мишени полость, свободную от электронов — баббл — в которой создаётся поперечное поле разделения зарядов. При этом максимальная толщина мишени ограничивалась характерной длиной свободного пробега по отношению к столкновительным процессам, которые приводят к дополнительным потерям энергии и не исследуются в данной работе, в частности тормозному излучению электронов на ядрах, образованию электрон-позитронных пар из фотонов вблизи ядер, электрон-электронному рассеянию и т.п., и рассчитывалась из соотношения

$$l = 10^{-3} \lambda_{\sigma} = 10^{-3} (\sigma_{\max} n)^{-1}, \quad (3.92)$$

где $\lambda_{\sigma} = (\sigma_{\max} n)^{-1}$ — длина свободного пробега по отношению к процессу с сечением σ_{\max} , n — концентрация рассеивателей (ядер, электронов), которая считалась равной концентрации электронов мишени n_e . Характерное максимальное сечение σ_{\max} было оценено нами величиной 10^{-22} см², что соответствует, например, сечению тормозного излучения электронов с энергией 10 ГэВ на ядрах с зарядовым числом $Z \sim 50$ [31]. При выполнении соотношения (3.92) столкновительные процессы можно считать несущественными в рассматриваемой задаче. Как продемонстрировано выше, потери энергии пучка электронов из-за излучения жёстких фотонов, зависят от двух безразмерных параметров: начального значения КЭД параметра χ_0 и времени взаимодействия пучка с мишенью в плазменных периодах $T = \omega_{pl} l / c$. При этом величина χ_0 может быть вычислена следующим образом

$$\chi_0 = \gamma_0 n_e r_0 r_e \lambda_C, \quad (3.93)$$

где γ_0 — начальный Лоренц-фактор электронов, r_0 — диаметр пучка, r_e — классический радиус электрона, λ_C — комптоновская длина волны. В связи с тем, что при параметрах пучка, достижимых на нынешнем этапе развития установки FASET-II, величина параметра χ_0 не превышает значения около 0.2, оценки радиационных потерь можно проводить с помощью формул, соответствующих классическому пределу излучения ($\chi_0 \ll 1$). В таком случае согласно (3.90), эффективность преобразования энергии пучка электронов в гамма излучение можно оценить следующим образом

$$\kappa = \frac{\Sigma_\gamma}{\Sigma_{e,0}} \approx 1 - (1 + 0.625P(\chi_0))^{-4/5}, \quad (3.94)$$

где Σ_γ — полная энергия гамма-излучения, $\Sigma_{e,0}$ — начальная энергия электронного пучка, $P(\chi_0) = 2/3\alpha a_S \chi_0^2$ — полная мощность излучения, нормированная на $mc^2\omega_{pl}$, $\alpha = e^2/\hbar c$, $a_S = mc^2/\hbar\omega_{pl}$. Подставляя в (3.94) значения T и χ_0 , выраженные через максимальную концентрацию пучка, можно показать, что величина κ пропорциональна максимальной плотности пучка n_b , так же как и величина χ_0 , согласно (3.93). Таким образом, из оценки (3.94) следует, что для достижения максимальной конверсии энергии пучка в энергию гамма-излучения, а также генерации излучения с наиболее высокой энергией отсечки (т.к. максимальная энергия излучаемых фотонов тем больше, чем больше величина χ), необходимо использовать наиболее плотный пучок, что при фиксированном заряде, соответствует минимальным геометрическим размерам пучка. Так как наша оценка достаточно простая и получена с учётом ряда предположений, то для более точного определения оптимальных геометрических размеров пучка нами была проведена серия полноразмерных трёхмерных численных моделирований методом частиц-в-ячейках с учётом квантово-электродинамических эффектов, реализованным в коде QUILL [183], взаимодействия пучка электронов с однородной мишенью. В моделировании использовался профиль концентрации пучка, квадратично спадающий по продольной и радиальной координате от геометрического центра пучка. Заряд и энергия составляли 3 нКл и 10 ГэВ соответственно. Результаты проведённого численного моделирования в диапазоне длин пучка от 1 до 30 мкм и радиусов пучка от 2.5 до 7.5 мкм представлены на Рис. 3.11. Согласно результатам моделирования максимальная конверсия энергии пучка в энергию гамма-излучения достигается при минимальном радиусе пучка

ка (2.5 мкм), но при длине пучка больше минимальной (6 мкм), и составляет около 12%. При этом максимальная энергия фотонов составляет 4.7 ГэВ.

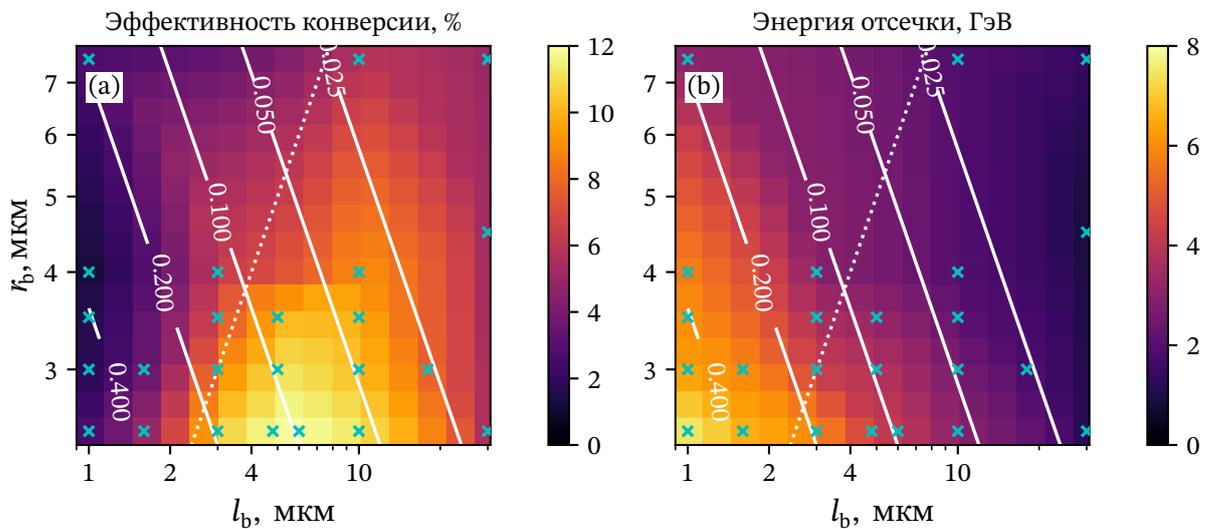


Рисунок 3.11 — Зависимость (а) эффективности конверсии энергии пучка электронов в энергию гамма-излучения и (б) энергии отсечки в спектре гамма-излучения от длины и радиуса пучка. Цветовая карта получена с помощью линейной интерполяции между значениями, полученными в результате PIC моделирования (отмечены голубыми маркерами). Белая пунктирная линия соответствует равенству $l_b = r_b$, белые сплошные линии обозначают уровни постоянного значения χ_0 , согласно оценке (3.93).

Для объяснения причины несоответствия результатов моделирования и нашей оценки нами был подробно рассмотрен процесс формирования баббла (см. Рис. 3.12). В моделировании с минимально возможными размерами пучка (радиус $r_b = 2.5$ мкм, длина $l_b = 1$ мкм), его максимальная концентрация равна $2.8 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$, а концентрация мишени соответственно $1.7 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$. При таких параметрах оценка радиуса баббла согласно модели, разработанной в публикации [209], даёт величину 2.8 мкм. Несмотря на то, что поперечное поле разделения зарядов внутри баббла практически не зависит от продольной координаты [208], оно очевидным образом уменьшается до нуля при переходе через границу баббла (см. Рис. 3.12 (b)). Так как при данных параметрах длина пучка значительно меньше радиуса баббла, а радиус пучка практически совпадает с последним, электроны пучка находятся в области, где напряжённость поперечного поля существенно меньше, чем в основной части баббла (см. Рис. 3.12 (b)). Это приводит к тому, что реальное значение параметра χ электронов оказывается заметно меньше, чем

согласно оценке (3.93). В связи с этим излучение электронами фотонов становится неэффективным. Результаты моделирования показывают, что в целом при взаимодействии пучка электронов с радиусом, превосходящим длительность, эффективность генерации гамма-излучения существенно снижается из-за описанного выше эффекта (см. пунктирную линию на Рис. 3.11 (а)). При использовании пучка с большей длиной, его существенная часть оказывается в области сильного поперечного поля и оценка (3.94) хорошо описывает конверсию энергии в гамма-излучение.

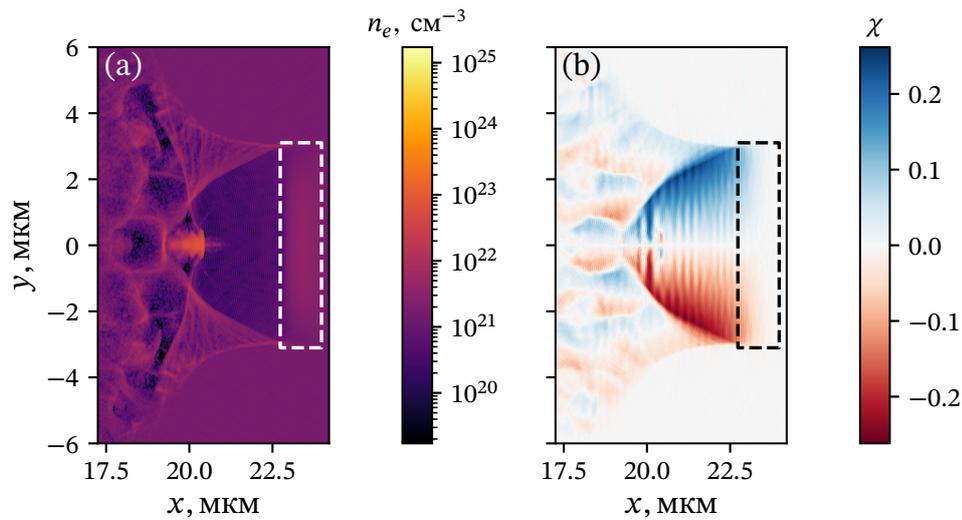


Рисунок 3.12 — Особенности генерации баббля электронным пучком с диаметром, существенно превосходящим длину ($l_b = 1$ мкм, $r_b = 2.5$ мкм). (а) Распределение концентрации электронов и (б) величины $\gamma_0 (E_y - B_z) / a_S$, равной значению параметра χ электронов. Координата x отсчитывается от начала мишени. Штриховые линии обозначают расположение пучка электронов.

Стоит отметить, что несмотря на достижение максимальной эффективности конверсии при длине пучка 6 мкм, с точки зрения приложений получаемого излучения важными также являются его спектральные характеристики. Результаты моделирования показывают (см. 3.11 (б)), что при использовании пучка с минимальными геометрическими размерами, за счёт увеличения значения параметра χ_0 , максимальная энергия гамма-фотонов оказывается выше, чем в случае использования пучка с оптимальными параметрами, и достигает 7.5 ГэВ. Однако эффективность генерации при этом оказывается существенно меньше — 3%.

3.4 Особенности численного моделирования ультрарелятивистских пучков

Как описано выше, развитие технологий ускорителей заряженных частиц даст возможность в обозримом будущем проводить беспрецедентные эксперименты по взаимодействию сильноточных пучков заряженных частиц с веществом для генерации гамма-излучения, исследованию процессов сильнополевой КЭД, физики элементарных частиц и даже астрофизических процессов. В связи с технической сложностью таких экспериментов, крайне важной частью их планирования является поиск оптимальных конфигураций взаимодействия и получение различных качественных и количественных оценок с помощью численного моделирования. Самым современным методом самосогласованного моделирования динамики плазмы и электромагнитных полей является метод *частиц-в-ячейках* (*particles-in-cells*, PIC). Несмотря на преимущества данного метода, он не избавлен и от недостатков, одним из которых является дисперсия волн в вакууме, возникающая при использовании стандартной схемы решения уравнений Максвелла — схемы *конечных разностей во временной области* (*Finite-Difference Time-Domain* — FDTD). Дисперсия ЭМ волн в вакууме в частности приводит к существованию волн, фазовая скорость которых меньше скорости света. Таким образом, ультрарелятивистские заряженные частицы могут удовлетворять условию черенковского синхронизма и резонансно возбуждать такие волны в вакууме — эффект, известный как численная черенковская неустойчивость (*numerical Cherenkov instability* — NCI) [204—206], который может ставить под сомнение достоверность результатов, полученных с помощью численного моделирования.

Приведём упрощённый анализ, который указывает на причину возникновения численной черенковской неустойчивости (более строгие рассуждения с учётом интерполяции полей на частицы могут быть найдены, например, в работах [210; 211]). Для этого будем использовать расположение и индексирование полей на сетке, использующееся в коде QUILL (см. Рис. 3.13). Наиболее распространённая схема численного решения уравнений Максвелла — схема FDTD, в которой сетки магнитного и электрического полей смещены на полшага в каждом направлении пространства и во времени, а производные заменяются на конечные разности. Таким образом, уравнения Макс-

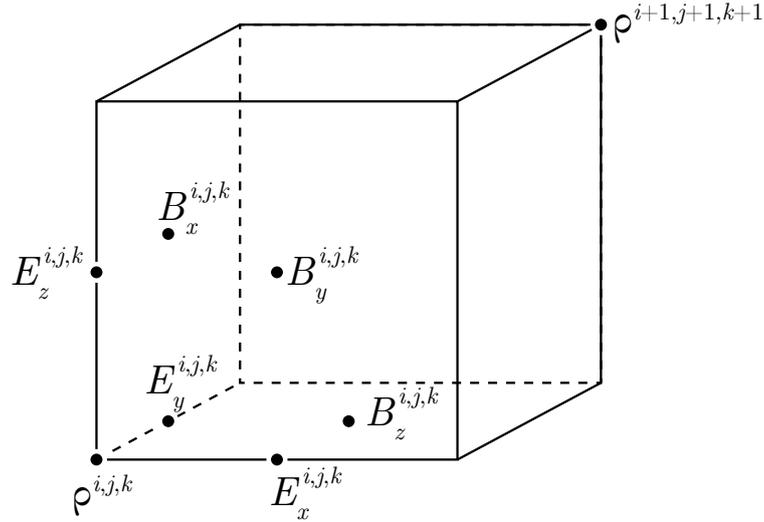


Рисунок 3.13 — Расположение узлов сеток электрического и магнитного поля и индексы, используемые в комплексе QUILL.

велла записываются в следующем виде

$$\hat{\delta}_t B_x = \hat{\delta}_z E_y - \hat{\delta}_y E_z, \quad (3.95)$$

$$\hat{\delta}_t B_y = \hat{\delta}_x E_z - \hat{\delta}_z E_x, \quad (3.96)$$

$$\hat{\delta}_t B_z = \hat{\delta}_y E_x - \hat{\delta}_x E_y, \quad (3.97)$$

$$\hat{\delta}_t E_x = \hat{\delta}_y B_z - \hat{\delta}_z B_y + j_x, \quad (3.98)$$

$$\hat{\delta}_t E_y = \hat{\delta}_x B_z - \hat{\delta}_z B_x + j_y, \quad (3.99)$$

$$\hat{\delta}_t E_z = \hat{\delta}_z B_y - \hat{\delta}_y B_x + j_z, \quad (3.100)$$

где использован оператор конечной разности $\hat{\delta}$

$$\hat{\delta}_x F^{i+1/2,j,k} = \frac{F^{i+1,j,k} - F^{i,j,k}}{\Delta x} \quad (3.101)$$

который аппроксимирует производную с точностью до членов порядка Δx^2 . Аналогично определены операторы $\hat{\delta}_y$, $\hat{\delta}_z$, $\hat{\delta}_t$. Найдём дисперсионное соотношение для волн в вакууме ($\mathbf{j} = 0$). Для этого будем искать решения уравнений (3.95)–(3.100) в виде плоских волн, т.е. \mathbf{E} , $\mathbf{B} \propto \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Для этого достаточно определить действие оператора $\hat{\delta}$ на выражение $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$

$$\hat{\delta}_\alpha e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{1}{\Delta\alpha} (e^{ik_\alpha \Delta\alpha/2} - e^{-ik_\alpha \Delta\alpha/2}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{2i}{\Delta\alpha} \sin \frac{k_\alpha \Delta\alpha}{2} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (3.102)$$

$$\hat{\delta}_t e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \frac{1}{\Delta t} (e^{-i\omega \Delta t/2} + e^{i\omega \Delta t/2}) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} = -\frac{2i}{\Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (3.103)$$

где $\alpha = x, y, z$. Таким образом, уравнения (3.95)–(3.100) в вакууме для плоских волн переписываются в следующем виде

$$A_t B_{x_0} = A_y E_{z_0} - A_z E_{y_0} \quad (3.104)$$

$$A_t B_{y_0} = A_z E_{x_0} - A_x E_{z_0} \quad (3.105)$$

$$A_t B_{z_0} = A_x E_{y_0} - A_y E_{x_0} \quad (3.106)$$

$$A_t E_{x_0} = A_z B_{y_0} - A_y B_{z_0} \quad (3.107)$$

$$A_t E_{y_0} = A_x B_{z_0} - A_z B_{x_0} \quad (3.108)$$

$$A_t E_{z_0} = A_y B_{x_0} - A_x B_{y_0} \quad (3.109)$$

где

$$A_\alpha = \frac{1}{\Delta\alpha} \sin \frac{k_\alpha \Delta\alpha}{2}, \quad \alpha = x, y, z \quad (3.110)$$

$$A_t = \frac{1}{\Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} \quad (3.111)$$

Приравнивая детерминант системы (3.104)–(3.109) к нулю и производя несложные алгебраические преобразования получаем следующее дисперсионное соотношение

$$A_t^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (3.112)$$

$$\omega = \pm \frac{2}{\Delta t} \arcsin \left(\Delta t \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \right) \quad (3.113)$$

Данная численная схема устойчива (отсутствует мнимая часть ω) при выполнении условия

$$\frac{1}{\Delta t^2} > \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \quad (3.114)$$

Фазовая и групповая скорости волн в схеме FDTD представлены на Рис. 3.15 (b), (e). Видно, что действительно все волны распространяются с фазовой скоростью меньшей скорости света. Это означает, что частицы, распространяющиеся с околосветовыми скоростями могут двигаться синхронно с такими волнами и возбуждать их. Возбуждение таких волн также наблюдается в численном моделировании распространения пучка электронов в вакууме. На Рис. 3.14 представлены результаты такого моделирования со следующими параметрами: $\Delta t = 0.025\lambda/c$, $\Delta x = 0.05\lambda$, $\Delta y = \Delta z = 0.25\lambda$, где λ — условная нормировочная длина волны составляющая 1/15 от длины пучка, энергия электронов пучка $E_b = 10$ ГэВ. На Фурье-спектре y -компоненты

электрического поля (см. Рис. 3.14 (d)) видно, что наиболее выраженная гармоника действительно находится в черенковском резонансе с частицами пучка $\omega/k_x = v_b = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}$.

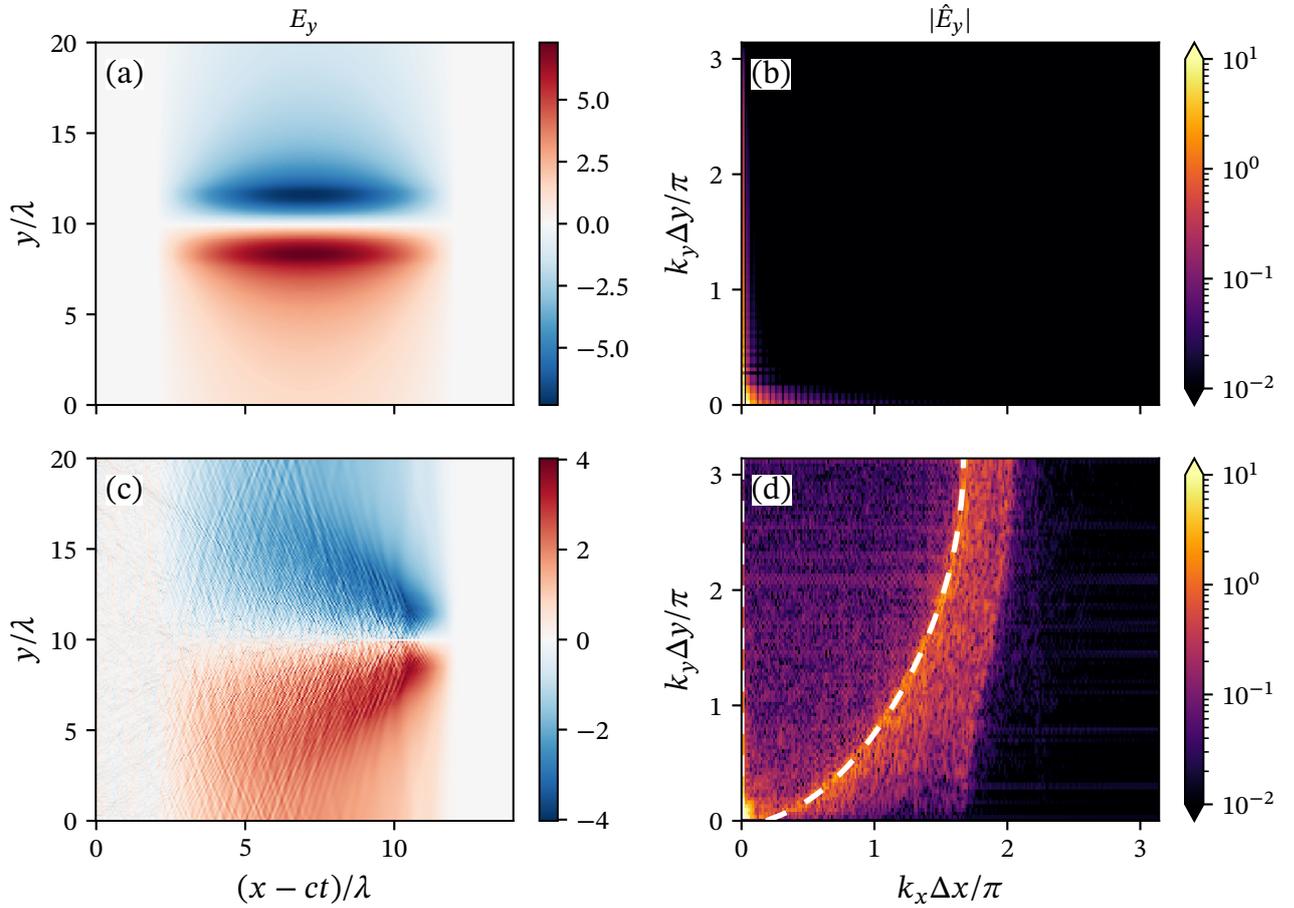


Рисунок 3.14 — Результаты численного моделирования ультрарелятивистского ($\gamma = 10^3$) пучка электронов с помощью схемы FDTD. (a) Распределение y -компоненты электрического поля, и (b) её Фурье-спектр в начальный момент времени. (c), (d) — то же через $3 \cdot 10^4$ шагов моделирования. Белая штриховая линия соответствует черенковскому резонансу $v_{ph,x} = \sqrt{1 - \gamma^{-2}}$.

В следующем разделе предлагается схема численного решения уравнений Максвелла, в которой фазовая скорость волн строго больше (но незначительно) скорости света, что позволяет эффективно устранить численную черенковскую неустойчивость.

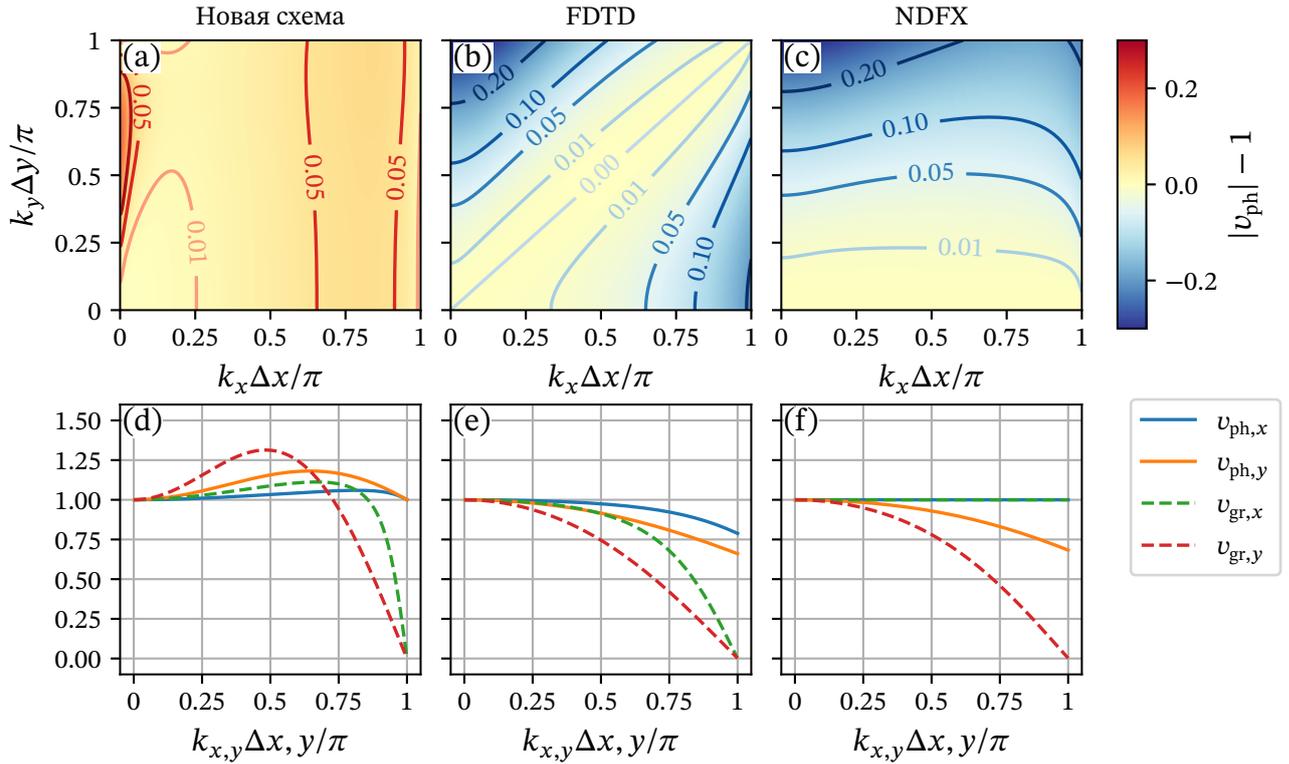


Рисунок 3.15 — (a)–(c) Модуль фазовой скорости волн с $k_z = 0$ как функция волновых чисел k_x и k_y , (d)–(f) зависимость фазовой и групповой скорости волн с $k_z = k_y(k_x) = 0$ от волнового числа $k_x(k_y)$ в различных численных схемах.

3.4.1 Описание схемы численного решения уравнений Максвелла, с подавленной численной черенковской неустойчивостью

Известно несколько способов подавления NCI, например, использование аппроксимаций более высокого порядка для пространственных производных [212–214], применение фильтров к полям и токам на сетке [215] или использование спектрального подхода к решению уравнений Максвелла в Фурье-пространстве [216], каждое из которых имеет свои преимущества и варианты использования. Мы предлагаем схему ослабления NCI, которая может быть легко реализована в существующих PIC-кодах и которая основана

на следующей модификации шаблона схемы FDTD

$$\hat{\delta}_t B_x = (a_{0,z} + a_{1,z}\hat{\mu}_z)\hat{\delta}_z E_y - (a_{0,y} + a_{1,y}\hat{\mu}_y)\hat{\delta}_y E_z, \quad (3.115)$$

$$\hat{\delta}_t B_y = (a_{0,x} + a_{1,x}\hat{\mu}_x)\hat{\delta}_x E_z - (a_{0,z} + a_{1,z}\hat{\mu}_z)\hat{\delta}_z E_x, \quad (3.116)$$

$$\hat{\delta}_t B_z = (a_{0,y} + a_{1,y}\hat{\mu}_y)\hat{\delta}_y E_x - (a_{0,x} + a_{1,x}\hat{\mu}_x)\hat{\delta}_x E_y, \quad (3.117)$$

$$\hat{\delta}_t E_x = (a_{0,y} + a_{1,y}\hat{\mu}_y)\hat{\delta}_y B_z - (a_{0,z} + a_{1,z}\hat{\mu}_z)\hat{\delta}_z B_y - j_x, \quad (3.118)$$

$$\hat{\delta}_t E_y = (a_{0,z} + a_{1,z}\hat{\mu}_z)\hat{\delta}_z B_x - (a_{0,x} + a_{1,x}\hat{\mu}_x)\hat{\delta}_x B_z - j_y, \quad (3.119)$$

$$\hat{\delta}_t E_z = (a_{0,x} + a_{1,x}\hat{\mu}_x)\hat{\delta}_x B_y - (a_{0,y} + a_{1,y}\hat{\mu}_y)\hat{\delta}_y B_x - j_z, \quad (3.120)$$

$$a_{0,\alpha} + a_{1,\alpha} = 1, \quad \alpha = x, y, z, \quad (3.121)$$

где

$$\hat{\mu}_\alpha F^{j_\alpha} = \frac{F^{j_\alpha+1} + F^{j_\alpha-1}}{2}. \quad (3.122)$$

Оператор $\hat{\mu}_\alpha$ по смыслу является оператором усреднения вдоль оси α . Легко показать, что оператор $\hat{\mu}_\alpha \hat{\delta}_\alpha$ аппроксимирует производную $\partial/\partial\alpha$ с квадратичной точностью, таким образом при выполнении условия (3.121) $(a_{0,\alpha} + a_{1,\alpha}\hat{\mu}_\alpha)\hat{\delta}_\alpha \rightarrow \partial/\partial\alpha$ при $\Delta\alpha \rightarrow 0$. Решения в вакууме в виде плоских волн уравнений (3.115)–(3.120) записываются в таком же виде, что и уравнения (3.104)–(3.109), однако коэффициенты A_α имеют другой вид

$$A_\alpha = \frac{1}{\Delta\alpha} \sin \frac{k_\alpha \Delta\alpha}{2} (a_{0,\alpha} + a_{1,\alpha} \cos(k_\alpha \Delta\alpha)) \quad (3.123)$$

Дисперсия волн в такой схеме уже зависит от параметров $a_{1,\alpha}$. Рассмотрим выражение фазовой скорости волн, распространяющихся строго вдоль координатной оси α

$$v_{\text{ph},\alpha} = 2 \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \frac{1}{k_\alpha \Delta\alpha} \arcsin \left[\frac{\Delta t}{\Delta\alpha} \sin \frac{k_\alpha \Delta\alpha}{2} (a_{0,\alpha} + a_{1,\alpha} \cos(k_\alpha \Delta\alpha)) \right] \quad (3.124)$$

Из анализа этой функции можно установить, что увеличение коэффициента $a_{1,\alpha}$ приводит к увеличению модуля $v_{\text{ph},\alpha}$ для всех значений $k_\alpha \Delta\alpha$ в первой зоне Бриллюэна ($|k_\alpha \Delta\alpha| \leq \pi$). Поэтому мы можем найти коэффициенты $a_{1,\alpha}$, например, исходя из требования, чтобы фазовая скорость во всей первой зоне Бриллюэна была больше скорости света и равнялась ей на границах, тогда

$$1 = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \frac{2}{\pi} \arcsin \left[\frac{\Delta t}{\Delta\alpha} (1 - 2a_{1,\alpha}) \right] \quad (3.125)$$

Решение этого уравнения записывается в следующем виде

$$a_{1,\alpha} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \sin \left[\frac{\pi}{2} \frac{\Delta t}{\Delta\alpha} \right] \right) \quad (3.126)$$

Вычислим максимально возможное значение коэффициентов A_α в таком случае

$$A_{\alpha_{\max}} = \frac{1}{\Delta t} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta t}{\Delta\alpha} \right). \quad (3.127)$$

Тогда схема заведомо устойчива при выполнении условия

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta t}{\Delta y} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{\Delta t}{\Delta z} \right) < 1 \quad (3.128)$$

Сравнение зависимостей фазовой и групповой скоростей волн в различных численных схемах представлена на Рис. 3.15, из которого видно, что действительно в предлагаемой схеме волны распространяются со скоростью большей скорости света, поэтому можно ожидать уменьшения численной черенковской неустойчивости. Помимо сравнения со стандартной схемой FDTD, также представлено сравнение со схемой NDFX (*Numerical Dispersion Free in X direction*) [198], которая также основана на расширении шаблона схемы FDTD, но таком подборе коэффициентов, чтобы фазовая скорость в точности равнялась скорости света для всех волн, распространяющихся вдоль координатных осей. Отметим, что наиболее заметное отклонение фазовой и групповой скорости волн от скорости света во всех схемах присутствует в области достаточно высокочастотных волн, т.е. волн, которые плохо разрешаются на сетке. Так как для достоверности результатов моделирования волны в интересующем диапазоне частот должны разрешаться большим числом шагов сетки, то отклонение дисперсии может быть достаточно малым, например, для корректного моделирования лазерного излучения. При этом плохо разрешаемые волны не представляют интереса, поэтому неточность в описании их распространения не является существенной проблемой. Отклонение дисперсии в предложенной схеме совпадает по порядку величины со схемами FDTD или NDFX и также наиболее существенно в области высоких частот, поэтому физическая строгость полученных результатов моделирования с использованием данной схемы по крайней мере не хуже таковой при использовании других схем. Мы также сравнили результаты идентичных численных расчетов распространения ультрарелятивистского электронного пучка в вакууме с использованием разных схем. Моделирование проводилось

с использованием кода QUILL [183], размеры ячейки составляли 0.003 мкм, 0.01 мкм, 0.01 мкм по координатам x , y и z соответственно. Временной шаг Δt был установлен равным $0.6\Delta x/c$ для предложенной схемы и схемы FDTD и $\Delta x/c$ для схемы NDFX. Результаты сравнения показаны на Рис. 3.16. Ожи-

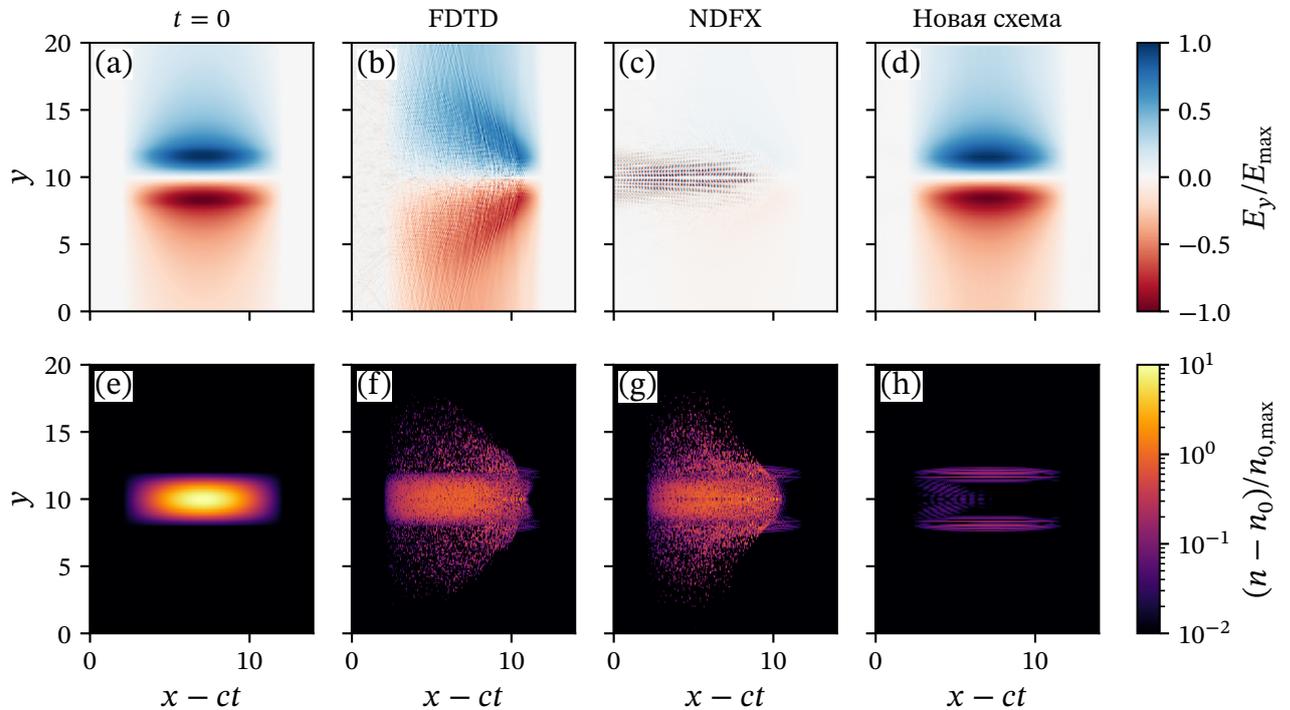


Рисунок 3.16 — Результаты численного моделирования распространения пучка ультрарелятивистских электронов в вакууме с помощью различных численных схем. (a) начальное распределение y -компоненты электрического поля, (b)–(d) распределение y -компоненты электрического поля через $3 \cdot 10^4$ шагов моделирования, (e) начальное распределение плотности электронов, (f)–(h) относительное отклонение плотности электронов от начальной плотности через $3 \cdot 10^4$ шагов моделирования.

даемо, наиболее быстро черенковская неустойчивость растет в схеме FDTD; в схеме NDFX, несмотря на точную вакуумную дисперсию волн, распространяющихся вдоль оси распространения пучка, также присутствует неустойчивость. Это происходит, во-первых, за счет возбуждения распространяющихся под малым углом к оси волн, имеющих фазовую скорость меньше скорости света, и, во-вторых, за счет эффекта *наложения частот* или *алиасинга* [204]. Этот эффект связан с тем, что схемы численного решения уравнений Максвелла, основанные на разностных схемах, всегда оперируют с ограниченной областью в пространстве, поэтому зависимость $\omega(\mathbf{k})$ для волн в таких схемах

всегда периодическая, т.е. $\omega(\mathbf{k} + \mathbf{x}_\alpha N_\alpha 2\pi/\Delta\alpha) = \omega(\mathbf{k})$, где N_α — целое число, \mathbf{x}_α — орт в направлении k_α , $\alpha = x, y, z$. Это означает, что даже если в первой зоне Бриллюэна ($|k_\alpha \Delta\alpha| \leq \pi$) фазовая скорость волн равна или незначительно больше скорости света, то всегда найдётся такая зона Бриллюэна, в которой фазовая скорость будет заведомо меньше скорости света. Анализ этого эффекта показывает, что взаимодействие частиц и волн в первой зоне Бриллюэна является линейным эффектом, тогда как эффекты, связанные с резонансом в более дальних зонах, — нелинейные и зависят не только от используемой схемы решения уравнений Максвелла, но и от формы частиц, метода интерполяции полей на частицы, метода расчёта тока в узлах решётки и т.д. Несмотря на то, что черенковский резонанс в более высоких зонах Бриллюэна не может быть полностью устранён в схемах, основанных на разностных схемах, он является существенно менее заметным, чем в фундаментальной зоне Бриллюэна, и поэтому он сказывается лишь при достаточно большом числе шагов моделирования. Из Рис. 3.16 следует, что в предлагаемой нами схеме численная черенковская неустойчивость отсутствует при достаточно большом числе шагов моделирования ($N = 3 \cdot 10^4$).

Поскольку предложенная схема лишь модифицирует шаблон схемы FDTD, ее можно легко реализовать в существующем коде PIC, по сравнению, например, с недавно предложенной схемой RIP [200], которая требует довольно значительной реструктуризации кода. Таким образом, можно утверждать, что предложенная схема хорошо подходит для моделирования взаимодействия плотных заряженных пучков со стационарными мишенями, лазерными импульсами или другими пучками, экспериментальная реализация которых ожидается на установке FACET-II в будущем, а также для моделирования лазерно-плазменного взаимодействия, в котором образуются сгустки релятивистских заряженных частиц. Результаты PIC моделирования, представленные в разделах 3.2 и 3.3 и полученные с использованием разработанной схемы, не имеют признаков наличия численной черенковской неустойчивости и сходятся с аналитическими результатами, что также подтверждает работоспособность данной схемы.

3.5 Выводы

Таким образом, в конфигурации лобового столкновения двух пучков была рассмотрена взаимосвязь процесса фокусировки (или дефокусировки) пучков и излучения частиц. Была разработана аналитическая модель, которая позволяет рассчитать параметр разрушения с учётом реакции излучения. Было показано, что увеличение разрушения из-за пучкового излучения для будущих коллайдеров CLIC и ILC может достигать нескольких десятков процентов и приводить к дополнительному увеличению яркости. В приложении же к ускорителю FACET-II, перспективы которого для изучения эффектов непертурбативной КЭД за счёт столкновения пучков обсуждаются в работе [123], увеличение параметра разрушения приводит к еще более жестким требованиям к параметрам пучка для прецизионных измерений. Было показано, что область применимости построенной модели распространяется и на случай столкновения пучков одного заряда.

Также разработана аналитическая модель, описывающая взаимодействие длинных противоположно заряженных пучков в режиме слабого пучкового излучения, когда частицы пучка совершают большое число бетатронных колебаний за время взаимодействия. Рассчитаны зависимости энергии и амплитуды бетатронных колебаний частицы как в классическом режиме, также и в существенно квантовом режимах.

Помимо столкновения пучков друг с другом, более технически простой альтернативой для наблюдения КЭД эффектов на установке FACET-II является столкновение одного пучка с протяжённой мишенью. С помощью полноразмерного трёхмерного численного моделирования нами было обнаружено, что при столкновении сильнофокусированного пучка ультрарелятивистских электронов с протяжённой твердотельной мишенью, генерируются два коротких сгустка гамма-фотонов. Первый из них связан с излучением электронами начального пучка, а второй — с излучением электронами, инжектированными в плазменную полость, создаваемую начальным пучком. При этом эффективность конверсии энергии пучка электронов в энергию гамма-фотонов может достигать 90%. Изученная схема получения гамма-излучения является перспективной с точки зрения простоты экспериментальной реализации и крайне высокой эффективности. Моделирования и аналитические оценки, проведённые для достигнутых на данный момент параметров пучка на уста-

новке FASET-II, показывают, что реально достижимая эффективность конверсии оказывается существенно меньше, однако, всё равно достигает более десяти процентов. Также было продемонстрировано, что использование пучка в виде диска, т.е. с диаметром пучка, превосходящим его длину, является не эффективным даже при достижении большей концентрации пучка, что связано с тем, что в таком случае лишь малая часть частиц оказывается в области сильного плазменного поля.

Также нами была разработана и реализована в коде QUILL альтернативная схема для численного решения уравнений Максвелла на прямоугольной сетке. Указанные выше численные моделирования взаимодействия сильно-точных пучков ультрарелятивистских частиц друг с другом и с плазменной мишенью были проведены с помощью данной схемы.

Основные полученные в данной главе результаты опубликованы в работах [A4; A7—A9; A15; A18]

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработана асимптотическая теория движения заряженных частиц в режиме экстремальных радиационных потерь. Определены общие свойства движения частиц в таком режиме, существенно отличающиеся от таковых в режиме слабой реакции излучения.
2. Продемонстрирован новый метод получения приближённого решения уравнений движения с учётом реакции излучения в различных конфигурациях: однородных вращающихся параллельных электрическом и магнитном полях, полях линейного ускорителя, плоских волнах.
3. Обнаружен и качественно описан эффект развития самоподдерживающегося квантово-электродинамического каскада в поле, приближенном к полю плоской волны, возникающий при взаимодействии экстремально интенсивного лазерного излучения с тонкой твердотельной мишенью. Разработана аналитическая модель, описывающая развитие такого КЭД каскада.
4. Разработана модель для вычисления параметра разрушения при лобовом столкновении сильноточных пучков ультрарелятивистских частиц с учётом реакции излучения. Достоверность модели подтверждена результатами полноразмерного трёхмерного численного моделирования. Оценено влияние реакции излучения на столкновение пучков с параметрами, ожидающимися на ускорителях нового поколения ILC, CLIC, FACET-II.
5. С помощью полноразмерного трёхмерного численного моделирования продемонстрирована схема эффективной генерации гамма-излучения при взаимодействии сильноточного пучка ультрарелятивистских электронов с протяжённой плазменной мишенью. Разработана аналитическая модель для вычисления эффективности конверсии энергии пучка в энергию гамма-излучения. Найдены параметры пучка для установки FACET-II, оптимальные с точки зрения генерации гамма-излучения.

6. Разработана и реализована в коде QUILL альтернативная схема для численного решения уравнений Максвелла на регулярной сетке, отличающаяся существенно подавленной численной черенковской неустойчивостью, и подходящей для моделирования пучков ультрарелятивистских частиц.

В заключении, автор хотел бы выразить свою искреннюю благодарность и признательность своему научному руководителю, Игорю Юрьевичу Костюкову, за его ценную поддержку, активное обсуждение результатов и научное руководство на протяжении всего исследования. Также автор выражает глубокую признательность Евгению Николаевичу Нерушу за его ценные советы, помощь в разработке численных моделей и важные обсуждения результатов. Автор благодарит Антона Александровича Голованова и Евгения Николаевича Неруша за разработку PIC-кода Quill, который был использован при получении значительной части результатов, а также за их ценную помощь в модификации данного кода. Наконец, автор выражает благодарность всем, кто помогал в создании этой работы и внес свой вклад в ее успешное завершение.

Приложение А

Численное решение релятивистских уравнений движения заряженной частицы

Релятивистские уравнения движения электрона во внешнем ЭМ поле с учётом реакции излучения записываются в следующем виде

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\mathbf{v}\mathbf{E} - F_{\text{rr}}v^2, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B} - F_{\text{rr}}\mathbf{v}, \quad (\text{A.2})$$

где импульс электрона \mathbf{p} нормирован на mc , время t — на $1/\omega$, электрическое и магнитное поля — на $mc\omega/e$, F_{rr} — полная мощность излучения, нормированная $mc^2\omega$. Для численного решения уравнений (A.1)–(A.2) без учёта реакции излучения ($F_{\text{rr}} = 0$) существует несколько методов, таких как схема Бориса (Boris) [217], схема Вэя (Vay) [218] и схема Игэры-Карри (Higuera-Cary, HC) [219]. Последняя из этих схем наиболее точно сохраняет Гамильтониан системы (а значит и фазовый объём), поэтому именно она используется в данной работе при решении уравнений движения одной частицы в заданных полях. Явный вид данной схемы записывается в следующем виде

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \Delta t \frac{\mathbf{p}_{i+1/2}}{\gamma_{i+1/2}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{p}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{p}} - \frac{\hat{\mathbf{p}}}{\hat{\gamma}} \times \boldsymbol{\beta}, \quad (\text{A.4})$$

где $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_{i-1/2} - \boldsymbol{\epsilon}$, $\tilde{\gamma} = \sqrt{1 + \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}}$, $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{E}\Delta t/2$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{B}\Delta t/2$, а $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\gamma}$ — промежуточные значения импульса и энергии электрона соответственно, вычисляемые следующим образом

$$\hat{\gamma}^2 = \frac{1}{2} \left(\tilde{\gamma}^2 - \beta^2 + \sqrt{(\tilde{\gamma}^2 - \beta^2)^2 + 4(\beta^2 + |\boldsymbol{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{p}}|^2)} \right), \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \left(\tilde{\mathbf{p}} - \frac{\boldsymbol{\beta} \times \tilde{\mathbf{p}}}{\hat{\gamma}} + \boldsymbol{\beta} \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \tilde{\mathbf{p}}}{\hat{\gamma}^2} \right) \left(1 + \frac{\beta^2}{\hat{\gamma}^2} \right)^{-1}. \quad (\text{A.6})$$

Отметим, что координаты (и ЭМ поля) и импульсы электрона определены в моменты времени, смещённые на половину шага Δt относительно друг друга, что объясняет полуцелые индексы у импульсов.

Для учёта реакции излучения используется два различных подхода. В первом, полуклассическом подходе (обозначается на рисунках аббревиатурой LL), радиационное трение считается непрерывной силой, которая добавляется в численную схему по методу Эйлера следующим образом: сначала делается шаг по схеме Игеры-Кари и вычисляется импульс $\mathbf{p}_{\text{НС},i+1/2}$, затем конечный импульс электрона определяется следующим образом

$$\mathbf{p}_{i+1/2} = \mathbf{p}_{\text{НС},i+1/2} - \Delta t F_{\text{rr}}(\bar{\chi}) \frac{\bar{\mathbf{p}}}{\bar{\gamma}}, \quad (\text{A.7})$$

$$\bar{\chi} = \frac{1}{a_S} \sqrt{(\bar{\gamma} \mathbf{E} + \bar{\mathbf{p}} \times \mathbf{B})^2 - (\bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{E})^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}_{i-1/2} + \mathbf{p}_{\text{НС},i+1/2}}{2}, \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt{1 + \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{p}}}, \quad (\text{A.10})$$

где $a_S = mc^2/\hbar\omega$ — нормированное критическое поле Заутера-Швингера. Во втором подходе (обозначается на рисунках аббревиатурой MC) учитывается квантовая (стохастическая) природа излучения с помощью метода Монте-Карло схожим образом с методом, реализованным в комплексе QUILL [160; 183]: на каждом шаге разыгрываются два равномерно распределённых в интервале $[0, 1]$ случайных числа r_0 и r_1 ; затем вычисляется вероятность W излучения электроном фотона с энергией $r_0\bar{\gamma}$ за промежуток времени Δt ; если выполняется неравенство $r_1 < W$, то от конечного импульса электрона $\mathbf{p}_{\text{НС},i+1/2}$ отнимается величина $r_0\bar{\mathbf{p}}$, в противном случае конечный импульс электрона не изменяется. Величина W вычисляется следующим образом [32]

$$W = \Delta t \frac{\alpha a_S}{\sqrt{3\pi\bar{\gamma}}} \left(\frac{r_0^2 - 2r_0 + 2}{1 - r_0} K_{2/3}(y) - \int_y^{+\infty} K_{1/3}(x) dx \right), \quad (\text{A.11})$$

$$y = \frac{r_0}{1 - r_0} \frac{2}{3\bar{\chi}}, \quad (\text{A.12})$$

где $K_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Другие различные дифференциальные уравнения в данной работе решаются с помощью адаптивного метода Рунге-Кутты 8-го порядка (DOP853 [220]), если не указано другое.

Список литературы

1. *Sauter, F.* Uber das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs / F. Sauter // Z. Phys. A. — 1931. — Т. 69, № 11/12. — С. 742—764. — DOI: 10.1007/BF01339461.
2. *Schwinger, J.* On Gauge Invariance and Vacuum Polarization / J. Schwinger // Phys. Rev. — 1951. — Т. 82, № 5. — С. 664—679. — DOI: 10.1103/PhysRev.82.664.
3. The Extreme Light Infrastructure (ELI): <http://www.eli-laser.eu>.
4. Design and current progress of the Apollon 10 PW project / J. Zou [и др.] // High Power Laser Science and Engineering. — 2015. — Т. 3. — DOI: 10.1017/hpl.2014.41.
5. The Shanghai Superintense Ultrafast Laser Facility (SULF) Project / Z. Gan [и др.] // Progress in Ultrafast Intense Laser Science XVI. — Springer, 2021. — С. 199—217. — DOI: 10.1007/978-3-030-75089-3_10.
6. Broad-bandwidth high-temporal-contrast carrier-envelope-phase-stabilized laser seed for 100 PW lasers / B. Shao [и др.] // Optics Letters. — 2020. — Т. 45, № 8. — С. 2215—2218. — DOI: 10.1364/OL.390110.
7. XCELS — <http://www.xcels.iapras.ru>.
8. *Veksler, V.* The principle of coherent acceleration of charged particles / V. Veksler // The Soviet Journal of Atomic Energy. — 1957. — Т. 2, № 5. — С. 525—528. — DOI: 10.1007/BF01491001.
9. *Tajima, T.* Laser electron accelerator / T. Tajima, J. M. Dawson // Physical review letters. — 1979. — Т. 43, № 4. — С. 267. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.43.267.
10. Laser wake field acceleration: the highly non-linear broken-wave regime // Applied Physics B. — 2002. — Т. 74. — С. 355—361. — DOI: 10.1007/s003400200795.
11. A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams / A. Pukhov [и др.] // Nature. — 2004. — Т. 431, № 7008. — С. 541—544. — DOI: 10.1038/nature02963.

12. *Esarey, E.* Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators / E. Esarey, C. B. Schroeder, W. P. Leemans // *Reviews of modern physics*. — 2009. — Т. 81, № 3. — С. 1229. — DOI: 10.1103/RevModPhys.81.1229.
13. Self-guided laser wakefield acceleration beyond 1 GeV using ionization-induced injection / С. E. Clayton [и др.] // *Physical review letters*. — 2010. — Т. 105, № 10. — С. 105003. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.105003.
14. *Костюков, И. Ю.* Плазменные методы ускорения электронов: современное состояние и перспективы / И. Ю. Костюков, А. М. Пухов // *Усп. физ. наук*. — 2015. — Т. 185, № 1. — С. 89—96. — DOI: 10.3367/UFNr.0185.201501g.0089.
15. *Wen, M.* Polarized laser-wakefield-accelerated kiloampere electron beams / M. Wen, M. Tamburini, C. H. Keitel // *Physical review letters*. — 2019. — Т. 122, № 21. — С. 214801. — DOI: 10.1103/physrevlett.122.214801.
16. Dephasingless laser wakefield acceleration / J. Palastro [и др.] // *Physical review letters*. — 2020. — Т. 124, № 13. — С. 134802. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.134802.
17. *Tajima, T.* Wakefield acceleration / T. Tajima, X. Yan, T. Ebisuzaki // *Reviews of Modern Plasma Physics*. — 2020. — Т. 4. — С. 1—72. — DOI: 10.1007/s41614-020-0043-z.
18. Многокаскадное лазерно-плазменное ускорение ультракоротких сгустков электронов и позитронов / М. Е. Вейсман [и др.] // *Квантовая электроника*. — 2023. — Т. 52, № 2. — С. 182—188.
19. Energetic proton generation in ultra-intense laser–solid interactions / S. Wilks [и др.] // *Physics of plasmas*. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 542—549. — DOI: 10.1063/1.1333697.
20. Highly efficient relativistic-ion generation in the laser-piston regime / Т. Esirkepov [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Т. 92, № 17. — С. 175003. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.175003.
21. Laser-driven proton scaling laws and new paths towards energy increase / J. Fuchs [и др.] // *Nature physics*. — 2006. — Т. 2, № 1. — С. 48—54. — DOI: 10.1038/nphys199.

22. Accelerating monoenergetic protons from ultrathin foils by flat-top laser pulses in the directed-Coulomb-explosion regime / S. Bulanov [и др.] // *Physical Review E*. — 2008. — Т. 78, № 2. — С. 026412. — DOI: 10.1103/PhysRevE.78.026412.
23. *Macchi, A.* Ion acceleration by superintense laser-plasma interaction / A. Macchi, M. Borghesi, M. Passoni // *Rev. Mod. Phys.* — 2013. — Т. 85, № 2. — С. 751. — DOI: 10.1103/RevModPhys.85.751.
24. Stable laser-ion acceleration in the light sail regime / S. Steinke [и др.] // *Phys. Rev. ST Accel. Beams*. — 2013. — Т. 16, вып. 1. — С. 011303. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.16.011303.
25. Лазерное ускорение ионов: новые результаты, перспективы применения / В. Ю. Быченко [и др.] // *Усп. физ. наук*. — 2015. — Т. 185, № 1. — С. 77–88. — DOI: 10.3367/UFNr.0185.201501f.0077.
26. Synchronized ion acceleration by ultraintense slow light / A. Brantov [и др.] // *Physical Review Letters*. — 2016. — Т. 116, № 8. — С. 085004. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.085004.
27. *Vieira, J.* Nonlinear laser driven donut wakefields for positron and electron acceleration / J. Vieira, J. Mendonça // *Physical Review Letters*. — 2014. — Т. 112, № 21. — С. 215001. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.215001.
28. Demonstration of a positron beam-driven hollow channel plasma wakefield accelerator / S. Gessner [и др.] // *Nature communications*. — 2016. — Т. 7, № 1. — С. 11785. — DOI: 10.1038/ncomms11785.
29. All-optical quasi-monoenergetic GeV positron bunch generation by twisted laser fields / J. Zhao [и др.] // *Communications Physics*. — 2022. — Т. 5, № 1. — С. 15. — DOI: 10.1038/s42005-021-00797-9.
30. Positron acceleration via laser-augmented blowouts in two-column plasma structures / L. Reichwein [и др.] // *Physical Review E*. — 2022. — Т. 105, № 5. — С. 055207. — DOI: 10.1103/PhysRevE.105.055207.
31. *Берестецкий, В. И.* Квантовая электродинамика. Вып. 4 / В. И. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 720 с.

32. *Байер, В. Н.* Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах / В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989. — 400 с.
33. *Dirac, P. A.* Discussion of the infinite distribution of electrons in the theory of the positron / P. A. Dirac // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Т. 30. — Cambridge University Press. 1934. — С. 150—163. — DOI: 10.1017/S030500410001656X.
34. *Serber, R.* Linear modifications in the Maxwell field equations / R. Serber // Physical Review. — 1935. — Т. 48, № 1. — С. 49. — DOI: 10.1103/PhysRev.48.49.
35. *Uehling, E. A.* Polarization effects in the positron theory / E. A. Uehling // Physical Review. — 1935. — Т. 48, № 1. — С. 55. — DOI: 10.1103/PhysRev.48.55.
36. *Heisenberg, W.* Folgerungen aus der diracschen theorie des positrons / W. Heisenberg, H. Euler // Zeitschrift für Physik. — 1936. — Т. 98, № 11/12. — С. 714—732. — DOI: 10.1007/BF01343663.
37. Final report of the E821 muon anomalous magnetic moment measurement at BNL / G. W. Bennett [и др.] // Physical Review D. — 2006. — Т. 73, № 7. — С. 072003. — DOI: 10.1103/PhysRevD.73.072003.
38. *Hanneke, D.* New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant / D. Hanneke, S. Fogwell, G. Gabrielse // Physical review letters. — 2008. — Т. 100, № 12. — С. 120801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.120801.
39. Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the ATLAS detector at the LHC // Nature physics. — 2017. — Т. 13, № 9. — С. 852—858. — DOI: 10.1038/nphys4208.
40. *Furry, W.* On bound states and scattering in positron theory / W. Furry // Physical Review. — 1951. — Т. 81, № 1. — С. 115. — DOI: 10.1103/PhysRev.81.115.
41. *Wolkow, D. M.* Über eine klasse von lösungen der diracschen gleichung / D. M. Wolkow // Zeitschrift für Physik. — 1935. — Т. 94, № 3/4. — С. 250—260. — DOI: 10.1007/BF01331022.

42. Advances in QED with intense background fields / A. Fedotov [и др.]. — 2022. — arXiv: 1912.07508 [hep-ph].
43. *Breit, G.* Collision of two light quanta / G. Breit, J. A. Wheeler // *Physical Review*. — 1934. — Т. 46, № 12. — С. 1087. — DOI: 10.1103/PhysRev.46.1087.
44. *Bell, A. R.* Possibility of Prolific Pair Production with High-Power Lasers / A. R. Bell, J. G. Kirk // *Physical Review Letters*. — 2008. — Т. 101, вып. 20. — С. 200403. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.200403.
45. Observation of nonlinear effects in Compton scattering / C. Bula [и др.] // *Physical Review Letters*. — 1996. — Т. 76, № 17. — С. 3116. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.3116.
46. Positron production in multiphoton light-by-light scattering / D. Burke [и др.] // *Physical Review Letters*. — 1997. — Т. 79, № 9. — С. 1626. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.1626.
47. Experimental signatures of the quantum nature of radiation reaction in the field of an ultraintense laser / K. Poder [и др.] // *Physical Review X*. — 2018. — Т. 8, № 3. — С. 031004. — DOI: 10.1103/PhysRevX.8.031004.
48. Experimental evidence of radiation reaction in the collision of a high-intensity laser pulse with a laser-wakefield accelerated electron beam / J. Cole [и др.] // *Physical Review X*. — 2018. — Т. 8, № 1. — С. 011020. — DOI: 10.1103/PhysRevX.8.011020.
49. *Meuren, S.* Probing strong-field QED at FACET-II (SLAC E-320) / S. Meuren // *Third conference on extremely high intensity laser physics (exhlp)*. Т. 7. — 2019.
50. Radiation reaction effects on radiation pressure acceleration / M. Tamburini [и др.] // *New Journal of Physics*. — 2010. — Т. 12, № 12. — С. 123005. — DOI: 10.1088/1367-2630/12/12/123005.
51. Radiation-pressure-dominant acceleration: Polarization and radiation reaction effects and energy increase in three-dimensional simulations / M. Tamburini [и др.] // *Physical Review E*. — 2012. — Т. 85. — С. 016407. — DOI: 10.1103/PhysRevE.85.016407.

52. *Kostyukov, I. Y.* Radiative damping in plasma-based accelerators / I. Y. Kostyukov, E. N. Nerush, A. G. Litvak // *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*. — 2012. — T. 15, № 11. — C. 111001. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.15.111001.
53. *Capdessus, R.* Modeling of radiation losses in ultrahigh power laser-matter interaction / R. Capdessus, E. d’Humières, V. T. Tikhonchuk // *Physical Review E*. — 2012. — T. 86. — C. 036401. — DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036401.
54. *Capdessus, R.* Influence of radiation reaction force on ultraintense laser-driven ion acceleration / R. Capdessus, P. McKenna // *Physical Review E*. — 2015. — T. 91. — C. 053105. — DOI: 10.1103/PhysRevE.91.053105.
55. *Nerush, E. N.* Laser-driven hole boring and gamma-ray emission in high-density plasmas / E. N. Nerush, I. Y. Kostyukov // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2015. — T. 57, № 3. — C. 035007. — DOI: 10.1088/0741-3335/57/3/035007.
56. *Gelfer, E. G.* Theory and simulations of radiation friction induced enhancement of laser-driven longitudinal fields / E. G. Gelfer, A. M. Fedotov, S. Weber // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2018. — T. 60, № 6. — C. 064005. — DOI: <https://doi.org/10.1088/1361-6587/aabb12>.
57. *Gelfer, E.* Unexpected impact of radiation friction: enhancing production of longitudinal plasma waves / E. Gelfer, N. Elkina, A. Fedotov // *Scientific Reports*. — 2018. — T. 8. — C. 6478. — DOI: 10.1038/s41598-018-24930-x.
58. *Gelfer, E. G.* Radiation induced acceleration of ions in a laser irradiated transparent foil / E. G. Gelfer, A. M. Fedotov, S. Weber // *New Journal of Physics*. — 2021. — T. 23, № 9. — C. 095002. — DOI: 10.1088/1367-2630/ac1a97.
59. *Golovanov, A. A.* Radiation reaction-dominated regime of wakefield acceleration / A. A. Golovanov, E. N. Nerush, I. Y. Kostyukov // *New Journal of Physics*. — 2022. — T. 24, № 3. — C. 033011. — DOI: 10.1088/1367-2630/ac53b9.
60. *Anomalous Radiative Trapping in Laser Fields of Extreme Intensity / A. Gonoskov [и др.]* // *Physical Review Letters*. — 2014. — T. 113. — C. 014801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.014801.

61. Radiation-Reaction Trapping of Electrons in Extreme Laser Fields / L. L. Ji [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Т. 112, № 14. — С. 145003. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.145003.
62. Enhanced electron trapping and γ ray emission by ultra-intense laser irradiating a near-critical-density plasma filled gold cone / X.-L. Zhu [и др.] // *New Journal of Physics.* — 2015. — Т. 17, № 5. — С. 053039. — DOI: 10.1088/1367-2630/17/5/053039.
63. *Kirk, J.* Radiative trapping in intense laser beams / J. Kirk // *Plasma Physics and Controlled Fusion.* — 2016. — Т. 58, № 8. — С. 085005. — DOI: 10.1088/0741-3335/58/8/085005.
64. *Vranic, M.* Extremely intense laser-based electron acceleration in a plasma channel / M. Vranic, R. A. Fonseca, L. O. Silva // *Plasma physics and controlled fusion.* — 2018. — Т. 60, № 3. — С. 034002. — DOI: 10.1088/1361-6587/aaa36c.
65. Radiation reaction as an energy enhancement mechanism for laser-irradiated electrons in a strong plasma magnetic field / Z. Gong [и др.] // *Scientific reports.* — 2019. — Т. 9, № 1. — С. 1–11. — DOI: 10.1038/s41598-019-53644-x.
66. Laser absorption via quantum electrodynamics cascades in counter propagating laser pulses / T. Grismayer [и др.] // *Physics of Plasmas.* — 2016. — Т. 23, № 5. — С. 056706. — DOI: 10.1063/1.4950841.
67. *Zhang, P.* The effect of nonlinear quantum electrodynamics on relativistic transparency and laser absorption in ultra-relativistic plasmas / P. Zhang, C. P. Ridgers, A. G. R. Thomas // *New Journal of Physics.* — 2015. — Т. 17, № 4. — С. 043051. — DOI: 10.1088/1367-2630/17/4/043051.
68. Opacity of relativistically underdense plasmas for extremely intense laser pulses / M. Serebryakov [и др.]. — 2022. — arXiv: 2210.01606 [physics.plasm-ph].
69. *Liseykina, T. V.* Inverse Faraday effect driven by radiation friction / T. V. Liseykina, S. V. Popruzhenko, A. Macchi // *New Journal of Physics.* — 2016. — Т. 18, № 7. — С. 072001. — DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/18/7/072001>.

70. *Liseykina, T. V.* Quantum effects on radiation friction driven magnetic field generation / T. V. Liseykina, A. Macchi, S. V. Popruzhenko // *The European Physical Journal Plus*. — 2021. — Т. 136, № 2. — С. 170. — DOI: 10.1140/epjp/s13360-020-01030-2.
71. Spin polarization of electrons by ultraintense lasers / D. Del Sorbo [и др.] // *Physical Review A*. — 2017. — Т. 96, № 4. — С. 043407. — DOI: 10.1103/physreva.96.043407.
72. Electron spin polarization in realistic trajectories around the magnetic node of two counter-propagating, circularly polarized, ultra-intense lasers / D. Del Sorbo [и др.] // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2018. — Т. 60, № 6. — С. 064003. — DOI: 10.1088/1361-6587/aab979.
73. Polarized Positron Beams via Intense Two-Color Laser Pulses / Y. Chen [и др.] // *Physical Review Letters*. — 2019. — Т. 123, № 17. — С. 174801. — DOI: 10.1103/physrevlett.123.174801.
74. Ultrafast polarization of an electron beam in an intense bichromatic laser field / D. Seipt [и др.] // *Physical Review A*. — 2019. — Т. 100, № 6. — С. 061402. — DOI: 10.1103/PhysRevA.100.061402.
75. Polarized electron-beam acceleration driven by vortex laser pulses / Y. Wu [и др.] // *New Journal of Physics*. — 2019. — Т. 21, № 7. — С. 073052. — DOI: 10.1088/1367-2630/ab2fd7.
76. Ultrarelativistic electron-beam polarization in single-shot interaction with an ultraintense laser pulse / Y.-F. Li [и др.] // *Physical review letters*. — 2019. — Т. 122, № 15. — С. 154801. — DOI: 10.1103/physrevlett.122.154801.
77. Production of Highly Polarized Positron Beams via Helicity Transfer from Polarized Electrons in a Strong Laser Field / Y. Li [и др.] // *Physical Review Letters*. — 2020. — Т. 125, № 4. — С. 044802. — DOI: 10.1103/physrevlett.125.044802.
78. Ultrarelativistic polarized positron jets via collision of electron and ultraintense laser beams / F. Wan [и др.] // *Physics Letters B*. — 2020. — Т. 800. — С. 135120. — DOI: 10.1016/j.physletb.2019.135120.

79. *Gong, Z.* Retrieving transient magnetic fields of ultrarelativistic laser plasma via ejected electron polarization / Z. Gong, K. Z. Hatsagortsyan, C. H. Keitel // *Physical review letters*. — 2021. — Т. 127, № 16. — С. 165002. — DOI: 10.1103/physrevlett.127.165002.
80. Constraints on the extremely high-energy cosmic ray accelerators from classical electrodynamics / F. Aharonian [и др.] // *Physical Review D*. — 2002. — Т. 66, № 2. — С. 023005. — DOI: 10.1103/PhysRevD.66.023005.
81. *Medvedev, M. V.* Constraint on electromagnetic acceleration of highest energy cosmic rays / M. V. Medvedev // *Physical Review E*. — 2003. — Т. 67, № 4. — С. 045401. — DOI: 10.1103/PhysRevE.67.045401.
82. Kinetic study of radiation-reaction-limited particle acceleration during the relaxation of unstable force-free equilibria / Y. Yuan [и др.] // *The Astrophysical Journal*. — 2016. — Т. 828, № 2. — С. 92. — DOI: 10.3847/0004-637X/828/2/92.
83. Effects of radiation damping on particle motion in pulsar vacuum fields / B. Finkbeiner [и др.] // *Astron. Astrophys.* — 1989. — Т. 225. — С. 479—487. — DOI: 10.18419/opus-8029.
84. *Cao, G.* Three-dimensional dissipative pulsar magnetospheres with Aristotelian electrodynamics / G. Cao, X. Yang // *The Astrophysical Journal*. — 2020. — Т. 889, № 1. — С. 29. — DOI: 10.3847/1538-4357/ab5fe6.
85. *Uzdensky, D. A.* Radiative magnetic reconnection in astrophysics / D. A. Uzdensky // *Magnetic Reconnection: Concepts and Applications*. — 2016. — С. 473—519. — DOI: 10.1007/978-3-319-26432-5_12.
86. *Beloborodov, A. M.* Radiative magnetic reconnection near accreting black holes / A. M. Beloborodov // *The Astrophysical Journal*. — 2017. — Т. 850, № 2. — С. 141. — DOI: 10.3847/1538-4357/aa8f4f.
87. *Nerush, E.* Radiation emission by extreme relativistic electrons and pair production by hard photons in a strong plasma wakefield / E. Nerush, I. Kostyukov // *Physical Review E*. — 2007. — Т. 75, № 5. — С. 057401. — DOI: 10.1103/PhysRevE.75.057401.
88. Laser Field Absorption in Self-Generated Electron-Positron Pair Plasma / E. N. Nerush [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Т. 106, вып. 3, № 3. — С. 035001. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.035001.

89. Dense Electron-Positron Plasmas and Ultraintense γ -rays from Laser-Irradiated Solids / C. P. Ridgers [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2012. — Т. 108, вып. 16, № 16. — С. 165006. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.165006.
90. *Narozhny, N. B.* Quantum-electrodynamic cascades in intense laser fields / N. B. Narozhny, A. M. Fedotov // *Physics Uspekhi.* — 2015. — Т. 58, № 1. — С. 95. — DOI: 10.3367/ufne.0185.201501i.0103.
91. *Kostyukov, I. Y.* Production and dynamics of positrons in ultrahigh intensity laser-foil interactions / I. Y. Kostyukov, E. N. Nerush // *Physics of Plasmas.* — 2016. — Т. 23, № 9. — С. 093119. — DOI: 10.1063/1.4962567.
92. Seeded QED cascades in counterpropagating laser pulses / T. Grismayer [и др.] // *Physical Review E.* — 2017. — Т. 95, вып. 2. — С. 023210. — DOI: 10.1103/PhysRevE.95.023210.
93. QED cascade with 10 PW-class lasers / M. Jirka [и др.] // *Scientific Reports.* — 2017. — Т. 7, № 1. — С. 15302. — DOI: 10.1038/s41598-017-15747-1.
94. QED cascade saturation in extreme high fields / W. Luo [и др.] // *Scientific Reports.* — 2018. — Т. 8, № 1. — С. 8400. — DOI: 10.1038/s41598-018-26785-8.
95. Spatiotemporal distributions of pair production and cascade in solid targets irradiated by ultra-relativistic lasers with different polarizations / T. Yuan [и др.] // *Plasma Physics and Controlled Fusion.* — 2018. — Т. 60. — С. 065003. — DOI: 10.1088/1361-6587/aab3ba.
96. Efficient ion acceleration and dense electron-positron plasma creation in ultra-high intensity laser-solid interactions / D. Del Sorbo [и др.] // *New Journal of Physics.* — 2018. — Т. 20, № 3. — С. 033014. — DOI: 10.1088/1367-2630/aaae61.
97. Enhanced copious electron-positron pair production via electron injection from a mass-limited foil / Y. Lu [и др.] // *Plasma Physics and Controlled Fusion.* — 2018. — Т. 60. — С. 125008. — DOI: 10.1088/1361-6587/aae819.
98. Enhanced electron-positron pair production by two obliquely incident lasers interacting with a solid target / W. Luo [и др.] // *Plasma Physics and Controlled Fusion.* — 2018. — Т. 60. — С. 095006. — DOI: 10.1088/1361-6587/aad211.

99. Laser-driven plasma pinching in e^-e^+ cascade / E. S. Efimenko [и др.] // Physical Review E. — 2019. — Т. 99, вып. 3. — С. 031201. — DOI: 10.1103/PhysRevE.99.031201.
100. Райзер, Ю. П. Физика газового разряда / Ю. П. Райзер. — Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
101. High-power microwave energy coupling to nitrogen during breakdown / W. M. Bollen [и др.] // J. Appl. Phys. — 1983. — Т. 54, № 1. — С. 101—106. — DOI: 10.1063/1.331733.
102. Семёнов, В. Е. Волна пробоя в самосогласованном поле электромагнитного волнового пучка / В. Е. Семёнов // Физика плазмы. — 1982. — Т. 8, № 3. — С. 613—618.
103. Dunne, G. V. THE HEISENBERG–EULER EFFECTIVE ACTION: 75 YEARS ON / G. V. Dunne // International Journal of Modern Physics A. — 2012. — Т. 27, № 15. — С. 1260004. — DOI: 10.1142/S0217751X12600044.
104. Extreme plasma states in laser-governed vacuum breakdown / E. S. Efimenko [и др.] // Scientific reports. — 2018. — Т. 8, № 1. — С. 2329. — DOI: 10.1038/s41598-018-20745-y.
105. Bhabha, H. J. The passage of fast electrons and the theory of cosmic showers / H. J. Bhabha, W. Heitler // Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences. — 1937. — Т. 159, № 898. — С. 432—458. — DOI: 10.1098/rspa.1937.0082.
106. Meszaros, P. Gamma-ray bursts / P. Meszaros // Reports on Progress in Physics. — 2006. — Т. 69, № 8. — С. 2259. — DOI: 10.1088/0034-4885/69/8/R01.
107. Sturrock, P. A model of pulsars / P. Sturrock // The Astrophysical Journal. — 1971. — Т. 164. — С. 529. — DOI: 10.1086/150865.
108. Ruderman, M. Theory of pulsars-Polar caps, sparks, and coherent microwave radiation / M. Ruderman, P. G. Sutherland // The Astrophysical Journal. — 1975. — Т. 196. — С. 51—72. — DOI: 10.1086/153393.
109. Daugherty, J. Electromagnetic cascades in pulsars / J. Daugherty, A. Harding // The Astrophysical Journal. — 1982. — Т. 252. — С. 337—347. — DOI: 10.1086/159561.

110. Ab initio pulsar magnetosphere: the role of general relativity / A. A. Philippov [и др.] // *The Astrophysical Journal Letters*. — 2015. — Т. 815, № 2. — С. L19. — DOI: 10.1088/2041-8205/815/2/L19.
111. On the problems of relativistic laboratory astrophysics and fundamental physics with super powerful lasers / S. Bulanov [и др.] // *Plasma Physics Reports*. — 2015. — Т. 41. — С. 1—51. — DOI: 10.1134/S1063780X15010018.
112. ILC Technical Design Report Nos. ILC-REPORT-2013-040, CERN-ATS-2013-037. — 2013.
113. CLIC Conceptual Design Report No. CERN-2012-007. — 2012. — DOI: 10.5170/CERN-2012-007.
114. Physics considerations for laser-plasma linear colliders / C. Schroeder [и др.] // *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*. — 2010. — Т. 13, № 10. — С. 101301. — DOI: 10.1103/physrevstab.13.101301.
115. *Hollebeek, R.* Disruption limits for linear colliders / R. Hollebeek // *Nuclear Instruments and Methods*. — 1981. — Т. 184, № 2/3. — С. 333—347. — DOI: 10.1016/0029-554X(81)90733-3.
116. *Yokoya, K.* Beam-beam phenomena in linear colliders / K. Yokoya, P. Chen // *Frontiers of Particle Beams: Intensity Limitations*. — Springer, 1992. — С. 415—445. — DOI: 10.1007/3-540-55250-2_37.
117. *Chen, P.* Disruption effects from the interaction of round e+ e- beams / P. Chen, K. Yokoya // *Physical Review D*. — 1988. — Т. 38, № 3. — С. 987. — DOI: 10.1103/PhysRevD.38.987.
118. *Noble, R. J.* Beamstrahlung from colliding electron-positron beams with negligible disruption / R. J. Noble // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. — 1987. — Т. 256, № 3. — С. 427—433. — DOI: 10.1016/0168-9002(87)90284-1.
119. *Blankenbecler, R.* Quantum treatment of beamstrahlung / R. Blankenbecler, S. D. Drell // *Physical Review D*. — 1987. — Т. 36, № 1. — С. 277. — DOI: 10.1103/PhysRevD.36.277.
120. *Bell, M.* Quantum beamstrahlung / M. Bell, J. S. Bell // *Quantum Mechanics, High Energy Physics And Accelerators: Selected Papers Of John S Bell (With Commentary)*. — World Scientific, 1995. — С. 99—104. — DOI: 10.1142/2611.

121. *Chen, P.* Coherent pair creation in linear colliders / P. Chen, V. I. Telnov // Physical Review Letters. — 1989. — Т. 63, № 17. — С. 1796. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.63.1796.
122. Strong field processes in beam-beam interactions at the Compact Linear Collider / J. Esberg [и др.] // Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams. — 2014. — Т. 17, № 5. — С. 051003. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.17.051003.
123. Prospect of studying nonperturbative QED with beam-beam collisions / V. Yakimenko [и др.] // Physical Review Letters. — 2019. — Т. 122, № 19. — С. 190404. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.190404.
124. *Tamburini, M.* Efficient High-Energy Photon Production in the Supercritical QED Regime / M. Tamburini, S. Meuren. — 2020. — arXiv: 1912.07508 [hep-ph].
125. Petawatt and exawatt class lasers worldwide / C. N. Danson [и др.] // High Power Laser Science and Engineering. — 2019. — Т. 7. — DOI: 10.1017/hpl.2019.36.
126. Technical Design Report for the FACET-II Project at SLAC National Accelerator Laboratory. — 2016. — DOI: 10.2172/1340171.
127. Bright γ rays source and nonlinear Breit-Wheeler pairs in the collision of high density particle beams / F. Del Gaudio [и др.] // Physical Review Accelerators and Beams. — 2019. — Т. 22, № 2. — С. 023402. — DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.22.023402.
128. *Никишов, А. И.* Квантовые процессы в поле плоской электромагнитной волны и в постоянном поле / А. И. Никишов, В. И. Ритус // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 46, № 2. — С. 776—796.
129. *Ритус, В. И.* Квантовые эффекты взаимодействия элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем. / В. И. Ритус // Труды ФИАН. — 1979. — Т. 111. — С. 5—151.
130. *Khokonov, M. K.* Standard radiation spectrum of relativistic electrons: Beyond the synchrotron approximation / M. K. Khokonov, H. Nitta // Physical review letters. — 2002. — Т. 89, № 9. — С. 094801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.89.094801.

131. *Ilderton, A.* Extended locally constant field approximation for nonlinear Compton scattering / A. Ilderton, B. King, D. Seipt // *Physical Review A*. — 2019. — T. 99, № 4. — C. 042121. — DOI: 10.1103/PhysRevA.99.042121.
132. *Heinzl, T.* Locally monochromatic approximation to QED in intense laser fields / T. Heinzl, B. King, A. MacLeod // *Physical Review A*. — 2020. — T. 102, № 6. — C. 063110. — DOI: 10.1103/PhysRevA.102.063110.
133. Nonlinear Compton scattering in time-dependent electric fields: LCFA and beyond / E. Gelfer [и др.]. — 2022. — arXiv: 2206.08211 [hep-ph].
134. *Podszus, T.* High-energy behavior of strong-field QED in an intense plane wave / T. Podszus, A. Di Piazza // *Physical Review D*. — 2019. — T. 99, № 7. — C. 076004. — DOI: 10.1103/PhysRevD.99.076004.
135. *Artemenko, I. I.* Quasiclassical approach to synergic synchrotron-Cherenkov radiation in polarized vacuum / I. I. Artemenko, E. N. Nerush, I. Kostyukov // *New Journal of Physics*. — 2020. — T. 22. — C. 093072. — DOI: 10.1088/1367-2630/abb388.
136. *Kirk, J. G.* Pair production in counter-propagating laser beams / J. G. Kirk, A. Bell, I. Arka // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2009. — T. 51, № 8. — C. 085008. — DOI: 10.1088/0741-3335/51/8/085008.
137. Electromagnetic cascade in high-energy electron, positron, and photon interactions with intense laser pulses / S. Bulanov [и др.] // *Physical Review A*. — 2013. — T. 87, № 6. — C. 062110. — DOI: 10.1103/PhysRevA.87.062110.
138. Attractors and chaos of electron dynamics in electromagnetic standing wave / T. Z. Esirkepov [и др.] // *Physics Letters A*. — 2015. — T. 379, № 36. — C. 2044. — DOI: 10.1016/j.physleta.2015.06.017.
139. From quantum to classical modeling of radiation reaction: A focus on stochasticity effects / F. Niel [и др.] // *Physical Review E*. — 2018. — T. 97, № 4. — C. 043209. — DOI: 10.1103/physreve.97.043209.
140. Charged particle motion and radiation in strong electromagnetic fields / A. Gonoskov [и др.] // *Reviews of Modern Physics*. — 2022. — T. 94, № 4. — C. 045001. — DOI: 10.1103/RevModPhys.94.045001.
141. *Shen, C.* Energy straggling and radiation reaction for magnetic bremsstrahlung / C. Shen, D. White // *Physical Review Letters*. — 1972. — T. 28, № 7. — C. 455. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.28.455.

142. *Duclous, R.* Monte Carlo calculations of pair production in high-intensity laser–plasma interactions / R. Duclous, J. G. Kirk, A. R. Bell // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2010. — Т. 53, № 1. — С. 015009. — DOI: 10.1088/0741-3335/53/1/015009.
143. Quantum quenching of radiation losses in short laser pulses / C. Harvey [и др.] // *Physical Review Letters*. — 2017. — Т. 118, № 10. — С. 105004. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.105004.
144. *Neitz, N.* Stochasticity effects in quantum radiation reaction / N. Neitz, A. Di Piazza // *Physical review letters*. — 2013. — Т. 111, № 5. — С. 054802. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.054802.
145. Signatures of quantum effects on radiation reaction in laser–electron-beam collisions / C. Ridgers [и др.] // *Journal of Plasma Physics*. — 2017. — Т. 83, № 5. — С. 715830502. — DOI: 10.1017/S0022377817000642.
146. *Gerlach, W.* Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld / W. Gerlach, O. Stern // *Zeitschrift für Physik*. — 1922. — Т. 9, № 1. — С. 349–352. — DOI: 10.1007/BF01326983.
147. *Thomas, L. H.* The motion of the spinning electron / L. H. Thomas // *Nature*. — 1926. — Т. 117, № 2945. — С. 514–514. — DOI: 10.1038/117514a0.
148. *Bargmann, V.* Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field / V. Bargmann, L. Michel, V. Telegdi // *Physical Review Letters*. — 1959. — Т. 2, № 10. — С. 435. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.2.435.
149. *Mane, S.* Spin-polarized charged particle beams in high-energy accelerators / S. Mane, Y. M. Shatunov, K. Yokoya // *Reports on Progress in Physics*. — 2005. — Т. 68, № 9. — С. 1997. — DOI: 10.1088/0034-4885/68/9/R01.
150. Polarized QED cascades / D. Seipt [и др.] // *New Journal of Physics*. — 2021. — Т. 23, № 5. — С. 053025. — DOI: 10.1088/1367-2630/abf584.
151. *Ландау, Л. Д.* Теория поля. Т. 2 / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
152. *Heintzmann, H.* Exact solutions of the Lorentz-Dirac equations of motion for charged particles in constant electromagnetic fields / H. Heintzmann, E. Schrüfer // *Physics Letters A*. — 1973. — Т. 43, № 3. — С. 287–288. — DOI: 10.1016/0375-9601(73)90309-5.

153. *Gonoskov, A.* Radiation-dominated particle and plasma dynamics / A. Gonoskov, M. Marklund // *Physics of Plasmas*. — 2018. — Т. 25, № 9. — С. 093109. — DOI: 10.1063/1.5047799.
154. Radiation friction versus ponderomotive effect / A. M. Fedotov [и др.] // *Physical Review A*. — 2014. — Т. 90, № 5. — С. 053847. — DOI: 10.1103/PhysRevA.90.053847.
155. *Gruzinov, A.* Aristotelian electrodynamics solves the pulsar: lower efficiency of strong pulsars / A. Gruzinov. — 2013. — 1303.4094: 1303.4094.
156. *Pétri, J.* Particle acceleration and radiation reaction in a strongly magnetised rotating dipole / J. Pétri // *Astronomy & Astrophysics*. — 2022. — Т. 666. — A5. — DOI: 10.1051/0004-6361/202243634.
157. *Cai, Y.* Dynamics of ultrarelativistic charged particles with strong radiation reaction. I. Aristotelian equilibrium state / Y. Cai, S. E. Gralla, V. Paschalidis. — 2022. — arXiv: 2209.07469 [astro-ph.HE].
158. *Зельдович, Я. Б.* Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением / Я. Б. Зельдович // *Успехи физических наук*. — 1975. — Т. 115, № 2. — С. 161—197. — DOI: 10.3367/UFNr.0115.197502a.0161.
159. Limitations on the attainable intensity of high power lasers / A. Fedotov [и др.] // *Physical review letters*. — 2010. — Т. 105, № 8. — С. 080402. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.080402.
160. QED cascades induced by circularly polarized laser fields / N. V. Elkina [и др.] // *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams*. — 2011. — Т. 14, № 5. — С. 054401. — DOI: 10.1103/PhysRevSTAB.14.054401.
161. *Di Piazza, A.* Exact solution of the Landau-Lifshitz equation in a plane wave / A. Di Piazza // *Letters in Mathshen2018exploringemathical Physics*. — 2008. — Т. 83, № 3. — С. 305—313. — DOI: 10.1007/s11005-008-0228-9. — eprint: 0801.1751v2.
162. *Gunn, J. E.* On the Motion and Radiation of Charged Particles in Strong Electromagnetic Waves. I. Motion in Plane and Spherical Waves / J. E. Gunn, J. P. Ostriker // *The Astrophysical Journal*. — 1971. — Т. 165. — С. 523. — DOI: 10.1086/150919.

163. *Grewing, M.* Acceleration of charged particles and radiation reaction in strong plane and spherical waves. II / M. Grewing, E. Schrüfer, H. Heintzmann // *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei*. — 1973. — T. 260, № 5. — С. 375—384. — DOI: 10.1007/BF01397962.
164. *Thielheim, K.* Particle acceleration in extremely strong electromagnetic wave fields / K. Thielheim // *Proceedings of International Conference on Particle Accelerators*. — IEEE. 1993. — С. 276—278. — DOI: 10.1109/PAC.1993.308941.
165. *Ekman, R.* Exact solutions in radiation reaction and the radiation-free direction / R. Ekman, T. Heinzl, A. Ilderton // *New Journal of Physics*. — 2021. — T. 23, № 5. — С. 055001. — DOI: 10.1088/1367-2630/abfab2.
166. *Gonoskov, A.* Radiation-dominated particle and plasma dynamics / A. Gonoskov, M. Marklund // *Physics of Plasmas*. — 2018. — T. 25, № 9. — С. 093109. — DOI: 10.1063/1.5047799.
167. *Nerush, E. N.* Weibel Instability in Hot Plasma Flows with the Production of Gamma-Rays and Electron–Positron Pairs / E. N. Nerush, D. A. Serebryakov, I. Y. Kostyukov // *Astrophys. J.* — 2017. — T. 851, № 2. — С. 129. — DOI: 10.3847/1538-4357/aa9d1a.
168. Multiple colliding electromagnetic pulses: a way to lower the threshold of e^+e^- pair production from vacuum / S. S. Bulanov [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — T. 104, № 22. — С. 220404. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.220404.
169. *Nerush, E.* Analytical model for electromagnetic cascades in rotating electric field / E. Nerush, V. Bashmakov, I. Y. Kostyukov // *Physics of Plasmas*. — 2011. — T. 18, № 8. — С. 083107. — DOI: 10.1063/1.3624481.
170. Dipole pulse theory: Maximizing the field amplitude from 4π focused laser pulses / I. Gonoskov [и др.] // *Phys. Rev. A*. — 2012. — T. 86, № 5. — С. 053836. — DOI: 10.1103/PhysRevA.86.053836.
171. Probing nonperturbative QED with optimally focused laser pulses / A. Gonoskov [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — T. 111, № 6. — С. 060404. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.060404.
172. Effect of laser polarization on quantum electrodynamical cascading / V. F. Bashmakov [и др.] // *Phys. Plasmas*. — 2014. — T. 21, № 1. — С. 013105. — DOI: 10.1063/1.4861863.

173. Generation of current sheets and giant quasistatic magnetic fields at the ionization of vacuum in extremely strong light fields / A. A. Muraviev [и др.] // JETP Lett. — 2015. — Т. 102, № 3. — С. 148–153. — DOI: 10.1134/S0021364015150060.
174. Optimized multibeam configuration for observation of QED cascades / E. G. Gelfer [и др.] // Phys. Rev. A. — 2015. — Т. 92, № 2. — С. 022113. — DOI: 10.1103/PhysRevA.92.022113.
175. *Mironov, A.* Observable Features of QED Cascades in Collisions of GeV Electrons with Intense Laser Pulses / A. Mironov, A. Fedotov, N. Narozhny // Journal of Physics: Conference Series. Т. 826. — IOP Publishing. 2017. — С. 012029. — DOI: 10.1088/1742-6596/826/1/012029.
176. *Kostyukov, I. Y.* Growth rate of QED cascades in a rotating electric field / I. Y. Kostyukov, I. Artemenko, E. Nerush // Problems of Atomic Science and Technology. — 2018. — № 4. — С. 259–263.
177. High-energy radiation and pair production by Coulomb processes in particle-in-cell simulations / B. Martinez [и др.] // Physics of Plasmas. — 2019. — Т. 26, № 10. — С. 103109. — DOI: 10.1063/1.5118339.
178. Relativistic plasma physics in supercritical fields / P. Zhang [и др.] // Physics of Plasmas. — 2020. — Т. 27. — С. 050601. — DOI: 10.1063/1.5144449.
179. *Rao, M. V. S.* Extensive air showers / M. V. S. Rao, B. V. Sreekantan. — World scientific, 1998.
180. Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems / A. Di Piazza [и др.] // Reviews of Modern Physics. — 2012. — Т. 84, № 3. — С. 1177. — DOI: 10.1103/RevModPhys.84.1177.
181. Absorption of ultra-intense laser pulses / S. Wilks [и др.] // Physical review letters. — 1992. — Т. 69, № 9. — С. 1383. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.69.1383.
182. *Kirk, J. G.* Pair plasma cushions in the hole-boring scenario / J. G. Kirk, A. R. Bell, C. P. Ridgers // Plasma Phys. Control. Fusion. — 2013. — Т. 55, № 9. — С. 095016. — DOI: 10.1088/0741-3335/55/9/095016.
183. QUILL code — <https://github.com/QUILL-PIC/Quill>.
184. *Лифшиц, Е.* Физическая кинетика. Т. 10 / Е. Лифшиц, Л. Питаевский. — М.: Наука, 1979. — 528 с.

185. *Timokhin, A. N.* Time-dependent pair cascades in magnetospheres of neutron stars–I. Dynamics of the polar cap cascade with no particle supply from the neutron star surface / A. N. Timokhin // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 2010. — T. 408, № 4. — С. 2092–2114. — DOI: 10.1111/j.1365-2966.2010.17286.x.
186. *MacFadyen, A.* Collapsars: Gamma-ray bursts and explosions in “failed supernovae” / A. MacFadyen, S. Woosley // *The Astrophysical Journal.* — 1999. — T. 524, № 1. — С. 262. — DOI: 10.1086/307790.
187. *Woosley, S.* Central engines for gamma-ray bursts / S. Woosley, A. MacFadyen // *Astronomy and Astrophysics Supplement Series.* — 1999. — T. 138, № 3. — С. 499–502. — DOI: 10.1051/aas:1999325.
188. *Davidson, R. C.* Physics of intense charged particle beams in high energy accelerators / R. C. Davidson, Q. Hong. — World Scientific, 2001. — DOI: 10.1142/p250.
189. Plasma physics at the final focus of high-energy colliders / T. Katsouleas [и др.] // *Physics of Fluids B: Plasma Physics.* — 1990. — T. 2, № 6. — С. 1384–1389. — DOI: 10.1063/1.859560.
190. *Chen, P.* An introduction to beamstrahlung and disruption / P. Chen // *Frontiers of Particle Beams.* — Springer, 1988. — С. 495–532. — DOI: 10.1007/BFb0031506.
191. *Phinney, N.* SLC Final Performance and Lessons / N. Phinney. — 2000. — Окт. — DOI: 10.2172/784718. — URL: <https://www.osti.gov/biblio/784718>.
192. *Berestetskii, V. B.* Quantum Electrodynamics / V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii. — New York : Pergamon, 1982. — DOI: 10.1016/C2009-0-24486-2.
193. *Abramowitz, M.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. T. 55 / M. Abramowitz, I. A. Stegun. — US Government printing office, 1964.
194. *Hartin, A.* Strong field QED in lepton colliders and electron/laser interactions / A. Hartin // *International Journal of Modern Physics A.* — 2018. — T. 33, № 13. — С. 1830011. — DOI: 10.1142/S0217751X18300119.

195. *Song, H.-H.* Generation of polarized positron beams via collisions of ultrarelativistic electron beams / H.-H. Song, W.-M. Wang, Y.-T. Li // *Physical Review Research*. — 2021. — Т. 3, № 3. — С. 033245. — DOI: 10.1103/PhysRevResearch.3.033245.
196. *Xie, M.* Quantum suppression of beamstrahlung for future e+ e-linear colliders : тех. отч. / М. Xie ; Lawrence Berkeley National Lab., CA (US). — 1998.
197. *Pukhov, A.* Three-dimensional electromagnetic relativistic particle-in-cell code VLPL (Virtual Laser Plasma Lab) / A. Pukhov // *Journal of Plasma Physics*. — 1999. — Т. 61, № 3. — С. 425—433. — DOI: 10.1017/S0022377899007515.
198. *Pukhov, A.* Particle-In-Cell Codes for Plasma-based Particle Acceleration / A. Pukhov // *CERN Yellow Reports*. — 2016. — Т. 1. — DOI: 10.5170/CERN-2016-001.181.
199. *Baumann, C.* Influence of e^-e^+ creation on the radiative trapping in ultraintense fields of colliding laser pulses / C. Baumann, A. Pukhov // *Physical Review E*. — 2016. — Т. 94, вып. 6. — С. 063204. — DOI: 10.1103/PhysRevE.94.063204.
200. *Pukhov, A.* X-dispersionless Maxwell solver for plasma-based particle acceleration / A. Pukhov // *Journal of Computational Physics*. — 2020. — Т. 418. — С. 109622. — DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109622.
201. Properties and possible use of beam-beam synchrotron radiation / М. Bassetti [и др.] // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. — 1983. — Т. 30, № 4. — С. 2182—2184. — DOI: 10.1109/tns.1983.4332754.
202. *Chin, Y. H.* Stability of a colliding Beam in a Linear Collider : тех. отч. / Y. H. Chin ; DESY. — 1987.
203. Acceleration and focusing of electrons in two-dimensional nonlinear plasma wake fields / J. Rosenzweig [и др.] // *Phys. Rev. A*. — 1991. — Т. 44, № 10. — R6189. — DOI: 10.1103/PhysRevA.44.R6189.
204. *Бэдсел, Ч.* Физика плазмы и численное моделирование / Ч. Бэдсел, А. Ленгдон. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 452 с.

205. On the numerical dispersion of electromagnetic particle-in-cell code: Finite grid instability / M. D. Meyers [и др.] // *Journal of Computational Physics*. — 2015. — Т. 297. — С. 565—583. — DOI: 10.1016/j.jcp.2015.05.037.
206. A systematic approach to numerical dispersion in Maxwell solvers / A. Blinne [и др.] // *Computer Physics Communications*. — 2018. — Т. 224. — С. 273—281. — DOI: 10.1016/j.cpc.2017.10.010.
207. Extremely Dense Gamma-Ray Pulses in Electron Beam-Multifoil Collisions / A. Sampath [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2021. — Т. 126, № 6. — С. 064801. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.126.064801.
208. *Kostyukov, I.* Phenomenological theory of laser-plasma interaction in “bubble” regime / I. Kostyukov, A. Pukhov, S. Kiselev // *Phys. Plasmas*. — 2004. — Т. 11, № 11. — С. 5256—5264. — DOI: 10.1063/1.1799371.
209. Excitation of strongly nonlinear plasma wakefield by electron bunches / A. Golovanov [и др.] // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. — 2021. — Т. 63, № 8. — С. 085004. — DOI: 10.1088/1361-6587/ac0352.
210. Numerical instability due to relativistic plasma drift in EM-PIC simulations / X. Xu [и др.] // *Computer Physics Communications*. — 2013. — Т. 184, № 11. — С. 2503—2514. — DOI: 10.1016/j.cpc.2013.07.003.
211. *Godfrey, B. B.* Numerical stability of relativistic beam multidimensional PIC simulations employing the Esirkepov algorithm / B. B. Godfrey, J.-L. Vay // *Journal of Computational Physics*. — 2013. — Т. 248. — С. 33—46. — DOI: 10.1016/j.jcp.2013.04.006.
212. An $O(N)$ Maxwell solver with improved numerical dispersion properties / Y. Lu [и др.]. — arXiv: 1907.13088 [physics.plasm-ph].
213. On numerical errors to the fields surrounding a relativistically moving particle in PIC codes / X. Xu [и др.] // *Journal of Computational Physics*. — 2020. — Т. 413. — С. 109451. — DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109451.
214. A new field solver for modeling of relativistic particle-laser interactions using the particle-in-cell algorithm / F. Li [и др.]. — arXiv: 2004.03754 [physics.comp-ph].
215. On the elimination of numerical Cerenkov radiation in PIC simulations / A. D. Greenwood [и др.] // *Journal of Computational Physics*. — 2004. — Т. 201, № 2. — С. 665—684. — DOI: 10.1016/j.jcp.2004.06.021.

216. Mitigation of numerical Cerenkov radiation and instability using a hybrid finite difference-FFT Maxwell solver and a local charge conserving current deposit / P. Yu [и др.] // Computer Physics Communications. — 2015. — Т. 197. — С. 144—152. — DOI: 10.1016/j.cpc.2015.08.026.
217. Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code / J. P. Boris [и др.] // Proc. Fourth Conf. Num. Sim. Plasmas. — 1970. — С. 3—67.
218. Vay, J.-L. Simulation of beams or plasmas crossing at relativistic velocity / J.-L. Vay // Physics of Plasmas. — 2008. — Т. 15, № 5. — С. 056701. — DOI: 10.1063/1.2837054.
219. Higuera, A. V. Structure-preserving second-order integration of relativistic charged particle trajectories in electromagnetic fields / A. V. Higuera, J. R. Cary // Physics of Plasmas. — 2017. — Т. 24, № 5. — С. 052104. — DOI: 10.1063/1.4979989.
220. Hairer, E. Solving ordinary differential equations. 1, Nonstiff problems / E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner. — Springer-Vlg, 1993.

Список работ автора по теме диссертации

- A1. Formation and dynamics of a plasma in superstrong laser fields including radiative and quantum electrodynamics effects / I. I. Artemenko [и др.] // JETP letters. — 2016. — Т. 104, № 12. — С. 883–891. — DOI: 10.1134/S0021364016240085.
- A2. *Samsonov, A. S.* Asymptotic electron motion in the strongly-radiation-dominated regime / A. S. Samsonov, E. N. Nerush, I. Yu. Kostyukov // Physical Review A. — 2018. — Т. 98, № 5. — С. 053858. — DOI: 10.1103/PhysRevA.98.053858.
- A3. *Samsonov, A. S.* Laser-driven vacuum breakdown waves / A. S. Samsonov, E. N. Nerush, I. Yu. Kostyukov // Scientific reports. — 2019. — Т. 9, № 1. — С. 1–11. — DOI: 10.1038/s41598-019-47355-6.
- A4. *Samsonov, A.* Superluminal phase velocity approach for suppression of Numerical Cherenkov Instability in Maxwell solver / A. Samsonov, A. Pukhov, I. Kostyukov // Journal of Physics: Conference Series. Т. 1692. — IOP Publishing. 2020. — С. 012002. — DOI: 10.1088/1742-6596/1692/1/012002.
- A5. *Samsonov, A. S.* Hydrodynamical model of QED cascade expansion in an extremely strong laser pulse / A. S. Samsonov, I. Yu. Kostyukov, E. N. Nerush // Matter and Radiation at Extremes. — 2021. — Т. 6, № 3. — С. 034401. — DOI: 10.1063/5.0035347.
- A6. *Samsonov, A. S.* Effect of electron–positron plasma production on the generation of a magnetic field in laser-plasma interactions / A. S. Samsonov, E. N. Nerush, I. Yu. Kostyukov // Quantum Electronics. — 2021. — Т. 51, № 10. — С. 861. — DOI: 10.1070/QEL17601.
- A7. Beamstrahlung-enhanced disruption in beam-beam interaction / A. S. Samsonov [и др.] // New Journal of Physics. — 2021. — Т. 23, № 10. — С. 103040. — DOI: 10.1088/1367-2630/ac2e84.
- A8. Effect of transverse displacement of charged particle beams on quantum electrodynamic processes during their collision / M. Filipovic [и др.] //

- Quantum Electronics. — 2021. — Т. 51, № 9. — С. 807. — DOI: 10.1070/QEL17606.
- A9. *Samsonov, A. S.* Simulation of Gamma-Ray Generation in Interaction of High-Current Ultrarelativistic Particle Beams with Plasma / A. S. Samsonov, I. Yu. Kostyukov // Optics and Spectroscopy. — 2022. — Т. 130, № 3. — С. 219—223. — DOI: 10.1134/S0030400X22030134.
- A10. *Samsonov, A. S.* High-order corrections to the radiation-free dynamics of an electron in the strongly radiation-dominated regime / A. S. Samsonov, E. N. Nerush, I. Yu. Kostyukov // Matter and Radiation at Extremes. — 2022. — Т. 8, № 1. — С. 014402. — DOI: 10.1063/5.0117504.
- A11. *Самсонов, А. С.* Ускорение ионов в режиме светового паруса с учётом квантово-электродинамических эффектов / А. С. Самсонов, Е. Н. Неруш, И. Ю. Костюков // XVIII Научная школа «Нелинейные волны 2018». — Нижний Новгород, 2018. — С. 161—163.
- A12. *Samsonov, A. S.* e^-e^+ cushion formation in the interaction of extremely intensive radiation with solid target / A. S. Samsonov, I. Yu. Kostyukov, E. N. Nerush // VII International Conference «Frontiers of Nonlinear Physics». — Nizhny Novgorod, 2019.
- A13. *Самсонов, А. С.* Исследование квантово-электродинамического каскада, возникающего при взаимодействии экстремально интенсивного лазерного излучения с твердотельной мишенью / А. С. Самсонов, И. Ю. Костюков, Е. Н. Неруш // XIX Научная школа «Нелинейные волны 2020». — Нижний Новгород, 2020. — С. 214—216.
- A14. *Samsonov, A. S.* Analytical model of the QED cascade development in the plane wave / A. S. Samsonov, I. Yu. Kostyukov, E. N. Nerush // IV International Conference on Ultrafast Optical Science «UltrafastLight-2020». — Moscow, 2020. — С. 51.
- A15. *Самсонов, А. С.* Подавление черенковской неустойчивости в схеме численного решения уравнений Максвелла за счёт сверхсветовых волн / А. С. Самсонов, А. М. Пухов, И. Ю. Костюков // XX международная конференция «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии». — Нижний Новгород, 2020. — С. 336—337.

- A16. *Samsonov, A. S.* Advances in the asymptotic description of the electron motion in the strongly radiation-dominated regime / A. S. Samsonov, E. N. Nerush, I. Yu. Kostyukov // 47th EPS conference on plasma physics «EPS 2021». — Sitges, 2021. — С. 976—979.
- A17. *Samsonov, A. S.* Effect of e^+e^- pair production on generation of magnetic field driven by radiation reaction / A. S. Samsonov, E. N. Nerush, I. Yu. Kostyukov // V International Conference on Ultrafast Optical Science «UltrafastLight-2021». — Moscow, 2021. — С. 35.
- A18. Effect of Radiation Reaction on Collective Processes in Collision of High-Current Ultrarelativistic Beams of Particles / A. S. Samsonov [и др.] // 29th annual International Laser Physics Workshop. — Lyon, 2021.
- A19. *Samsonov, A. S.* Features of the Electron Motion in the Strongly Radiation-Dominated Regime / A. S. Samsonov, I. Yu. Kostyukov, E. N. Nerush // 18th International Workshop Complex Systems of Charged Particles and Their Interactions with Electromagnetic Radiation «CSCPIER-2022». — Moscow, 2022.
- A20. *Samsonov, A. S.* Features of the Electron Motion in the Strongly Radiation-Dominated Regime / A. S. Samsonov, I. Yu. Kostyukov, E. N. Nerush // 30th annual International Laser Physics Workshop. — Lyon, 2022.

Список рисунков

1	Некоторые КЭД процессы во внешнем поле	7
1.1	Динамика электрона в линейно-поляризованной стоячей электромагнитной волне	29
1.2	Динамика электрона в поле TE ₁₁ моды прямоугольного волновода	30
1.3	Динамика электрона в синхронно вращающихся однородных параллельных электрическом и магнитном полях	39
1.4	Динамика электрона в модельном ускорителе	42
1.5	Динамика электрона в циркулярно-поляризованной монохроматической плоской волне	49
1.6	Динамика электрона в линейно-поляризованной монохроматической плоской волне	50
2.1	Распределение плотности частиц и электромагнитной энергии в различные моменты времени в численном моделировании	60
2.2	Баланс энергии в системе в численном моделировании с параметрами $n_e = 5.9 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$, $d = 1 \text{ мкм}$, $a_0 = 2500$	60
2.3	Распределение позитронов в плоскости $x - t$ в численных моделированиях с различными начальными параметрами	61
2.4	Результаты численного моделирования развития КЭД каскада в плоской волн	63
2.5	Характеристики движения отдельных электронов, находящихся внутри электрон-позитронной подушки.	64
2.6	Механизм поддержания КЭД каскада в плоской волне	65
2.7	Сравнение ширины разброса энергий всех гамма-квантов и только активных гамма-квантов	68
2.8	Проверка приближения, использованного для описания углового распределения частиц.	74
2.9	Проверка приближений аналитической модели развития КЭД каскада в плоской волне	78
2.10	Геометрическое расположение скорости и магнитного поля в системе отсчёта K'	80
2.11	Дрейфовая скорость частиц в электрон-позитронной плазме	84

2.12	Численное решение упрощенных уравнений, описывающих развитие КЭД каскада в плоской волне	88
2.13	Сравнение решения модельных уравнений, описывающий развитие КЭД каскада и результатов QED-PIC моделирования для начальных параметров $a_0 = 1000$, $n_{\gamma,0} = 0n_{cr}$	90
2.14	То же, что на Рис. 2.13 для начальных параметров $a_0 = 1500$, $n_{\gamma,0} = a_0n_{cr}$	92
2.15	То же, что на Рис. 2.13 для начальных параметров $a_0 = 2500$, $n_{\gamma,0} = 0.5a_0n_{cr}$	93
2.16	Сравнение аналитической оценки скорости фронта каскада с её величиной в численном решении.	94
3.1	Сравнение аналитического и численного решений уравнений движения частиц при столкновении пучков в режиме преобладания излучения	107
3.2	Сравнение точности вычисления отношения D/D_0 в помощью различных методов	109
3.3	Сравнение аналитического и численного решений уравнений движения частиц при столкновении длинных пучков в режиме слабого пучкового излучения	114
3.4	Распределение плотности электронов в различные моменты времени в PIC моделировании столкновения электронного и позитронного пучков	115
3.5	Динамика электронов в поле встречного позитронного пучка	117
3.6	Сравнение отношения параметра разрушения с учётом реакции излучения к таковому без учёта реакции излучения, рассчитанного различными способами	118
3.7	Параметр разрушения, рассчитанный с учётом и без учёта пучкового излучения, для различных параметров пучка	120
3.8	Распределение плотности электронов, плотности гамма-фотонов и поперечной силы, действующей на электроны пучка, в моделировании процесса распространения сильноточного пучка в твердотельной мишени	127

3.9	Зависимость полной энергии электронов и фотонов от времени при распространении сильноточного пучка в твердотельной мишени	129
3.10	Коэффициент конверсии энергии пучка электронов в энергию гамма излучения в зависимости от концентрации и толщины мишени	129
3.11	Зависимость эффективности конверсии энергии пучка электронов в энергию гамма-излучения и энергии отсечки в спектре гамма-излучения от длины и радиуса пучка	132
3.12	Особенности генерации баббля электронным пучком с диаметром, существенно превосходящим длину	133
3.13	Расположение узлов сеток электрического и магнитного поля и индексы, используемые в комплексе QUILL.	135
3.14	Результаты численного моделирования ультрарелятивистского ($\gamma = 10^3$) пучка электронов с помощью схемы FDTD	137
3.15	Фазовая и групповая скорость волн в вакууме в различных численных схемах	138
3.16	Сравнение результатов численного моделирования распространения пучка ультрарелятивистских электронов в вакууме с помощью различных численных схем	141