

Федеральный исследовательский центр  
Институт прикладной физики Российской академии наук

На правах рукописи

КЛИНЬШОВ Владимир Викторович

**КОЛЕБАНИЯ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ С  
ИМПУЛЬСНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ**

Специальность 01.04.03 —

«Радиофизика»

Диссертация на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант:

д.ф.-м.н., проф. Некоркин Владимир Исаакович

Нижний Новгород — 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	8
Актуальность проблемы . . . . .	8
Цели и задачи исследования . . . . .	19
Объект исследования . . . . .	20
Научная ценность и новизна результатов . . . . .	21
Достоверность результатов . . . . .	22
Научная и практическая значимость работы . . . . .	22
Личный вклад автора . . . . .	23
Апробация результатов . . . . .	23
Объем и структура диссертации . . . . .	24
Положения выносимые на защиту . . . . .	24
ГЛАВА 1. Новые методы описания воздействия сильных импульсных сиг- налов на динамические системы	26
1.1. Функция фазового отклика для описания фазовой динамики авто- генераторов под действием сильных и частых импульсов . . . . .	35
1.1.1. Фазовая динамика автоколебательной системы . . . . .	35
1.1.2. Определение функции фазового отклика . . . . .	38
1.1.3. Приближенное выражение для функции фазового отклика двух- мерной системы . . . . .	42
1.1.4. Примеры применения функции фазового отклика . . . . .	47

1.2. Порог устойчивости динамических систем под действием сильного внешнего возмущения . . . . .	51
1.2.1. Определение порога устойчивости . . . . .	51
1.2.2. Численная оценка порога устойчивости . . . . .	53
1.2.3. Порог устойчивости физического маятника . . . . .	55
1.2.4. Порог устойчивости для сложных сетей . . . . .	58
1.2.5. Порог устойчивости и бассейновая устойчивость . . . . .	61
1.3. Интервальная устойчивость динамических систем под внешним воздействием и ее численные меры . . . . .	66
1.3.1. Определение понятия интервальной устойчивости и ее мер . . . . .	67
1.3.2. Численные методы оценки интервальной устойчивости . . . . .	69
1.3.3. Примеры применения подхода на основе интервальной устойчивости . . . . .	76
1.4. Пороги переключения мультистабильных динамических систем под внешним воздействием . . . . .	86
1.4.1. Определение и вычисление порога переключения . . . . .	87
1.4.2. Пороги переключения автогенератора с импульсной запаздывающей обратной связью . . . . .	90
1.4.3. Пороги переключения сети Хопфилда . . . . .	94
1.4.4. Пороги переключения и стохастическое внешнее воздействие . . . . .	98
1.5. Заключение к первой главе . . . . .	104
ГЛАВА 2. Динамика малых ансамблей автогенераторов с импульсными запаздывающими связями . . . . .	110

2.1. Редукция динамики сетевых систем с импульсными запаздывающими связями к точечным отображениям . . . . .	117
2.1.1. Системы и сети с импульсными взаимодействиями. . . . .	117
2.1.2. Сведение динамики сети к многомерному отображению. . . . .	120
2.1.3. Моделирование систем с импульсными взаимодействиями на основе событийного подхода. . . . .	124
2.2. Нерегулярная динамика и «дрожащие» режимы автогенератора с импульсной запаздывающей обратной связью . . . . .	133
2.2.1. Модель автогенератора с импульсной запаздывающей связью. . .	133
2.2.2. Сведение динамики системы к точечному отображению. . . . .	134
2.2.3. Регулярные режимы автогенератора с запаздывающей обратной связью. . . . .	136
2.2.4. Сценарии дестабилизации регулярных режимов. . . . .	140
2.2.5. Численное исследование дрожащих режимов. . . . .	144
2.2.6. Экспериментальное наблюдение дрожащих режимов. . . . .	154
2.3. Фазовая синхронизация двух автогенераторов с импульсными запаздывающими связями . . . . .	156
2.3.1. Сведение динамики системы к точечному отображению. . . . .	156
2.3.2. Режимы фазовой синхронизации. . . . .	160
2.3.3. Интервалы и зоны синхронизации. . . . .	165
2.3.4. Особенности синхронизации с большой задержкой связи. . . . .	168
2.3.5. Синфазная, противофазная и внефазная синхронизация. . . . .	171
2.4. Кросс-частотная синхронизация автогенераторов с импульсными запаздывающими связями . . . . .	176

2.4.1. Аналитическое исследование кросс-частотной синхронизации при слабой связи. . . . .	176
2.4.2. Экспериментальное исследование кросс-частотной синхронизации.	181
2.5. Заключение ко второй главе . . . . .	188
<b>ГЛАВА 3. Коллективная динамика больших сетей автогенераторов с импульсными запаздывающими связями</b>	<b>196</b>
3.1. Встраивание динамики одиночной системы с запаздыванием в сеть с кольцевыми однонаправленными связями . . . . .	200
3.1.1. Периодические решения одиночного генератора с запаздыванием и вращающиеся волны в однонаправленно связанном кольце. . .	200
3.1.2. Сравнение устойчивости решений для уединенной и и кольцевой систем. . . . .	204
3.1.3. Случай кольца с мгновенными связями. . . . .	207
3.1.4. Дрожащие волны в кольцах генераторов с мгновенной связью. .	211
3.1.5. Экспериментальное исследование кольца электронных генераторов ФитцХью-Нагумо. . . . .	218
3.2. Синхронизация и ее разрушение в сети автогенераторов с глобальными импульсными запаздывающими связями . . . . .	221
3.2.1. Глобальная синхронизация сети и ее устойчивость. . . . .	222
3.2.2. Десинхронизация сети и проскальзывание фазы. . . . .	227
3.3. Влияние неоднородности параметров на коллективную динамику сети активных элементов . . . . .	235
3.3.1. Вывод уравнений Отта-Антонсена . . . . .	236

3.3.2. Стационарные решения уравнения Отта-Антонсена и их устойчивость. . . . .	238
3.3.3. Бифуркационный анализ коллективной динамики. . . . .	243
3.3.4. Классические и гистерезисные переходы между коллективными режимами. . . . .	249
3.4. Заключение к третьей главе . . . . .	256
 ГЛАВА 4. Среднеполевая динамика нейронных сетей с кластерной структурой синаптических связей	261
4.1. Моделирование кластеризации синаптических связей в локальных кортикальных сетях . . . . .	265
4.1.1. Модель кластерной сети. . . . .	265
4.1.2. Определение параметров модели из экспериментальных данных. . . . .	267
4.1.3. Бистабильная динамика кластерной сети. . . . .	274
4.1.4. Влияние локальной кластеризации на коллективную динамику крупномасштабных сетей. . . . .	280
4.2. Среднеполевая динамика нейронной сети со случайной структурой связей . . . . .	285
4.2.1. Вывод уравнений для среднего поля. . . . .	285
4.2.2. Анализ среднеполевой модели в термодинамическом пределе. . . . .	290
4.2.3. Влияние эффектов конечного размера. . . . .	296
4.2.4. Медленные флуктуации активности. . . . .	300
4.3. Среднеполевая динамика нейронной сети с кластерной структурой связей . . . . .	304
4.3.1. Вывод среднеполевых уравнений. . . . .	304

4.3.2. Оценка эффектов конечного размера. . . . .	306
4.3.3. Мультистабильность и медленные флуктуации активности в кластерной сети. . . . .	310
4.4. Заключение к четвертой главе . . . . .	320
Заключение	326
Список публикаций по теме диссертации	329

## ВВЕДЕНИЕ

### Актуальность проблемы

Для многих систем самой различной природы характерны автоколебания – устойчивые незатухающие колебания, возникающие за счет действия источника энергии, не обладающего колебательными свойствами. Автоколебательная тематика восходит к работам Мандельштама и Андропова, она красной нитью проходит через всю историю развития радиофизики, которая включает исследование автоколебаний в электронных автогенераторах, мощных генераторах высокочастотных электромагнитных колебаний, источниках лазерного излучения и проч. В результате многолетних исследований была в целом построена теория синхронизации автоколебательных систем, развита теория хаотических автоколебаний, исследованы волны, динамические структуры и пространственно-временной хаос в непрерывных и дискретных колебательных средах.

В последние десятилетия радиофизические подходы и методы все чаще применяются к объектам исследования, которые в том или ином смысле можно охарактеризовать как сложные. Во-первых, отмечается рост внимания к автоколебаниям в системах нефизической природы – химических, биологических, социальных и других. Во-вторых, приобретают популярность исследования коллективных колебаний в сетевых системах, представляющих собой набор большого числа взаимодействующих между собой автоколебательных подсистем. В-третьих, все больший интерес вызывают системы со сложными динамическими свойствами, такими как существенная нелинейность, неоднородность параметров, наличие временного запаздывания и др.

Для многих автоколебательных систем различной природы характерны взаимодействия в форме обмена короткими импульсными сигналами. Примеры систем с импульсными взаимодействиями – лазеры в режиме синхронизации мод [363], ансамбли электронных и химических автогенераторов [154,212], беспроводные сенсорные сети [268], клетки сердечной ткани [218, 278] и др. Важнейшим примером таких систем являются биологические нейронные сети, то есть популяции взаимодействующих нервных клеток. Электрические сигналы, которыми обмениваются нейроны, представляют собой короткие импульсы напряжения длительностью около 1 мс [73]. Динамика систем с импульсными взаимодействиями сочетает черты дискретности и непрерывности: динамика в отсутствие импульсов является непрерывной, тогда как получение импульса приводит к быстрому, в пределах мгновенному изменению состояния системы.

Исследования коллективной динамики сетевых систем с импульсными связями приобрели широкую популярность в первую очередь в контексте изучения нейронных популяций [119,24А,32А]. При этом зачастую исследователи рассматривают достаточно упрощенные модели как узлов сети – нейронов, так и структуры межузловых связей. Подобные сетевые модели не претендуют на полноту описания биологических процессов, происходящих в нейронных популяциях. Однако они воспроизводят важные базовые свойства нейронных сетей, их исследование принципиально важно для понимания базовых механизмов и принципов их функционирования. Также сетевые системы с импульсными связями возникают при исследовании биологических систем другой природы [380], техногенных систем [268] и в других задачах.

Большое число работ посвящено исследованию возникновения в таких

сетях синхронизации – важного явления, при котором локальная динамика узлов сети в результате их взаимодействия становится идентичной или существенно коррелированной [279]. Во многих сетевых системах синхронизация играет важнейшую роль. Например, в кортикальных сетях мозга она лежит в основе его колебательной активности, регистрируемой в виде альфа- и гамма-ритмов ЭЭГ, а также играет важнейшую роль при выполнении мозгом информационных и когнитивных функций, выступая в качестве интегративного механизма, объединяющего широко распределенный набор нейронов в единый согласованный ансамбль для когнитивного акта [322]. С другой стороны, чрезмерная синхронизация может быть вредной для нервной системы (особенно для высших мозговых центров) и привести к патологическим типам активности, таким как эпилепсия [346] или шизофрения [351].

Систематическое исследование динамики сетей с импульсными связями началось с работы Mirollo и Strogatz [239], в которой авторы показали, что в популяции глобально связанных нейронов типа накопление-и-сброс при почти всех начальных условиях за конечное время наступает полная синхронизация, то есть элементы начинают возбуждаться строго одновременно. В дальнейшем исследование синхронизации в сетях импульсных элементов привлекало пристальное внимание многих исследователей. Bottani показал [28], что синхронизация сохраняется при введении в популяцию беспорядка в виде неравных собственных частот элементов. В работе Genster и van Hemmen [120] был рассмотрен на случай, когда воздействие импульса на осциллятор происходит не мгновенно, а в течение конечного времени. Timme с соавторами [345] исследовали синхронизацию в сети со случайными нормализованными связями и показали, что для подавляющих связей синхронный режим всегда

является устойчивым. Если условие нормализации связей нарушается, синхронизация сети может быть только приближенной, причем она наступает только при достаточно сильных связях [26, 130]. Синхронизация в сетях с локальными связями была изучена Hopfield и Herz [151], которые рассмотрели динамику решетки осцилляторов типа накопление-и-сброс, связанных с ближайшими соседями. Было показано, что в течение нескольких периодов в такой сети наступает локальная синхронизация элементов с соседями из некоторой окрестности, после чего происходит процесс установки глобальной синхронизации, который может происходить довольно медленно. В работе [46] было показано, что скорость установления глобальной синхронизации  $r_s$  существенно зависит от параметров связи и локальной динамики, и соответствующим выбором этих параметров ее можно существенно повысить.

Противоположным синхронному является асинхронный режим коллективной динамики сети, характеризующийся отсутствием корреляции между моментами генерации импульсов различными элементами сети. Устойчивость асинхронного режима в сети идентичных осцилляторов с импульсными связями каждый-с-каждым была впервые исследована Abbot и van Vreeswijk [1], и в более общем случае в серии работ Gerstner [118]. В работе [143] была исследована асинхронная активность в сети, состоящей из возбуждающей и подавляющей популяций. Асинхронный режим был изучен и в так называемых «разреженных» сетях, в которых случайным образом удаляется некоторое (небольшое) число межэлементных связей [397]. Важной разновидностью асинхронной динамики является так называемая нерегулярная динамика, при которой временная структура генерируемых элементами сети импульсов нерегулярна и близка к случайной. Экспериментальны иссле-

дования активности нейронов коры головного мозга показали, что для них зачастую характерна сильно нерегулярная динамика, что проявляется в широком распределении межспайковых интервалов отдельных нейронов. Временная структура генерируемых нейронами спайков зачастую напоминает Пуассоновский процесс с небольшим периодом рефрактерности [20,75,87,325]. Нерегулярная спонтанная активность в больших сетях импульсных элементов с редкими связями была впервые получена в серии работ Brunel с соавторами [10,36,37]. Модель Brunel вызвала волну интереса к исследованию самоподдерживающейся асинхронной нерегулярной активности в нейронных сетях. Так, в работе [270] была предложена сеть с самоподдерживающейся активностью, демонстрирующая спонтанно переходы между состояниями с высокой и низкой активностью. В работе [299] показано, что асинхронная самоподдерживающаяся активность возможна даже для сетей с существенной долей общего входного сигнала различных нейронов. Нерегулярная активность с малой степенью синхронизации была обнаружена в крупномасштабных сетях с реалистичной структурой, имитирующей кортикальную микроколону [285].

Заметим однако, что в строгом смысле активность, возникающую в большинстве описанных моделей, нельзя считать самоподдерживающейся, так как необходимым условием для ее поддержания является наличие внешнего возбуждающего воздействия на нейроны. При выключении внешнего воздействия самоподдерживающаяся активность сети продолжается в течение времени порядка нескольких секунд, после чего сеть переходит в состояние покоя [27,364]. Самоподдерживающаяся нерегулярная активность без внешнего воздействия наблюдалась в сети нейронов с редкими связями в случае

логнормального распределения синаптических весов [339]. Динамика становится самоподдерживающейся и в случае равных синаптических весов, если они становятся достаточно сильными [184]. При этом нерегулярная динамика сети качественно изменяется, наблюдается переход к так называемому неоднородному асинхронному режиму [262], когда нейроны приобретают тенденцию к генерации бёрстов, то есть пачек импульсов.

При дестабилизации асинхронной динамики между элементами сети может возникать частичная синхронизация, то есть ненулевая корреляция генерируемых ими сигналов, вследствие чего в системе возникают колебания среднего поля. Возникновение таких колебаний было впервые продемонстрировано van Vreeswijk [357], который показал, что при достаточно быстрых возбуждающих связях асинхронный режим сети теряет устойчивость, и в сети возникают периодические колебания среднего поля. Возникновение частичной синхронизации и колебаний среднего поля было также обнаружено в сетях со случайной структурой связей [130, 368], в том числе в режимах с нерегулярной динамикой элементов [36]. В работе [38] высокочастотные колебания похожей природы были обнаружены в сети с реалистичными синапсами, генерирующими импульсные сигналы конечной длительности формы (см. также [187]). В работах [282, 353] было исследовано возникновение коллективной нерегулярной динамики в модели Brunel с более плотными связями. В этом случае коллективная динамика характеризуется наличием существенных хаотических колебаний среднего поля. Коллективная нерегулярная динамика в смысле выраженных хаотических колебаний среднего поля наблюдалась также и в сетях нейронов со связями каждый-с-каждым [214, 352], однако в этом случае необходимым ингредиентом является наличие неоднородности

параметров элементов. Также нерегулярные колебания с медленными флуктуациями активности могут возникать благодаря сложным структурам синаптических связей, например присутствию кластеров [209, 366]. Сложные паттерны частичной синхронизации, так называемые «химеры», были изучены в группах Provata [169] и Храмова [12].

Таким образом, исследования колебаний в системах с импульсными связями имеют долгую историю и привели к получению серии важных результатов, углубивших понимание таких систем. Однако несмотря на это, в данной области существует и целый ряд важных открытых проблем.

Важной задачей при исследовании систем с импульсными взаимодействиями является разработка простых моделей и способов описания воздействия импульсных сигналов на динамические системы. Для автоколебательных элементов таким универсальным и широко применимым способом описания стали так называемые кривые фазового отклика, или кривые переустановки фазы (phase resetting functions, PRC, [48]). При достаточно слабом воздействии на периодическую автоколебательную систему она не покидает малой окрестности аттрактора, и для ее описания удобно использовать фазовое приближение, идея которого восходит к работам Малкина [401], Winfree [380] и др. В его рамках состояние системы описывается единственной переменной – фазой. Действие импульса на систему при этом описывается скалярной функцией, которая и называется кривой переустановки фазы и определяет мгновенное изменение фазы при получении импульса. Подход на основе кривой переустановки фазы позволяет описывать широкий класс осцилляторов с импульсными взаимодействиями. Однако при сильных воздействиях система может удаляться от предельного цикла, и описание на основе кри-

вой переустановки фазы становится неадекватным, так как отклик системы на импульсное воздействие уже не определяется однозначно его текущей фазой, а зависит также от степени удаленности системы от предельного цикла [52, 141, 372, 377]. Исследование отклика автоколебательной системы на сильные импульсные вне пределов применимости подхода на основе кривой переустановки фазы является таким образом важной открытой задачей.

Еще более сильные воздействия могут привести к выходу системы из бассейна притяжения аттрактора и переключению на другой режим. Исследование возможности таких переключений предполагает изучение размера и формы бассейна притяжения аттрактора в фазовом пространстве системы. Для динамических систем с высокой размерностью фазового пространства не только вычисление, но даже описание бассейнов притяжения может быть нетривиальной задачей вследствие их сложной структуры. В этой связи актуальной становится разработка численных мер устойчивости динамических систем к сильным внешним воздействиям. Данной проблеме посвящена серия работ группы Kurths [236, 237, 240], в которой было введено понятие так называемой бассейновой устойчивости. Это количественная мера, равная относительному объему бассейна притяжения в некоторой наперед заданной области фазового пространства. Однако одна лишь величина бассейновой устойчивости недостаточна для полного описания устойчивости динамических систем к сильным внешним воздействиям, и необходимо разрабатывать другие способы ее описания. Таким образом, исследование отклика автоколебательной системы на сильные импульсные воздействия и разработка соответствующих численных мер является важной открытой задачей.

Часто встречающимся свойством многих физических систем является на-

личие в них временного запаздывания, связанного с конечной скоростью распространения сигналов. Известно, что запаздывание оказывает существенное влияние на коллективную динамику сетей, и в частности на процессы синхронизации. Известно, что запаздывание в межэлементных связях оказывает существенное влияние на коллективную динамику сетей, и в частности на процессы синхронизации [4A]. Впервые влияние запаздывания на синхронизацию двух автоколебательных систем было исследовано в работе Schuster и Wagner [314]. Позднее Strogatz с соавторами была изучена синхронизация в больших сетях с запаздывающими связями [88, 389], было показано существование зон синхронизации в пространстве параметров, отмечена периодичность структуры этих зон по отношению к величине запаздывания. Рыскин с соавторами исследовал влияние запаздывания на синхронизацию гиротронов [354, 398, 399]. Yanchuk с соавторами развили теорию динамических систем с большими временами запаздывания [207, 321, 385]. Системы с временным запаздыванием активно исследовались в группе Безручко применительно к реконструкции динамических систем по временным реализациям [22, 283, 290, 291, 335, 336], а также С.П. Кузнецовым как примеры систем с гиперболическим хаосом [400]. Системы с запаздывающими импульсными взаимодействиями исследовались, среди прочих, Григорьевой и Кащенко при моделировании лазерных систем [136–138], Ernst с соавторами в контексте нейронных популяций [98, 99], а Ванагом – в контексте химических систем [360]. Заметим однако, что исследование влияния запаздывания на динамику и в частности синхронизацию систем с импульсными связями проводилось в ограниченном объеме. Полная картина возникновения и разрушения синхронных режимов в таких сетях к настоящему моменту отсутствует.

Также важным направлением исследования коллективной динамики сетей с импульсными связями является построение редуцированных низкоразмерных моделей, описывающих динамику сетей с большим числом элементов. Динамика сложных сетей, состоящих из большого числа взаимодействующих элементов, описывается высокоразмерными системами дифференциальных уравнений, исследование которых зачастую затруднительно как численными, так и аналитическими методами. Особенно остро эта проблема стоит в задачах моделирования динамики нейронных популяций, размер которых может достигать миллионов и миллиардов. В связи с этими трудностями актуальность приобретают методы редукции коллективной динамики к низкоразмерным динамическим системам для усредненных переменных. Такие редуцированные системы могут описывать динамику однородных популяций мезомасштаба, а макромасштабные неоднородные сети могут моделироваться как системы взаимодействующих популяций мезоуровня. Широко используемые модели для мезоскопических нейронных популяций типа модели Вилсона-Кована основаны на эвристических (качественных) уравнениях для активности популяции [378, 379]. Однако в последнее время стал развиваться подход, основанный на выводе редуцированных моделей из уравнений для микроскопической динамики сетей нейронов с импульсными связями.

Один из подходов, позволяющий получить редуцированные системы для больших популяций нейронов с импульсными связями, основан на так называемом методе рефрактерной плотности (refractory density method, RDM). С его помощью были получены редуцированные модели для систем различного вида, например для сети элементов типа накопление-и-сброс обобщенного вида со стохастическим механизмом генерации импульсов [249]. Для сети ре-

алистичных нейронов под внешним шумовым воздействием данный метод был применен Чижовым и Graham [59, 60], а также Чижовым в случае неоднородного детерминированного внешнего воздействия, распределенного по логнормальному закону [58]. Другой подход вывода приближенных редуцированных систем основан на так называемой динамической среднеполевой теории (dynamic mean-field theory, DMFT [39, 89]. Например, для сети нейронов типа накопление-и-сброс, состоящей из возбуждающей и подавляющей популяций, применение динамической среднеполевой теории позволило показать возникновение асинхронных нерегулярных флуктуаций активности при достаточно сильных синапсах [144]. Данный подход применим и к достаточно реалистичным сетевым моделям, например к нейронным сетям с нелинейными синапсами и учетом адаптации частоты [82]. Важным этапом в разработке редуцированных систем стала адаптация для импульсных сетей метода Отта-Антонсена [263, 264], разработанного ранее для популяций с непрерывными связями. В рамках этого метода в работе Montbrió, Pazó и Roxin [242] была получена редуцированная низкоразмерная система, описывающая среднеполевую динамику большой сети нейронов с импульсными связями каждый-с-каждым. В работе [298] модель была обобщена на случай конечной длительности импульсов. Еще один метод редукции, метод так называемых круговых кумулянтов Голдобина и соавторов [129], позволяет описывать системы с шумом. Данный метод также может быть применен к сети с импульсными связями [297].

Отметим однако, что все описанные методы редукции применимы к сетям либо с редкими случайными связями, либо со связями каждый-с-каждым. Структура реалистичных нейронных сетей существенно отличается от обоих

этих случаях и представляет собой скелет из кластеров с плотными связями в «море» нейронов с редкими связями [326]. Известно, что наличие таких кластеров может оказывать кардинальное влияние на коллективную динамику, например, приводить к медленным флуктуациям локальной активности [209]. Разработка редуцированных систем для сетей с подобными структурами связей является важной открытой проблемой.

Таким образом, в области исследования сетевых систем с импульсными связями остаются открытыми и ожидают решения следующие задачи:

- разработка новых методов описания отклика динамических систем на сильные импульсные воздействия
- исследование влияния временного запаздывания на коллективную динамику и, в частности, синхронизацию сетевых систем с импульсными взаимодействиями
- разработка и исследование редуцированных динамических систем для описания коллективной динамики нейронных сетей со сложной реалистичной топологией связей

## **Цели и задачи исследования**

Основными целями настоящего исследования являются:

разработка новых аналитических и численных методов описания автоколебательных систем с импульсными сигналами, в том числе сетевых, а также исследование с помощью разработанных методов коллективной динамики сетей автогенераторов с импульсными связями с учетом таких факторов, как наличие временного запаздывания и сложной топологии связей.

Для достижения поставленных целей были сформулированы следующие

основные задачи исследования:

1. Развитие новых методов описания воздействия импульсных сигналов на автоколебательные системы, позволяющих определять отклик системы при больших амплитудах импульсов и применимых как в случае, когда после воздействия система остается в бассейне притяжения исходного аттрактора, так и в случае, когда после воздействия происходит переключение системы на новый аттрактор.

2. Разработка численных и аналитических методов исследования динамики автоколебательных сетей с импульсными запаздывающими связями.

3. Исследование влияния временного запаздывания на коллективную динамику автоколебательных сетей с импульсными связями, в частности на процессы синхронизации в таких сетях. Определение условий существования, сценариев возникновения и характеристик различных режимов коллективной динамики, в том числе при большом запаздывании.

4. Разработка и исследование редуцированных моделей для описания коллективной динамики нейронных сетей с реалистичными кластерными структурами связей. Получение условий существования многоуровневой активности в таких сетях, а также исследование переключений между уровнями.

### **Объект исследования**

Основным объектом исследования в работе являются сложные автоколебательные системы, в том числе сетевые, взаимодействия в которых имеют форму обмена короткими импульсами.

## Научная ценность и новизна результатов

В работе развиты новые оригинальные методы описания воздействия импульсных сигналов на автоколебательные системы, а именно метод функции переустановки фазы и метод порога устойчивости. Данные методы позволяют описывать воздействие сильных сигналов за пределами линейного приближения на произвольные динамические системы. Также разработаны новые методы численного и аналитического исследования сетевых систем с импульсными запаздывающими связями на основе редукции динамики таких систем к многомерным точечным отображениям.

Обнаружены и изучены новые динамические режимы автоколебательных систем с запаздывающими импульсными взаимодействиями, в том числе сложные длиннопериодические, квазипериодические и хаотические колебания, характеризующиеся высокой степенью мультистабильности. Получены условия возникновения этих режимов, описаны новые, ранее неизвестные динамические механизмы их формирования. Изучены общие сценарии и механизмы переходов между синхронными и асинхронными режимами в автоколебательных сетях с импульсными связями.

Разработаны новые методы редукции динамики нейронных сетей к низкоразмерным динамическим системам для усредненных переменных. С помощью полученных моделей исследована коллективная динамика однородных и кластерных сетей, в том числе мультистабильные режимы многоуровневой активности и режимы переключений между уровнями.

Все полученные в диссертационной работе результаты обладают научной ценностью и новизной, что подтверждается публикациями в высокорейтин-

говых международных научных журналах и выступлениями на профильных международных конференциях.

### **Достоверность результатов**

Все полученные результаты обладают высокой степенью достоверности и являются обоснованными. Достоверность получаемых результатов обеспечивается хорошим качественным и количественным совпадением результатов, полученных аналитически, с результатами численного счета и результатами физических экспериментов. Результаты диссертации опубликованы в рецензируемых российских и зарубежных научных журналах, докладывались на международных и всероссийских конференциях, обсуждались на семинарах ИПФ РАН, Технического Университета Берлина (Германия), Университета Физики Белграда (Сербия), Университета Астона (Великобритания).

### **Научная и практическая значимость работы**

Полученные в диссертации результаты представляют интерес с точки зрения фундаментальной науки как развивающие теорию автоколебательных динамических систем и динамических сетей. Кроме того, развитые в работе подходы и полученные результаты могут иметь практическое значение для задач, связанных с динамикой нейронных популяций, геофизических систем, искусственных систем обработки информации и техногенных систем: понимание принципов обработки информации в сетях головного мозга, синхронизации и предотвращения аварий в энергосетях, изучение устойчивости макроклиматических систем и проч.

## **Личный вклад автора**

Все изложенные в диссертационной работе оригинальные результаты получены автором лично, либо при его непосредственном участии. В совместных работах автор принимал непосредственное участие в выборе направлений исследований и постановке основных задач, проведении исследований и обсуждении результатов.

## **Апробация результатов**

Результаты выполненных исследований обсуждались на научных семинарах в Институте прикладной физики РАН, в Техническом Университете Берлина (Германия), в Институте Вейерштрасса по прикладному анализу и стохастике (Берлин, Германия), в Институте Мозга RIKEN (Токио, Япония), в Университете Физики Белграда (Сербия), в Университете Астона (Бирмингем, Великобритания). Они докладывались на Международных и Всероссийских конференциях, в том числе на Международной конференции “Dynamics Days Europe” (2013, 2014, 2016, 2017, 2018), Международном симпозиуме “Topical problems of nonlinear wave physics” (NWP 2014, 2017, 2020), Международной конференции - научной школе «Нелинейные волны» (2010, 2016, 2020), Международном семинаре IEEE “Nonlinear Dynamics of Electronic Systems” (NDES 2010), Международном симпозиуме “Nonlinear Theory and its Applications” (NOLTA 2012, 2014), Международной научной конференции “Physics and Control” (PhysCon - 2011, 2019), Международной школе «Хаотические автоколебания и образование структур» (2010, 2016), Международной конференции Society for Neuroscience (2013), Международной конференции

«Динамика, бифуркации и странные аттракторы» (2018), Международном семинаре “IFAC Workshop On Time Delay Systems” (2018), Международном симпозиуме “Frontiers of Nonlinear Physics” (2013).

### **Объем и структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 381 страницу, включая 80 рисунков. Список литературы содержит 401 наименование.

### **Положения выносимые на защиту**

1. Разработанная функция переустановки фазы описывает сдвиг фазы регулярной автоколебательной системы под действием серии сильных и частых импульсов в зависимости от фаз их воздействия даже при значительном удалении системы от предельного цикла.

2. Предложенные численные характеристики порог устойчивости и порог переключения описывают переключения мультистабильных динамических систем между различными аттракторами под действием сильных импульсных сигналов.

3. В автоколебательных системах с импульсной запаздывающей обратной связью при большом запаздывании колебания с периодом, близким к собственному, могут терять устойчивость и порождать сложные длиннопериодические, квазипериодические и хаотические колебания. Для возникающих режимов характерная высокая мультистабильность, причем число сосуществующих режимов возрастает экспоненциально с ростом величины задерж-

ки.

4. Автогенераторы с импульсными запаздывающими связями могут демонстрировать фазовую синхронизацию и кросс-частотную синхронизацию при величине запаздывания, существенно превышающей период их колебаний.

5. В больших сетях автоколебательных элементов с глобальными импульсными запаздывающими связями синхронизация сети возможна при величинах задержки, существенно превышающей период автоколебаний. Дестабилизация синхронного режима происходит через механизм проскальзывания фазы.

6. В неоднородных популяциях автоколебательных и возбудимых элементов переход от стационарного к колебательному режиму при изменении параметров системы может иметь гистерезисный характер.

7. Разработанные редуцированные среднеполевые модели на основе Гауссова приближения адекватно описывают коллективную динамику сетей нейронов с кластерной структурой связей.

8. В сетях нейронов с кластерной структурой связей существуют режимы многоуровневой активности. В термодинамическом пределе различные уровни являются устойчивыми, а в случае конечного размера сети могут становиться метастабильными и порождать стохастические переключения между уровнями.

# ГЛАВА 1

## НОВЫЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ СИЛЬНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Настоящая глава посвящена исследованию отклика динамических систем при воздействии на них сильных импульсных сигналов. Рассмотрены два случая: 1) случай, когда действие импульса возмущает систему, но не приводит к ее переключению на другой аттрактор; 2) случай переключения мультистабильной системы на другой аттрактор под действием импульса.

Многие физические, химические, биологические и другие системы демонстрируют периодическое поведение. С точки зрения нелинейной динамики в фазовом пространстве такой системы присутствует устойчивый предельный цикл. Состояние системы на цикле может быть естественно определено его фазой [380], то есть единственной переменной, указывающей положение системы на предельном цикле. Концепция фазы является исключительно полезной для изучения стимулируемых и связанных осцилляторов [279, 380], так как фазу системы можно определить не только на самом цикле, но и в ее окрестности. Тогда при слабом внешнем воздействии осциллятор остается вблизи предельного цикла, и оказывается возможным получить замкнутое уравнение для динамики его фазы. Она определяется так называемой функцией фазовой восприимчивости  $Z(\varphi)$ , называемой также бесконечно малой кривой переустановки фазы (infinitesimal phase response curve, iPRC) [115]. Данная функция описывает сдвиг фазы системы под одиночным импульсным воздействием бесконечно малой амплитуды  $\epsilon \ll 1$ , который равен

$\Delta\varphi = \epsilon Z(\varphi)$ . Для более сильного импульсного воздействия  $\epsilon \sim 1$  линейная зависимость фазового сдвига от амплитуды может нарушаться, однако можно ввести нелинейную функцию переустановки фазы (PRC) как величину сдвига фазы под действием импульса  $Z_\epsilon(\varphi) = \Delta\varphi$  при условии, что во время прихода импульса система находится на предельном цикле. В этом случае фазовый сдвиг по-прежнему однозначно определяется фазой во время прихода импульса. Кривую переустановки фазы можно рассчитать численно или экспериментально для колебательных систем любой природы [313]. Эти свойства сделали ее полезным инструментом для исследования автоколебательных систем под внешним воздействием или связанных друг с другом [35, 48, 54, 94]. Особенно эффективен подход на основе кривых переустановки фазы в нейробиологии, где взаимодействия между нейронами происходят посредством обмена импульсами.

Рассмотрим теперь воздействие на автоколебательную систему внешнего сигнала в виде последовательности импульсов. Если моменты поступления импульсов разделены достаточно длинными временными интервалами, переходный процесс, вызванный каждым импульсом, исчезает до того, как приходит следующий. С теоретической точки зрения это означает, что система возвращается в малую окрестность предельного цикла до того, как поступит следующий импульс, см. Рис. 1.1(а). В этом случае влияние каждого импульса можно описать кривой переустановки фазы  $Z(\varphi)$ . Если же воздействие является частым или даже непрерывным, но слабым система всегда остается близкой к предельному циклу, и фазовая динамика может быть описана с помощью бесконечно малой кривой фазового отклика (Рис. 1.1(б)).

Таким образом, подход, основанный на кривой переустановки фазы, при-

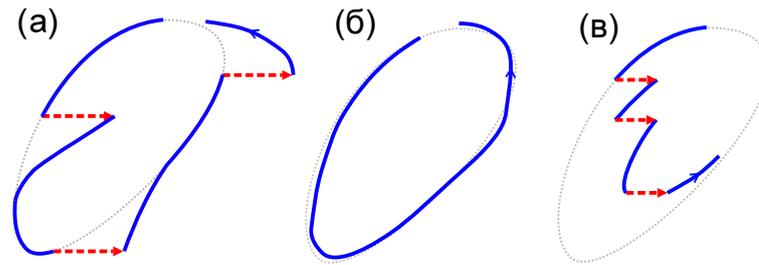


Рис. 1.1. Автоколебательная система под внешним воздействием: (а) сильные редкие импульсы. (б) слабое непрерывное воздействие, (в) сильные частые импульсы.

меним либо для слабой, либо для редкой стимуляции. Однако во многих реальных ситуациях стимулы могут быть сильными и частыми. В этом случае система, удаленная от предельного цикла одним импульсом, не возвращается к нему до прихода следующего следующим прибытие (Рис. 1.1(в)). В такой ситуации обычная кривая переустановки фазы не описать фазовую динамику системы, и следует использовать другой подход.

Необходимость преодоления ограничений стандартной кривой переустановки фазы была осознана довольно давно, и предпринимались попытки предложить обобщения. Так, в [3, 49, 260] была введена феноменологическая кривая переустановки фазы второго порядка, которая характеризует влияние импульса на следующий цикл после цикла, содержащего возмущение. В [52, 141] авторы ввели «поверхности переустановки фазы» и «функции амплитудно-фазового отклика», чтобы описать отклик системы в зависимости от фазы и расстояния до цикла. Авторами был разработан численный алгоритм для вычисления амплитудно-фазовых функций отклика, который представляет собой расширение сопряженного метода для кривой переустановки фазы [96]. Несколько похожий, но отличный подход был использован

в [372], где авторы использовали преобразование в движущуюся ортонормированную систему координат вокруг предельного цикла. В [377] авторы вводят так называемые изостабильные координаты, которые измеряют расстояние от предельного цикла, и соответствующие «изостабильные кривые отклика», чтобы описать их динамику.

В разделе 1.1 настоящей главы предложен новый подход для расчета фазового отклика автоколебательной системы на серию импульсов, применимый в случае, когда импульсы являются частыми и сильными. Соответствующая функция, определяющая величин фазового сдвига, названа «функцией фазового отклика». В отличие от предыдущих работ, представляемый подход не ограничен количеством значимых импульсов или размерностью системы. Другая важной особенностью является то, что функция фазового отклика использует напрямую расстояния от предельного цикла, но только значения фазы системы в моменты прихода импульсов, что повышает практическую применимость предлагаемого подхода, так как в отличие от расстояния, фазу можно легко рассчитать численно или даже измерить экспериментально [279, 380]. Следствием этого является возможность вычисления или измерения функции фазового отклика для автоколебательных систем произвольной природы.

Заметим, что выше мы предполагали, что в динамической системе присутствует единственный аттрактор, или же внешнее воздействие не выводит систему из бассейна притяжения одного аттрактора. Однако в природе часто встречаются и мультистабильные динамические системы, то есть такие, в фазовом пространстве которых присутствует более одного аттрактора. Мультистабильность – это свойство, которое часто можно увидеть во многих ре-

альных системах различной природы. Мультистабильная система характеризуется возможностью различных устойчивых режимов поведения для одних и тех же параметров в зависимости от начальных условий, то есть начального состояния системы. Примеры мультистабильных систем можно найти в различных областях, от электроники до нейробиологии. Одним из старейших известных примеров многостабильной системы является электронный триодный генератор с гистерезисом [355], который может генерировать колебания с различными амплитудами. Другой важный пример – память людей и животных. Общепринятая теория предполагает, что объекты, хранящиеся в памяти, представлены как несколько стабильных состояний нейронной активности. В этом контексте вызов определенного объекта означает перевод нейронной сети в соответствующее стабильное состояние [150]. Мультистабильность также может играть важную роль в гидродинамике [244], оптике и лазерной физике [16, 230, 324], химии [71, 134], биологии и нейробиологии [13, 74, 171, 331]. При достаточно сильном внешнем воздействии на мультистабильную систему может произойти ее переключение с одного аттрактора на другой. Исследование устойчивости динамических систем к сильным внешним воздействиям является важной задачей, принципиально неразрешимой в рамках линейной теории возмущений.

Традиционно, анализ сложных динамических систем в значительной степени основан на линейной устойчивости малых возмущений. Разработка аппарата теории линейной устойчивости восходит к работам Ляпунова [220], сравнительно недавно он был расширен на динамические сети, что привело к появлению эффективного формализма функции мастер-устойчивости [274]. Однако линейная теория принципиально неприменима к исследованию силь-

ных возмущений, которые часто встречаются во многих реальных системах. Типичным примером являются климатологические системы, в частности океанические течения. Так, общепризнанно, что Атлантическая меридиональная циркуляция (Atlantic Meridional Overturning Circulation, АМОС) может быть чувствительной к изменениям баланса пресной воды северной части Северной Атлантики. Когда в субполярной Северной Атлантике вводится аномальный приток пресной воды, эта циркуляция разрушается во многих моделях океан-климат [83]. Другим примером являются энергосети, которые являются сетями подключенных генераторов и потребителей электроэнергии. Для правильной работы таких сетей необходима синхронизация между всеми узлами. Локальные сбои, перегрузки или разрывы строк могут вызвать десинхронизацию узлов и привести к масштабным отключениям [224].

Изучение устойчивости системы к большим возмущениям предполагает рассмотрение следующей сложной задачи: определение класса «безопасных» или допустимых возмущений, после которых система возвращается к исходному режиму. Напротив, «небезопасные» возмущения переключают систему на другой, часто нежелательный, динамический режим. Определение класса безопасных возмущений нелинейной системы очень сложно и принципиально отличается от анализа линейной устойчивости. Причина в том, что для больших возмущений линеаризация неадекватна, а возмущенная динамика определяется нелинейными уравнениями, аналитическое исследование которых вообще невозможно. Существуют некоторые аналитические методы, например, метод функций Ляпунова [204]. Однако этот метод имеет серьезные ограничения, поскольку функция Ляпунова для конкретной динамической системы часто не может быть сконструирована. «Безопасный» класс возмущений

также может быть аналитически оценен для некоторых конкретных систем, например сети спайковых нейронов [160, 235]. Тем не менее, важной задачей является разработка численных методов определения и описания класса безопасных возмущений [375].

С точки зрения нелинейной динамики, установленные динамические режимы системы соответствуют аттракторам в фазовом пространстве. Класс безопасных возмущений соответствует бассейну аттрактора, т.е. множеству точек в фазовом пространстве, сходящихся к аттрактору. Возмущение безопасно, если оно приводит систему к точке в бассейне притяжения. Первая попытка охарактеризовать бассейны притяжения в сложных сетях была предпринята в работе [236], где была введена концепция бассейновой устойчивости. Бассейновая устойчивость равна

$$S_B = \int_Q \chi(x) \rho(x) dx, \quad (1.1)$$

где  $Q$  – множество возможных возмущенных состояний  $x$ ,  $\rho(x)$  – плотность возмущенных состояний, удовлетворяющая условию нормировки  $\int_Q \rho(x) dx = 1$ , а  $\chi(x)$  равна единице, если точка  $x$  сходится к аттрактору и равна нулю в противном случае. Значение  $S_B \in (0; 1]$  выражает вероятность того, что возмущенная система вернется к аттрактору. Важным преимуществом этой меры является то, что она может быть легко вычислена методом Монте-Карло, а именно путем выбора большого количества случайных точек в фазовом пространстве и проверки того, сколько из них сходится к аттрактору. Если сходятся  $M$  из  $N \gg 1$  точек,  $S_B \approx M/N$ .

Бассейновая устойчивость является важной характеристикой, расширяющей понятие линейной устойчивости в случае сильных возмущений. Однако

многие реальные динамические системы, особенно сложные сети, обладают многомерным фазовым пространством со сложной структурой. Это делает проблематичным характеризовать бассейн притяжения только одним скалярным значением. Кроме того, устойчивость бассейна зависит от класса возмущений  $Q$ , который должен быть выбран априори.

Во разделе 1.2 предлагается новая мера для характеристики устойчивости динамических систем к большим возмущениям, а именно **порог устойчивости** (ПУ). Важность данной меры определяется тем наблюдением, что для реальных систем часто важно знать максимальную величину возмущения, которую система может выдержать, например, максимальный скачок напряжения для стабилизатора или максимальную энергию пули для бронежилета. Именно на подобный вопрос отвечает значение порога устойчивости. Порог устойчивости представляет собой амплитуду минимального возмущения, способного вывести систему из бассейна притяжения аттрактора. Предложенный в работе численный алгоритм позволяет рассчитать величину порога устойчивости для широкого класса динамических систем.

Разделы 1.3 и 1.4 посвящены обобщениям понятия порога устойчивости. Первое обобщение отражает тот факт, что при классификации возмущений системы на практике зачастую к безопасным возмущениям следует относить лишь те, после которых система возвращается к исходному режиму за достаточно короткое время. Множество таких возмущений не совпадает с бассейном притяжения аттрактора, но является его подмножеством. Для описания данного множества введено понятие интервальной устойчивости, которая обозначает возвращение возмущенной траектории системы в заданную окрестность аттрактора не позднее, чем за заданный интервал времени. Во-

дятся такие понятия, как *интервальная бассейновая устойчивость* и *интервальный порог устойчивости*. Описаны численные алгоритмы для их вычисления и продемонстрирована связь данных характеристик со стандартными бассейновой устойчивостью и порогом устойчивости.

Второе обобщение применимо к задачам, в которых исследователя интересует не один, а несколько аттракторов мультистабильной системы и ее переключения между ними. Для характеристики способности системы переключаться между различными аттракторами по действием внешних стимулов введено понятие *порога переключения* – это амплитуда минимального возмущения, способного переключить систему с одного заданного аттрактора на другой. Величины порогов переключения между различными аттракторами формируют матрицу переключений, знание которой позволяет предсказывать и контролировать переключательную динамику системы.

Материалы первой главы опубликованы в работах [15А,17А,19А,23А,31А].

## 1.1. Функция фазового отклика для описания фазовой динамики автогенераторов под действием сильных и частых импульсов

В данном разделе описывается новый подход для расчета фазового отклика автоколебательной системы на серию импульсов, применимый в случае, когда импульсы являются частыми и сильными. В этом случае знание фазы, в которую поступает импульс, не позволяет рассчитать фазовый сдвиг, который он вызывает, так что стандартная кривая переустановки фазы неприменима. Тем не менее что фазовый сдвиг все еще можно рассчитать, используя фазы прихода не одного, а *несколько* последних импульсов. Соответствующая функция названа «функцией фазового отклика».

**1.1.1. Фазовая динамика автоколебательной системы** Начнем с определения фазы произвольной автоколебательной динамической системы. Рассмотрим  $M$ -мерную ( $M \geq 2$ ) систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^M, \quad (1.2)$$

имеющую устойчивое решение  $x(t) = \gamma(t)$  с периодом  $T$ , соответствующее предельному циклу  $L$ . Определим фазу  $\varphi$  системы (1.2) на предельном цикле следующим образом. Зададим некоторую точку  $x_0 \in L$ , в которой фаза равна нулю. Это может быть либо произвольная точка, либо значимая для конкретной задачи. Переопределим решение  $\gamma(t)$  так что  $\gamma(0) = x_0$ . Положим фазу в данной точке равной нулю:  $\varphi(O) = 0$ . Тогда для произвольной точки  $x = \gamma(t)$  предельного цикла фаза определяется как

$$\varphi(\gamma(t)) = \frac{t}{T} \pmod{1} \quad (1.3)$$

Легко показать, что определенная таким образом фаза растет равномерно:  $d\theta/dt = 1/T = \omega$ . Доопределим фазу во всем бассейне притяжения предельного цикла так, чтобы она удовлетворяла следующим требованиям: а) быть непрерывной функцией в фазовом пространстве  $\varphi(x)$  и б) расти равномерно со скоростью  $d\varphi/dt = \omega$ . Для определения фазы определим стробоскопическое отображение

$$x(t) \mapsto x(t+T) = \Phi(x). \quad (1.4)$$

Тогда каждая точка на предельном цикле является неподвижной точкой данного отображения, а все точки из бассейна притяжения цикла притягиваются к одной из его точек. Легко показать, что фаза инвариантна относительно  $\Phi(x)$ , поэтому фазу произвольной точки  $x$  вне предельного цикла можно определить как фазу точки  $x^*$  на предельном цикле, к которой данная точка  $x$  притягивается стробоскопическим отображением.

Теперь рассмотрим «возмущенную» систему (1.2) под слабым внешним воздействием

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \epsilon G(x, t), \quad (1.5)$$

где  $\epsilon \ll 1$ . Определим динамику фазы такой системы. Ранее мы определили «невозмущенную» фазу  $\varphi(x)$ , откуда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} f_k(x) + \epsilon \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} G_k(x, t) \quad (1.6)$$

В (1.6) первая сумма определяет динамику фазы в автономной системе и равна  $\omega$ . Во второй сумме, из-за малости  $\epsilon$  отклонения решения от предельного цикла малы, поэтому  $x(t) = \gamma(t) + O(\epsilon)$ , откуда получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \epsilon \sum_k \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} G_k(\gamma(t), t) + O(\epsilon^2). \quad (1.7)$$

Так как решение  $\gamma(t)$  на предельном цикле однозначно зависит от фазы, то есть  $\gamma(t) = \gamma(\theta)$ , с точностью до  $\epsilon^2$  можно записать

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \epsilon Q(\varphi, t), \quad (1.8)$$

где

$$Q(\varphi, t) = \sum_k \frac{\partial \varphi(\gamma(\varphi))}{\partial x_k} G_k(\gamma(\varphi), t)$$

является 1-периодической функцией фазы  $\varphi$ . Если внешнее воздействие имеет вид  $G(x, t) = g(x)p(t)$ , то  $Q(\varphi, t) = Z(\varphi)p(t)$ , где

$$Z(\varphi) = \sum_k \frac{\partial \varphi(\gamma(\varphi))}{\partial x_k} g_k(\gamma(\varphi)). \quad (1.9)$$

Функция  $Z(\theta)$  называется функцией фазовой восприимчивости, или бесконечно малой кривой переустановки фазы (infinitesimal phase response curve, iPRC) [115]. Данная функция описывает сдвиг фазы системы под одиночным импульсным воздействием  $p(t) = \delta(t)$ . Заметим, что iPRC определена только для слабого воздействия  $\epsilon \ll 1$ , при этом сдвиг фазы системы пропорционален амплитуде импульса  $\epsilon$ . Для более сильного импульсного воздействия  $\epsilon \sim 1$  линейность может нарушаться, однако можно ввести нелинейную функцию переустановки фазы (PRC) как величину сдвига фазы под действием

импульса  $p(t) = \delta(t)$  при условии, что перед воздействием система находится на предельном цикле и имеет фазу  $\varphi(-0) = \varphi$ :

$$Z_\epsilon(\varphi) = \varphi(+0) - \varphi(-0). \quad (1.10)$$

В этом случае фазовый сдвиг по прежнему однозначно определяется фазой во время прихода импульса.

**1.1.2. Определение функции фазового отклика** Рассмотрим теперь воздействие на систему (1.2) внешнего сигнала в виде последовательности импульсов:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \sum_p \epsilon_k \delta(t - t_p). \quad (1.11)$$

Если моменты поступления импульсов разделены достаточно длинными временными интервалами, переходный процесс, вызванный каждым импульсом, исчезает до того, как приходит следующий. С теоретической точки зрения это означает, что система возвращается в малую окрестность предельного цикла до того, как поступит следующий импульс. В этом случае влияние каждого импульса можно описать кривой переустановки фазы  $Z(\varphi)$ . Если же воздействие является частым или даже непрерывным, но слабым система всегда остается близкой к предельному циклу, и фазовая динамика может быть описана уравнением (1.8) с помощью бесконечно малой кривой фазового отклика.

Таким образом, подход, основанный на кривой переустановки фазы, применим либо для слабой, либо для редкой стимуляции. Однако во многих реальных ситуациях стимулы могут быть сильными и частыми. В этом случае

система, удаленная от предельного цикла одним импульсом, не возвращается к нему до прихода следующего следующим прибытие. В такой ситуации обычная кривая переустановки фазы не может описать фазовую динамику системы, и следует использовать другой подход.

Заметим, что при описании фазовой динамики автоколебательной системы под действием последовательности импульсов (1.11) с помощью классической кривой переустановки фаза растет равномерно со скоростью  $d\varphi/dt = \omega$  кроме моментов прихода импульсов  $t_p$ . В эти моменты фаза изменяется. так что

$$\varphi_p^+ = \varphi_p^- + Z(\varphi_p^-), \quad (1.12)$$

где  $Z(\varphi)$  – кривая переустановки фазы, а  $\varphi_p^-$   $\varphi_p^+$  – значения фаз до и после прихода импульса. Подход на основе кривой переустановки фазы существенно упрощает исследование исходной системы, так как фазовая модель является одномерной, а эффекты воздействия импульсов учитываются в дискретные моменты времени  $t_p$ . Подход на основе кривой переустановки фазы применим при редкой и/или слабой стимуляции. Ниже будет показано, что для сильной и частой стимуляции фазовый сдвиг, вызываемый каждым импульсом, может быть с хорошей точностью определен как

$$\varphi_p^+ = \varphi_p^- + Z_n(\varphi_{p-n+1}^-, \dots, \varphi_p^-). \quad (1.13)$$

Здесь  $Z_n : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  – функция фазового отклика,  $\varphi_p^+$  – фаза после действия импульса в момент времени  $t_j$ , а  $\varphi_k^-$ ,  $k \leq p$  – фаза перед приходом  $k$ -го импульса в момент  $t_k$ . Таким образом, фазовый сдвиг определяется величиной не только текущей фазы, но фаз прихода последних  $n$  импульсов. Это эквивалентно возникновению у системы динамической памяти, так как эффект

последнего импульса зависит от истории воздействия предыдущих импульсов. Число  $n$  значимых импульсов зависит от силы и частоты их прихода. При слабой и редкой стимуляции  $n = 1$ , и функция фазового отклика переходит в стандартную кривую переустановки фазы. Таким образом, кривая переустановки фазы является частным случаем более общей функции фазового отклика.

Также как и кривая переустановки фазы, функция фазового отклика любого порядка  $n$  может быть получена численно или экспериментально для автоколебательной системы любой природы. Прямой метод получения функции фазового отклика  $Z_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  заключается в последовательной стимуляции системы в фазах  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  и измерении фазового сдвига под действием последнего импульса. Подчеркнем, что стимуляция должна производиться в определенных *фазах*, а не в определенные моменты времени.

Таким образом, функция фазового отклика может быть напрямую вычислена для последовательности импульсов произвольной длины. Однако ниже будет показано, что зачастую лишь несколько последних импульсов в этой последовательности являются значимыми. Для качественного объяснения данного факта вспомним, что динамика системы может быть разделена на динамику фазовой и «амплитудных» переменных, задающих расстояние до предельного цикла. Если динамика фазы является нейтрально устойчивой, то динамика амплитуд в бассейне притяжения предельного цикла обладает характеристиками сжатия во всех направлениях. Таким образом система со временем «забывает» об амплитудных переменных, тогда как сдвиги фаз под действием импульсов накапливаются. Другими словами, все траектории системы, стимулируемые в одних и тех же фазах, асимптотически прибли-

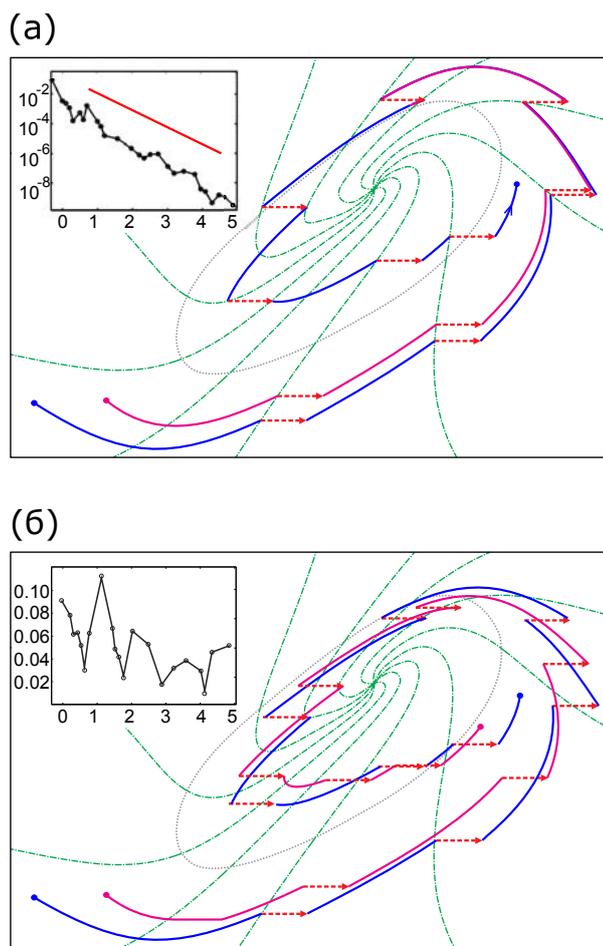


Рис. 1.2. (а) Динамика системы ФитцХью-Нагумо, получающей импульсы в фиксированных фазах. Серая линия обозначает предельный цикл, зеленые штрих-пунктирные линии – изохроны (линии постоянной фазы). Две траектории с различными начальными условиями изображены синей и фиолетовой линиями, красные пунктирные линии изображают действие внешних импульсов. Вставка: динамика разности фаз между траекториями в зависимости от текущей фазы. Красная линия изображает наклон  $\delta\varphi \sim \mu^\varphi$ . (б) То же для стимуляции импульсами в фиксированные моменты времени (первая система получает импульсы в те же моменты времени, как и в первом случае).

жаются друг к другу, см. Рис. 1.2(а).

Заметим, что орбиты сходятся только в том случае, если они стимулируются в одних и тех же фазах, но не в одинаковые моменты времени. Последний протокол стимуляции связан с проблемой синхронизации генераторов по общему входу. Действительно, если две траектории, стимулируемые в одни и то же моменты времени, сходятся, это аналогично тому, что два генератора, начиная с разных начальных условий, достигают полной синхронизации, когда на них воздействует общий вход. Известно, что даже для периодических последовательностей импульсов синхронизация достигается только внутри определенных областей параметров, так называемых языков Арнольда [279]. Синхронизация более сложными импульсными последовательностями является сложной проблемой, и нет никакой гарантии, что генераторы под действием одного того же, но произвольного сигнала, синхронизируются. Чтобы проиллюстрировать это, мы изображаем динамику двух автогенераторов, стимулируемых в одни и то же моменты времени, на рис. Рис. 1.2(б). Обратите внимание, что первый автогенератор (синяя линия) получает тот же вход, что и на рис. Рис. 1.2(а), в то время как второй автогенератор (фиолетовая линия) получает импульсы в те же моменты времени, но не в одинаковых фазах. Сходимости траекторий не наблюдается, а разность фаз между генераторами остается существенной.

**1.1.3. Приближенное выражение для функции фазового отклика двухмерной системы** Для функции фазового отклика можно получить простое приближенное выражение в случае двухмерной динамической системы. Следуя подходу, разработанному в [44, 141], такую систему в

окрестности предельного цикла с использованием нелинейного преобразования координат можно свести к системе

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{\rho} = \lambda\rho \quad (1.14)$$

где  $\varphi \in \mathbb{R}(\text{ mod } 1)$  – фаза системы,  $\omega = T^{-1}$  – собственная частота,  $\lambda < 0$  – показатель Флоке, а переменная  $\rho$  характеризует расстояние до предельного цикла.

Эффект действия короткого импульса на систему (1.14) может быть описан отображением  $(\varphi, \rho) \rightarrow (\varphi^*, \rho^*)$ , которое можно представить как

$$\varphi^* = \phi + \varepsilon P(\varphi) + \varepsilon^2 Q(\varphi) + \varepsilon\rho F(\varphi) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (1.15)$$

$$\rho^* = \rho + \varepsilon G(\varphi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (1.16)$$

где  $\varepsilon$  – амплитуда импульса, а  $\rho$  предполагается имеющим порядок  $\varepsilon$ . Уравнения (1.15)-(1.16) является общим разложением возмущения по  $\varepsilon$  и  $\rho$  с точностью до второго порядка для  $\varphi^*$  и до первого порядка для  $\rho^*$ . Первый порядок в (1.16) достаточен, поскольку в (1.15) величина  $\rho$  входит только в член второго порядка. Функции  $P(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$ ,  $F(\varphi)$ ,  $G(\varphi)$  не зависят от  $\varepsilon$  и описывают отклик осциллятора в зависимости от его фазы. Из-за периодичности фазы все эти функции являются периодическими с периодом 1. Функции  $P(\varphi)$  и  $Q(\varphi)$  характеризуют отклик на предельном цикле ( $\rho = 0$ ), где сдвиг фазы, вызванный импульсом, равен  $Z(\varphi) = \varepsilon P(\varphi) + \varepsilon^2 Q(\varphi)$ , что соответствует стандартной кривой переустановки фазы. функция  $F(\varphi)$  описывает зависимость фазового отклика от расстояния до предельного цикла, а функция  $G(\varphi)$  описывает, как это расстояние изменяется импульсом.

Теперь рассмотрим  $n$  импульсов, приходящих на фазы  $\varphi_1 < \dots < \varphi_n$ ,

и определим эффект этой последовательности импульсов, а именно заключительную фазу  $\varphi_n^*$  после прихода последнего импульса. Если импульсы приходят редко и система возвращается к предельному циклу по прибытии каждого импульса, можно использовать стандартный PRC. В этом случае имеет значение только последний импульс, и  $\varphi_n^* = \varphi_n + Z(\varphi_n)$ . Однако, если импульсы более частые, влияние более ранних импульсов является значительным. Чтобы найти конечную фазу в этом случае, рассмотрим динамику генератора в течение всей последовательности импульсов. Каждый импульс вызывает мгновенный сдвиг в соответствии с (1.15) – (1.16), а между импульсами система эволюционирует в соответствии с (1.14). Это позволяет построить отображение, которое преобразует расстояние  $\rho_k$  перед приходом  $k$ -го импульса в расстояние  $\rho_{k+1}$  перед приходом  $(k + 1)$ -го импульса:

$$\rho_{k+1} = (\rho_k + \varepsilon G(\varphi_k)) \mu^{\varphi_{k+1} - \varphi_k} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (1.17)$$

где  $\mu = e^{\lambda T}$  – мультипликатор предельного цикла. Применение (1.17) для  $k = 1, \dots, n - 1$  и подстановка полученного выражения для  $\rho_n$  в (1.15) дает

$$\begin{aligned} \varphi_n^* &= \varphi_n + \varepsilon P(\varphi_n) + \varepsilon^2 Q(\varphi_n) + \varepsilon \rho_1 F(\varphi_n) \mu^{\varphi_n - \varphi_1} \\ &+ \varepsilon^2 F(\varphi_n) \sum_{k=1}^{n-1} G(\varphi_k) \mu^{\varphi_n - \varphi_k} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Заметим, что конечная фаза зависит от начального расстояния  $\rho_1$ , однако содержащий его член экспоненциально уменьшается по мере увеличения интервала между первым и последним импульсами. Скорость его убывания определяется множителем  $\mu$ , член значительно убывает для  $\varphi_n - \varphi_1 \sim \Theta$ , где  $\Theta = 1/|\ln \mu| = 1/|\lambda T|$ . В этом случае влияние начального расстояния  $\rho_1$  незначительно. Данный результат проиллюстрирован на Рис. 1.2(а), где

изображены траектории одного и того же автогенератора с различными начальными условиями. Если импульсы подаются на систему в одних и тех же фазах  $\varphi_k$ , траектории достаточно быстро сближаются.

Вышеизложенные результаты позволяют заключить, что если последовательность импульсов является достаточно длинной, то есть  $\varphi_n - \varphi_1 \gg \Theta$ ), конечная фаза  $\varphi_n^*$  зависит только от фаз  $\varphi_k$  входящих импульсов и не зависит от предыстории, то есть величины  $\rho_1$ . В этом случае функция фазового сдвига определяется как  $Z_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \varphi_n^* - \varphi_n$  и може быть приближена как

$$Z_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = Z(\varphi_n) + \varepsilon^2 F(\varphi_n) \sum_{k=1}^{n-1} G(\varphi_k) \mu^{\varphi_n - \varphi_k}. \quad (1.19)$$

Заметим, что для сильного сжатия  $\mu \rightarrow 0$  функция фазового отклика переходит в стандартную кривую переустановки фазы  $Z(\varphi_n)$ . Для конечного сжатия  $\mu > 0$ , эффект предыдущих импульсов затухает экспоненциально, поэтому значимыми являются только импульсы, попадающие в интервал  $\varphi_n - \varphi_k \sim \Theta$ . таким образом, число импульсов, которые следует принимать во внимание, может быть оценено как  $n \sim f/|\lambda T|$ , где  $f$  – типичная частота прихода импульсов.

Приведенный анализ позволяет не только оценить число значимых импульсов, но также получить приближенную формулу (1.19) для функции фазового отклика. Выражение (1.19) позволяет разделить отклик системы на две составляющие. Первая определяет влияние текущего импульса и определяется стандартной кривой переустановки фазы  $Z(\varphi_n)$ . Второе слагаемое представляет собой поправку к кривой переустановки фазы за счет влияния предыдущих импульсов. Для проверки развитой теории мы стимулировали

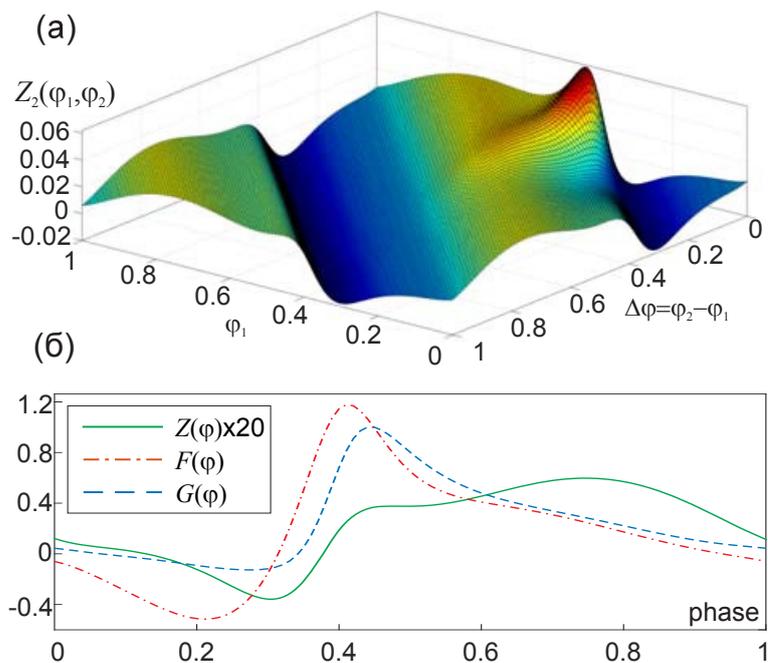


Рис. 1.3. (а) Функция фазового отклика  $Z_2(\varphi_1, \varphi_2)$  системы Морриса-Лекара. (б) Стандартная кривая переустановки фазы  $Z(\varphi)$  (зеленая сплошная линия), функция  $F(\varphi)$  (красная штрих-пунктирная линия) и функция  $G(\varphi)$  (синяя штриховая линия) для системы Морриса-Лекара.

различные автоколебательные системы дуплетами импульсов, приходящих в фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , и измеряли функцию фазового отклика  $Z_2(\varphi_1, \varphi_2)$  напрямую. Далее мы проверяли насколько поправка к кривой переустановки фазы соответствует величине  $Z_2(\varphi_1, \varphi_2) - Z(\varphi_1) = \varepsilon^2 F(\varphi_2)G(\varphi_1)\mu^{\varphi_2 - \varphi_1}$ , предсказываемой формулой (1.19). Проверка нескольких популярных моделей – ФитцХью-Нагумо, Морриса-Лекара, Ходжкина-Хаксли и Ван-дер-Поля показала замечательную точность полученного приближения. В результате нам удалось сконструировать функции  $F(\varphi)$  и  $G(\varphi)$  для данных систем. Пример результатов исследования для системы Морриса-Лекара приведен на Рис. 1.3.

Замечательно, что функция  $n$  переменных  $Z_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  может быть аппроксимирована функциями одной переменной. Более того, хотя приближение (1.19) выведено для двумерных систем, на практике оно может быть применено и для более высокоразмерных систем, таких как система Ходжкина-Хаксли. Вероятной причиной является наличие в таких системах так называемого ведущего многообразия предельного цикла [319], динамика на котором задается системой (1.14).

**1.1.4. Примеры применения функции фазового отклика** Далее мы рассмотрим пример, когда использование функции фазового отклика позволяет существенно повысить точность по сравнению с кривой переустановки фазы. Рассмотрим автогенератор Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (1.20)$$

под действием последовательности импульсов, которые мгновенно изменяют значение переменной  $x$  на  $x + \varepsilon$ . Для малых  $\alpha$ , фаза  $\varphi$  может быть определена геометрически, см. [139, 250].

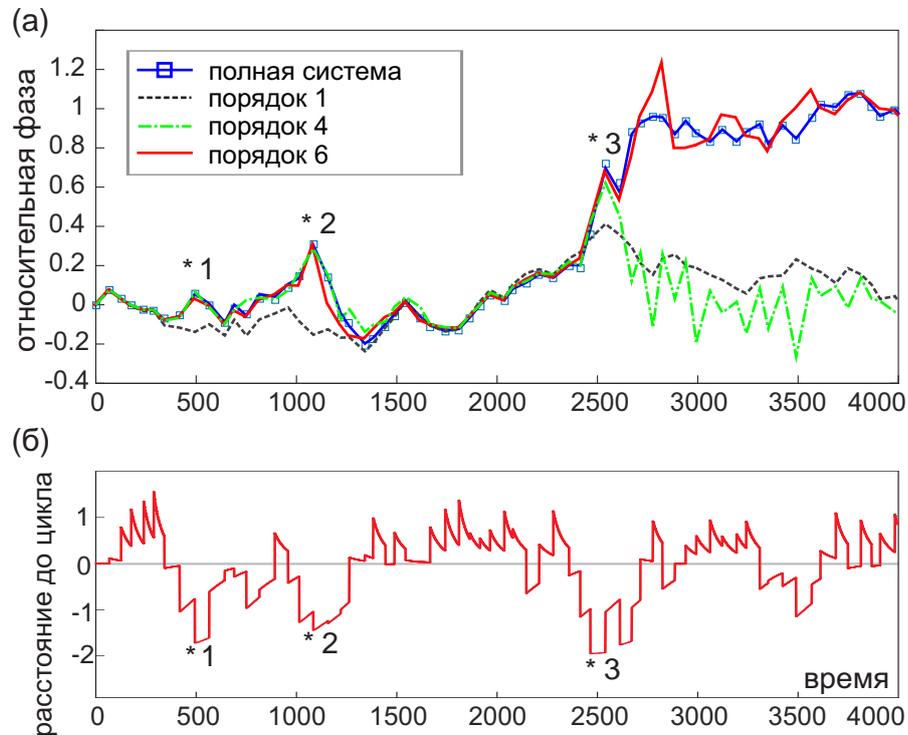


Рис. 1.4. Динамика автогенератора Ван-дер-Поля под внешним импульсным воздействием для  $\alpha = 0.01$ ,  $\varepsilon = 1$ . (а) Динамика относительной фазы  $\varphi' = \varphi - \omega t$ . Синяя сплошная линия с квадратами соответствует динамике полной модели, черная штриховая линия – приближению на основе кривой переустановки фазы, зеленая штрих-пунктирная линия – приближению на основе функции фазового отклика 4-го порядка, красная сплошная линия – на основе функции фазового отклика 6-го порядка. (б) Динамика расстояния до предельного цикла (положительная величина соответствует области вне предельного цикла отрицательная – области внутри цикла).

Рисунок 1.4 иллюстрирует динамику системы (1.20) под действием последовательности импульсов, которые поступают случайно с межимпульсным интервалом, равномерно распределенным в пределах  $T \in [40, 80]$ . Можно видеть, что подход на основе функции фазового отклика дает довольно точное предсказание фазовой динамики даже в случае, когда подход на основе кривой переустановки фазы неприменим. В частности, мы сравниваем результаты, полученные с использованием функции фазового отклика 6-го порядка (учитывается 6 последних импульсов), 4-го порядка (4 последних импульса) и стандартной кривой переустановки фазы (1 последний импульс). Кривая переустановки фазы иногда довольно точно описывает фазовую динамику, но в определенные моменты ее точность существенно падает. В частности, значительные ошибки наблюдаются при  $t \approx 500$  и  $t \approx 1100$  (звездочки 1 и 2 на Рис. 1.4), а при  $t \approx 2500$  (звездочка 3) ошибка превышает единицу, что соответствует целому обороту вокруг предельного цикла. График текущего расстояния от предельного цикла, приведенный на Рис. 1.4(б), показывает, что ошибка подхода на основе кривой переустановки фазы возрастает, когда система существенно удаляется от предельного цикла. То же наблюдается и для функции фазового отклика 4-го порядка. Напротив, функция 6-го порядка выдает верные результаты.

В качестве заключительной демонстрации преимущества функции фазового отклика мы исследовали динамику двух автогенераторов Ван-дер-Поля (1.20) с импульсной связью в следующей форме: когда первый автогенератор пересекает порог  $x_1 = 0$  в сторону возрастания  $x_1$ , на второй автогенератор подается импульс, который мгновенно изменяет его состояние, так что  $x_2^+ = x_2^- + \kappa x_2^-$ . Аналогично, когда второй автогенератор пересекает порог,

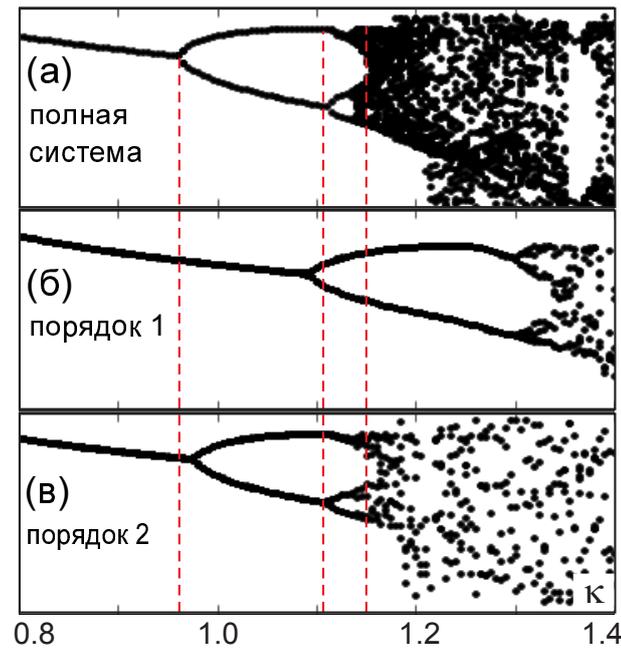


Рис. 1.5. Бифуркационная диаграмма двух связанных автогенераторов Ван-дер-Поля при  $\alpha = 2$ . (а) Численная диаграмма для полной модели. (б) Диаграмма, полученная при использовании приближения на основе кривой переустановки фазы (в) Диаграмма, полученная на основе функции фазового отклика второго порядка.

импульс подается на первый автогенератор.

Бифуркационная диаграмма, полученная при симуляции полной системы, приведена на Рис. 1.5(а). При умеренной силе связи наблюдается синхронизация с постоянным сдвигом фаз, которая при возрастании связи переходит в хаотические колебания через каскад удвоений периода. Приближение на основе кривой переустановки фазы (Рис. 1.5(б)) дает качественно похожую картину, однако точки бифуркаций существенно сдвинуты по сравнению с полной системой. Напротив, подход на основе функции фазового отклика даже второго порядка позволяет предсказать точки бифуркаций гораздо более точно (Рис. 1.5(в)).

## 1.2. Порог устойчивости динамических систем под действием сильного внешнего возмущения

Исследование устойчивости мультистабильных динамических систем к сильным внешним воздействиям является важной задачей, принципиально неразрешимой в рамках линейной теории возмущений. Такое исследование предполагает определение класса «безопасных» или допустимых возмущений, после которых система возвращается к исходному режиму, и «небезопасных» возмущений, переключают систему на другой, нежелательный динамический режим. Один из способов оценки размера класса безопасных возмущений был предпринят в серии работ [236, 237, 240], где была введена концепция бассейновой устойчивости. Во настоящем разделе предлагается новая мера для характеристики устойчивости динамических систем к большим возмущениям, а именно **порог устойчивости** (ПУ).

**1.2.1. Определение порога устойчивости** Порог устойчивости определяется как минимальная амплитуда возмущения, способного вывести систему из установившегося динамического режима, то есть вывести ее из бассейна притяжения аттрактора. В фазовом пространстве порог устойчивости соответствует минимальному расстоянию между аттрактором  $\mathcal{A}$  и границей  $\delta\mathcal{B}$  бассейна его притяжения, то есть

$$\sigma = \inf \{ \text{dist}(a, b) \mid a \in \mathcal{A}, b \in \delta\mathcal{B} \} \quad (1.21)$$

где  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$  – расстояние между точками в фазовом пространстве. Далее мы будем использовать стандартную Евклидову метрику для измерения

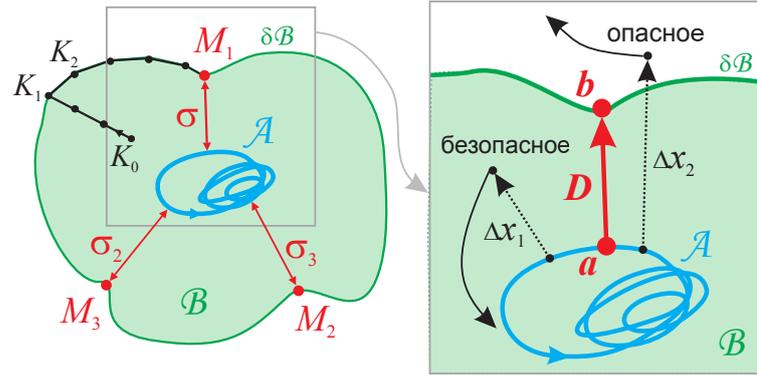


Рис. 1.6. Порог устойчивости  $\sigma$ , аттрактор  $\mathcal{A}$  и его бассейн притяжения  $\mathcal{B}$ .

ерными токами показан путь алгоритма, сходящегося к точке порога устойчивости. На увеличенной части рисунка показаны безопасное возмущение  $\Delta x_1$  и опасное возмущение  $\Delta x_2$ .

расстояний, однако может быть использована и другая метрика.

Для лучшего понимания физического смысла порога устойчивости рассмотрим динамическую систему, находящуюся на аттракторе  $\mathcal{A}$  как изображено на Рис. 1.6. Пусть точки  $a \in \mathcal{A}$  и  $b \in \delta\mathcal{B}$  соответствуют порогу устойчивости, так что  $\text{dist}(a, b) = \sigma$ . Тогда рассмотрим внешнее возмущение системы, эффект которого заключается в быстром (мгновенном) изменении ее состояния. А именно, пусть состояние системы изменяется от состояния невозмущенного состояния  $x_u$  к возмущенному состоянию  $x_p$  так что возмущение  $\Delta x = x_p - x_u$  имеет амплитуду  $q = |\Delta x|$ . Если  $q < \sigma$ , возмущение не может заставить систему покинуть бассейн притяжения (возмущение  $\Delta x_1$  на Рис. 1.6). Однако если  $q > \sigma$  и система находится вблизи точки  $a$  непосредственно перед возмущением, она может покинуть бассейн под действием возмущения, если направление вектора  $\Delta x$  близко к направлению вектора  $D = b - a$  ( $\Delta x_2$  на Рис. 1.6). Приведенное рассуждение показывает, что по-

мимо величины порога устойчивости  $\sigma$ , направление соответствующего ему вектора  $D$  также имеет важное значение. Данный вектор соответствует наиболее «опасному» направлению возмущения, в котором расстояние между аттрактором и границей его бассейна притяжения является минимальным.

**1.2.2. Численная оценка порога устойчивости** Перейдем теперь к вопросу вычисления порога устойчивости. Для этой цели был предложен двухстадийный алгоритм, базовые принципы которого описаны ниже и также проиллюстрированы на Рис. 1.6.

1) На первой стадии определяется некоторая точка  $K_1$  на границе бассейна притяжения. Для этой цели выбирается произвольная точка  $K_0$  вблизи аттрактора, после чего начинается движение от аттрактора до тех пор, пока точка не покидает его бассейна. После этого точка  $K_1$  находится методом бисекции.

2) На второй стадии осуществляется движение вдоль границы бассейна. На каждом шаге строится касательная гиперплоскость к границе в текущей точке  $K_n$ . В гиперплоскости находится точка, ближайшую к аттрактору  $A$ , и делаем шаг к этой точке и получаем новую точку  $K_{n+1}$ . Такие шаги приближают текущую к аттрактору и к точке  $M$  на границе с минимальным расстоянием до аттрактора.

Вторая стадия алгоритма предполагает гладкость границы, поскольку только в этом случае она может быть аппроксимирована касательной гиперплоскостью. Далее мы предполагаем, что граница является гладкой (определяется функцией класса  $C^1$ ), что имеет место для многих реалистических систем.

Предложенный алгоритм позволяет определять локальные минимумы расстояния между аттрактором и границей бассейна, которые мы называем далее «локальными порогами». Стартуя из разных начальных точек, мы получаем разные точки локальных порогов  $M_1, M_2, \dots, M_m$  (Рис. 1.6). Среди данных точек ближе всего к аттрактору находится «глобальная пороговая точка», соответствующая порогу устойчивости:  $\sigma = \min(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$  где  $\sigma_j = \text{dist}(M_j, \mathcal{A})$ .

Описанный поиск методом «грубой силы» для получения всех локальных минимумов не представляется эффективной стратегией. Однако эффективность метода существенно повышается при параметрическом исследовании, то есть когда свойства системы изучаются в зависимости от ее параметров. Заметим, что такие задачи типичны, поскольку все реалистичные системы зависят от параметров, и часто важно бывает установить, что происходит при их изменении. Предположим, что для некоторого значения параметра  $p = p_0$  мы нашли все точки локальных порогов  $M_1(p_0), \dots, M_m(p_0)$ . В грубой системе структура фазового пространства непрерывно изменяется при изменении  $p$ . Таким образом, координаты точек локальных порогов непрерывно зависят от  $p$ . Таким образом, когда  $p$  изменяется на небольшое значение  $\Delta p = p - p_0$ , следует запускать алгоритм поиска из начальных точек  $M_j(p_0)$ . Поскольку фактические позиции  $M_j(p)$  близки, алгоритм быстро сходится к ним. Таким образом, можно эффективно отслеживать положение точек локальных порогов при изменении значения параметра.

Можно однако утверждать, что найти все точки локальных порогов даже для одного значения параметра  $p_0$  может быть практически невыполнимой задачей для сложных систем большой размерности. Однако важно подчерк-

нуть, что эта задача значительно упрощается, если система представляет собой сеть, то есть она состоит из множества низкоразмерных подсистем. В этом случае сила связи является естественным выбором параметра  $p$ , по которому можно проследить систему. В случае отсутствия связи ( $p = 0$ ) фазовое пространство большой размерности всей системы является прямым произведением подпространств низкой размерности. В каждом из этих подпространств точки локальных порогов могут быть найдены относительно легко, что также позволяет найти их в полном пространстве. Далее можно постепенно увеличивать силу связи и отслеживать положение данных точек.

Другой проблемой является возможное появление новых точек локальных порогов. Даже при наличии эффективного метода для отслеживания найденных точек по параметру, необходимо убедиться, что другие, вновь возникшие точки не оказались ближе к аттрактору. Описанная проблема типична для поиска глобального экстремума в случае, когда полный перебор невозможен [334]. Хотя нет никакого способа гарантировать, что найденная с помощью предлагаемого алгоритма оценка порога устойчивости действительно является глобальным минимумом, существует способ утверждать это с вероятностью, сколь угодно близкой к единице. Для этого нужно проверить достаточно много случайных начальных точек и убедиться, что ни одна из них не дает лучшего результата. Мы вернемся к этому вопросу ниже, где мы приведем оценку на число испытаний, которые необходимо выполнить, чтобы уменьшить вероятность ошибки ниже заданного уровня.

**1.2.3. Порог устойчивости физического маятника** Продемонстрируем применимость подхода на основе порога устойчивости к исследова-

нию некоторых парадигматических динамических систем. Сначала рассмотрим классический физический маятник под действием внешней силы  $P$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega + P - \sin\theta. \quad (1.22)$$

Здесь  $\theta$  и  $\omega$  – угол отклонения и угловая скорость, а  $\alpha$  описывает трение. Заметим, что модели, близкие к (1.22), часто используются для описания динамики узлов энергосетей, т.е. генераторов или потребителей электрической энергии [224]. Фазовое пространство данной модели представляет собой цилиндр  $S^1 \times R^1$  и включает два аттрактора: устойчивое состояние равновесия  $O(\arcsin P, 0)$  и устойчивый предельный цикл  $L$  (Рис. 1.6). В контексте энергосетей, состояние равновесия соответствует режиму, при котором генератор функционирует в синхронизации с сетью, тогда как предельный цикл соответствует асинхронному режиму.

Используем концепцию порога устойчивости для изучения бассейна притяжения стационарного состояния  $O$ . Идентифицированные точки локальных порогов обозначены красными точками на Рис. 1.7(а). Наиболее важными из них являются  $M_1$ , соответствующие положительным возмущениям, и  $M_2$ , соответствующие отрицательным. Из-за сложной формы бассейна притяжения другие точки локальных порогов находятся дальше от аттрактора, например,  $M_3$ . На рисунке 1.7б показаны локальные пороги  $\sigma_j = \text{dist}(O, M_j)$ , связанные с этими точками в зависимости от параметра  $P$ . Видно, что для  $P < P^* \approx 0,15$  ближайшей к аттрактору точкой является  $M_1$ , а для  $P > P^*$  ближайшая точка это  $M_2$ . Таким образом, порог устойчивости равен  $\sigma_1$  для  $P < P^*$  и  $\sigma_2$  для  $P > P^*$ , т.е. наиболее опасными являются положительные возмущения для малых  $P$ , и отрицательные возмущения для больших  $P$ .

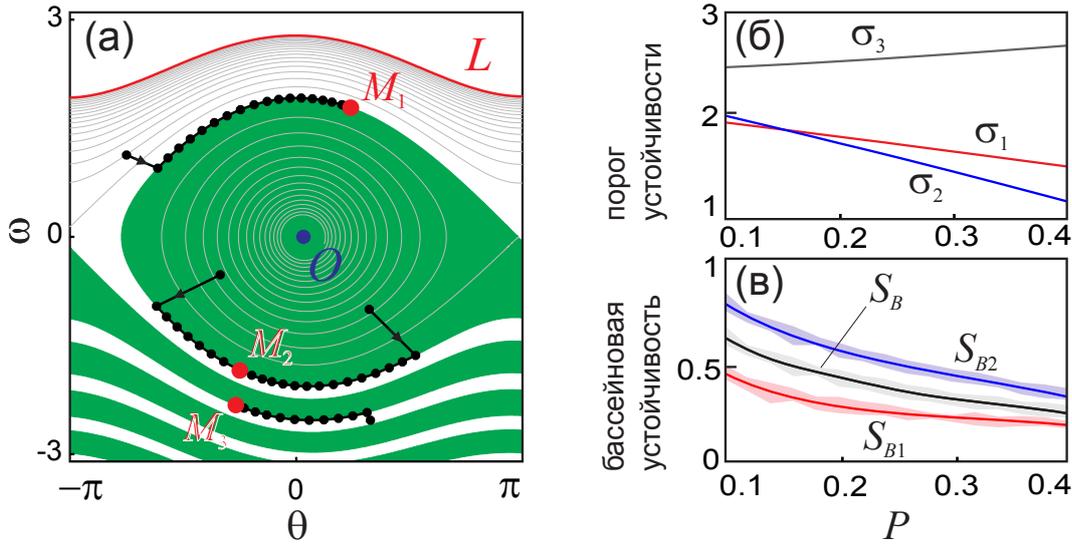


Рис. 1.7. Устойчивость маятника (1.22). (а) Фазовый портрет при  $\alpha = 0.04$ ,  $P = 0.1$ . Зеленым выделен бассейн притяжения состояния равновесия  $O$ , красная кривая – предельный цикл  $L$ . Локальные пороги отмечены красными точками, пути алгоритма – черными точками. (б) Локальные пороги устойчивости  $\sigma_1$  (красным),  $\sigma_2$  (синим) и  $\sigma_3$  (черным) в зависимости от  $P$ . (в) Бассейновая устойчивость  $S_{B1}$  (красным),  $S_{B2}$  (синим) и  $S_{B0}$  (черным) в зависимости от  $P$ , средние значения и СКО.

Интересно сравнить две меры бассейна: порог устойчивости и бассейновую устойчивость. Для этого  $S_B$  построена в зависимости от  $P$  на Рис. 1.7(в). Мы рассчитываем бассейновую устойчивость для трех различных классов возмущений: положительные возмущения ( $S_{B1}$  для  $Q_1 = [-\pi; \pi] \times [0; 3]$ ), отрицательные возмущения ( $S_{B2}$  для  $Q_2 = [-\pi; \pi] \times [-3; 0]$ ) и возмущения обоих знаков ( $S_{B0}$  для  $Q = Q_1 \cup Q_2$ ). При увеличении  $P$  бассейновая устойчивость для всех классов возмущений уменьшается так же, как и порог устойчивости. Таким образом, обе меры указывают на то, что система становится менее устойчивой. Однако стабильность бассейна не может определить, какие воз-

мущения являются более опасными:  $S_{B2}$  существенно больше, чем  $S_{B1}$  для всех значений  $P$ .

Мы также проверили, что эффективность нашего алгоритма существенно возрастает при отслеживании точек локальных порогов по параметру. Для этого мы определили положение точки  $M_1$  для  $P \in [0, 1; 0, 4]$  для трех разных случаев: шаг параметра  $\Delta P = 0,02$  (16 точек данных), без отслеживания; тот же шаг, с отслеживанием; меньший шаг  $\Delta P = 0,01$  (31 точка данных), с отслеживанием. Без отслеживания поиск начинался каждый раз с одной и той же точки. При отслеживании поиск нового значения параметра начался с позиции, найденной для предыдущего значения параметра. Общее время вычислений  $T_c$  равняется  $9 \times 10^{-3}$  (у.е.) для первого случая,  $19 \times 10^{-4}$  для второго случая и  $24 \times 10^{-4}$  для третьего случая. Таким образом, при отслеживании по параметру время вычислений уменьшается примерно в пять раз. Для многомерных систем сокращение времени еще существенней. Также обратите внимание, что  $T_c$  в третьем случае увеличивается менее чем на 30% по сравнению со вторым случаем, хотя количество точек данных в два раза больше. Причина в том, что при меньшем шаге параметра положения точек локальных порогов изменяются меньше, и они обнаруживаются быстрее.

**1.2.4. Порог устойчивости для сложных сетей** Второй пример – сеть связанных одномерных точечных отображений. Мы выбрали точечные отображения по двум причинам: во-первых, из-за более простой реализации, и во-вторых, чтобы продемонстрировать общность нашего подхода. Сеть из  $N$  узлов описывается следующим образом:

$$x_i(t+1) = ax_i(t) + bx_i^2(t) + \kappa \sum_{j=1}^N c_{ij} (x_j(t) - x_i(t)). \quad (1.23)$$

Здесь  $0 < a < 1$  – системный параметр,  $\kappa$  – глобальный коэффициент связи, а  $c_{ij}$  – элементы матрицы связи. Связь между двумя узлами  $i$  и  $j$  равна  $\kappa c_{ij}$ . Сеть имеет единственный аттрактор – устойчивую неподвижную точку  $O(0, 0, \dots, 0)$ . Однако после сильного возмущения траектории системы могут уходить в бесконечность.

Для сети (1.23) естественный способ найти точки локальных порогов – это отследить их положение при варьировании коэффициента связи  $\kappa$ . При  $\kappa = 0$  узлы не связаны, и каждый из них описывается отображением  $x_i(t+1) = ax_i(t) + x_i^2(t)$ , которое имеет устойчивую неподвижную точку  $x_i = 0$  с бассейном притяжения  $-1 < x_i < 1 - a$ . Границы этого интервала определяют две точки локальных порогов в фазовом пространстве сети:  $M_{i+}$  ( $x_j = 0$  ( $j \neq i$ ),  $x_i = 1 - a$ ) соответствует положительному возмущению узла  $i$ , а  $M_{i-}$  ( $x_j = 0$  ( $j \neq i$ ),  $x_i = -1$ ) – отрицательному. Мы начали с этих точек при  $\kappa = 0$ , затем постепенно увеличиваем  $\kappa$  и отслеживаем их положения. Мы также периодически проверяли появление новых точек локальных порогов, но не смогли их обнаружить.

Были изучены различные сети с  $2 \leq N \leq 100$  и различными топологиями связей : каждый с каждым, случайные [93], сети малого мира [371], безмасштабные [21] и кластерные сети [6A]. Во всех случаях поведение точек локальных порогов довольно схоже. Когда  $\kappa$  увеличивается, положения точек меняются, так что координаты  $x_j$  ( $j \neq i$ )  $M_{i\pm}$  больше не равны нулю. Однако при слабой связи координаты точек локальных порогов подчиняются  $|x_i| \gg x_j$ , т.е. соответствующее возмущение в основном касается узла  $i$ .

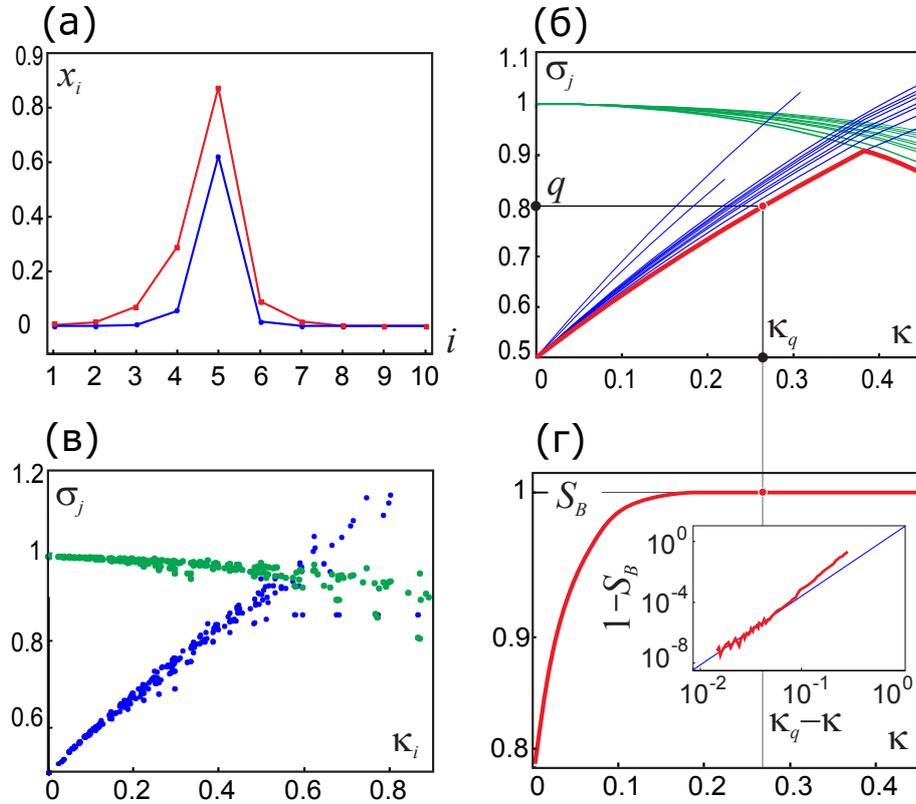


Рис. 1.8. Устойчивость сети (1.23). (а) Координаты типичных точек локальных порогов  $M_{i+}$  ( $i = 5$ ) для двух значений  $\kappa$  – малого (синим) и большого (красным). (б) Локальные пороги  $\sigma_{i\pm}$  в зависимости от  $\kappa$ . Синие тонкие линии соответствуют  $\sigma_{i+}$ , зеленый тонкие линии  $\sigma_{i-}$ . Красная толстая линия соответствует порогу устойчивости  $\sigma$ . (в) Локальные пороги  $\sigma_{i\pm}$  в зависимости от суммарной силы связей узла  $\kappa_i$  для различных узлов, коэффициентов связи и сетевых конфигураций. Синие точки отвечают  $\sigma_{i+}$ , зеленые –  $\sigma_{i-}$  (г) Бассейновая устойчивость в зависимости от  $\kappa$ . На вставке показана та же зависимость в логарифмической шкале. Красная кривая соответствует численным результатам, синяя отражает оценку (1.24).

Для больших  $\kappa$  ситуация меняется, и точки локальных порогов могут иметь несколько координат одного порядка. Типичные точки локальных порогов проиллюстрированы на Рис. 1.8(а).

Теперь рассмотрим значения локальных порогов  $\sigma_{i\pm} = \text{dist}(O, M_{i\pm})$ , связанные с указанными точками. Типичная зависимость этих порогов от  $\kappa$  показана на Рис. 1.8(б). Для всех  $i$   $\sigma_{i+}$  растет с  $\kappa$ , а  $\sigma_{i-}$  уменьшается. Некоторые из точек  $M_{i+}$  могут исчезать при некоторых  $\kappa$ . Детальное исследование показывает замечательную особенность локальных порогов  $\sigma_{i\pm}$ : они оказываются сильно коррелированными со значениями суммарной силы связей с узлом  $\kappa_i = \kappa \sum_{j=1}^N c_{ij}$ . На Рис. 1.8(в) показаны значения локальных порогов  $\sigma_{i\pm}$  в зависимости от  $\kappa_i$  соответствующего узла для различных узлов, коэффициентов связи, размеров сети и конфигураций. Корреляция двух величин велика, особенно для маленьких  $\kappa_i$ . Обратите внимание, что для  $\kappa_i \lesssim \kappa^* \approx 0,6$  положительные возмущения имеют более низкий порог, чем отрицательные, и этот порог увеличивается с ростом  $\kappa_i$ . Этот вывод позволяет сформулировать простое и интуитивно понятное правило: чем сильнее узел подключен к сети, тем сложнее его оторвать. Однако слишком сильная связь ( $\kappa_i \gtrsim \kappa^*$ ) нежелательна, так как увеличивает подверженность отрицательным возмущениям.

Глобальный порог устойчивости сети определяется самым низким локальным порогом. На рисунке 1.8в показана типичная зависимость порога устойчивости от  $\kappa$ .

**1.2.5. Порог устойчивости и бассейновая устойчивость** Интересно сравнить две меры устойчивости – порог устойчивости и бассейновую устойчивость для одной и той же сети (Рис. 1.8(г)). В качестве класса возму-

щений  $Q$  мы использовали гиперсферу радиуса  $q = 0.8$  с постоянной плотностью  $\rho$ , что соответствует возмущениям постоянной амплитуды  $q$  со случайным направлением [246]. Видно,  $S_B = 1$  когда порог устойчивости превышает  $q$  при  $\kappa > \kappa_q \approx 0.26$ . Это подтверждает тот факт, что порог устойчивости действительно характеризует минимальное возмущение, способное дестабилизировать систему.

Из Рис. 1.8(г) можно вынести неверное впечатление о том, что порог бассейновая устойчивость достигает единичного значения гораздо раньше, чем  $\kappa$  достигает  $\kappa_q$ . Причиной является то, что  $S_B$  приближается к единице очень быстро при приближении  $\sigma$  к величине  $q$ . Это проиллюстрировано на вставке в Рис. 1.8(г) где зависимость приведена в логарифмическом масштабе. Описанная особенность является типичной для высокоразмерных систем. Действительно, рассмотрим произвольную динамическую систему с  $N$ -мерным фазовым пространством, находящуюся на аттракторе  $\mathcal{A}$  с порогом устойчивости  $\sigma$ . Рассмотрим теперь возмущение из класса  $Q$ , состоящего из возмущений с амплитудой  $q$ . Для  $q < \sigma$ , множество  $Q$  расположено внутри бассейна притяжения  $\mathcal{B}$ , следовательно  $S_B = 1$ . Для  $\sigma = q$ , множество  $Q$  касается границы бассейна  $\delta\mathcal{B}$ . Для  $q > \sigma$  некоторая часть множества  $Q$  выходит из бассейна  $\mathcal{B}$  и  $S_B$  становится меньше единицы (Рис. 1.9(а)). Вероятность того, что возмущенное состояние находится вне бассейна, пропорциональна площади поверхности  $s$  выступающей части (показанной на рисунке серым), то есть  $1 - S_B \sim s$ . Для оценки площади поверхности аппроксимируем поверхность  $Q$  и  $\delta\mathcal{B}$  вблизи места их пересечения квадратичными формами. Тогда поперечный размер выступающей части может быть оценен как  $d \sim \sqrt{q - \sigma}$ , а площадь ее поверхности, соответственно,  $s \sim d^{N-1}$ . Это ведет к оценке

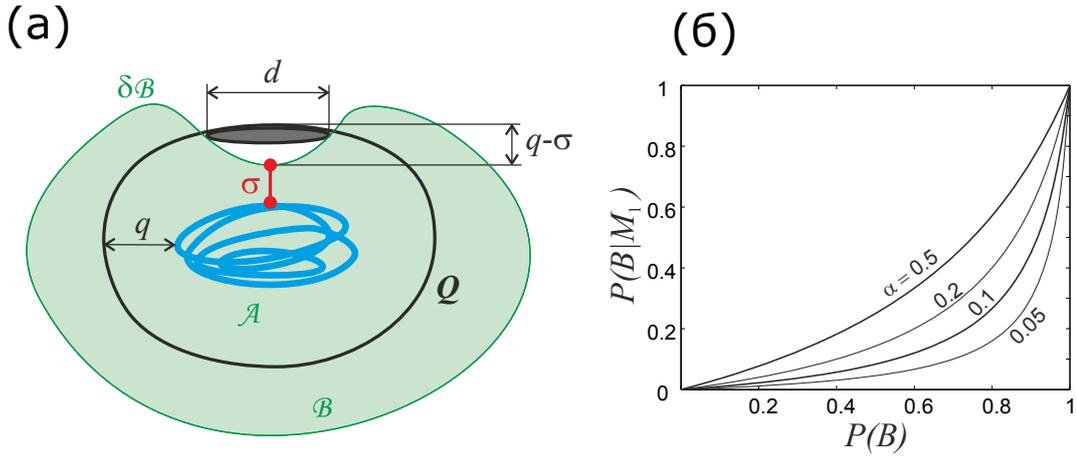


Рис. 1.9. (а) Оценка бассейна устойчивости для возмущений, немного превосходящих порог устойчивости. (б) Апостериорная вероятность  $P(B|M_1)$  в зависимости от априорной вероятности  $P(B)$  для различных значений  $\alpha$ , обозначенных на графике.

$$1 - S_B \sim (q - \sigma)^{\frac{N-1}{2}}. \quad (1.24)$$

Соответствующий наклон показан на вставке Рис. 1.8(г) синей линией и хорошо согласуется с численными результатами.

Пропорциональность (1.24) предполагает, что для высокоразмерных систем крайне маловероятно, что система будет дестабилизирована случайным возмущением, амплитуда которого лишь немного превосходит порог устойчивости. С другой стороны, возмущение с тщательно подобранным направлением может дестабилизировать систему, будучи лишь немного больше порога устойчивости по амплитуде.

С точки зрения вычислений, пропорциональность (1.24) показывает, что попытки оценить порог устойчивости через прямое вычисление бассейновой устойчивости неэффективно для высокоразмерных систем. Действительно,

пример на Рис. 1.8(г) показывает, что довольно сложно определить точное положение точки, в которой бассейновая устойчивость достигает ровно единицы. Вероятность случайного попадания в точку с расстоянием от аттрактора, на  $\varepsilon$  превышающем порог, имеет порядок  $\varepsilon^{(N-1)/2}$ , поэтому время определения порога с точностью  $\varepsilon$  методом «грубой силы» возрастает обратно пропорционально. Напротив, метод, предложенный в настоящей работе, позволяет достичь точки локального порога и определить порог устойчивости за сравнительно небольшое число операций.

Пропорциональность (1.24) также может быть использована для вычисления вероятности ошибочного вывода о величине порога устойчивости. Предположим, что мы имеем потенциальный порог устойчивости, то есть точку глобального минимума  $M_1$  с расстоянием до аттрактора  $\sigma_1 = \text{dist}(M_1, \mathcal{A})$ , и хотим проверить, существуют ли точки локальных порогов  $M_2$  с меньшими расстояниями  $\sigma_2 = \text{dist}(M_2, \mathcal{A}) = \sigma_1 - \delta\sigma$ . Для этой цели мы выбираем случайную стартовую точку  $K_1$  на расстоянии от аттрактора  $q = \sigma_1 + \varepsilon$  до тех пор, пока не найдем точку вне бассейна, после чего запускаем алгоритм поиска локального порога. Если он сходится к точке  $M_2$ , отличной от  $M_1$  и с порогом  $\sigma_2 < \sigma_1$ , мы нашли новую потенциальную точку порога устойчивости. Если же алгоритм сходится к  $M_1$ , следует оценить вероятность двух гипотез:

Гипотеза  $A$ . Точка  $M_1$  действительно соответствует порогу устойчивости и других искомым точек  $M_2$  не существует. В этом случае алгоритм сходится к  $M_1$  с вероятностью  $P(M_1|A) = 1$ .

Гипотеза  $B = \bar{A}$ . Точка  $M_2$  существует, но не была найдена. В этом случае, в соответствие с (1.24), вероятности схождения к  $M_1$  и  $M_2$  относятся как

$$\frac{P(M_1|B)}{P(M_2|B)} = \alpha \sim \frac{(q - \sigma_1)^{\frac{N-1}{2}}}{(q - \sigma_2)^{\frac{N-1}{2}}} = \left( \frac{1}{1 + \frac{\delta\sigma}{\varepsilon}} \right)^{\frac{N-1}{2}}. \quad (1.25)$$

В соответствие с теоремой Байеса, апостериорная вероятность  $P(B|M_1)$  может быть выражена через априорную вероятность  $P(B)$  как

$$\begin{aligned} P(B|M_1) &= \frac{P(M_1|B)P(B)}{P(M_1|A)P(A) + P(M_1|B)P(B)} = \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{P(B)} - 1\right)}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

На Рис. 1.9(б) апостериорная вероятность построена в зависимости от априорной для нескольких значений  $\alpha$ . Заметим, что если  $\alpha$  достаточно мало и  $P(B)$  не близка к единице, зависимость (1.26) может быть приближена как  $P(B|M_1) \approx \alpha P(B)$ , что означает, что каждая неудачная попытка поиска  $M_2$  уменьшает вероятность ошибки на фактор  $\alpha$ . Таким образом, после  $M$  попыток апостериорная вероятность  $B$  может быть оценена как

$$\ln P_M \sim -\frac{M(N-1)}{2} \ln \left( 1 + \frac{\delta\sigma}{\varepsilon} \right). \quad (1.27)$$

Оценка (1.27) определяет вероятность того, что после  $M$  неудачных попыток мы все же пропустили точку локального порога, расстояние которой до аттрактора на  $\delta\sigma$  меньше, чем  $\sigma_1$ . Увеличением числа попыток  $M$  вероятность ошибки можно снизить до сколь угодно малого значения.

### 1.3. Интервальная устойчивость динамических систем под внешним воздействием и ее численные меры

Порог устойчивости динамической системы можно определить, решая задачу оптимизации с ограничением, а именно найдя минимальное возмущение, после которого система не возвращается к аттрактору. Заметим, что этот метод основан на асимптотическом поведении траекторий, то есть предполагает интегрирование системы в течение (бесконечно) долгого время для проверки сходимости. В приложениях часто нецелесообразно рассматривать слишком длинные переходные процессы, поскольку важно, чтобы система возвращалась к аттрактору за конечное время. Таким образом, важно изучать устойчивость в течение конечных временных интервалов.

В настоящем разделе представлена концепция интервальной устойчивости, которая описывает устойчивость системы на конечных временных интервалах. Возмущение классифицируется как «безопасное», если система возвращается в близкое соседство с аттрактором течение заданного интервала времени, и как «небезопасное» в противоположном случае. Как и в случае асимптотической устойчивости, можно ввести количественные меры для характеристики класса безопасных возмущений. *Интервальная бассейновая устойчивость* равна вероятности того, что возмущение предопределенного класса является безопасным. *Интервальный порог устойчивости* определяет минимальную величину небезопасного возмущения. Предложены численные методы вычисления мер интервальной устойчивости и демонстрируется их эффективность для различных динамических систем.

**1.3.1. Определение понятия интервальной устойчивости и ее мер** Во-первых, формально определим время, в которое возмущенная система возвращается к аттрактору. Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (1.28)$$

где  $x \in R^N$ . Эта система определяет группу отображений потока  $F_\tau$ , так что  $F_\tau(x_0) = x(\tau)$ , где  $x(t)$  – решение задачи Коши (1.28) с начальным условием  $x(0) = x_0$ . Пусть  $A$  является аттрактором (1.28), а  $\varepsilon > 0$  таково, что  $\varepsilon$ -окрестность  $A$  принадлежит бассейну его притяжения. Тогда *время возврата*  $T_\varepsilon$  точки  $x$  из бассейна притяжения определяется как

$$T_\varepsilon(x) = \inf \{t \mid t > 0, \text{dist}(F_t x, A) \leq \varepsilon\}, \quad (1.29)$$

то есть как минимальное время, в течение которого возмущенная система возвращается в (малую) окрестность своего аттрактора (см. [217]). Естественно, значение времени возврата зависит от размера окрестности  $\varepsilon$ , хотя иногда мы опускаем индекс  $\varepsilon$ . Для точек вне бассейна мы устанавливаем  $T_\varepsilon = \text{inf} t$ , а для точек внутри  $\varepsilon$ -окрестности –  $T_\varepsilon = 0$ . Заметим, что тип аттрактора не конкретизируется, то есть это может быть устойчивое состояние равновесия, предельный цикл или даже странный аттрактор [5, 62]. Определение времени возврата также может быть легко обобщено на динамические системы с дискретным временем [69].

На Рис. 1.10 концепция времени возврата иллюстрируется для классического маятника, описываемого системой 1.22. Для значений параметров, используемых на рисунке, система является бистабильной с сосуществованием

устойчивой неподвижной точки  $O$  и устойчивого предельного цикла. Здесь неподвижная точка рассматривается как желаемое состояние, и изучается ее устойчивость. Области с разными временами возврата, соответствующими  $\varepsilon = 0.4$ , отображаются разными цветами. Объединение всех цветных областей составляет бассейн притяжения устойчивого состояния.

Теперь мы можем определить интервальную бассейновую устойчивость и интервальный порог устойчивости. Рассмотрим возмущения (1.28), которые определяют подмножество  $X_P \subset R^N$  возмущенных состояний в фазовом пространстве системы. Предположим, что максимально допустимое время возврата равно  $\tau$ . Тогда интервальная бассейновая устойчивость – это доля возмущенных состояний, время возврата которых не превышает  $\tau$ :

$$B_\tau = \frac{V(\{x \mid x \in X_P, T_\varepsilon(x) \leq \tau\})}{V(X_P)}. \quad (1.30)$$

Здесь  $V(X)$  обозначает объем подмножества  $X$  в фазовом пространстве. С физической точки зрения интервальная бассейновая устойчивость определяет вероятность того, что система вернется к аттрактору за время  $\tau$  после возмущения из данного класса.

Интервальный порог устойчивости определяется как минимальная величина возмущения, время возврата которого превышает  $\tau$ :

$$\sigma_\tau = \inf \{\text{dist}(a, b) \mid a \in A, T_\varepsilon(b) > \tau\}. \quad (1.31)$$

Физический смысл интервального порога устойчивости заключается в следующем. Если величина возмущения меньше, чем  $\sigma_\tau$ , система гарантированно вернется к аттрактору не позднее, чем за время  $\tau$ . Для более сильных

возмущений время возврата может быть больше. Соответствующие точки  $a$  и  $b$  с  $\text{dist}(a, b) = \sigma_{\tau}$  определяют «самый тонкий участок» бассейна притяжения и самое «опасное» направление возмущения.

Интервальная бассейновая устойчивость и интервальный порог устойчивости естественным образом зависят от величины интервала  $\tau$ . Его значение следует выбирать в зависимости от конкретной динамической системы и конкретного приложения. Как показано на Рис. 1.10, чем больше время возврата  $\tau$ , тем ближе соответствующие области к границе бассейна притяжения. Поэтому в пределе больших  $\tau$  интервальные характеристики устойчивости приближаются к предельным значениям, соответствующим асимптотическим. А именно, интервальная бассейновая устойчивость стремится к (асимптотической) устойчивости бассейна, а интервальный порог устойчивости сходится к (асимптотическому) порогу устойчивости.

### 1.3.2. Численные методы оценки интервальной устойчивости

Перейдем теперь к вопросу численной оценки характеристик интервальной устойчивости. Метод Монте-Карло для оценки асимптотической бассейновой устойчивости может быть легко обобщен для вычисления интервальной бассейновой устойчивости. Соответствующий алгоритм предполагает генерацию возмущенных состояний, случайно выбранных из заранее определенного класса, и интегрирование системы в течение времени  $\tau$ . Проверяется сходимость к  $\varepsilon$ -окрестности аттрактора и подсчитывается количество точек с временем возврата меньше  $\tau$ . Наконец, интервальная бассейновая устойчивость оценивается как

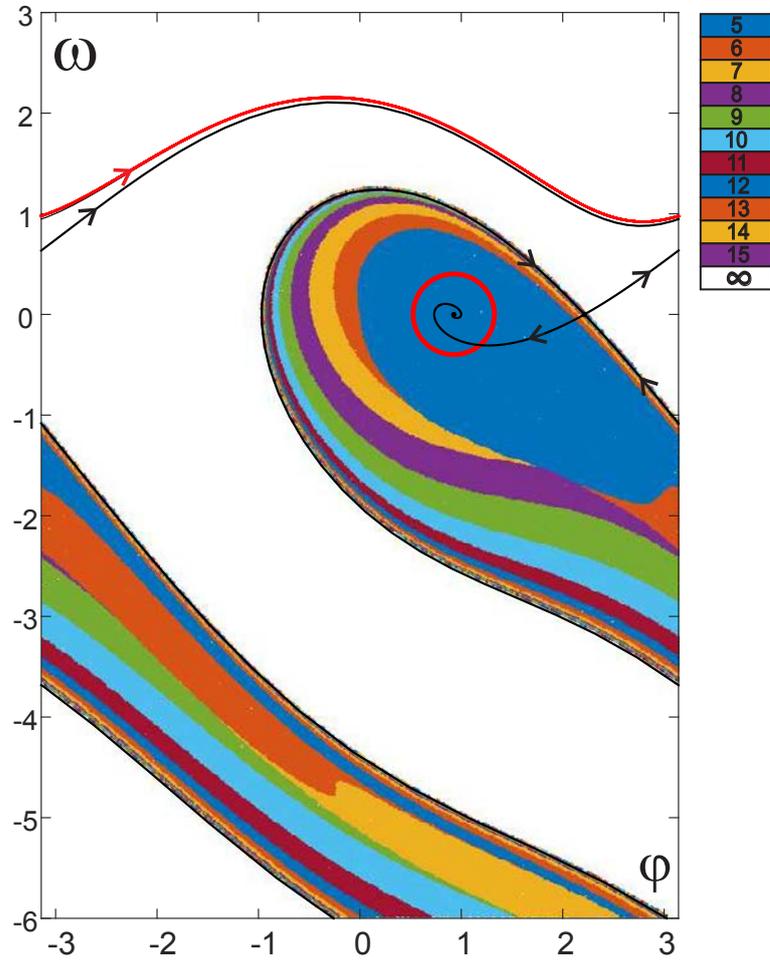


Рис. 1.10. Фазовая плоскость классического маятника (1.22) с параметрами  $\alpha = 0.5$ ,  $P = 0.8$ ,  $K = 1$ . Цветом означены значения времени возврата  $T_\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0.4$  (см. легенду). Области со всеми возможными конечными временами возврата составляют бассейн притяжения состояния равновесия.

Красный кружок радиуса  $\varepsilon$  окружает состояние равновесия.

$$B_\tau = M_\tau/M, \quad (1.32)$$

где  $M$  - общее количество протестированных возмущений (число экспериментов), а  $M_{\tau}$  - количество возмущений со временем возврата меньше, чем  $\tau$ .

Теперь обратимся к проблеме численной оценки интервального порога устойчивости. По сути, нахождение интервального порога устойчивости является решением проблемы оптимизации с ограничением

$$g(x) \rightarrow \min \text{ subject to } h(x) \geq \tau, \quad (1.33)$$

где  $g(x)$  - расстояние от  $x$  до аттрактора, а  $h(x) \equiv T_\varepsilon(x)$ . Литература, посвященная проблемам оптимизации с ограничением, предлагает различные численные методы [65, 168, 286], которые не рассматриваются в данной работе. Вместо этого мы обсудим особенность функции  $h(x)$ , которая может быть серьезным препятствием для численного решения задачи оптимизации с ограничениями (1.33). А именно, эта функция может быть *разрывной* по отношению к состоянию системы  $x$ .

Чтобы понять это неожиданное явление, рассмотрим двумерную систему, изображенную на Рис. 1.11(а). Система обладает единственным устойчивым состоянием  $A$ , и мы выбираем окрестность  $\varepsilon$ -, окружающую ее, как показано красным кружком. Отметим, что в точках  $D$  и  $E$  траектории соприкасаются с окружностью, а траектории, начинающиеся с дуги  $DE$ , покидают окружность. Однако, поскольку  $A$  является аттрактором, а окрестность принадлежит его бассейну, траектории возвращаются обратно в круг позже. Таким

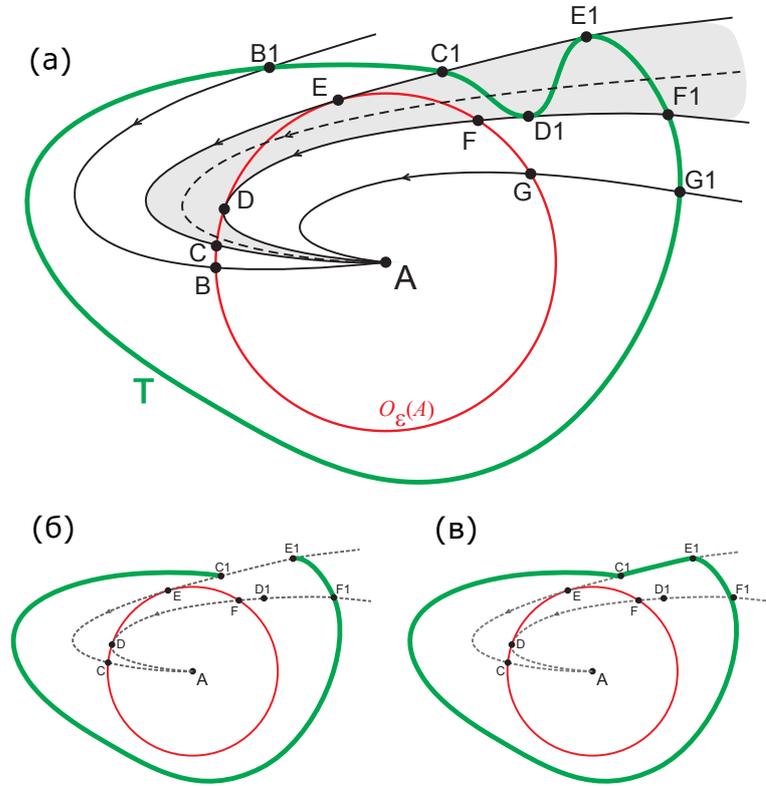


Рис. 1.11. Пример двумерной динамической системы с разрывной зависимостью времени возврата от координаты точки. (а) Фазовый портрет системы вблизи состояния равновесия  $A$ : траектории внутри серого сектора (показаны пунктиром) пересекают окружность трижды тогда как остальные – единожды. Красным кругом обозначена  $\varepsilon$ -окрестность аттрактора, зеленая замкнутая кривая – ее образ в обратном времени. (б) Зеленая кривая – множество точек с  $T_\varepsilon = \tau$ , имеющее разрывы в точках  $C_1$  и  $E_1$ . (в) Зеленая замкнутая кривая – множество точек с  $R_\tau = \varepsilon$ : точки  $C_1$  и  $E_1$  соединены траекторией системы.

образом, траектории из серого сектора на Рис. 1.11(а) пересекают окружность три раза: в дуге  $EF$ , в дуге  $DE$  и в дуге  $CD$ . Другие траектории пересекают окружность только один раз.

Построим теперь множество точек в фазовом пространстве, время возврата которых равно  $\tau$ . На первый взгляд кажется, что для этого можно взять множество точек на окружности и проинтегрировать систему в обратном времени в течение времени  $\tau$ . При этом окружность отображается на некоторую замкнутую кривую  $T$ , и каждая точка  $T$  возвращается к окружности за время  $\tau$ . Кажется, это гарантирует, что время возврата каждой точки на  $T$  равно  $\tau$ . Однако это верно только для траекторий вне серого сектора, которые пересекают окружность только один раз. Ситуация внутри серого сектора более сложная, поскольку у точек  $T$  время возврата может быть меньше. Действительно, траектории, начинающиеся с интервалов  $C_1D_1$  и  $D_1E_1$ , впервые пересекают окружность в моменты, предшествующие  $\tau$ . Таким образом, время возврата равно  $\tau$  только для точек в интервале  $E_1F_1$ . Это означает, что множество точек с временем возврата  $\tau$  является только частью замкнутой кривой  $T$ , как показано на Рис. 1.11(б).

Таким образом, время возврата действительно может быть разрывной функцией в фазовом пространстве, что вызывает значительные трудности для задачи оптимизации с ограничениями. Очевидный способ избежать разрыва времени возврата – выбрать строго поглощающую окрестность аттрактора, что исключило бы касание траекторий системы. Однако это практически невозможно для сложных динамических систем. Поэтому был предложен другой подход, а именно выбор другой функции ограничения, которая тесно связана с  $\tau$ , но не идентична времени возврата. А именно, было введено

понятие *радиус возврата*  $R_\tau$  точки  $x$  из бассейна притяжения как

$$R_\tau(x) = \inf \{ \text{dist} (F_t x, A) \mid t \in [0; \tau] \},$$

то есть минимальное расстояние до аттрактора, достигаемое за интервал времени  $\tau$ . Заметим, что радиус возврата зависит от значения  $\tau$ , а также естественно связан со временем возврата. А именно, легко показать, что из  $T_\varepsilon(x) = \tau$  следует  $R_\tau(x) = \varepsilon$ . Однако обратное не всегда верно, как показано на Рис. 1.11(в). Действительно, траектория, начинающаяся с точки  $E_1$ , касается окружности в точке  $E$ , а затем пересекает ее в точке  $C$ . Это означает, что если начальная точка  $x$  находится на этой траектории между точками  $E_1$  и  $C_1$ , минимальное расстояние до аттрактора за промежуток времени  $\tau$  достигается в точке  $E$  и равно  $\varepsilon$ . Следовательно, радиус возврата  $R_\tau$  равен  $\varepsilon$  для всех этих точек, а множество точек с  $R_\tau = \varepsilon$  состоит из множества точек с  $T_\varepsilon = \tau$ , дополненного отрезком траектории  $E_1 C_1$ , как показано на Рис. 1.11(в).

Таким образом, в отличие от времени возврата, радиус возврата непрерывен в фазовом пространстве. Интересным вопросом является связь между радиусом возврата  $R_\tau$  и временем возврата  $T_\varepsilon$  в областях, где последнее является разрывным. На кривой  $C_1 E_1$  на Рис. 1.11(в),  $R_\tau(x) = \varepsilon$ , но  $T_\varepsilon(x) \neq \tau$ . Однако легко увидеть, что эта кривая разделяет области с  $T_\varepsilon(x) > \tau$  (над кривой) и  $T_\varepsilon(x) < \tau$  (под кривой).

Можно показать, что для произвольной динамической системы верно следующее: радиус возврата (а) является непрерывной функцией в фазовом пространстве, а (б) вблизи каждой точки с  $R_\tau(x) = \varepsilon$  существуют точки как с  $T_\varepsilon(x) > \tau$ , так и с  $T_\varepsilon(x) < \tau$ .

Чтобы доказать положение (а), рассмотрим функцию  $f_x(t) = \text{dist}(F_t x, A)$ , где  $x$  рассматривается как параметр. Тогда радиус возврата  $R_\tau(x)$  равен минимуму  $f_x(t)$  на интервале  $t \in [0; \tau]$ . Из непрерывности  $f_x(t)$  по параметру  $x$  следует результат. Чтобы доказать положение (б), рассмотрим ту же функцию и предположим, что она достигает минимума при  $t = T$  и равна  $R_\tau(x) = \text{dist}(F_T x, A) = \varepsilon$ . Рассмотрим множество точек, расстояние до аттрактора которых равно  $\varepsilon$ . В точке  $y = F_T x$  траектория либо пересекает окружность в поперечном направлении, либо соприкасается с ней. В первом случае точки с временем возврата, большим (меньшим), чем  $\tau$ , можно найти вблизи точки  $x$  вдоль той же траектории. А именно, точки  $x_1 = F_\Delta x$  имеют времена возврата больше (меньше), чем  $\tau$  для  $\Delta \rightarrow -0$  ( $\Delta \rightarrow +0$ ). В последнем случае всегда можно выбрать точку  $y_1$ , близкую к  $y$  вне (внутри) круга. Тогда время возврата точки  $x_1 = F_{-T} y_1$  больше (меньше), чем  $\tau$ . Из непрерывности отображения  $F_t$  следует, что  $x_1$  близко к  $x$ .

Благодаря непрерывности радиус возврата является более удобным вариантом функции ограничения в задаче оптимизации с ограничениями, связанной с поиском интервального порога устойчивости. А именно, вместо решения (1.33) можно определить интервальный порог устойчивости путем решения модифицированной задачи

$$g(x) \rightarrow \min \text{ subject to } h(x) \geq \varepsilon, \quad (1.34)$$

где  $g(x)$  та же, но  $h(x) \equiv R_\tau(x)$ . В этом случае функция ограничения является непрерывной, что значительно облегчает численное решение. Поскольку  $h(x)$  непрерывна, а  $g(x)$  не имеет локальных минимумов вне аттрактора, решение (1.34) является точкой на границе области ограничения, то есть с

$R_\tau(x) = \varepsilon$ . Существование точек с  $T_\varepsilon > \tau$  в малой окрестности гарантирует, что найденное решение соответствует интервальному порогу устойчивости.

Был разработан алгоритм количественного определения интервального порога устойчивости, включающий в себя два этапа. (а) Сначала ищется точка с  $R_\tau(x) = \varepsilon$ , начиная со случайной точки в окрестности аттрактора и удаляясь от него. (б) Как только точка найдена, вычисляется градиент  $\nabla R_\tau$  и строится нормальная к нему гиперплоскость в фазовом пространстве. Эта гиперплоскость является локальным приближением изоповерхности  $R_\tau = \varepsilon$  в фазовом пространстве. На этой гиперсфере делается шаг в направлении к аттрактору. Процедура повторяется до тех пор, пока не будет достигнут локальный минимум расстояния  $g(x)$ . Начиная с разных точек, алгоритм сходится к различным локальным минимумам, и их сравнение дает оценку интервального порога устойчивости.

**1.3.3. Примеры применения подхода на основе интервальной устойчивости** В этом разделе мы применяем описанные методы исследования интервальной устойчивости к различным динамическим системам. Сначала в иллюстративных целях рассмотрим классический маятник (1.22), фазовый портрет которого изображен на Рис. 1.10.

Численная оценка интервальной бассейновой устойчивости для (1.22) показана на Рис. 1.12. Класс возмущенных состояний был определен как  $X_P = \{\varphi, y \mid -\pi \leq \varphi \leq \pi, -6 \leq y \leq 3\}$ , где  $y \equiv d\varphi/dt$ . Рис. 1.12(а) иллюстрирует зависимость интервальной бассейновой устойчивости от времени возврата  $\tau$ , тогда как на Рис. 1.12(б) текущая оценка показана в зависимости от количества использованных точек  $M$ . Видно, что полученная оценка насы-

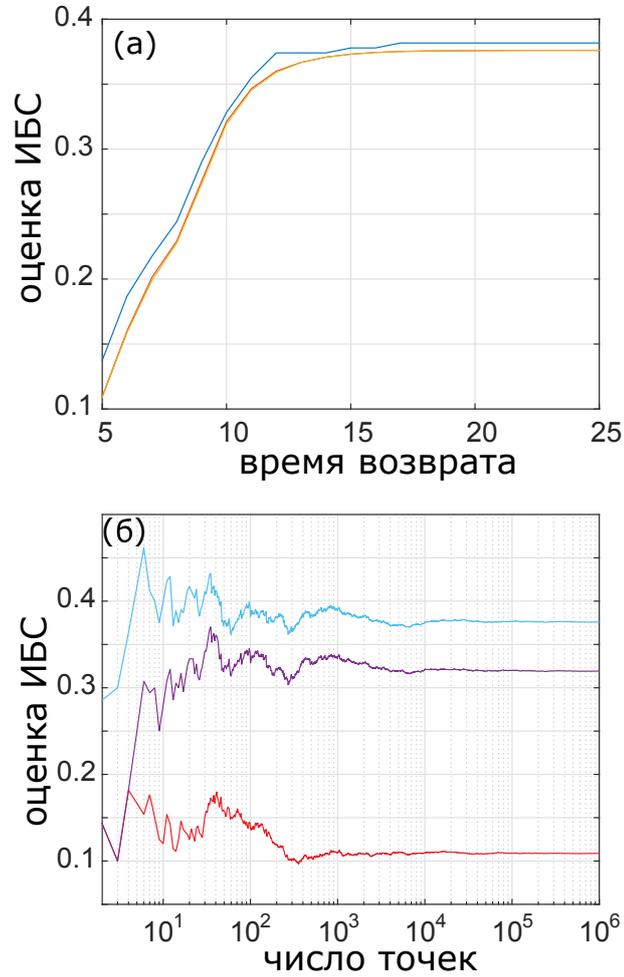


Рис. 1.12. Численная оценка интервальной бассейновой устойчивости маятника (1.22) в зависимости от (а) времени возврата  $\tau$  для различных значений  $M$ , сверху вниз:  $M = 10^2$ ,  $M = 10^4$ ,  $M = 10^6$ ; (б) в зависимости от числа точек  $M$  для различных значений  $\tau$ , сверху вниз:  $\tau = 5$ ,  $\tau = 10$ ,  $\tau = 20$ .

щается как для больших  $\tau$ , так и для больших  $M$ . Для достаточно большого  $M$  числовая оценка сходится к реальному значению  $B_\tau$ , определенному как (1.30). Для достаточно большого  $\tau$  значение  $B_\tau$  сходится к (асимптотической) бассейновой устойчивости  $B = \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_\tau$ . Заметим, что это «двойное насыщение» оценки (1.32) предоставляет простой метод для быстрой и точной оценки (асимптотической) бассейновой устойчивости. А именно, для этого нужно последовательно увеличивать время возврата  $\tau$  и количество испытаний  $M$ , вычисляя отношение  $M_\tau/M$  на каждом шаге. Когда насыщение достигается как по  $M$ , так и по  $\tau$ , полученная оценка близка к реальному значению  $B$ .

На Рис. 1.13 проиллюстрирована работа алгоритма количественного определения интервального порога устойчивости. Алгоритм начинает со случайных точек (из которых показаны только две), движется вдоль изоповерхности  $R_\tau = \varepsilon$  и сходится к локальным минимумам расстояния до аттрактора. Между двумя найденными локальными минимумами тот, который ближе к аттрактору, соответствует порогу. На Рис. 1.14 полученное значение  $\sigma_\tau$  изображено в зависимости от длины интервала  $\tau$ . Обратите внимание, что для достаточно большого  $\tau$  значение  $\sigma_\tau$  насыщается и сходится к (асимптотическому) порогу устойчивости  $\sigma = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_\tau$ .

В качестве следующего примера рассмотрим сеть связанных маятников

$$\frac{d^2\varphi_i}{dt^2} = -\alpha \frac{d\varphi_i}{dt} + P_i + \sum_{j=1}^N K_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i). \quad (1.35)$$

Эта система также часто рассматривается как концептуальная модель электрических сетей, то есть сетей подключенных генераторов и потребителей электроэнергии [224, 303]. В этом контексте  $\varphi_i$  – угловая переменная,

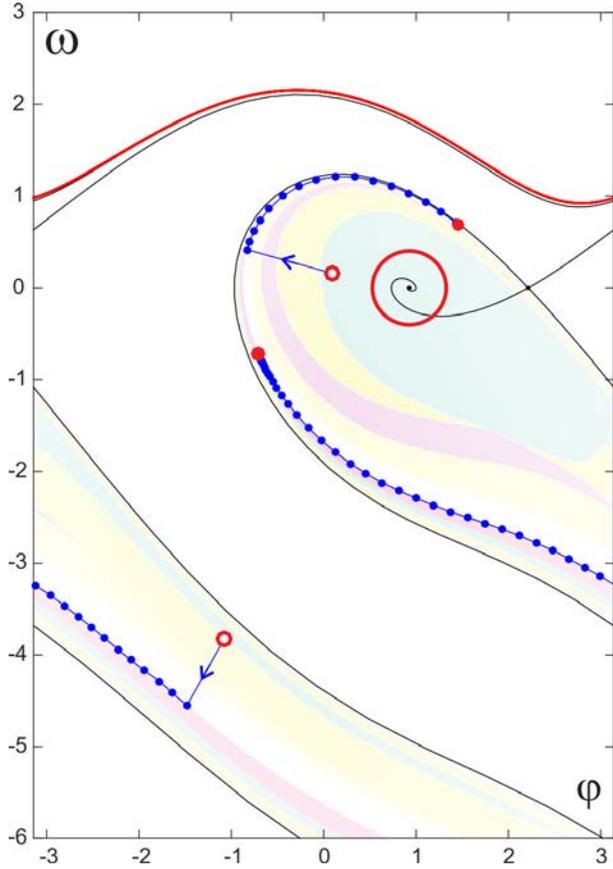


Рис. 1.13. Алгоритм вычисления интервального порога устойчивости на примере маятника (1.22). Полые кружки – стартовые точки, синие соединенные кружки – шаги алгоритма, красные кружки – найденные локальные минимумы дистанции.

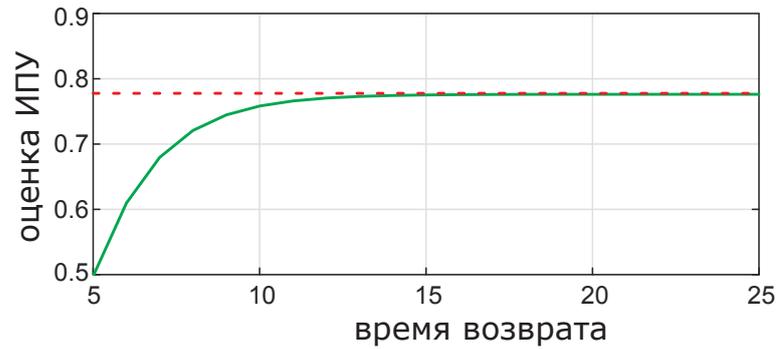


Рис. 1.14. Интервальный порог устойчивости матника (1.22) в зависимости от времени возврата  $\tau$ . При больших временах возврата наблюдается сходимость к (асимптотическому) порогу устойчивости (пунктирная линия).

описывающая положение ротора,  $\alpha$  – параметр диссипации,  $P_i$  – электрическая мощность, произведенная или потребленная данным узлом  $i$ , в то время как  $K_{ij}$  характеризует пропускную способность линии передачи между двумя узлами  $i$  и  $j$ . Здесь мы анализируем сеть из  $N = 10$  узлов, каждый из которых случайным образом назначается генератором или потребителем. Узлы организованы в регулярное кольцо, каждое из которых связано с двумя соседями с каждой стороны (Рис. 1.15(а)). Кроме того, мы устанавливаем  $P_i = 1$  для генераторов и  $P_i = -1$  для потребителей, и равные пропускные способности линий передачи  $K_{ij} = K = 0.55$  для всех подключенных узлов. Для этих параметров и всех значений  $\alpha > 0$  сеть демонстрирует бистабильность с двумя сосуществующими динамическими режимами. Первый – это синхронизация между всеми генераторами, которые в этом случае вращаются с одинаковой частотой и с фиксированными фазовыми сдвигами. В контексте энергосетей этот синхронизированный режим работы сети является желательным. Вторым режим – асинхронный, соответствующий взаимному вращению генераторов и неисправности энергосистемы. Два режима сети показаны на Рис. 1.15

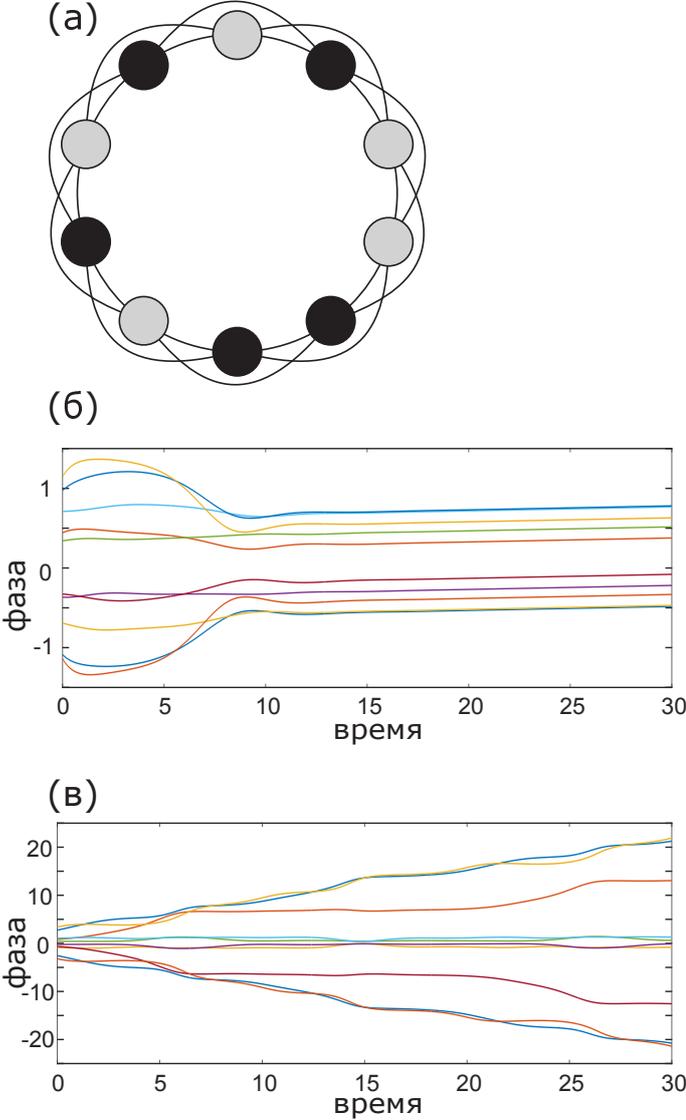


Рис. 1.15. (а) Схема сети (1.35): генераторы изображены черными кружками, потребители серыми. (б) Синхронная и (в) асинхронная динамика сети. Параметры для обоих случаев:  $K = 0.55$ ,  $\alpha = 0.5$ , то есть система бистабильна.

(б) и (в).

Изучим интервальную устойчивость синхронизированного состояния сети. На Рис. 1.16 (а) приведен график интервального порога устойчивости в зависимости от параметра  $\alpha$  для различных значений времени возврата  $\tau$ . Заметим, что для больших  $\tau$  значение  $\sigma_\tau$  насыщается до постоянного значения, равного (асимптотическому) порогу устойчивости  $\sigma$  (для малых  $\alpha$  насыщение имеет место для больших  $\tau$ , данные не показаны). Этот график демонстрирует, как  $\sigma_\tau$  может использоваться для определения  $\sigma$ . А именно,  $\sigma_\tau$  следует вычислять для увеличивающихся значений  $\tau$  до достижения насыщения.

Таким образом, при больших временах возврата интервальная устойчивость переходит к асимптотической устойчивости. Напротив, для малых времен возврата интервальная устойчивость связана с линейной устойчивостью, поскольку динамика вблизи аттрактора является линейной. А именно, в малой окрестности аттрактора сходимость траекторий определяется наибольшим ненулевым показателем Ляпунова  $\lambda$ , а расстояние до аттрактора уменьшается как  $d(t) \sim \exp(\lambda t)$ . Это позволяет оценить интервальный порог устойчивости как  $\sigma_\tau \sim \varepsilon \exp(-\lambda \tau)$  для достаточно малых  $\varepsilon$  и  $\tau$ . Линии, соответствующие этим оценкам, показаны на Рис. 1.16(б) пунктирными линиями. Точное значение  $\sigma_\tau$  зависит от формы выбранной окрестности и направлений векторов, связанных с различными показателями Ляпунова.

Рассмотрим точки в глобальном фазовом пространстве системы, связанные с интервальным порогом устойчивости. По определению, это самые близкие точки к аттрактору, для которых время возврата превышает  $\tau$ . Возмущения, направленные от аттрактора к этим точкам, являются наиболее опасными для системы. В случае динамической сети координаты этой точки соот-

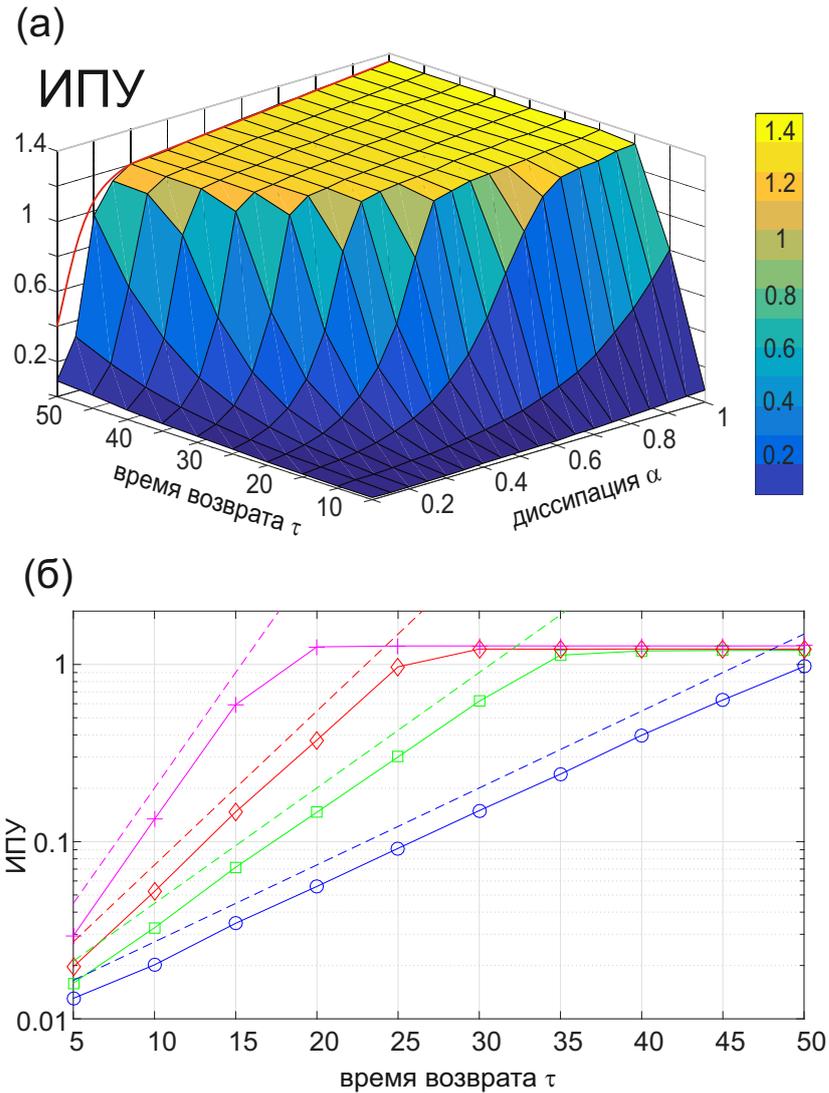


Рис. 1.16. (а) Интервальный порог устойчивости системы (1.35) в зависимости от параметра диссипации  $\alpha$  и времени возврата  $\tau$ . (б) ИПУ в зависимости от времени возврата для  $\alpha = 0.1$  (синие кружки),  $\alpha = 0.2$  (зеленые квадраты),  $\alpha = 0.3$  (красные ромбы) and  $\alpha = 0.4$  (зеленые крестики). Пунктирными линиями показаны наклоны, соответствующие линейным оценкам. При больших временах возврата ИПУ сходится к (асимптотическому) порогу устойчивости, тогда как для малых времен возврата его значение задается линейным спектром аттрактора.

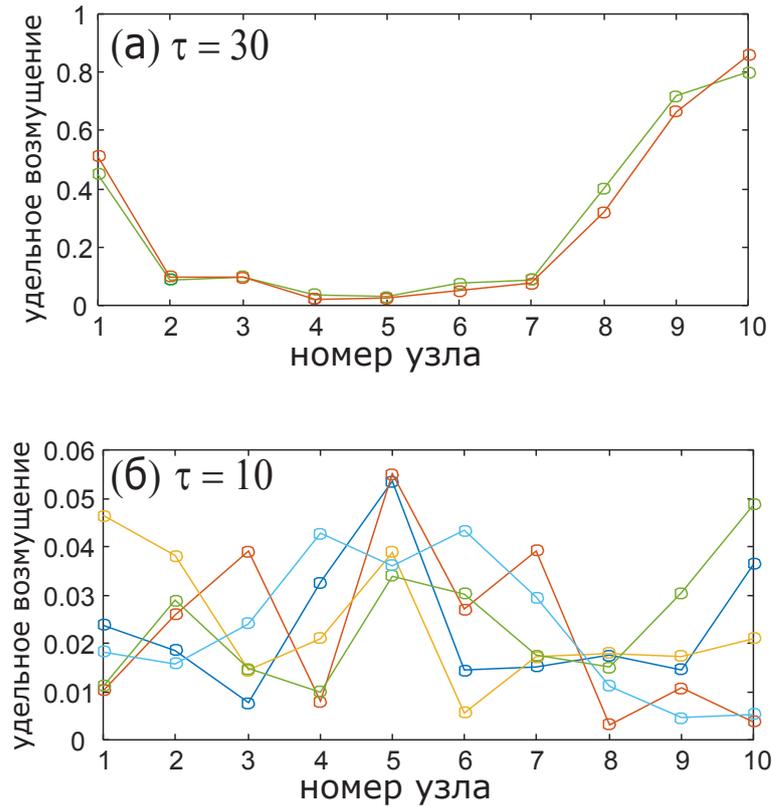


Рис. 1.17. Критические возмущения сети (1.35), найденные алгоритмом для  
(а)  $\tau = 30$  и (б)  $\tau = 10$ .

ветствуют величине локальных возмущений, приложенных к каждому узлу сети.

Критические возмущения проиллюстрированы на Рис. 1.17, где показана величина локального возмущения в зависимости от номера узла. На каждом графике несколько критических возмущений, найденных для разных начальных точек, нанесены разными цветами. Обратите внимание, что ситуация отличается для малых и больших временем возврата. При большом времени возврата  $\tau = 30$  алгоритм, начинающийся с разных точек, сходится к близким точкам, что свидетельствует о существовании одного ярко выраженного минимума в глобальном фазовом пространстве. Критическое возмущение затрагивает в основном узлы с номерами 9 и 10, которые возмущены наиболее

сильно. В отличие от этого, для малого времени возврата  $\tau = 10$  алгоритм сходится к множеству различных точек с близкими расстояниями до аттрактора. Это означает, что многие различные направления возмущений одинаково опасны для сети. Предполагаемая причина этого может быть понята из рассмотрения линейной динамики вблизи аттрактора. Как было показано выше, он определяет интервальный порог устойчивости для малых  $\tau$ . В случае сети (1.35) спектр синхронизированного состояния включает много равных показателей Ляпунова из-за высокой симметрии сети. Это говорит о наличии множества направлений в фазовом пространстве, в которых траектории сходятся с одинаковой скоростью.

#### 1.4. Пороги переключения мультистабильных динамических систем под внешним воздействием

Описанные в предыдущих двух разделах подходы направлены на описание области притяжения одного аттрактора, рассматриваемого как «желательное» состояние системы. В этом контексте измерения размера и формы бассейна помогают понять, сохраняется ли желаемое состояние при внешних возмущениях. Выведение системы из бассейна желаемого аттрактора считается недопустимым, независимо от того, в какое состояние она попадает впоследствии. Однако в мультистабильных системах может не быть четкого различия между «желательным» и «нежелательным» состояниями. Например, в задаче мультистабильного восприятия неоднозначного сенсорного стимула ни одно из состояний восприятия не может считаться «правильным» [331]. В этом контексте может быть важно не только предсказать факт переключения на другой аттрактор, вызванный возмущением, но и знать, на какой именно аттрактор переключается система. При этом решающее значение имеют не только размер и форма, но и взаимное расположение бассейнов.

В данном разделе представлена новая концепция для характеристики мультистабильных динамических систем, так называемые пороги переключения. Порог переключения – это величина, характеризующая взаимное расположение двух аттракторов. Он равен минимальному расстоянию между одним аттрактором и бассейном другого. С физической точки зрения эта величина соответствует минимальной амплитуде импульсного возмущения, которое может переключить систему с одного аттрактора на другой. Продемонстрировано, что порог переключения может быть определен как реше-

ние задачи оптимизации с ограничениями, и предложен численный алгоритм оценки этой величины для широкого класса динамических систем. Показано, что значения порогов переключения являются важными характеристиками мультистабильной системы, на основе которых могут быть построены оптимальные стратегии управления ее динамикой. Более того, понятие порогов переключения может помочь предсказать динамику системы при различных внешних воздействиях, включая стохастические.

**1.4.1. Определение и вычисление порога переключения** Разработанная здесь концепция подходит для динамических систем как с непрерывным, так и с дискретным временем. Для общности мы определяем динамическую систему как отображение потока

$$F_\tau : x(t) \mapsto x(t + \tau), \quad (1.36)$$

где  $x \in \mathbb{R}^N$  – состояние системы, а  $t$  – текущее время, действительное для систем с непрерывным временем и целое для систем с дискретным временем. Мы предполагаем, что система (1.36) обладает как минимум двумя различными аттракторами:  $A_1$  и  $A_2$ . Тогда бассейнами этих аттракторов будут множества сходящихся к ним состояний, т. е.

$$B_j = \left\{ x \mid \lim_{\tau \rightarrow \infty} \text{dist}(F_\tau x, A_j) = 0 \right\}. \quad (1.37)$$

Предположим, что система изначально была помещена в бассейн  $B_1$ , так что она сошла к первому аттрактору, и ее текущее состояние  $x_1 \in A_1$  (Рис. 1.18(а)). Рассмотрим мгновенное импульсное возмущение  $\mathbf{P}$ , приложенное к системе и меняющее ее состояние на  $x_2 = x_1 + \mathbf{P}$ . Тогда можно сфор-

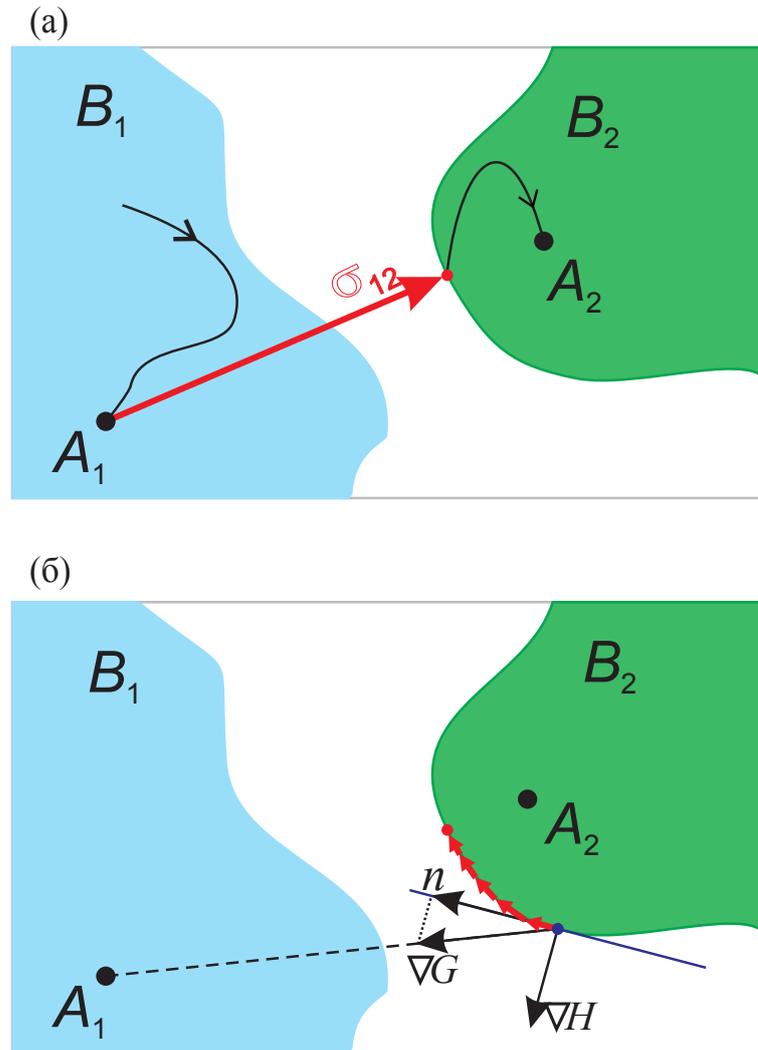


Рис. 1.18. Определение и вычисление порога переключения. (а) Фазовый портрет мультистабильной динамической системы с двумя аттракторами  $A_1$  и  $A_2$ , имеющими бассейны притяжения  $B_1$  и  $B_2$ . Порог переключения  $\sigma_{12}$  равен минимальной амплитуде импульсного возмущения, способного переключить систему из  $A_1$  в  $A_2$ , то есть минимальному расстоянию между  $A_1$  и границей  $B_2$ . (б) Иллюстрация работы алгоритма для определения порога переключения. Начиная со случайной точки на границе бассейна  $B_2$ , алгоритм совершает шаги вдоль границы в направлении, минимизирующем дистанцию до  $A_1$ .

мулировать проблему определения минимальной амплитуды  $|\mathbf{P}|$ , при которой это возмущение может переключить систему на другой аттрактор  $A_2$ . Эту минимальную амплитуду мы будем называть *порогом переключения*  $\sigma_{12}$  между аттракторами  $A_1$  и  $A_2$ . Очевидно, что система сходится к  $A_2$  после возмущения тогда и только тогда, когда возмущенное состояние  $x_2$  принадлежит бассейну  $B_2$ . Следовательно, минимальное возмущение  $\mathbf{P} = x_2 - x_1$  соответствует минимальному расстоянию между парой точки  $x_1$  и  $x_2$ , одна из которых лежит на аттракторе  $A_1$ , а другая - в бассейне  $B_2$ . Другими словами, это не что иное, как расстояние между аттрактором  $A_1$  и бассейном  $B_2$ :

$$\sigma_{1,2} = \inf \{ \text{dist}(x_1, x_2) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in B_2 \}. \quad (1.38)$$

Для разработки численного алгоритма оценки порога переключения мы формулируем его как задачу оптимизации с ограничениями. Обозначим  $G(x) = \text{dist}(x, A_1)$  функцию, определяющую расстояние от начального аттрактора, а  $H(x) = \text{dist}(F_\tau x, A_2)$  расстояние до целевого аттрактора по истечении времени  $\tau$ . Тогда для достаточно больших  $\tau$  и достаточно малых  $\epsilon$  бассейн  $B_2$  можно аппроксимировать множеством

$$\overline{B}_2 = \{x \mid H(x) \leq \epsilon\}, \quad (1.39)$$

состоящим из точек, сходящихся к  $\epsilon$ -окрестности целевого аттрактора  $A_2$  за время  $\tau$ . Тогда порог переключения  $\sigma_{12}$  является решением задачи оптимизации с ограничением

$$G(x) \rightarrow \min \quad \text{subject to } H(x) \leq \epsilon. \quad (1.40)$$

Предложен численный алгоритм решения задачи (1.40) путем комби-

нации локального градиентного поиска и глобального случайного поиска (Рис. 1.18(б)). Алгоритм показывает хорошую эффективность для широкого круга систем с гладкими границами бассейнов притяжения (для динамических систем с негладкими, например фрактальными границами бассейнов предлагаемый метод неприменим, однако определение порога переключения остается в силе). Алгоритм стартует со случайной точки  $x_0$  и движется по градиенту функции ограничения  $\nabla H(x)$ , пока не достигнет точки с  $H(x) = \epsilon$  (ср. [68]). Обратите внимание, что изоповерхность  $H(x) = \epsilon$  аппроксимирует границу бассейна  $B_2$ , и решение (1.40), очевидно, лежит на этой границе. После достижения границы алгоритм начинает движение вдоль границы в направлении, минимизирующем функцию стоимости  $G(x)$ . Для этого он делает шаги в направлении  $-n$ , где  $n$  - проекция градиента  $\nabla G$  на касательную гиперплоскость к границе:

$$n = \nabla G - \frac{(\nabla G \cdot \nabla H)}{\|\nabla H\|^2} \nabla H. \quad (1.41)$$

Движение продолжается до тех пор, пока не будет достигнут локальный минимум функции стоимости. После нахождения локального минимума алгоритм пытается получить лучшие результаты путем случайного выбора начальных точек. Поиск завершается, если лучший результат не достигается за определенное количество попыток.

**1.4.2. Пороги переключения автогенератора с импульсной запаздывающей обратной связью** Далее мы применяем разработанный метод к различным многостабильным динамическим системам и демонстрируем его эффективность. Первый пример, который мы рассматриваем, – это

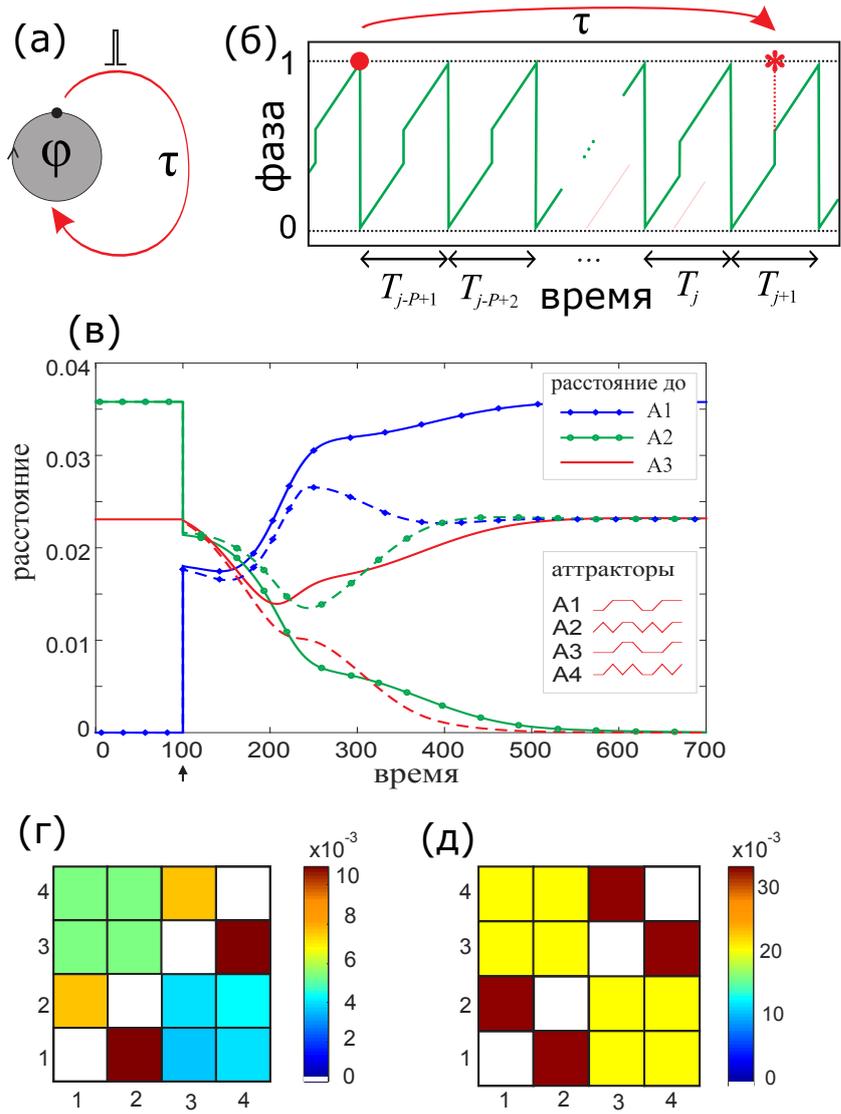


Рис. 1.19. Пороги переключения системы (1.42). (а) Схема системы. (б) Динамика фазы. (в) Динамика системы после внешнего возмущения в момент, отмеченный стрелкой: расстояние до трех различных аттракторов в зависимости от времени. Сплошная и пунктирная линии соответствуют двум различным амплитудам возмущения. Направление возмущения в обоих случаях соответствует порогу переключения, а его амплитуда на 1% больше (меньше) порога переключения для сплошных (пунктирных) линий. (г) Матрица переключений, элементы которой являются порогами переключения  $\sigma_{jk}$ . (д) Матрица расстояний между аттракторами системы.

автогенератор с импульсной запаздывающей обратной связью

$$\dot{\varphi} = \omega + Z(\varphi) \sum_{t_s} \delta(t - t_s - \tau). \quad (1.42)$$

Здесь  $\varphi$  – фаза генератора,  $\omega = 1$  – его собственная частота,  $Z(\varphi)$  – кривая перестановки фазы,  $\tau$  – задержка, а  $t_s$  – моменты, когда генератор испускает импульсы. При отсутствии обратной связи фаза нарастает равномерно, при достижении единичного значения она сбрасывается до нуля, и осциллятор излучает импульс. При добавлении обратной связи излученные импульсы отправляются в линию задержки, откуда они возвращаются на автогенератор после задержки  $\tau$ . Каждый импульс вызывает мгновенное изменение фазы  $\varphi \mapsto \varphi + Z(\varphi)$  (Рис. 1.19(а)).

Заметим, что хотя системы с задержкой по времени обычно имеют бесконечную размерность, в частном случае связи импульсов размерность конечна (Рис. 1.19(б)). Как будет показано в разделе 2.2., динамика автогенератора (1.42) может быть описана следующим дискретным отображением для интервалов между импульсами  $T_j$ :

$$T_{j+1} = 1 - Z \left( \tau - \sum_{k=j-P+1}^j \right), \quad (1.43)$$

где  $P$  – количество полных межимпульсных интервалов, укладывающихся в линию задержки. Отображение имеет размерность  $P$ , а фазовое пространство системы – это пространство, координатами которого являются последние  $P$  межспайковых интервалов  $(T_{j-P+1}, T_{j-P+2}, \dots, T_j)$ . Внешнее возмущение системы соответствует изменению последних  $P$  межспайковых интервалов до новых значений  $T'_j = T_j + \epsilon_j$ . Амплитуда возмущения определяется

как евклидово расстояние между начальным и возмущенным состояниями  $\epsilon = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \dots + \epsilon_P^2}$ .

Как будет показано в разделе 2.2., система (1.42) может демонстрировать высокую мультистабильность. В частности, если кривая переустановки фазы достаточно крутая, а задержка велика, возникают так называемые «дрожащие» решения, характеризующиеся длиннопериодическими последовательностями генерируемых интервалов между импульсами. Период каждого решения линейно растет с задержкой, а количество сосуществующих решений растет экспоненциально. Мы выбрали PRC  $Z(\varphi) = \kappa \sin^q(\pi\varphi)$  с  $\kappa = 0.1$  и  $q = 28$  и рассмотрели случай относительно небольшой задержки  $\tau = 4.32$ , при котором сосуществуют четыре различных устойчивых дрожащих решения. Каждое из этих решений имеет период  $P + 1 = 5$ , и соответствующие последовательности интервалов между всплесками показаны на вставке к Рис. 1.19(в).

С помощью описанного численного алгоритма были определены пороги переключения между каждой парой из четырех аттракторов. В результате получена матрица переключения, изображенная на Рис. 1.19(г). Ее элементы  $\sigma_{jk}$  являются порогами перехода с  $j$ -го аттрактора на  $k$ -й. Матрица переключения содержит важную информацию о взаимном расположении аттракторов и их бассейнов и позволяет оптимально управлять динамикой системы с помощью внешнего воздействия. Пример показан на Рис. 1.19в, где система возмущена стимулом, направление которого соответствует порогу переключения между первым и вторым аттракторами. Если амплитуда всего на один процент меньше порогового значения, переключения не происходит. Но при амплитуде стимула на один процент больше порога наблюдается устойчивое

переключение с начального аттрактора на целевой. Однако при такой амплитуде переключение происходит только в том случае, если направление стимула совпадает с оптимальным. Чтобы показать это, мы 1000 раз возмущали систему стимулом той же амплитуды, но случайного направления, и не смогли увидеть переключения (данные не показаны).

Отметим, что порог переключения напрямую не связан с расстоянием между аттракторами. Порог переключения – это расстояние от начального аттрактора до бассейна целевого аттрактора, а расстояние до самого целевого аттрактора может служить только для его оценки сверху. Чтобы проиллюстрировать это, на Рис. 1.19(д) приведена матрица расстояний между аттракторами  $d_{jk} = \text{dist}(A_j, A_k)$ . Хотя матрицы коррелированы, они явно различаются, и наиболее очевидное различие состоит в том, что пороговая матрица асимметрична.

**1.4.3. Пороги переключения сети Хопфилда** Концепция порога переключения может также применяться к более сложным системам, то есть к системам с более высокой размерностью, среди которых динамические сети являются наиболее очевидным примером. В фазовом пространстве сети разные координаты относятся к переменным, описывающим разные узлы. В этом контексте направление возмущения в фазовом пространстве определяет степень возмущения различных узлов: чем больше проекция на определенную координату, тем сильнее возмущается соответствующий узел.

Рассмотрим классическую сеть Хопфилда [150], которая состоит из  $N$  нейронов, описываемых их частотой срабатывания  $V_j$ , изменяющейся от 0 («не срабатывает») до 1 («срабатывает с максимальной частотой»). Связь между

нейронами задается матрицей связности  $T_{jk}$ , и состояние каждого нейрона изменяется в соответствии с уравнением

$$V_j \mapsto F \left( \sum_{k=1}^N T_{jk} V_k \right), \quad (1.44)$$

где  $F(\cdot)$  – функция активации. Все нейроны обновляются синхронно для исключения стохастичности, а также используется функция плавной активации  $F(x) = 1/(1 + e^{-\alpha x})$ , чтобы обеспечить непрерывность динамики относительно начальные условия. Параметр  $\alpha$  управляет крутизной функции усиления.

В оригинальной статье [150] сеть (1.44) была предложена в качестве модели ассоциативной памяти. Для хранения набора состояний  $V^s = (V_1^s, V_2^s, \dots, V_N^s)$ ,  $s = 1, \dots, n$  матрица связности устанавливается равной

$$T_{jk} = \sum_s (2V_j^s - 1)(2V_k^s - 1), \quad (1.45)$$

но с  $T_{jj} = 0$ . При такой связи каждое из состояний  $V^s$  является аттрактором сетевой динамики, если количество сохраненных состояний не слишком велико ( $n < 0,15N$ , как оценивается в [150]). Если исходное состояние сети достаточно близко к одному из сохраненных состояний, сеть спонтанно сходится к этому состоянию. Это свойство является проявлением ассоциативной или адресуемой по содержанию памяти: сеть извлекает сохраненный элемент после получения аналогичного. В этом контексте бассейн притяжения представляет собой набор элементов, которые сеть классифицирует как один из элементов, хранящихся в ее памяти.

Сеть Хопфилда – это мультистабильная система с отдельным аттрактором, соответствующим каждому из хранимых элементов. Более того, так называемые «бесмысленные» аттракторы, не имеющие соответствующих эле-

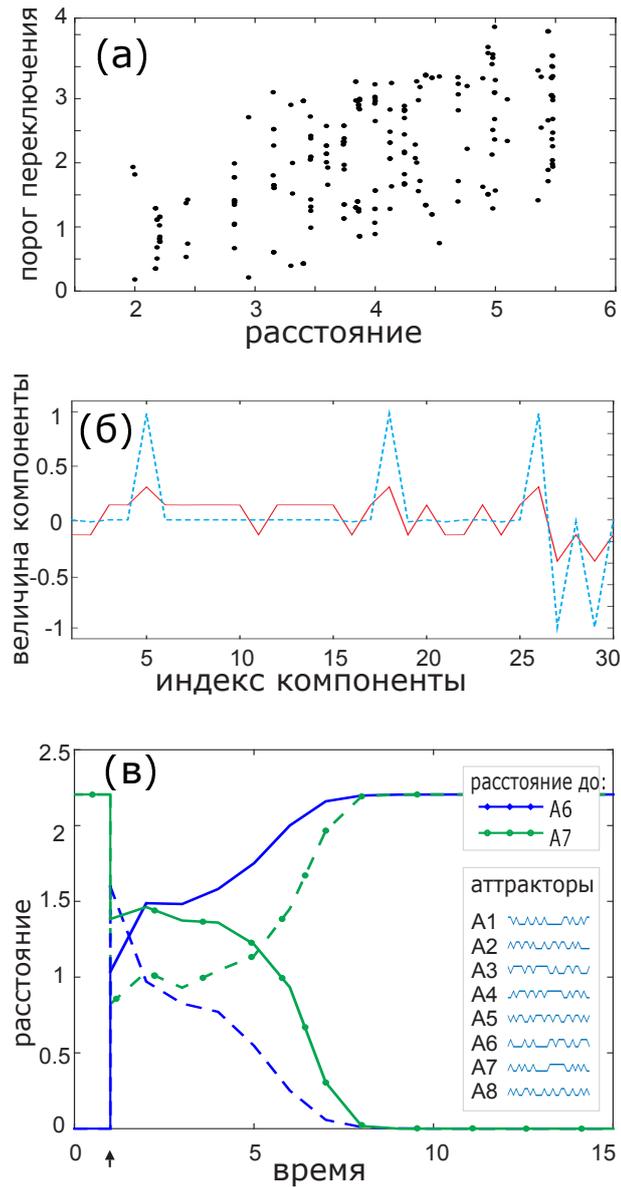


Рис. 1.20. Пороги переключения сети Хопфилда. (а) Порог переключения в зависимости от расстояния между аттракторами для различных сетей из  $N = 30$  нейронов с  $n = 3$  образами в памяти. (б) Динамика сети после внешнего возмущения, момент воздействия обозначен стрелкой. Расстояния до двух разных аттракторов построены в зависимости от времени, см. легенду. Сплошные линии – направление возмущения соответствует порогу переключения, амплитуда на 1% больше порога. Пунктирные линии – «прямое» направление возмущения, амплитуда на 35% больше порога. (в) Пороговое (сплошная линия) и «прямое» (пунктирная линия) возмущения.

ментов в памяти, также могут присутствовать в фазовом пространстве. Возмущение системы, находящейся на одном аттракторе, может переключить ее на другой. В контексте ассоциативной памяти возмущение соответствует искажению элемента, а переключение означает, что искажение настолько велико, что система не может распознать элемент. Таким образом, порог переключения становится важной характеристикой надежности памяти. Он определяет, до какой степени элемент может быть искажен, чтобы его все же можно было узнать. Кроме того, большое значение имеет направление порогового возмущения. Он указывает на наиболее важные особенности элемента: даже небольшое искажение этих особенностей делает элемент неузнаваемым.

Мы изучили сеть из  $N = 30$  нейронов, хранящих  $n = 3$  различных элементов. Для каждого набора элементов сеть обычно имеет  $2n = 6$  притягивающих состояний, три из которых близки к записанным элементам, и три близки к обратным им  $V^{s*} = 1 - V^s$ . При малых  $\alpha$  некоторые из упомянутых состояний могут дестабилизироваться, а при больших  $\alpha$  могут появиться другие аттракторы. Были рассчитаны пороги переключения для каждой пары аттракторов, используя стандартную Евклидову метрику

$$\text{dist}(V^a, V^b) = \sqrt{\sum_{j=1}^N (V_j^a - V_j^b)^2}. \quad (1.46)$$

Было сгенерировано случайным образом множество наборов элементов, состоящих из нулей и единиц, и была изучена статистика порогов переключения. Как ни странно, была обнаружена лишь ограниченная корреляция между порогами переключения и расстояниями между аттракторами, как показано на Рис. 1.20(а). Это наблюдение противоречит ожиданиям и озна-

чает, что степень искажения, из-за которого система путает один элемент с другим, определяется не только схожестью элементов. Еще одна нетривиальная особенность может быть обнаружена при анализе направлений возмущения, связанного с порогами переключения. Представим два состояния сети, в которых некоторые нейроны имеют одинаковую активность, а некоторые – разную. Самый очевидный способ переключения из одного состояния в другое – возмущать те нейроны, активность которых отличается, и не затрагивать другие. В фазовом пространстве это возмущение соответствует прямой, направленной из одного состояния в другое. Однако оказывается, что это направление возмущения часто оказывается неоптимальным. Пример показан на Рис. 1.20б, где возмущение переключения порога сравнивается с «прямым» возмущением, направленным от источника к целевому аттрактору. Хотя некоторая корреляция между этими возмущениями присутствует, очевидно, что они существенно различны. Как ни странно, пороговое возмущение предполагает стимуляцию нейронов, активность которых одинакова в обоих состояниях. Оптимальность порогового возмущения подтверждается Рис. 1.20в, где его влияние сравнивается с эффектом «прямого» возмущения. Хотя «прямое» возмущение имеет большую амплитуду, оно не приводит к переключению на целевой аттрактор, в отличие от порогового возмущения.

**1.4.4. Пороги переключения и стохастическое внешнее воздействие** Пороги переключения также могут быть полезны для изучения динамики мультистабильных систем под действием шума. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим простую двумерную систему

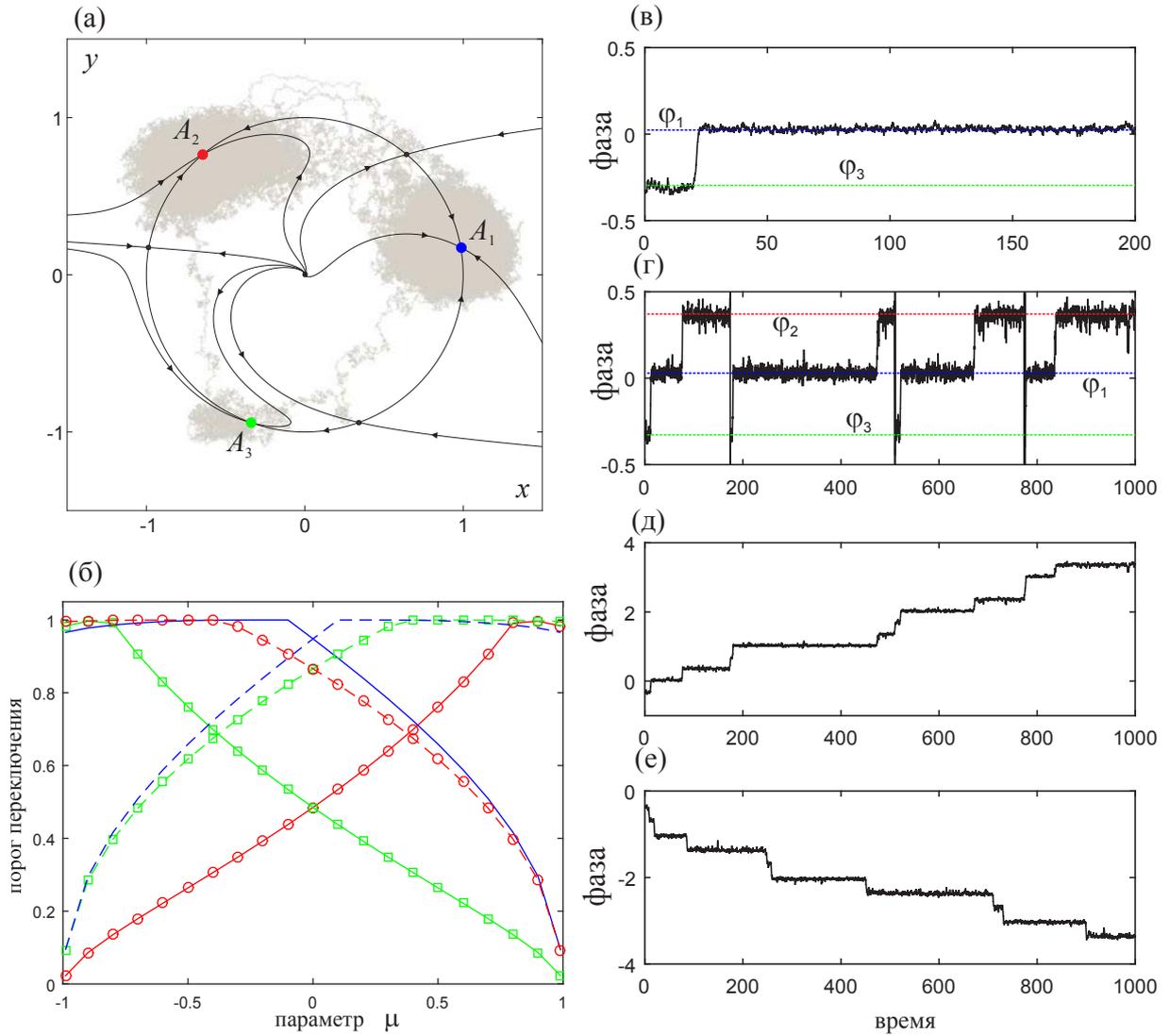


Рис. 1.21. (а) Фазовый портрет системы (1.47 - 1.48) без шума при  $\mu = 0.5$  и типичная траектория системы с шумом интенсивностью  $D = 0.063$ . (б) Пороги переключения в зависимости от параметра  $\mu$  для переключений с  $A_1$  на  $A_2$  (синяя сплошная линия), с  $A_1$  на  $A_3$  (синяя пунктирная линия), с  $A_2$  на  $A_1$  (красная сплошная линия и кружочки), от  $A_2$  до  $A_3$  (красная пунктирная линия и кружочки), от  $A_3$  до  $A_1$  (сплошная зеленая линия и квадраты), от  $A_3$  до  $A_2$  (зеленая пунктирная линия и квадраты). (в) - (е) Динамика фазы для  $\mu = 0.5$  и  $D = 0.029$  (в),  $\mu = 0.5$  и  $D = 0.073$  (г, д),  $\mu = -0.5$  и  $D = 0.073$  (е).

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x^2 - y^2) - y(\mu - 3y + 4y^3) + \sqrt{D}\xi(t), \quad (1.47)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - x^2 - y^2) + x(\mu - 3y + 4y^3) + \sqrt{D}\chi(t), \quad (1.48)$$

где  $\mu$  - управляющий параметр,  $D$  - интенсивность шума,  $\xi(t)$  и  $\chi(t)$  - два независимых источника белого шума с  $\langle \xi^2(t) \rangle = \langle \chi^2(t) \rangle = 1$ .

Сначала проанализируем динамику системы при отсутствии шума  $D = 0$ . При  $-1 < \mu < 1$  система имеет три устойчивых состояния равновесия, как показано на Рис. 1.21(а). Для удобства описания введем фазу  $\varphi \in [0; 2\pi]$  так, чтобы  $y/x = \tan \varphi$ , тогда каждое состояние равновесия соответствует определенной фазе  $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Пороги переключения могут быть рассчитаны для каждой пары аттракторов, и все шесть порогов переключения построены в зависимости от параметра  $\mu$  на Рис. 1.21(б). Заметим, что пороги переключения являются непрерывными функциями  $\mu$ , так как форма бассейнов притяжения плавно изменяется с изменением параметра, и также плавно меняются положения локальных минимумов расстояния до аттрактора. Это позволяет ускорить численный алгоритм за счет отслеживания локальных минимумов по параметру.

Теперь добавим шум и изучим, как он влияет на различные аттракторы системы. Напомним, что минимум порога переключения - это порог устойчивости аттрактора, который характеризует устойчивость аттрактора по отношению к сильному возмущению. Хотя шум представляет собой не импульсное, а, скорее, непрерывное возмущение, естественно ожидать, что порог устойчивости должен характеризовать устойчивость состояний хотя бы качественно. И это действительно так, как показано на Рис. 1.21(в-г). Заме-

тим, что разные аттракторы теряют устойчивость при разных уровнях шума. При  $D \approx 0.029$  состояние  $A_3$  явно неустойчиво, и система быстро покидает его окрестность. Однако состояния  $A_1$  и  $A_2$  по-прежнему стабильны, и для их дестабилизации требуется увеличить шум до  $D \approx 0.073$ . При таком сильном шуме все состояния становятся нестабильными, и система демонстрирует стохастическое переключение между ними. Это наблюдение согласуется с тем фактом, что порог устойчивости  $A_3$  примерно вдвое меньше, чем у  $A_1$  и  $A_2$ .

Также другие важные прогнозы могут быть сделаны о динамике системы, а именно о наиболее вероятных направлениях индуцированных шумом переходов. Чтобы лучше проиллюстрировать эти переходы, мы рассматриваем фазу как неограниченную переменную  $\varphi \in \mathbb{R}$ , а не ограниченную отрезком  $[0; 2\pi]$ . Тогда фаза увеличивается для переходов по часовой стрелке, а именно  $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ ,  $\varphi_2 \rightarrow \varphi_3$  и  $\varphi_3 \rightarrow \varphi_1$ , и уменьшается для переходов против часовой стрелки. На Рис. 1.21(д) проиллюстрирована динамика системы для тех же параметров, что и на Рис. 1.21(г), а именно  $\mu = 0.5$  и  $D = 0.073$ . Фаза систематически нарастает, а значит, переходы происходят преимущественно по часовой стрелке. Однако при отрицательных значениях  $\mu = -0.5$  фаза систематически уменьшается, а это означает, что переходы происходят преимущественно против часовой стрелки (Рис. 1.21(е)). Эту асимметрию можно объяснить значениями порогов переключения. Действительно, для  $\mu = 0,5$  пороги переключения для состояния  $A_1$  таковы, что  $\sigma_{1,2} < \sigma_{1,3}$ , поэтому шум, скорее всего, переключит состояние  $A_1$  в  $A_2$ , а не в  $A_3$ . Точно так же переход от  $A_2$  будет вероятен к  $A_3$ , а от  $A_3$  обратно к  $A_1$ . Таким образом, шум в основном вызывает переходы против часовой стрелки, и фаза растет. При  $\mu = -0.5$  соотношение между порогами переключения обратное, и переходы

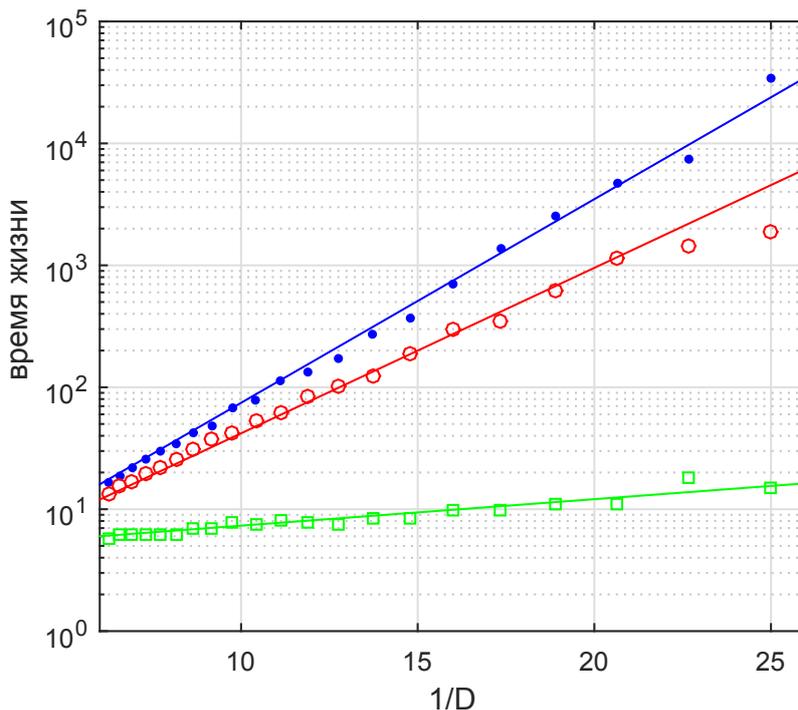


Рис. 1.22. Средние времена жизни различных состояний в зависимости от (обратной) интенсивности шума:  $A_1$  (синие точки),  $A_2$  (красные кружки) и  $A_3$  (зеленые квадраты). Прямые линии соответствуют зависимости  $T \sim \exp(\alpha/D)$ . Управляющий параметр  $\mu = 0.5$ .

в основном происходят по часовой стрелке.

Не только направления переходов, но и их частота сильно зависит от порогов переключения, как показано на Рис. 1.22. На этом рисунке показаны средние времена жизни различных состояний в зависимости от интенсивности шума  $D$ . При любой интенсивности шума система большую часть времени проводит около состояния  $A_1$ , меньше времени около  $A_2$  и гораздо меньше времени около  $A_3$ . Это наблюдение согласуется с тем фактом, что порог устойчивости максимален для  $A_1$  и минимален для  $A_3$ . Более того, среднее время жизни каждого состояния экспоненциально зависит от обратной ин-

тенсивности шума:  $T \sim \exp(\alpha/D)$ , тогда как коэффициенты  $\alpha$  различны для разных состояний и сильно коррелируют с порогами устойчивости.

## 1.5. Заключение к первой главе

В данной главе предложен ряд новых методов описания воздействия сильных импульсных сигналов на динамические системы.

В разделе 1.1. введена так называемая функция фазового отклика для систем с устойчивым предельным циклом. Концепция функции фазового отклика предлагает новый подход для моделирования стимулируемых или связанных автогенераторов. Он сохраняет преимущества стандартного подхода, основанного на кривой переустановки фазы: низкая размерность модели, вычислительная эффективность и возможность получения функции фазового отклика для произвольной автоколебательной системы. В то же время, подход на основе функции фазового отклика остается действительным для более сильной и более частой стимуляции и, таким образом, может описывать принципиально новые динамические эффекты. Последний пункт позволяет рассматривать функцию фазового отклика не только как приближение полных моделей, но также как отдельную модель для тестирования новых явлений и гипотез.

Обратим внимание, что термин «функция фазового отклика» использовался в более ранних работах в ином контексте. В [52] функция фазового отклика определяет изменение фазы в зависимости от текущей фазы и расстояния до предельного цикла. В работах [232, 233] функция фазового отклика определяет изменение фазы в зависимости от амплитуды стимула, но только для точек на предельном цикле. Важное отличие функции фазового отклика, представленной в настоящей работе, заключается в том, что она применима вне предельного цикла, но не использует непосредственно расстояние от него.

Это важное преимущество, поскольку информация о расстоянии часто недоступна, в то время как фаза может быть легко измерена. Представленная здесь функция фазового отклика нуждается только в информации о фазах, в которых подаются стимулы. Ответ на каждый стимул зависит от фаз, в которых поступили предыдущие стимулы, причем влияние более ранних стимулов экспоненциально падает со временем. Интересно, что этот вывод согласуется с экспериментальным результатом о том, что нервные клетки обладают экспоненциально затухающей памятью о прошлых стимулах [128, 309, 361].

Естественным применением функции фазового отклика является моделирование связанных осцилляторов [28, 127, 239, 357], таких как большие популяции нейронов [1, 67, 257, 396], ансамбли химических [55, 154, 338], электронных [304] или оптических [363] осцилляторов. Функция фазового отклика также может быть обобщена на случай импульсов различной амплитуды, что позволяет учитывать неоднородное распределение синаптических весов [339]. Задержки в связях также могут быть легко включены [98, 117, 345, 393]. Таким образом, функция фазового отклика обеспечивает эффективный инструмент для моделирования колебательных сетей, который может быть востребован в нейронауке и других областях.

В разделе 1.2. введена новая мера для описания устойчивости динамических систем относительно сильных внешних возмущений. Это порог устойчивости, который равен величине самого слабого возмущения, способного нарушить установившийся динамический режим. Порог устойчивости предоставляет важную информацию, поскольку гарантирует, что система выдержит любое возмущение меньшей величины. В фазовом пространстве порог устойчивости – это минимальное расстояние между аттрактором системы и

границей его бассейна притяжения. С этой точки зрения, порог устойчивости определяет «самое тонкое место» бассейна, и направление возмущения, соответствующее порогу устойчивости, является наиболее опасным для системы.

Для динамических сетей разные направления в многомерном фазовом пространстве связаны с возмущением разных узлов. Подход на основе порога устойчивости позволяет определить узлы, которые наиболее подвержены возмущениям. Применяя внешние возмущения к этим узлам, можно сравнительно легко нарушить работу сети. Однако иногда порогу устойчивости ассоциируется с возмущениями, затрагивающими несколько узлов. При таких обстоятельствах проще нарушить работу сети одновременным возмущением нескольких узлов, а не возмущением только одного из них.

Также предложен алгоритм вычисления порога устойчивости для произвольных динамических систем с гладкими границами бассейна притяжения и продемонстрирована его эффективность. Численный алгоритм может быть обобщен для более широкого класса систем. Известно, что границы бассейна для некоторых динамических систем могут быть негладкими и даже фрактальными [135]. В этом случае граница не может быть локально аппроксимирована тангенциальной гиперплоскостью, которая имеет решающее значение для определения направления движения по ней. Тем не менее, двигаться вдоль границы можно, предпринимая шаги фиксированной длины в случайном направлении. Шаг принимается, если он приближает точку к аттрактору и отклоняется в противном случае.

В разделе 1.3 предложена новая концепция устойчивости динамических систем к большим возмущениям – интервальная устойчивость. Возмущение динамической системы классифицируется как «безопасное», если возмущен-

ная система возвращается в небольшую окрестность аттрактора в заданный интервал времени. Естественно, интервальная устойчивость зависит от размера окрестности  $\varepsilon$  и временного интервала  $\tau$ . Эти параметры должны быть выбраны с учетом контекста исследования. Например, выбор  $\varepsilon$  может быть основан на том, каковы допустимые отклонения в работ системы, а выбор  $\tau$  может быть связан с максимально допустимой продолжительностью времени сбоя.

Введены количественные меры для характеристики интервальной устойчивости. Интервальная бассейновая устойчивость – это вероятность того, что возмущение из заранее определенного класса является безопасным. Интервальный порог устойчивости определяет минимальную величину небезопасного возмущения. С точки зрения фазового пространства интервальный порог устойчивости соответствует минимальному расстоянию между аттрактором и множеством «небезопасных» точек с временем возврата, большим, чем  $\tau$ . Направление, связанное с этой точкой, также играет важную роль, будучи наиболее опасным для системы.

Интервальная устойчивость является естественным мостом, заполняющим разрыв между линейной и асимптотической устойчивостью. А именно, для малых  $\varepsilon$  и  $\tau$  динамика возмущений линейна, а скорость их затухания определяется максимальным ненулевым показателем Ляпунова, поэтому интервальный порог связан с линейной устойчивостью аттрактора. Напротив, для больших  $\tau$  класс безопасных возмущений включает в себя весь бассейн притяжения, поэтому интервальный порог сходится к (асимптотическому) порогу устойчивости.

Предложены численные алгоритмы оценки интервальной бассейновой

устойчивости и интервального порога устойчивости для широкого класса динамических систем. Поскольку бассейновая устойчивость является вероятностной мерой, для ее оценки естественно использовать метод Монте-Карло. Напротив, интервальный порог устойчивости является детерминированной мерой, а именно решением проблемы оптимизации с ограничением. Решение этой проблемы приводит к неожиданной трудности – разрывности функции ограничения. Однако некоторая переформулировка проблемы позволяет избежать этой трудности. В отличие от случая асимптотической устойчивости, численная оценка мер интервальной устойчивости основывается на интегрировании динамической системы для конечного временного интервала  $\tau$ , что выигрышно с точки зрения скорости вычислений.

В разделе 1.4. предложена новая мера для характеристики мультистабильных систем – порог переключения. Он равен минимальной амплитуде импульсного стимула, который может переключить систему с одного аттрактора на другой. С точки зрения нелинейной динамики это значение соответствует минимальному расстоянию между исходным аттрактором и границей области притяжения целевого аттрактора. Величина порога переключения имеет важное значение для изучения реакции системы на внешний стимул, который может переключить систему с одного аттрактора на другой только в том случае, если его амплитуда больше порога.

Рассматривая все возможные пары аттракторов, можно построить матрицу переключений, которая состоит из всех порогов переключения. Эта матрица дает важную информацию о конфигурации и взаимном расположении бассейнов притяжения состояний системы. Она показывает, какие состояния более и менее устойчивы к внешнему возмущению, а также в какое состояние

система, вероятно, переключится поле возмущения. Эта информация не может быть получена из анализа линейной устойчивости или только из анализа положения аттракторов.

Направление, в котором расстояние от одного аттрактора до бассейна другого минимально, также имеет большое значение. Это направление является оптимальным для возмущения системы с целью вызвать переключение между аттракторами в том смысле, что возмущение в этом направлении может иметь небольшую амплитуду, но все же вызовет переключение. Направление оптимального возмущения может сильно отличаться от направления от одного аттрактора к другому. В контексте исследования динамических сетей направление возмущения соответствует набору возмущаемых узлов и относительной величине их возмущения.

Концепция порогов переключения также полезна для анализа динамики мультистабильных систем под действием сильных шумов. Значение минимального порога переключения аттрактора предсказывает, насколько он устойчив к шуму и сколько времени система может провести в его окрестности, прежде чем переключиться на другой. Более того, структура матрицы переключения может предсказывать наиболее вероятные переходы между различными аттракторами и, следовательно, последовательности, в которых они посещаются.

## ГЛАВА 2

### ДИНАМИКА МАЛЫХ АНСАМБЛЕЙ АВТОГЕНЕРАТОРОВ С ИМПУЛЬСНЫМИ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Взаимодействия, основанные на обмене импульсными сигналами, характерны для динамических систем различной природы, такие как популяции нейронов, сердечные ткани, биологические, оптические и оптоэлектронные системы [1, 15, 30, 48, 63, 159, 164, 223, 253, 380, 396]. Зачастую для сетевых систем также характерно запаздывание в связях, обусловленное конечной скоростью распространения импульсных сигналов между взаимодействующими узлами или иными причинами [97, 226, 265, 328]. Связь с задержкой времени актуальна для многих областей науки, таких как лазерная физика [102, 182, 252, 383, 387], биология и физиология [72, 98, 225], нейробиология и нейронные сети [36, 46, 92, 176, 284, 362], транспортная и популяционная динамика [186, 247], коммуникационные сети [203], и многое другое. Многочисленные исследования показали, что введение запаздывания в межэлементных связях зачастую приводит к существенным изменениям коллективной динамики сетевых систем. Задержка связи часто приводит к возникновению мультистабильности [99, 172, 219, 314, 384], другие наблюдаемые эффекты включают подавление частоты [251], вымирание колебаний [295], изменение фазовых соотношений [287], кластеризацию [113, 248] и др. Между тем сравнительно немного работ посвящено изучению влияния временного запаздывания на динамику сетевых систем с импульсными связями, и эта задача является одной из важных задач современной нелинейной динамики.

Настоящая глава посвящена исследованию коллективной динамики

небольших ансамблей активных элементов с импульсными связями. В разделе 2.1 вводится общая модель сети с импульсными запаздывающими связями и описывается непрерывно-дискретный метод численного моделирования динамики такой сети. Основная идея метода заключается в рассмотрении динамики сети как последовательности дискретных событий, каждое из которых заключается в испускании или получении один из узлов сети импульса. Динамика системы распадается на непрерывную эволюцию между данными событиями и скачкообразное изменение состояния узлов во время данных событий. Вводится многомерное точечное отображение, описывающее динамику сети, и описывается численный алгоритм моделирования данного отображения.

Простым и популярным инструментом описания динамики элементов сетей с импульсными связями являются модели на основе фазовых осцилляторов, особенно популярные в нейронауках [1, 3, 28, 48, 98, 99, 127, 216, 239, 347, 357, 396]. Несмотря на простоту таких моделей, они способны воспроизводить важнейшие ключевые свойства нейронов, такие как способность генерировать импульсы и изменять свое состояние под действием входящих импульсов. В рамках подхода на основе фазовых осцилляторов состояние каждого индивидуального элемента сети описывается единственной переменной – фазой, а действие импульса на элемент описывается как правило с помощью кривой переустановки фазы [47]. Несмотря на недостатки описания на основе кривой переустановки фазы, рассмотренные в Разделе 1.1., оно является достаточным при условии не слишком сильного и/или не слишком частого воздействия. Более того, кривая переустановки фазы может быть вычислена для произвольной автоколебательной системы, например для мо-

дели нейрона Ходжкина-Хаксли или ФитцХью-Нагумо или любой другой, и даже измерена экспериментально для реальной автоколебательной системы [15, 94, 95, 108, 115, 124, 254].

В разделе 2.2. мы используем подход на основе кривой переустановки фазы для исследования динамики простейшей «сети» с запаздывающими импульсными связями – автоколебательной системы с запаздывающей обратной связью. Целый ряд исследований автоколебательных систем с обратной связью [106, 108, 221, 221, 222] говорит о том, что запаздывание в связи ведет к возникновению мультистабильности. На первый взгляд этот результат не слишком удивителен, поскольку мультистабильность в общем случае возникает в дифференциальных уравнениях с запаздыванием из-за хорошо известного механизма, называемого «периодическое повторное появление решения» [385]. Однако в случае импульсной обратной связи этот механизм не всегда объясняет большое разнообразие наблюдаемых решений. Оказывается, для широкого класса автоколебательных систем с запаздывающей импульсной обратной связью характерен другой необычный механизм возникновения мультистабильности. Он связан с дестабилизацией режима периодического возбуждения с постоянным межимпульсным интервалом, в результате которой появляется сразу несколько сосуществующих периодических решений с большими периодами, состоящих из большого числа неравных межимпульсных интервалов. Такие режимы названы «дрожащими» по аналогии с хорошо известным временным дрожанием (“jittering”) в оптических и электронных системах [76, 266, 373]. Ранее о подобных режимах сообщалось в различных моделях осцилляторов с запаздывающей обратной связью [107, 188, 205, 206, 221, 222]. В настоящей работе раскрыт динамический

механизм возникновения «дрожащих» режимов. Показано, что в точке бифуркации возникает одновременно множество дрожащих решений, причем количество возникающих решений с комбинаторно зависит от величины задержки. Из-за этого свойства соответствующая бифуркация названа «бифуркацией мультидрожащая».

Обычно одновременное появление множества различных режимов является признаком вырождения, наблюдающегося только при наличии дополнительной симметрии [4, 132, 396]. Однако для рассматриваемого класса систем такая симметрия не очевидна. Тем не менее, бифуркация мультидрожащая может наблюдаться в широком классе систем при варьировании единственного параметра, например величины задержки. Это означает, что наблюдаемая бифуркация имеет коразмерность один [192]. В дополнение к теоретическому анализу простой парадигматической модели проведены численные исследования бифуркации мультидрожащая в реалистичных нейронных моделях, а также получено экспериментальное подтверждение эффекта в электронной схеме.

Взаимодействие нескольких автоколебательных систем может приводить к возникновению сложных режимов коллективной активности, таких как различные фазовые паттерны [64, 131, 374], гиперболический хаос [350], квазипериодические режимы [90], химерные состояния [18]. Важнейшим эффектом коллективной динамики ансамблей связанных автогенераторов является синхронизация – классическое нелинейное явление, играющее важную роль в различных областях науки, включая механику [333], оптику [305], связь и управление [84, 177], химию [189], живые системы [123, 380]. Яркие примеры синхронизации в системах с импульсными связями можно наблюдать в

нейронных сетях. Считается, что синхронизация областей мозга имеет решающее значение для когнитивных функций и действует как интегративный механизм, объединяющий широко распределенный набор нейронов в единый согласованный ансамбль для когнитивного акта [322]. Например, синхронная  $\gamma$ -активность различных областей зрительной коры лежит в основе связывания множества свойств объекта в единый воспринимаемый образ [133]. Предполагается, что синхронизация также проявляется в запоминании и обучении [174, 310], моторном контроле [156, 170] и, с другой стороны, в патологиях, таких как болезнь Паркинсона или шизофрения [142, 351].

Ряд недавних работ посвящен влиянию запаздывания в связях на синхронизацию взаимодействующих автогенераторов. Было показано, что задержка связи может существенно влиять на коллективную динамику и вызывать ее изменение и усложнение. Иногда задержка может нарушить синхронизацию [45, 67, 86, 389], в других случаях наблюдается обратный эффект [77, 81, 88, 98, 99, 275, 315]. В ряде работ исследовалась синхронизация автогенераторов с запаздывающими импульсными связями. Например, в [98, 99] при исследовании связанных нейронных моделей показано, что возбуждающая и тормозящая связь с задержкой по времени приводят к различным типам синхронизации. Возбуждающая связь приводит к противофазной синхронизации, когда фазовая задержка между двумя осцилляторами пропорциональна задержке. Для тормозящей связи присутствует бистабильность, поэтому возможны как синфазная, так и противофазная синхронизация в зависимости от начальных условий. В [393] исследование проводилось для случая асимметричной связи. Было показано, что асимметрия приводит к меньшему диапазону бистабильности, чем для симметричных случаев.

В разделе 2.3 представлены результаты исследования системы двух связанных автогенераторов с импульсными запаздывающими связями в случае произвольной величины запаздывания и наличия частотной расстройки между элементами. С использованием техники редукции к точечным отображениям показано, что даже неидентичные автогенераторы могут быть синхронизированы с произвольно большой задержкой связи. Один и тот же тип связи может привести к синфазной, противофазной или противофазной синхронизации. Более того, показано, что для разных параметров задержка связи может вызывать эффект синхронизации или десинхронизации. Система автогенераторов с запаздыванием может проявлять мультистабильность, которая заключается либо в сосуществовании различных синхронных режимов, либо в сосуществовании синхронного и асинхронного режимов. Заметим, что похожие результаты были получены в работе [382], опубликованной на две недели позже работы [1A], содержащей основные результаты данного раздела.

В разделе 2.4 изучено влияние запаздывания на кросс-частотную синхронизацию, которая наблюдается при взаимодействии автоколебательных систем с существенно разными частотами. При таком типе синхронизации частоты автогенераторов относятся как небольшие целые числа:  $f_1 : f_2 = m : n$ , что называется синхронизацией  $m : n$ . Кросс-частотная синхронизация колебательных систем различной природы рассмотрена в ряде предыдущих работ [50, 66, 126, 190]. Также исследовалась роль межчастотной синхронизации между различными диапазонами ритмов мозга. Предполагается, что этот феномен служит механизмом ориентирующей реакции и работы с элементами рабочей памяти [158, 311, 312]. Однако влияние запаздывания связей на кросс-частотную синхронизацию практически не изучено. В настоящей

работе получен аналитический критерий существования и устойчивости режимов кросс-частотной синхронизации. Для подтверждения полученных теоретических результатов была разработана электронная схема, реализующая систему, и экспериментально исследована ее динамика.

Материалы второй главы опубликованы в работах [1А,5А,7А,9А,10А,13А,14А,21А,22А,34А,35А].

## 2.1. Редукция динамики сетевых систем с импульсными запаздывающим связями к точечным отображениям

В настоящем разделе вводится модель сети с импульсными взаимодействиями в наиболее общем виде и предлагается техника сведения такой модели к многомерному точечному отображению, а также рассматривается метод численного моделирования коллективной динамики сети.

**2.1.1. Системы и сети с импульсными взаимодействиями.** Рассмотрим наиболее общую модель динамической системы под внешним импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)s(t). \quad (2.1)$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^n$  описывает состояние системы, функция  $f(x)$  задает ее автономную динамику, функция  $g(x)$  учитывает возможную нелинейность воздействия, тогда как  $s(t)$  описывает внешнее воздействие в форме импульсного сигнала

$$s(t) = A_\theta p \left( \frac{t - t_0}{\theta} \right), \quad (2.2)$$

где  $\theta$  – длительность импульса,  $A_\theta$  – его амплитуда, а  $p(t)$  характеризует форму импульса. Мы предполагаем, что  $p(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $t > 1$ , а также используем нормировку  $\int_0^1 p(t) dt = 1$ .

Динамика системы (2.1) может быть рассмотрена отдельно внутри и вне интервала времени  $t \in [t_0; t_0 + \theta]$ . Вне этого интервала динамика системы является автономной и задается отображением потока

$$F_T : x(t) \mapsto x(t + T). \quad (2.3)$$

Внутри интервала  $t \in [t_0; t_0 + \theta]$  динамика системы является неавтономной и зависит от внешнего воздействия. Удобно перемасштабировать время и ввести  $t_{new} = (t - t_0)/\theta$ , тогда неавтономная динамика описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \theta f(x) + \theta A_\theta p(t) g(x). \quad (2.4)$$

Рассмотрим предел коротких импульсов  $\theta \rightarrow 0$ , тогда вклад автономной части  $f(x)$  пренебрежимо мал, тогда как вклад неавтономной части конечен только в случае  $A_\theta = A/\theta$ . Тогда динамика системы за время воздействия импульса описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = Ap(t)g(x). \quad (2.5)$$

Решая соответствующую задачу Коши, получим отображение  $G_A : x(0) \mapsto x(1)$ , которое описывает изменение состояния системы за время действия внешнего импульса. При возвращении к изначальному масштабу времени данное отображение описывает мгновенное изменение состояния системы в момент воздействия импульса, так что

$$G_A : x(t_0 - 0) \mapsto x(t_0 + 0). \quad (2.6)$$

Так как отображение  $G_A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  описывает отклик системы на импульс амплитуды  $A$ , в дальнейшем мы будем называть его «отображением импульса».

Таким образом, в пределе коротких импульсов динамика системы (2.1) состоит из двух стадий. В течение всего времени за исключением момента прихода импульса динамика является непрерывной и описывается отображением потока  $F_T$ . В момент прихода импульса система испытывает мгновенное изменение состояния, описываемое отображением импульса  $G_A$ .

Вышеприведенные рассуждения легко обобщить на случай последовательности из нескольких импульсов. При  $\theta \rightarrow 0$  такая последовательность стремится к сумме дельта-функций Дирака

$$s(t) = \sum_{t_k} A_k \delta(t - t_k). \quad (2.7)$$

Динамика системы (2.1) между моментами прихода импульсов по-прежнему описывается отображением потока  $F_T$ , тогда как в моменты прихода импульсов  $t_k$  система испытывает мгновенные скачки, описываемые отображением импульса  $G_{A_k}$ . Такую динамику можно описать импульсным дифференциальным уравнением [195]

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \neq t_k, \quad (2.8)$$

$$x(t) = G_{A_k} x(t_-), \quad t = t_k. \quad (2.9)$$

Рассмотрим теперь сеть активных динамических элементов с импульсными запаздывающими связями, описываемую системой

$$\frac{dx_j}{dt} = f(x_j) + g(x_j) \sum_k A_{kj} \sum_{t_k^s} \delta(t - t_k^s - \tau_{kj}). \quad (2.10)$$

Здесь  $j, k = 1, \dots, N$ , коэффициенты  $A_{kj}$  и  $\tau_{kj}$  задают соответственно силу связи и запаздывание между  $j$ -м и  $k$ -м осцилляторами. Топология сети

также задается коэффициентами  $A_{kj}$  которые равны нулю для несвязанных элементов и отличны от нуля для связанных. Вторая сумма берется по всем моментам  $t_k^s$  в которые  $k$ -й осциллятор испускает так называемые импульсы или спайки. Под спайком подразумевается событие, заключающееся в достижении осциллятором некоторого состояния, а именно пересечение некоторой поверхности в фазовом пространстве так что  $S(y_k) = 0$ . Заметим, что учитываются только пересечения в положительном направлении, так что  $dS(x_k)/dt > 0$ .

Динамика сети (2.10) разворачивается следующим образом. Между моментами прихода импульсов каждый осциллятор является автономной системой и эволюционирует в соответствие с отображением потока  $F_T$ . Когда осциллятор испускает спайк, импульсы посылаются на другие осцилляторы, с которыми он связан, и достигают последних спустя время задержки. А именно, импульс, испущенный  $k$ -м осциллятором в момент  $t_k^s$  достигает  $j$ -го осциллятора позднее в момент  $t_k^s + \tau_{kj}$ . Когда импульс достигает  $j$ -го осциллятора, он вызывает мгновенное изменение его состояния в соответствие с отображением импульса  $G_{A_{kj}}$ .

### 2.1.2. Сведение динамики сети к многомерному отображению.

Таким образом, динамика сетей представляет собой серию дискретных событий связанные с излучением осцилляторами спайков и получением ими импульсов. Заметим, что эти события и динамика между ними описываются отображением импульса и отображением потока, которые являются локальными. Тем не менее, время и порядок наступления событий для каждого осциллятора зависит от динамики сети в целом.

Получим многомерное отображение, задающее динамику сети в целом. Предположим, что в момент времени  $t_0$  состояния осцилляторов заданы вектором  $\mathbf{X}(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_N(t_0)) \in \mathbb{R}^{nN}$ , а моменты генерации спайков всеми осцилляторами в прошлом  $t_k^s \leq t$  известны, причем для каждого осциллятора эти моменты упорядочены так что  $t_j^1 < t_j^2 < \dots \leq t$ . Обозначим как  $q_j$  номер последнего спайка, сгенерированного  $k$ -м осциллятором, так что  $q_j = \max \{s \mid t_j^s \leq t_0\}$ . Тогда спайки с номерами  $s \leq q_j$  сгенерированы в прошлом, тогда как спайки с номерами  $s > q_j$  будут сгенерированы в будущем, и моменты их генерации предстоит вычислить. Таким образом, последовательность  $T_j = (t_j^1, \dots, t_j^{q_j})$  представляет собой историю спайков  $j$ -го осциллятора, а последовательность  $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_N)$  представляет собой историю спайков всей сети, причем ее длина  $Q = \sum_{j=1}^N q_j$ .

Заметим, что пара  $(\mathbf{X}, \mathbf{T})$  полностью описывает состояние сети в том смысле, что позволяет однозначно предсказать ее динамику в будущем. Динамика сети разворачивается как последовательность дискретных событий, связанных с генерацией спайков и получением импульсов. Определим, какое из этих событий произойдет ближайшим по времени.

Сначала определим момент ближайшего прихода импульса на какой-либо осциллятор. Спайк, сгенерированный  $k$ -м осциллятором в момент  $t_k^s$ , вызывает приход импульса на  $j$ -й осциллятор в момент  $t_k^s + \tau_{kj}$ , поэтому момент ближайшего прихода импульса от  $k$ -го на  $j$ -й осциллятор определяется как

$$\widetilde{t}_{kj} = \min \{t \mid t = t_k^s + \tau_{kj}, t > t_0\}, \quad (2.11)$$

а момент ближайшего события прихода импульса с какого-либо осциллятора на какой-либо другой определяется как  $\widetilde{t} = \min \{\widetilde{t}_{kj}\}$ .

Теперь определим ближайший момент генерации спайка любым осциллятором при условии, то до этого не произошло событий получения импульса. Момент ближайшей генерации спайка  $j$ -м осциллятором определяется как

$$t_j^* = \min \{t \mid S(F_{t-t_0}x_j(t_0)) = 0, t > t_0\}, \quad (2.12)$$

тогда момент ближайшей генерации спайка любым осциллятором определяется как  $t^* = \min \{t_j^*\}$ .

Таким образом, ближайшее дискретное событие получения импульса или генерации спайка в сети произойдет в момент времени  $t_1 = \min \{\tilde{t}, t^*\}$ . На интервале времени  $t \in [t_0; t_1]$  событий не происходит, и динамика всех осцилляторов в сети является автономной. Это позволяет определить состояние сети в момент перед ближайшим событием как  $\mathbf{X}(t_1 - 0) = (F_\Delta x_1(t_0), \dots, F_\Delta x_N(t_0))$ , где  $\Delta = t_1 - t_0$ . Удобно определить оператор эволюции  $E_T : \mathbb{R}^{nN} \mapsto \mathbb{R}^{nN}$  как отображение  $F_T$ , применяемое покомпонентно к векторам  $x_j$ , что позволяет записать  $\mathbf{X}(t_1 - 0) = E_\Delta \mathbf{X}(t_0)$ .

В зависимости от типа события, имеющего место в момент  $t_1$ , состояние системы меняется в этот момент следующим образом:

1. Пусть ближайшее событие связано с приходом импульса от  $k$ -го к  $j$ -му осциллятору, так что  $t_1 = \tilde{t} = \tilde{t}_{kj}$ . В этом случае состояние последнего осциллятора мгновенно изменяется так что  $x_j(t_1 + 0) = G_{A_{kj}}x_j(t_1 - 0)$ . Удобно ввести оператор  $G_{kj} : \mathbb{R}^{nN} \mapsto \mathbb{R}^{nN}$ , описывающий данное событие, таким образом, что

$$G_{kj} : (x_1, \dots, x_{j,\dots}, x_N) \mapsto (x_1, \dots, G_{A_{kj}}x_{j,\dots}, x_N). \quad (2.13)$$

2. Пусть ближайшее событие связано с генерацией спайка  $j$ -м осциллятором, так что so that  $t_1 = t^* = t_j^*$ . В этом случае новый момент  $t_j^s = t_1$  добавляется в историю  $T_j$  генерации спайков  $j$ -м осциллятором. Число спайков  $q_j$  в этой истории увеличивается на один. Удобно ввести соответствующий оператор  $H_{jt} : \mathbb{R}^Q \mapsto \mathbb{R}^{Q+1}$ , описывающий добавление нового события в историю так что

$$H_{jt} : (T_1, \dots, T_j, \dots, T_N) \mapsto (T_1, \dots, (T_j, t), \dots, T_N). \quad (2.14)$$

Операторы  $G_{kj}$  и  $H_{jt}$  описывают события прихода импульсов и генерации спайков, соответственно. Таким образом, состояние сети в момент после события может быть определено как

$$(\mathbf{X}(t_1 + 0), \mathbf{T}(t_1 + 0)) = \begin{cases} (G_{kj} E_{\Delta} \mathbf{X}(t_0), \mathbf{T}(t_0)), & \text{if } t_1 = \widetilde{t}_{kj}, \\ (E_{\Delta} \mathbf{X}(t_0), H_{jt_1} \mathbf{T}(t_0)), & \text{if } t_1 = t_j^*. \end{cases} \quad (2.15)$$

Оператор (2.15) позволяет определить изменение состояния сети после наступления ближайшего дискретного события. Дальнейшая динамика может быть определена путем итеративного применения данного оператора. Заметим, что если несколько событий происходят одновременно, соответствующие операторы применяются последовательно в произвольном порядке.

Коснемся вопроса размерности фазового пространства, в котором развивается динамика, описываемая оператором (2.15). Несмотря на то, что история  $\mathbf{T}$  растет со временем, только конечное количество последних импульсов имеет значение для дальнейшей динамики сети. А именно, на данный момент  $t$  только импульсы с моментами генерации  $t_j^s \geq t - \tau_{\max}$  могут иметь

влияние на будущую динамику, где  $\tau_{\max}$  – максимальная задержка в сети. Таким образом, размерность отображения ограничена максимальным количеством импульсов, которые могут быть испущены за промежуток времени длиной  $\tau_{\max}$ . Это значение, в свою очередь, зависит от возможной величины интервалов между спайками. Для слабой связи межспайковые интервалы близки к собственным периодам автогенераторов, но для сильной связи возбуждающего типа межспайковые интервалы могут значительно уменьшаться. Для оценки минимально возможного интервала между спайками в этом случае обозначим  $\Theta$  минимальный собственный период автогенераторов, а  $\Delta$  – максимальное уменьшение периода, вызванное одним импульсом. Тогда минимальный интервал между спайками не меньше  $\theta = \Theta - M\Delta$ , где  $M$  – максимальная степень связности узла в сети. Таким образом, размерность (2.15) можно оценить как

$$D \leq nN + \frac{N\tau_{\max}}{\Theta - M\Delta}. \quad (2.16)$$

Событийное отображение (2.15) позволяет эффективно численно моделировать системы с импульсными взаимодействиями и задержкой.

**2.1.3. Моделирование систем с импульсными взаимодействиями на основе событийного подхода.** Чтобы продемонстрировать преимущества подхода, основанного на событиях, мы начнем с простого примера. Рассмотрим электронный генератор ФитцХью-Нагумо с импульсной обратной связью с задержкой, управляемый системой

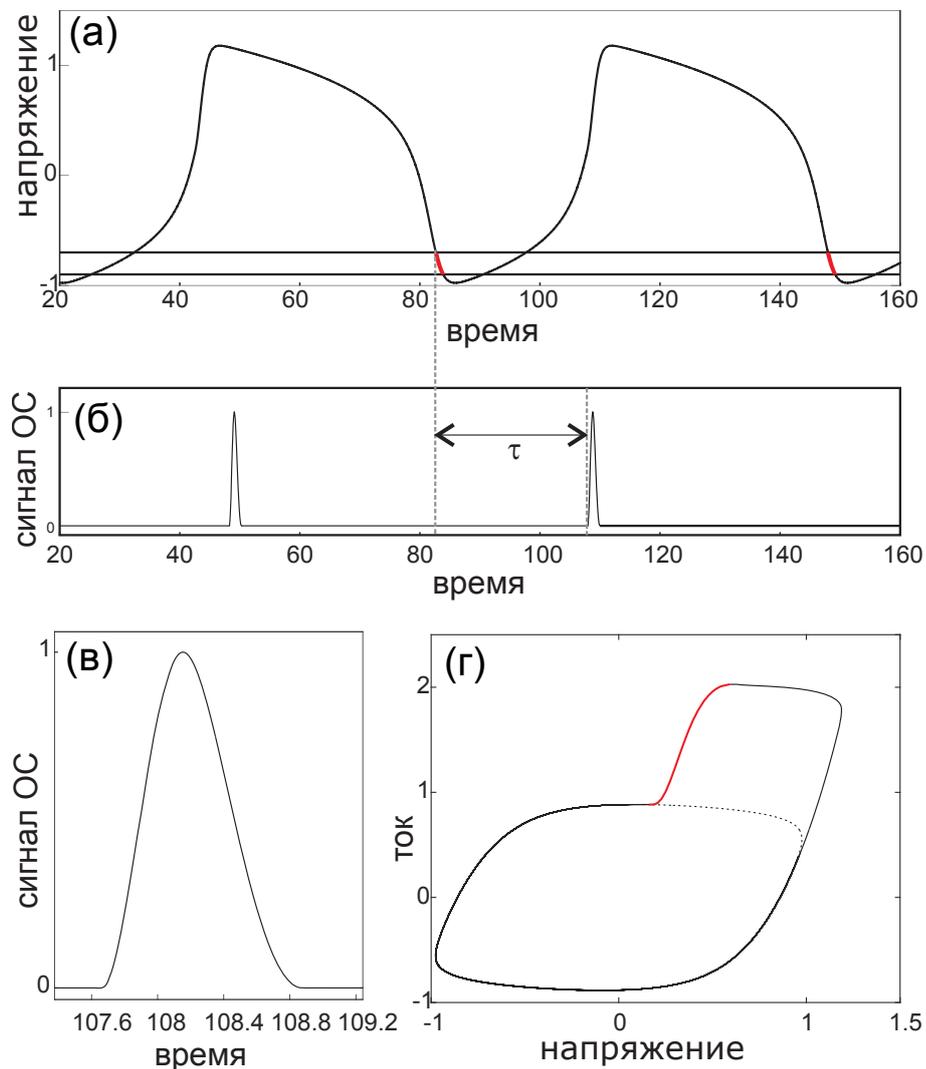


Рис. 2.1. Динамика автогенератора ФитцХью-Нагумо. (а) Зависимость напряжения от времени. Импульс генерируется при пересечении напряжением интервала значений, выделенного красным. (б) Сигнал обратной связи на выходе линии задержки. (в) Форма входящего импульса. (г) Фазовый портрет автогенератора без обратной связи (пунктирная линия) и с обратной связью (сплошная линия).

$$C \frac{du(t)}{dt} = -au(u - u_0)(u + u_0) + v, \quad (2.17)$$

$$L \frac{dv(t)}{dt} = -u + Rv + f(u_\tau). \quad (2.18)$$

Здесь  $u$  – напряжение,  $v$  – ток,  $u_\tau \equiv u(t - \tau)$ , а  $f(u_\tau)$  описывает запаздывающую обратную связь, работающую следующим образом. Обратная связь активируется спустя время задержки  $\tau$  после того, как значение напряжения попадает в интервал  $[u_{th} - \theta; u_{th} + \theta]$ , и представляет собой сглаженный квадратный импульс продолжительностью  $T\theta$  и амплитудой  $A/\theta$ , см. Рис. 2.1(б,в). Если запаздывание меньше собственного периода колебаний, единственным возможным режимом динамики системы является периодическая генерация импульсов с периодом, зависящим от величины задержки, см. Рис. 2.1(а,г).

Мы смоделировали (2.17-2.18) в системе MALTB двумя разными способами: (а) с помощью явной схемы Рунге-Кутты, реализованной в стандартной программе dde23 [317], и (б) описанным выше событийным методом. В обоих случаях время расчета, естественно, зависит от параметров алгоритмов, таких как допустимая ошибка и временной шаг, а также от точности полученных результатов. На Рис. 2.2 построен график точности полученных результатов между всплесками в зависимости от времени вычисления для обоих методов. Можно видеть, что подход, основанный на событиях, дает гораздо лучшие результаты за более короткое время.

Событийный подход особенно эффективен для численного моделирования сетей с импульсной связью с задержкой. Кратко остановимся на соответствующем алгоритме. Предположим, что мы начинаем моделирование с начальными условиями  $(\mathbf{Y}_0, \mathbf{T}_0)$  в момент  $t_0$ . Сначала вычислим все момен-

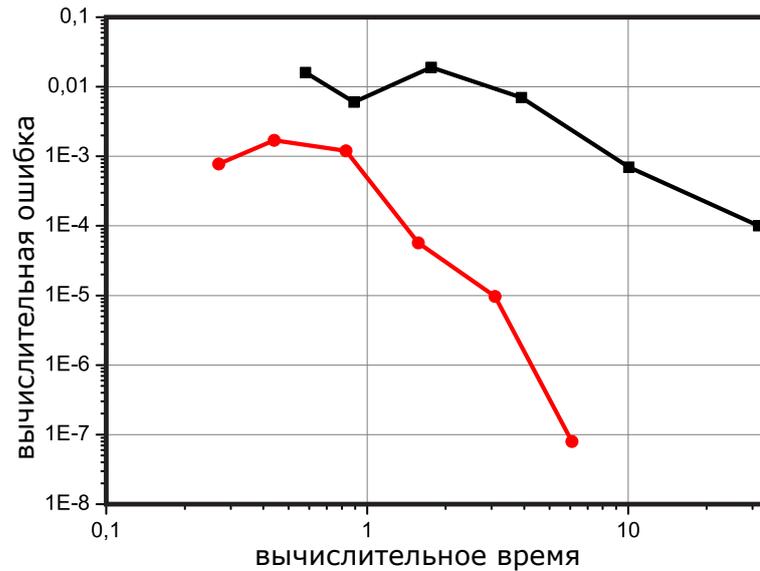


Рис. 2.2. Время расчета и вычислительная ошибка при моделировании осциллятора ФитцХью-Нагумо с запаздывающей обратной связью стандартным методом Рунге-Кутта (черные квадраты) и событийным методом (красные кружки).

ты прихода импульсов  $\tilde{t}_{kj}^s = t_k^s + \tau_{kj}$  и отсортируем их, получив последовательность  $\tilde{g}_1 < \tilde{g}_2 < \dots < \tilde{g}_s < \dots$ , где каждый  $\tilde{g}_s$  – это момент прихода импульса от генератора  $\tilde{k}_s$  до генератора  $\tilde{j}_s$ . Также вычислите все моменты генерации импульсов  $t_j^*$  и также отсортируем их, получив последовательность  $h_1^* < h_2^* < \dots < h_s^* < \dots$ , где каждый  $h_s^*$  – это момент (предполагаемого) возбуждения осциллятора  $j_s^*$ . Обратим внимание, что расчет момента возбуждения  $t_j^*$  предполагает численное интегрирование (2.1) до достижения условия  $S(y_j) = 0$ , вследствие чего получаются также значения  $y_j^* = y_j(t_j^*)$  в момент возбуждения.

Теперь легко определить моменты ближайшего получения импульса  $g_s$  и генерации импульса  $h_s$  и сравнить их. Предположим, что ближайшим событием является приход импульса в  $t = \tilde{g}_s$  от генератора  $k = \tilde{k}_s$  к генератору

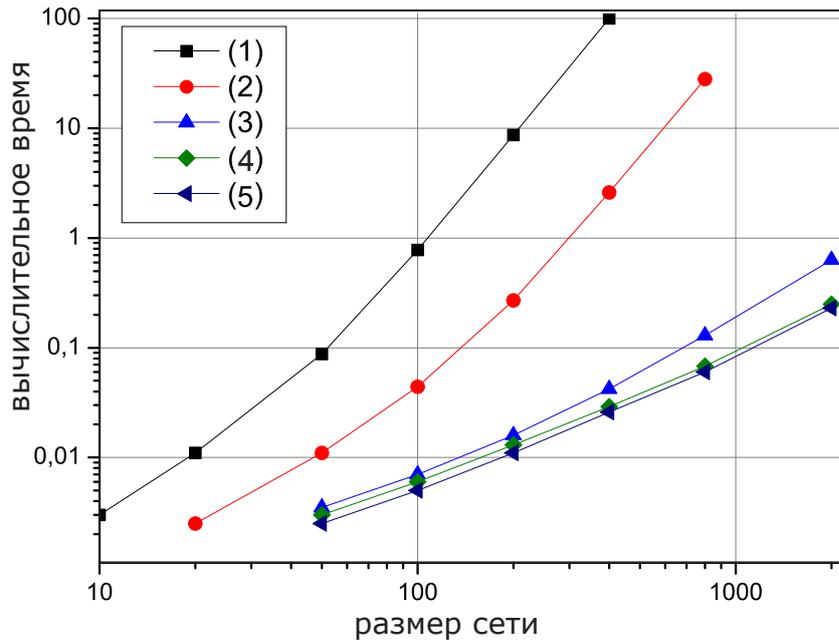


Рис. 2.3. Время расчета при моделировании сети фазовых осцилляторов с импульсной связью с задержкой для различных условий: (1) Полносвязная сеть со случайными силами и задержками связи. (2) Случайная сеть с 10% связностью, случайными силами и задержками связи. (3) Полносвязная сеть со случайной силой связи и однородными задержками. (4) Глобальная связь с однородной силой связи и однородными задержками. (5) Глобальная связь без задержек.

$j = \tilde{j}_s$ . Состояние этого генератора известно в момент  $t_0$ , поэтому его состояние перед приходом импульса легко определить как  $F_{\Delta}y_{j0}$ , а после прихода импульса как  $\tilde{y}_j = G_{A_{kj}}F_{\Delta}y_{j0}$ . Вычисленное значение  $y_j$  используется для обновления оценки следующего момента генерации импульса  $t_j^*$  и соответствующего состояния  $y_j^*$ . Последовательность (предполагаемых) моментов выброса пиков  $\{h_s^*\}$  после этого пересортировывается.

Если же предстоящим событием является генерация импульса в момент  $t = h_s^*$  осциллятором  $j = j_s^*$ , состояние данного осциллятора обновляется с ис-

пользованием ранее вычисленного значения  $y_j^*$ . Моменты прихода импульсов ко всем осцилляторам  $k$ , на которые воздействует осциллятор  $j$ , вычисляются как  $t_{jk}^s = t + \tau_{jk}$  и добавляются к последовательности  $\{\tilde{g}_s\}$ , который затем пересортировывается. Описанные шаги повторяются далее, что позволяет моделировать динамику сети сколь угодно длительно во времени.

Ниже мы демонстрируем применение событийного подхода к большой сети фазовых осцилляторов с импульсной связью

$$\frac{d\phi_j}{dt} = \omega_j + \frac{1}{N}\Gamma(\phi_{j+}) \sum_k a_{kj} g_{kj} \sum_{s_k^p} \delta(t - s_k^p - \tau_{kj}). \quad (2.19)$$

Здесь,  $\phi_j \in [0; 1]$  – фаза осциллятора,  $\omega_j$  – его собственная частота,  $\Gamma(\phi)$  – кривая переустановки фазы,  $N$  – число элементов. Структура сети задается матрицей смежности  $a_{kj}$ , коэффициентами связи  $g_{kj}$  и межэлементными задержками  $\tau_{jk}$ . При достижении каким-либо осциллятором порога  $\phi_j = 1$  он генерирует  $\delta$ -импульс, получаемый позже другими элементами сети. Импульс от  $k$ -го узла достигает  $j$ -го после задержки  $\tau_{kj}$  и мгновенно изменяет фазу последнего на величину  $\Delta\phi_j = g_{kj}\Gamma(\phi_j)$ .

Собственные частоты осцилляторов выбирались случайно из равномерного распределения с центром  $\omega = 1.4$  и шириной  $\Delta = 1.2$ . Следуя работе [352], форма кривой переустановки фазы выбиралась в виде

$$\Gamma(\phi) = \begin{cases} B_{01} + b_1\phi & \text{if } 0 \leq \phi \leq \phi_l \\ B_{02} - b_2\phi & \text{if } \phi_l \leq \phi \leq \phi_r \\ B_{03} + b_1\phi & \text{if } \phi_r < \phi < 1, \end{cases} \quad (2.20)$$

где  $b_1 = 1.5$ ,  $b_2 = b_1/\delta$ ,  $B_{01} = b_1(s - 0.5)$ ,  $B_{02} = b_1(1 - s)/\delta$ ,  $B_{03} =$

$b_1/(s - 1.5)$ ,  $\phi_l = (1 - s + \delta/2 - \delta s)/(\delta + 1)$ ,  $\phi_r = (1 - s + 3\delta/2 - \delta s)/(\delta + 1)$ ,  
 $s = 0.14$ ,  $\delta = 0.1$ .

На Рис. 2.3 проиллюстрирована зависимость времени вычислений от размера сети для различных случаев. Сначала рассматривалась сеть с глобальными связями, случайными коэффициентами связи  $g_{kj} \in [0; 1]$  и случайными задержками  $\tau_{kj} \in [0; 1]$ . Этот случай является наиболее неблагоприятным для работы алгоритма, так как каждый импульс от каждого узла приводит к возникновению в будущем  $N$  событий, связанных с получением этого импульса в различные моменты времени. Таким образом, на каждом шаге необходимо производить пересортировку событий. Так как полное число получаемых импульсов  $\sim N^2$ , а каждая пересортировка занимает  $\sim N^2 \ln N$  времени, полное время вычислений  $T \sim N^3 \ln N$ . Уменьшение связности сети приводит к пропорциональному уменьшению вычислительного времени, которое однако остается того же порядка.

Гораздо более благоприятным случаем для алгоритма является случай однородных задержек  $\tau_{kj} = \tau$ . В этом случае порядок входящих импульсов такой же, как и порядок соответствующих излучаемых импульсов, и пересортировка не требуется. Таким образом, время вычислений пропорционально общему количеству входящих импульсов, т.е.  $T \sim N^2$ . Хотя предположение об однородных задержках связи обычно является приближением, зачастую оно приемлемо, например, в случаях, когда распределение задержек является узким. Другой важный момент состоит в том, что количество неравных задержек связи в сети иногда может быть существенно уменьшено путем определенной замены переменных [215].

Наименее трудоемким трудоемким является случай, когда и задержки, и

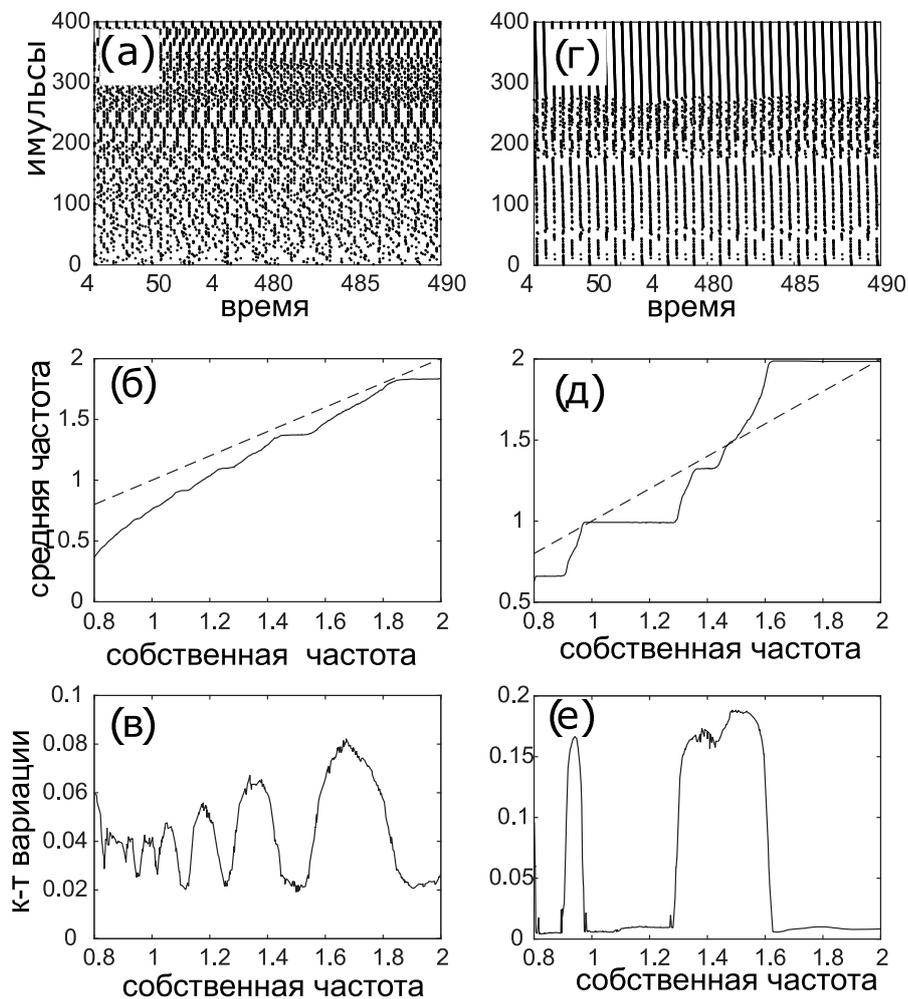


Рис. 2.4. Влияние задержки связи на динамику сети с импульсной связью.

Моменты генерации импульсов (а, г), средние частоты узлов (б, д) и коэффициенты вариации межимпульсных интервалов (в, е) построены для случаев мгновенного взаимодействия (а-в) и запаздывающего взаимодействия с  $\tau = 0.1$  (г-е).

связь однородны:  $\tau_{kj} = \tau$  и  $g_{kj} = g$ . В этом случае нет необходимости сохранять время генерации отдельных импульсов, поскольку значение имеет только среднее поле. Обратите внимание, что время вычисления в этом случае лишь немного больше, чем в случае без задержек, рассмотренном в исходной статье [352]. Хотя это не является основным предметом внимания данного раздела, результаты моделирования показывают, что даже небольшие задержки играют важную роль в динамике сети и кардинально ее меняют. Влияние задержек связи показано на Рис. 2.4, левая часть которого отображает динамику сети без задержек. На графике нанесены моменты генерации импульсов, средние частоты элементов и коэффициенты вариации межимпульсных интервалов (см. Рис. 9 в [352]). Правая часть рисунка иллюстрирует динамику той же сети с задержками связи  $\tau = 0.1$ . Наблюдается появление сильной кластеризации, а также рост вариабильности межимпульсных интервалов элементов, не принадлежащих ни к каким кластерам.

## 2.2. Нерегулярная динамика и «дрожащие» режимы автогенератора с импульсной запаздывающей обратной связью

Данный раздел посвящен исследованию простейшей «сети» с импульсными запаздывающими взаимодействиями – автогенератора с обратной связью. Изучение этого основного и очень распространенного «мотива» важно для понимания поведения более крупных сетей с запаздывающими связями [238, 296]. Например, петля, состоящая из одного возбуждающего и одного тормозного нейрона с запаздывающими связями, демонстрирует поведение, подобное нейрону с запаздывающей обратной связью [221, 221, 222]. Также поведение кольцевых сетей из нескольких нейронов в некоторых случаях аналогично поведению одиночного нейрона с запаздывающей обратной связью [167, 356, 386], что более подробно будет рассмотрено в разделе 3.1. Другая мотивация к изучению одиночного автогенератора с запаздывающей обратной связью возникает из исследования ансамблей автоколебательных систем с запаздыванием, в которых синхронный режим может быть описан поведением одиночного автогенератора [103, 344].

**2.2.1. Модель автогенератора с импульсной запаздывающей связью.** Будем описывать динамику автогенератора в фазовом приближении:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + Z(\varphi_-) \sum_{t_s} \delta(t - t_s - \tau), \quad (2.21)$$

где  $\varphi$  – фаза, а  $\omega = 1$  – собственная частота автоколебаний. При достижении фазой значения  $\varphi = 1$  осциллятор генерирует импульс, который подается на вход линии задержки, после чего фаза приобретает нулевое значение. Спу-

ствя время задержки  $\tau$  импульс подается на вход осциллятора и вызывает мгновенный сдвиг его фазы, который описывается с помощью кривой переустановки фазы  $Z(\varphi)$ . Заметим, что для определения величины сдвига фазы берется значение фазы до момента прихода импульса  $\varphi_-$ . Таким образом, фактически (2.21) представляет собой не обыкновенное дифференциальное уравнение, а сокращенную запись импульсного дифференциального уравнения [195].

Аналитическое исследование системы (2.21) будет проводиться для произвольного вида кривой переустановки фазы. Для численного исследования будет использоваться

$$Z(\varphi) = \kappa (\sin \pi \varphi)^q, \quad (2.22)$$

где  $\kappa$  – сила связи, а  $q$  – параметр, отвечающий за крутизну кривой переустановки фазы (дальнейшее исследование покажет значимость этой величины).

### 2.2.2. Сведение динамики системы к точечному отображению.

Как показано в предыдущем разделе, динамику системы (2.21) можно свести к конечномерному отображению вследствие импульсного характера запаздывающего сигнала. Действительно, единственная информация, необходимая для определения динамики системы в будущем при  $t \geq 0$  – это моменты генерации импульсов при  $t \in [-\tau; 0]$ , тогда как предыстория переменной  $\varphi$  на этом интервале не важна. Так как число импульсов, сгенерированных за время  $\tau$ , ограничено, состояние системы может быть описано конечным набором чисел, и система является конечномерной.

Для получения конечномерного отображения рассмотрим динамику си-

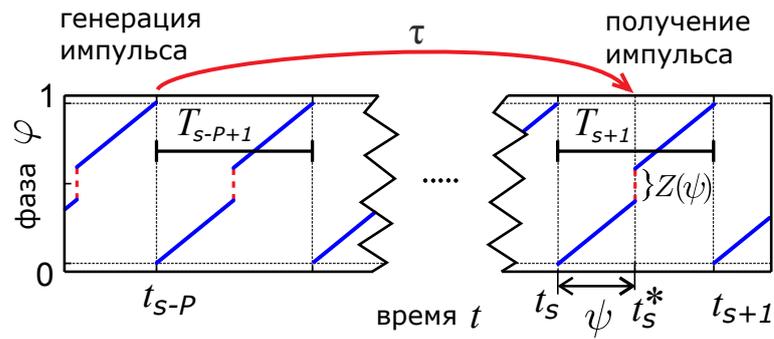


Рис. 2.5. Динамика системы (2.21): импульс, испущенный в момент  $t_{s-P}$ , воздействует на генератор спустя время задержки  $\tau$  в момент  $t_s^* = t_{s-P} + \tau$ .

системы (2.21) на интервале времени  $t \in [t_s; t_{s+1}]$  между двумя последовательными моментами генерации импульсов (см. Рис. 2.5). Пусть в течение этого времени осциллятор получает входной импульс в момент  $t_s^*$ , тогда перед получением импульса его фаза равна

$$\varphi(t_s^* - 0) = \varphi(t_s + 0) + t_s^* - t_s = t_s^* - t_s = \psi_s, \quad (2.23)$$

а после воздействия импульса фаза мгновенно приобретает значение

$$\varphi(t_s^* + 0) = \psi_s + Z(\psi_s). \quad (2.24)$$

К моменту генерации следующего импульса

$$\varphi(t_{s+1} - 0) = \varphi(t_s^* + 0) + t_{s+1} - t_s^* = 1, \quad (2.25)$$

откуда можно получить выражение для межимпульсного интервала

$$T_{s+1} = t_{s+1} - t_s = 1 - Z(\psi_s). \quad (2.26)$$

Пусть импульс, воздействующий на осциллятор в момент времени  $t_s^*$ , был сгенерирован в момент времени  $t_{s-P}$ , то есть между моментом его генерации

и получения было сгенерировано еще  $P$  импульсов. Тогда  $t_s^* = t_{s-P} + \tau$ , и

$$\psi_s = t_s^* - t_s = t_{s-P} + \tau - t_s. \quad (2.27)$$

Учитывая, что  $t_s = t_{s-P} + T_{s-P+1} + T_{s-P+2} + \dots + T_s$ , получаем окончательно

$$T_{s+1} = 1 - Z \left( \tau - \sum_{q=s-P+1}^s T_q \right). \quad (2.28)$$

Отображение (2.28) полностью описывает динамику системы (2.21). Данное отображение имеет размерность  $P$ , равную целому числу межимпульсных интервалов, которое помещается на интервале  $\tau$ . Фазовое пространство отображение – пространство векторов

$$\mathbf{T}_s = (T_{s-P+1}, T_{s-P+2}, \dots, T_s). \quad (2.29)$$

Таким образом, для определения будущей динамики системы (2.21) необходимо и достаточно знать величину последних  $P$  межимпульсных интервалов.

**2.2.3. Регулярные режимы автогенератора с запаздывающей обратной связью.** Начнем анализ отображения (2.28) с поиска его неподвижных точек. Каждая неподвижная точка отображения соответствует периодической генерации импульсов с постоянным межимпульсным интервалом  $T_s = T$ . Назовем такой режим динамики регулярным, тогда для его периода получим уравнение

$$T = 1 - Z(\tau - PT). \quad (2.30)$$

Введя обозначение  $\psi = \tau - PT$ , данное уравнение можно переписать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} T = 1 - Z(\psi), \\ \tau = PT + \psi. \end{cases} \quad (2.31)$$

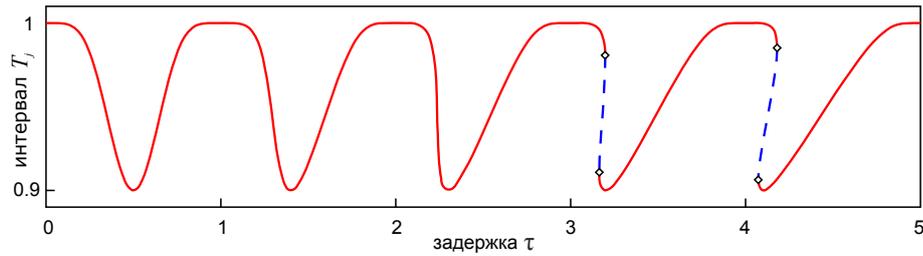


Рис. 2.6. Одномерная бифуркационная диаграмма системы (2.21) при  $q = 5$  – зависимость межимпульсного интервала (периода) регулярного режима  $T$  от задержки  $\tau$ . Красные сплошные линии соответствуют устойчивому, синие пунктирные – неустойчивому регулярному режиму. Квадратами отмечены точки седлоузловых бифуркаций.

Параметрический вид удобен для построения бифуркационной диаграммы, то есть зависимости периода регулярного режима от величины задержки. Для этого будем выбирать различные  $P = 0, 1, 2, \dots$  и изменять  $\psi \in [0; 1]$ . Получившаяся в результате зависимость  $T(\tau)$  изображена на Рис. 2.6. Заметим, что график зависимости типичен для систем с запаздыванием [385] и представляет собой кривую, близкую к периодической, однако каждый последующий фрагмент данной кривой все более вытянут вдоль оси  $\tau$ . При достаточно больших задержках соседние фрагменты кривой начинают перекрываться, при этом на кривой образуются складки. Определим, при каких минимальных значениях задержки это возможно. В точке складки

$$\frac{d\tau}{dT} = \frac{1 - PZ'(\psi)}{-Z'(\psi)} = 0, \quad (2.32)$$

что возможно только при  $P \geq P_{\min} = 1/\alpha_{\max}$ , где  $\alpha_{\max} = \max Z'(\psi)$  – максимальный наклон функции  $Z(\cdot)$ . При  $P \geq P_{\min}$  в системе становится возможным сосуществование нескольких регулярных режимов с различными

периодами при одной и той же величине задержки.

Исследуем устойчивость неподвижных точек отображения (2.28). Для этого рассмотрим возмущенное решение вида  $T_s = T + \delta_s$ , где  $\delta_s \ll T$ , и изучим динамику возмущений. Линеаризуя (2.28) около невозмущенного решения, получим

$$T + \delta_{s+1} = 1 - Z \left( \tau - TP - \sum_{q=s-P+1}^s \delta_q \right) = 1 - Z(\psi) + Z'(\psi) \sum_{q=s-P+1}^s \delta_q, \quad (2.33)$$

что с учетом (2.31) приводит к

$$\delta_{s+1} = +Z'(\psi) \sum_{q=s-P+1}^s \delta_q \quad (2.34)$$

Подставляя возмущение в виде  $\delta_p \sim \lambda^p$ , получим характеристическое уравнение

$$\lambda^P - \alpha \sum_{q=0}^{P-1} \lambda^q = 0, \quad (2.35)$$

где  $\alpha = Z'(\psi)$ . Для анализа характеристического уравнения (2.35) его удобно домножить на  $(\lambda - 1)$ , тогда получим

$$\lambda^{P+1} - (1 + \alpha)\lambda^P + \alpha = 0. \quad (2.36)$$

Форма уравнения упростилась, однако следует помнить, что у него возник дополнительный корень  $\lambda = 1$ , что нужно учитывать при дальнейшем анализе. Определим, при каких  $\alpha$  решения (2.36) могут быть критическими, то есть равными единице по модулю. Подставив  $\lambda = e^i\phi$ , получим

$$e^{i(P+1)\phi} + \alpha = (1 + \alpha)e^{iP\phi}. \quad (2.37)$$

Решения уравнения (2.37) удобно анализировать на комплексной плоскости. Представим это уравнение в виде  $e^{i\phi_1} + \alpha = (1 + \alpha)e^{i\phi_2}$  и изобразим три вектора  $e^{i\phi_1}$ ,  $\alpha$  и  $(1 + \alpha)e^{i\phi_2}$  на комплексной плоскости. Рассмотрим сначала случай, когда все три вектора ненулевые, то есть  $\alpha \neq 0, -1$ . При  $\alpha > 0$  выполняется  $|e^{i\phi_1}| + |\alpha| = |(1 + \alpha)e^{i\phi_2}|$ , поэтому из правила треугольника решение существует, только если вектора  $e^{i\phi_1}$  и  $e^{i\phi_2}$  сонаправлены в комплексной плоскости. При  $-1 < \alpha < 0$  выполняется  $|e^{i\phi_1}| = |\alpha| + |(1 + \alpha)e^{i\phi_2}|$ , откуда также следует сонаправленность векторов  $e^{i\phi_1}$  и  $e^{i\phi_2}$ . Наконец, при  $\alpha < -1$  выполняется  $|\alpha| = |(1 + \alpha)e^{i\phi_2}| + |e^{i\phi_1}|$ , и так как  $1 + \alpha < 0$ , вектора  $e^{i\phi_1}$  и  $e^{i\phi_2}$  снова должны быть сонаправлены. Итак, при  $\alpha \neq 0, -1$  уравнение (2.37) имеет решение только при  $\phi_2 = \phi_1 + 2\pi k$ , откуда следует  $\phi = 2\pi k$  и  $\lambda = 1$ . Теперь проверим, является ли  $\lambda = 1$  корнем исходного характеристического уравнения (2.35). Подставляя  $\lambda = 1$  в (2.35) получаем  $1 - \alpha P = 0$ , то есть  $\lambda = 1$  является корнем характеристического уравнения только при  $\alpha = 1/P$ .

Проанализируем оставшиеся случаи  $\alpha = 0, -1$ . При  $\alpha = 0$  уравнение (2.35) приобретает вид  $\lambda^P = 0$  и имеет только  $P$ -кратный корень  $\lambda = 0$ . При  $\alpha = -1$  уравнение (2.36) приобретает вид  $\lambda^{P+1} = 1$  и имеет  $P + 1$  корня вида  $\lambda = e^{2\pi ik/(P+1)}$ ,  $k = 0 \dots P$ . Учитывая, что  $\lambda = 1$  не является решением (2.35) при  $\alpha = -1$ , окончательно получаем следующие  $P$  корней характеристического уравнения (2.35) при  $\alpha = -1$ :

$$\lambda = e^{\frac{2\pi ik}{P+1}}, \quad k = 1, \dots, P. \quad (2.38)$$

Подытоживая, можно сформулировать следующие свойства характеристического уравнения (2.35). Данное уравнение может иметь критические корни  $|\lambda| = 1$  только при  $\alpha = 1/P$  и  $\alpha = -1$ . Учитывая, что при  $\alpha = 0$  спектр данного уравнения является (супер)устойчивым, можно заключить, что он также является устойчивым при  $-1 < \alpha < 1/P$ .

**2.2.4. Сценарии дестабилизации регулярных режимов.** Рассмотрим сценарии потери устойчивости при выходе из данного интервала параметров. При  $\alpha = 1/P$  возникает единственный критический показатель  $\lambda = 1$ . Происходит седло-узловая бифуркация, при которой устойчивая неподвижная точка сливается с неустойчивой и исчезает. Как видно из (2.32), при данном значении  $\alpha$  соответствует складке на графике зависимости  $T(\tau)$ .

Гораздо необычнее является сценарий потери устойчивости при  $\alpha = -1$ , когда в системе возникает одновременно  $P$  критических показателей (2.38). Учитывая, что размерность фазового пространства системы также равна  $P$ , получается, что решение теряет устойчивость по всем направлениям одновременно, и размерность неустойчивого многообразия скачкообразно возрастает с нуля до величины  $P$ . Исследуем этот сценарий подробнее.

Предположим, что кривая переустановки фазы  $Z(\theta)$  имеет точку  $\psi^*$  с наклоном  $Z'(\psi^*) = -1$ . Тогда данной точке соответствуют значения задержки  $\tau_P^* = P [1 - Z(\psi^*)] + \psi^*$ . При данной величине задержки регулярное решение теряет устойчивость, и система начинает демонстрировать нерегулярную динамику. Изучим эту динамику более подробно. Простейшим нерегулярным режимом системы является периодический режим, при котором осциллятор испускает импульсы с межимпульсными интервалами, формиру-

ющими некоторую периодическую последовательность  $(T_1, T_2, \dots, T_N)$ . Данная периодическая последовательность будет являться решением отображения (2.28), если для каждого ее члена выполняется

$$T_j = 1 - Z \left( \tau - \sum_{q=j-P}^{j-1} T_q \right), \quad (2.39)$$

где индексы берутся по модулю  $N$ , то есть  $T_j \equiv T_{j+N}$ . Наиболее просто условие (2.39) формулируется при  $N = P + 1$ , тогда

$$\sum_{q=j-P}^{j-1} T_q = \sum_{q \neq j} T_q = \sum_{q=1}^N T_q - T_j. \quad (2.40)$$

Условие (2.39) при этом переписывается в виде

$$T_j + Z(\tau - T_\Sigma + T_j) - 1 = 0, \quad (2.41)$$

где сумма  $T_\Sigma = T_1 + T_2 + \dots + T_N$  — не что иное, как полный период решения.

Рассмотрим следующее вспомогательное уравнение:

$$x + Z(x - \sigma) - 1 = 0, \quad (2.42)$$

где  $\sigma$  является некоторой константой. Покажем, что корни данного уравнения могут быть использованы для конструирования периодических решений отображения (2.28). Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются корнями вспомогательного уравнения (2.42) при некотором  $\sigma$ . Составим произвольную последовательность  $(T_1, T_2, \dots, T_N)$  из этих корней так, что любой ее член является одним из корней  $x_j$  (заметим, что каждый корень может быть использован не один раз). Тогда легко показать, что данная последовательность соответствует пе-

риодическому решению отображения (2.28) для  $P = N - 1$  и величины задержки

$$\tau = \sum_{j=1}^N T_j - \sigma. \quad (2.43)$$

Действительно, условие (2.41) выполняется для любого члена рассматриваемой последовательности  $T_j$ :

$$T_j + Z(\tau - T_\Sigma + T_j) - 1 = T_j + Z(T_j - \sigma) = 0, \quad (2.44)$$

так как  $T_j$  является корнем уравнения (2.42).

Если для построения последовательности выбраны одинаковые корни уравнения (2.42), получившаяся последовательность является тривиальной и соответствует регулярному режиму. Условие (2.41) при этом сводится к (2.31). Однако, если последовательность состоит из различных корней, соответствующее решение будет нерегулярным. Определим условия, при которых уравнение (2.42) может иметь несколько различных корней. Если  $Z(\theta)$  является непрерывной функцией, необходимым условием существования различных корней является наличие у функции  $Z(\cdot)$  участков с наклоном  $Z'(\theta) < -1$ . Действительно, если таких участков нет, левая часть уравнения монотонно возрастает, и уравнение не может иметь больше одного корня.

Пусть у функции  $Z(\cdot)$  имеется участок с наклоном  $Z'(\theta) < -1$ , тогда на границе этого участка  $Z'(\psi_0) = -1$ , и вблизи данной точки функцию можно разложить в ряд Тейлора:

$$Z(\psi) = Z_0 - (\psi - \psi_0) + \beta(\psi - \psi_0)^2, \quad (2.45)$$

Тогда решения уравнения (2.42) будут иметь вид

$$x_{1,0} = 1 - Z_0 - y \pm \sqrt{\frac{y}{\beta}}, \quad (2.46)$$

где  $y = 1 - Z_0 - \psi_0 - \sigma$ . Уравнение имеет два решения при любом  $y > 0$ , то есть  $\sigma > 1 - Z_0 - \psi_0$ . Составим произвольную последовательность длины  $N$  из этих решений. Пусть эта последовательность содержит  $N_0$  корней со знаком минус и  $N_1$  корней со знаком плюс. Тогда как показано выше отображение (2.28) будет иметь соответствующее периодическое решение при величине задержки

$$\tau = \sum_{j=1}^N T_j - \sigma = \psi_0 + (N - 1)(1 - Z_0 - y) + (N_1 - N_0) \sqrt{\frac{y}{\beta}}. \quad (2.47)$$

Заметим, что при  $y \rightarrow 0$  оба решения  $x_{1,0} \rightarrow 1 - Z_0$ , а величина задержки  $\tau \rightarrow \tau_P = \psi_0 + (N - 1)(1 - Z_0)$ , что, как следует из (2.31), соответствует регулярному решению при  $P = N - 1$  в точке бифуркации  $\psi_0$ . Таким образом, в точке бифуркации регулярное решение теряет устойчивость, а от него отходят ветви нерегулярных решений, соответствующих всем возможным числам  $N_0$  и  $N_1$  таким, что  $N_0 + N_1 = P + 1$ . Так как вблизи точки бифуркации значения межспайковых интервалов близки к периоду регулярного решения, то есть изменяются незначительно, данные режимы были названы «дрожащими», а соответствующая бифуркация – «бифуркацией мультидрожания» из-за многочисленности возникающих дрожащих режимов.

Оценим число различных дрожащих режимов, возникающих в точке бифуркации при  $\tau = \tau_P$ . Каждому возникающему режиму соответствует последовательность из двух межимпульсных интервалов  $x_0$  и  $x_1$ , имеющая период

$P + 1$ . Количество бинарных последовательностей длины  $P + 1$  равно  $2^{P+1}$ , из них следует вычесть две тривиальные последовательности, соответствующие регулярному режиму. Также для исключения повторяющихся последовательностей, которые могут быть получены друг из друга циклическими перестановками, их число следует разделить на  $P + 1$ . В итоге получаем оценку

$$\#\text{режимов} \geq \frac{2^{P+1} - 2}{P + 1}. \quad (2.48)$$

Все эти режимы возникают одновременно в точке бифуркации. Заметим, что формулы (2.46) и (2.47) справедливы лишь при малых  $y$ , то есть вблизи точки бифуркации. При удалении от точки бифуркации ветви нерегулярных решений отклоняются от данных кривых. Также заметим, что в случае непрерывной кривой переустановки фазы  $Z(\theta)$ , для которой выполняется условие  $Z(0) = Z(1)$  и  $Z'(0) = Z'(1)$ , типично наличие четного числа точек с наклоном  $Z'(\psi) = -1$  и интервалов с наклоном  $Z'(\psi) < -1$  между ними. В таком случае при каждом  $P$  имеются две точки бифуркации регулярного решения, а ветви нерегулярных решений соединяют их между собой.

**2.2.5. Численное исследование дрожащих режимов.** Для подтверждения теоретических выводов предыдущего подраздела проведем численное исследование динамики системы (2.1), выбрав кривую переустановки фазы в виде (2.22). Зафиксируем силу связи  $\kappa = 0.1$ . Тогда при  $q > q^* \approx 27.5$  у функции  $Z$  появляется пара точек с наклоном  $Z'(\psi) = -1$ .

Бифуркационные диаграммы системы приведены на Рис. 2.6, 2.7 и 2.8, они иллюстрируют наблюдаемые межимпульсные интервалы в зависимости от задержки  $\tau$  для трех различных значений параметра крутизны  $q = 5$ ,

28 и 100. Для каждого значения задержки  $\tau$  динамика системы симулировалась 20 раз с различными случайными начальными условиями (начальные межспайковые интервалы были взяты из равномерного распределения  $T \in [0.9, 1.0]$ ). Для каждой симуляции были сохранены все различные значения межспайковых интервалов  $T_j$ , которые можно было наблюдать после переходного процесса, и помещены на бифуркационную диаграмму. Кроме того, параметрическое представление (2.31) использовалось для построения кривых регулярных режимов. Устойчивость регулярных режимов определялась условием  $\alpha \in (-1, 1/P)$ .

На рисунке 2.6 показан случай  $q = 5 < q^*$ , когда единственными возможными бифуркациями являются седло-узловые бифуркации регулярных режимов. Это означает, что для каждого значения  $\tau$  каждая отдельная точка  $(\tau, T)$  на бифуркационной диаграмме соответствует одному возможному регулярному решению. Интервалы  $\tau$ , в которых появляются два различных значения  $T$ , соответствуют различным сосуществующим регулярным решениям с различными периодами. Периоды наблюдаемых регулярных режимов определяются аналитически с помощью (2.31).

Когда крутизна кривой переустановки фазы увеличивается и  $q$  превышает критическое значение  $q^*$ , появляются две точки  $\psi_{A,B} \in (0, 1)$ , для которых  $Z'(\psi_{A,B}) = -1$ . Это означает, что для подходящих значений времени задержки  $\tau$ , таких что  $\psi = \tau \bmod T$  равно либо  $\psi_A$ , либо  $\psi_B$ , регулярный режим дестабилизируется, и  $P$  мультипликаторов одновременно пересекают единичную окружность, где  $P = \lceil \tau/T \rceil$ . Точнее: для каждого  $P \in \mathbb{N}$  существует два значения задержки

$$\tau_{A,B}^P = P(1 - Z(\psi_{A,B})) + \psi_{A,B}, \quad (2.49)$$

для которого размерность неустойчивого многообразия «взрывается» от 0 до  $P$ .

На рисунке 2.7 показан случай крутизны, немного превышающей критическую при  $q = 28$ . Бифуркации мультидрожания располагаются на устойчивой восходящей части ветви регулярного режима. Как показано в предыдущем разделе, в точке бифуркации  $p$  мультипликаторов  $\lambda_k = e^{i2\pi k/(P+1)}$  одновременно пересекают единичную окружность. Для случая  $P = 1$  это означает, что только один мультипликатор  $\lambda = -1$  пересекает единичную окружность, и в этом случае отображение (2.28) имеет размерность один и вид

$$PT_{j+1} = 1 - Z(\tau - T_j). \quad (2.50)$$

В этом случае бифуркация представляет собой удвоение периода, порождающее устойчивое решение с периодом 2, существующее для  $\tau$  в интервале  $[\tau_A^1, \tau_B^1]$ . Возникающее решение периода 2 является простейшим дрожащим режимом: межспайковые интервалы образуют чередующуюся последовательность с  $T_{2j+1} = T_1$  и  $T_{2j} = T_2$ , где  $T_1 \neq T_2$ . Временная динамика межимпульсных интервалов проиллюстрирована на Рис. 2.7(д) вместе с соответствующей диаграммой Ламерея для одномерного отображения (2.50). На бифуркационной диаграмме решение с периодом 2 соответствует паре точек  $(\tau, T_1)$  и  $(\tau, T_2)$ .

Для бóльших задержек имеют место бифуркации, при которых  $P \geq 2$  мультипликаторов одновременно становятся неустойчивыми при  $\tau = \tau_{A,B}^P$ . Регулярное решение теряет устойчивость внутри интервала  $\tau \in [\tau_A^P, \tau_B^P]$ , где возникают различных устойчивые «дрожащие» режимы. Возникающие решения имеют период  $(P + 1)$ , однако их межимпульсные интервалы состо-

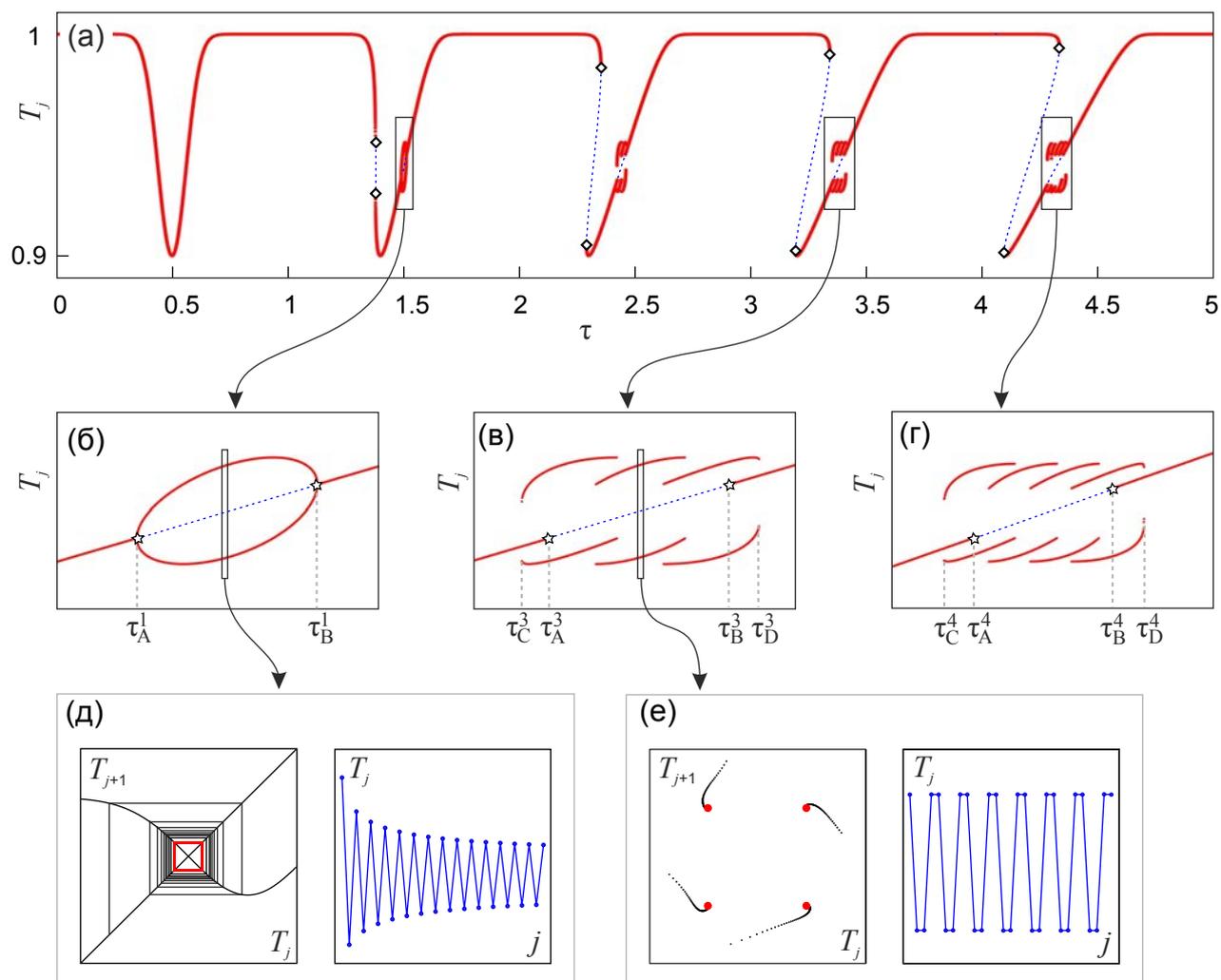


Рис. 2.7. (а) Численно построенная бифуркационная диаграмма для (2.21) при  $q = 28$ . Красные точки соответствуют межспайковым интервалам, наблюдаемым при моделировании; синие сплошные (пунктирные) линии соответствуют устойчивому(неустойчивму) регулярному режиму; квадраты обозначают седлоузловые бифуркации. (б-г) - увеличение области (а), где наблюдаются нерегулярные режимы; звездочки указывают на бифуркации мультидрожания. (д) Левая панель: одномерное отображение (2.28) для  $P = 1$  ( $\tau = 1.5$ ). Правая панель: временная динамика межспайковых интервалов  $T_j$ . (е) Дрожащее решение с периодом 4 для  $P = 3$  ( $\tau = 3.38$ ). Левая панель: траектория, сходящаяся к этому решению в плоскости  $(T_{j+1}, T_j)$ ; правая панель: временная динамика.

ят только из двух (или реже трех) различных значений  $T_j$ . Пример такого решения с периодом 4 при  $P = 3$  приведен на Рис. 2.7(е) где соответствующая последовательность имеет вид  $(\overline{T_1, T_1, T_2, T_2}) := (\dots, T_1, T_1, T_2, T_2, \text{dots})$ . Здесь и далее периодически повторяющаяся часть решения обозначена чертой. В результате таким решениям соответствуют только две, а не  $P + 1$  точки на бифуркационной диаграмме. Поскольку этот тип решений преобладает в рассматриваемой системе, мы введем термин *двухчастные* решения для их обозначения. Аналогично, мы используем термин *трехчастные* для решений, демонстрирующих три различных межимпульсных интервала.

Для каждого  $P \geq 2$  внутри интервала  $\tau \in [\tau_A^P; \tau_B^P]$  наблюдается множество различных двух- или трехчастных решений с периодом  $P+1$ . Более того, некоторые из них существуют в более широком интервале параметров. Обозначим этот интервал как  $[\tau_C^P; \tau_D^P]$ . Внутри этого интервала области устойчивости разных двудольных решений чередуются, так что при изменении задержки наблюдаются разные решения. Например, при  $P = 3$  наблюдаются следующие двудольные решения с периодом 4 при изменении  $\tau$  с  $\tau_C^3$  до  $\tau_D^3$ : (а)  $(\overline{T_1, T_1, T_1, T_2})$ , (и)  $(\overline{T_1, T_2}) \equiv (\overline{T_1, T_2, T_1, T_2})$ , (в)  $(\overline{T_1, T_1, T_2, T_2})$ , (г)  $(\overline{T_1, T_2, T_2, T_2})$ , где  $T_2 > T_1$ . Области устойчивости различных решений перекрываются, что приводит к мультистабильности для соответствующих значений запаздывания  $\tau$ . Трехчастные решения одного и того же периода  $P + 1$  наблюдаются в относительно узком интервале параметров при  $P = 2$ .

Дальнейшее увеличение параметра  $q$  приводит к изменению свойств дрожящих режимов. На Рис. 2.7 показан случай  $q = 100$ . Как и в предыдущем случае, две точки  $\tau_{A,B}^P$  существуют для каждого  $P = 1, 2, \dots$ , в которых  $\alpha = -1$  и происходят бифуркации мультидрожаания. Интервалы неустойчи-

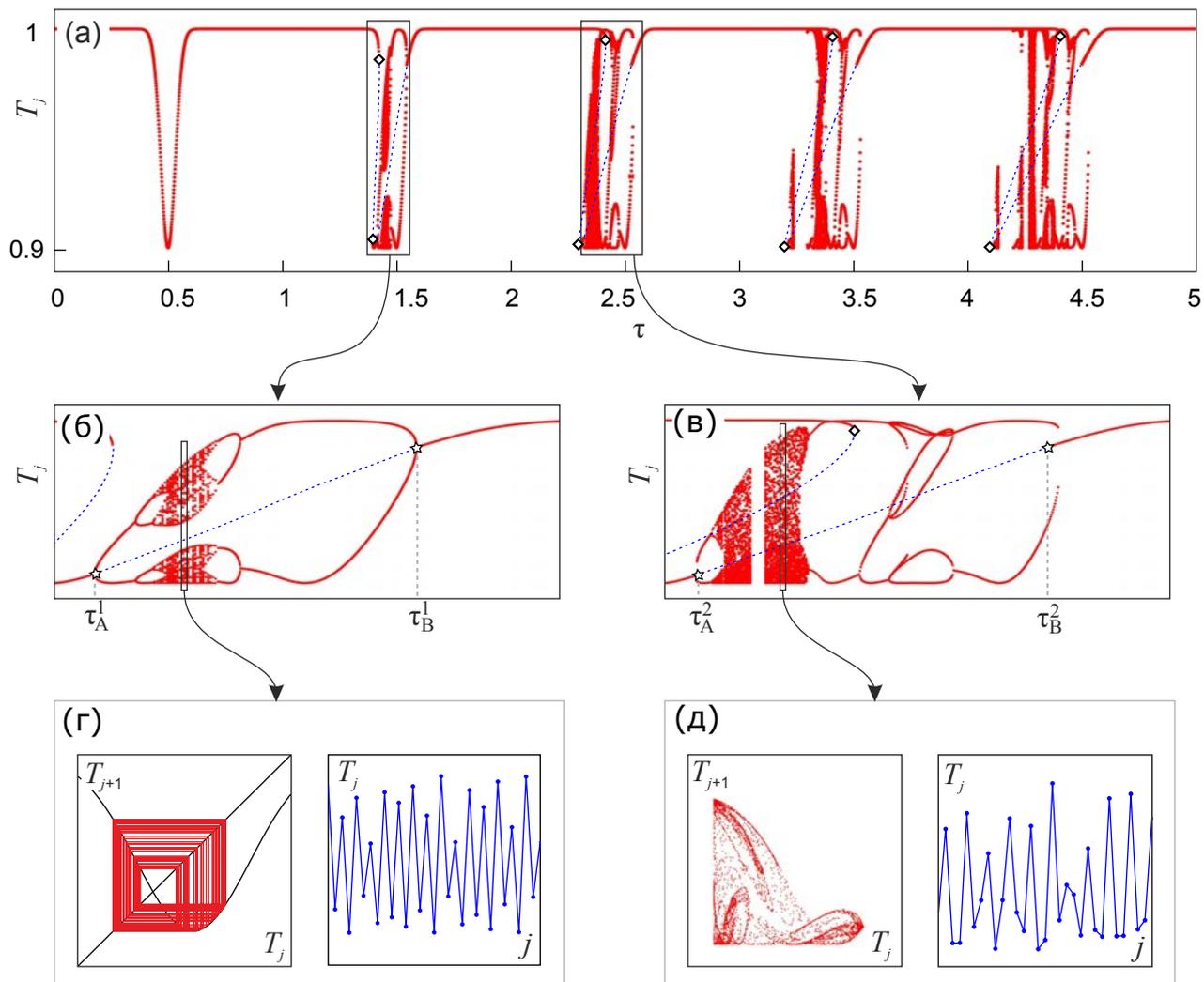


Рис. 2.8. (а) Численная бифуркационная диаграмма для (2.21) при  $q = 100$ . Красные точки соответствуют межимпульсным интервалам, наблюдаемым при прямом моделировании; синие линии соответствуют регулярному режиму; квадраты обозначают седло-узловые бифуркации. (б) и (в) – увеличение указанных областей (а); звездочки обозначают бифуркации мультидрожаания. (г) Хаотическое решение для  $P = 1$  (справа) и соответствующее одномерное отображение (слева) для  $\tau = 1.445$ . (д) Хаотическое решение для  $\tau = 2.38$  ( $P = 2$ ) на плоскости  $(T_j, T_{j+1})$  (слева) и в виде временной последовательности (справа).

ности  $[\tau_A^P, \tau_B^P]$  шире, чем на Рис. 2.7, также как и интервалы  $[\tau_C^P, \tau_D^P]$ , где наблюдаются дрожащие режимы. Помимо описанных двух- и трехчастных решений, внутри этих интервалов наблюдается более сложная динамика. При  $P = 1$  сценарий появления этой динамики аналогичен сценарию хаотизации одномерного логистического отображения. В этом случае каскад бифуркаций удвоения периода приводит к рождению хаотического аттрактора, который проиллюстрирован на Рис. 2.8(г). Для  $P \geq 2$  наблюдаемые сценарии включают каскады удвоения периода, а также появление и разрушение торов, что также может привести к рождению хаотических аттракторов. Пример такого аттрактора для случая  $P = 2$  показан на Рис. 2.8(д).

Двумерная бифуркационная диаграмма по параметрам  $\tau$  и  $q$  приведена на Рис. 2.9. Диаграмма была получена путем моделирования (2.21) с  $N = 20$  различными случайными начальными условиями (как для одномерных диаграмм) для каждой из  $1000 \times 1000$  точек сетки в указанной области  $(\tau, q) \in [1, 5] \times [20, 120]$ . Для каждой точки период решения вычисляется после переходного процесса для каждой из симуляций, и максимальный наблюдаемый период сохраняется для построения диаграммы. Если период превышал 100, наблюдаемый режим считался аперiodическим. Самая большая область (белая) на Рис. 2.9 соответствует устойчивым регулярным режимам. При  $q > q^*$  появляются островки нерегулярности, каждый из которых соответствует одному значению  $P = 1, 2, 3, \dots$ . Внутреннее строение этих островков довольно сложное. Они состоят из областей с решениями разных периодов, часто связанных бифуркациями удвоения периода, а также областей с квазипериодическими и хаотическими решениями. У границы каждого острова наблюдаются двухчастные режимы с периодом  $-(P + 1)$ . Глубже возникают

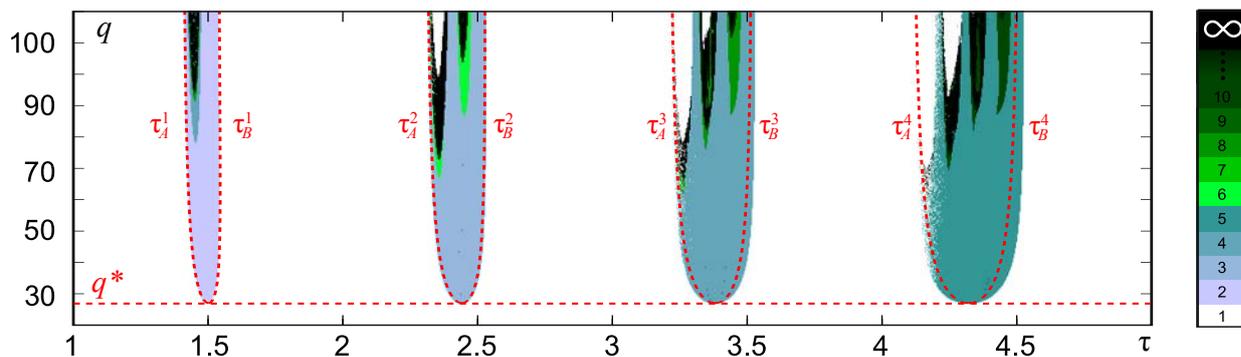


Рис. 2.9. Численно построенная двумерная бифуркационная диаграмма для системы (2.21) в плоскости параметров время запаздывания  $\tau$  и параметр крутизны  $q$ . Цветом обозначен максимальный наблюдаемый период аттрактора. Белый цвет соответствует периоду один (регулярный режим), оттенки синего и зеленого соответствуют конечным числам, превышающим единицу (дрожащие режимы), черный цвет соответствует квазипериодическим или хаотическим режимам или периоду больше 100.

Красные пунктирные кривые обозначают линии бифуркаций мультидрождания, соответствующих кривым  $\tau_{A,B}^P(q)$ , а горизонтальная пунктирная красная линия указывает критическую крутизну при  $q = q^*$ .

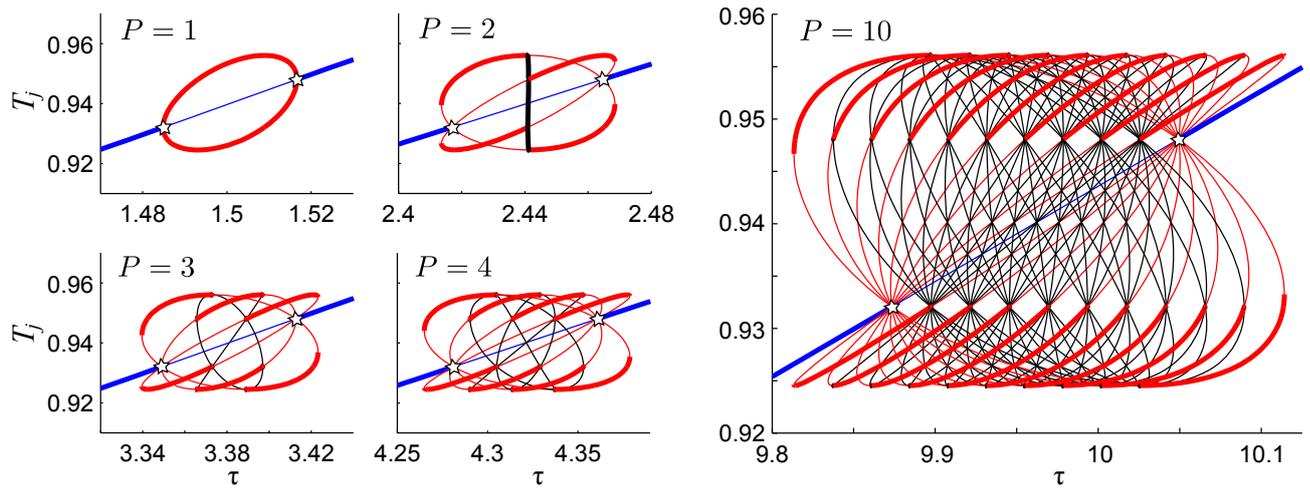


Рис. 2.10. Ветви регулярных (синие), двухчастных (красным) и трехчастных (черным) режимов системы (2.21) при  $q = 28$  и различных  $P$ , обозначенных на рисунках. Устойчивые (неустойчивые) части ветвей обозначены сплошными (пунктирными) линиями. Звездочками обозначены бифуркации мультидрожания.

решения более высоких периодов, а также квазипериодические и хаотические решения; также наблюдаются окна регулярности.

Заметим, что ветви, полученные численно для двухчастных и трехчастных решений при малой надкритичности ( $q = 28$ ) точно ложатся на ветви, получаемые с помощью уравнения (2.42) при соответствующих  $P$ . Более того, уравнение (2.42) может быть использовано для построения двухчастных и трехчастных решений при произвольных значениях  $P$ . Получаемые решения приведены на Рис. 2.10 для  $q = 28$  и  $P = 1, 2, 3, 4, 10$ . Заметим, что уравнение (2.42) при этом может иметь до трех решений, и соответственно возможны дрожащие режимы, состоящие из двух или из трех

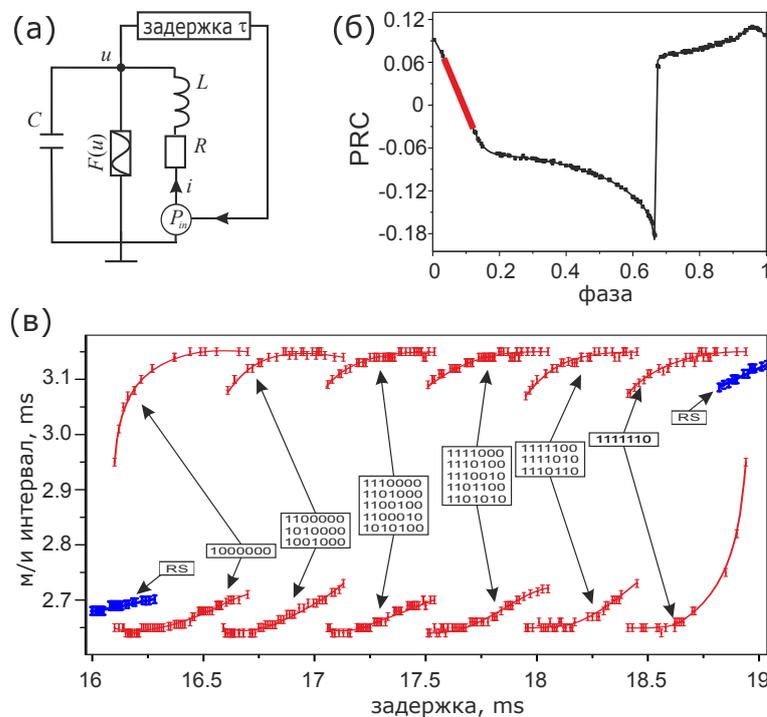


Рис. 2.11. Экспериментальное исследование дрожащих режимов. (а) Схема экспериментальной установки. (б) Измеренная кривая переустановки фазы электронного генератора. Толстой красной линией обозначен интервал с наклоном  $< -1$ . (в) Бифуркационная диаграмма системы для  $P = 6$ : наблюдаемые межспайковые интервалы нанесены на график в зависимости от времени задержки  $\tau$ . Синие ветви соответствуют регулярным режимам, красные – дрожащим. Бинарные последовательности во вставках соответствуют наблюдаемым последовательностям интервалов (0 – короткий, 1 – длинный).

### 2.2.6. Экспериментальное наблюдение дрожащих режимов.

Для экспериментального подтверждения существования бифуркации мультидрожаания был исследован электронный автогенератор ФитцХью-Нагумо с запаздывающей обратной связью [318]. Схема автогенератора изображена на Рис. 2.11(а). Здесь  $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $C = 5\text{nF}$ ,  $L = 9.4\text{ H}$ ,  $P_{in}$  – сигнал из линии задержки, а  $F(u) = \alpha u(u - u_0)(u + u_0)$  – вольт-амперная характеристика нелинейного резистора с  $\alpha = 2.02 \times 10^{-4}\Omega^{-1}\text{V}^{-2}$  и  $u_0 = 0,82\text{V}$ . В отсутствие запаздывающей обратной связи схема демонстрирует автономные колебания с периодом  $T \approx 2.95\text{ms}$ . Линия задержки реализована на ПЛИС Xilinx Virtex-5 LX50 и представляет собой сдвиговый регистр, состоящий из 4000 элементов со временем сдвига менее 7 микросекунд. Таким образом, он обеспечивает задержку одиночного импульса с дискретом не более 0,4% от периода автономных колебаний  $T$ . Обратная связь осуществляется в виде подачи импульса напряжения амплитудой  $A = 5\text{V}$  и длительностью  $\theta = 42\mu\text{s}$  с задержкой  $\tau$  после каждого пересечения напряжением  $u$  порогового значения  $u_{th} = -0.7\text{V}$  в положительном направлении. Для заданных параметров кривая переустановки фазы автогенератора имеет форму, изображенную на Рис. 2.11(б), имеет участок с наклоном меньше  $-1$ , обозначенный красным цветом.

В ходе эксперимента последовательное выбирались различные значения времени задержки обратной связи  $\tau$  и регистрировались установившиеся динамические режимы системы. Результаты показаны на экспериментальной бифуркационной диаграмме на Рис. 2.11(в). Здесь для каждой задержки  $\tau$  наблюдаемые межимпульсные интервалы построены в зависимости от времени задержки. Видно, что регулярный режим наблюдается для  $\tau < \tau_A \approx 16.3\text{ms}$

и для  $\tau > \tau_B \approx 18.8\text{ms}$ . Внутри интервала  $[\tau_A; \tau_B]$  регулярный режим дестабилизируется, и наблюдаются двухчастные дрожящие режимы, каждому из которых соответствует пара точек на бифуркационной диаграмме.

Напомним, что развитая выше теория предсказывает сосуществование различных двудольных режимов с одинаковым количеством коротких и длинных межимпульсных интервалов, различающихся только их порядком. В эксперименте рассматривались значения задержки в диапазоне  $\tau \in [16\text{ms}, 19\text{ms}]$ , что соответствует  $P = 6$ . Согласно оценке (2.48) для рассматриваемых значений  $\tau$  должно существовать не менее 18 различных режимов дрожания. Каждый из этих режимов может быть закодирован двоичной последовательностью длины  $P+1 = 7$ , представляющей короткий межимпульсный интервал нулем, а длинный единицей. Не все эти режимы различимы на бифуркационной диаграмме, так как некоторые из них состоят из одних и тех же межимпульсных интервалов и, следовательно, соответствуют одним и тем же точкам. Чтобы экспериментально обнаружить сосуществование таких решений, мы воздействовали на систему короткими случайными сигналами, чтобы вызвать переключение между различными аттракторами. На Рис. 2.11(в) около каждой изображенной ветви наблюдаемые двухчастные режимы обозначены соответствующими двоичными последовательностями. Как и предсказывает теория, были обнаружены все возможные двухчастные режимы, причем ветви с одинаковым количеством коротких и длинных межимпульсных интервалов совпадают.

### 2.3. Фазовая синхронизация двух автогенераторов с импульсными запаздывающими связями

В данном разделе рассмотрена динамика двух взаимодействующих автогенераторов с импульсной запаздывающей связью. Генераторы имеют различные собственные частоты  $\omega_1 \neq \omega_2$  и взаимодействуют друг с другом с задержкой во времени  $\tau$ . Это означает, что когда один из генераторов испускает импульс в некоторый момент времени  $t$ , импульс достигает другого генератора в более поздний момент времени  $t + \tau$ . Динамика системы определяется следующими уравнениями:

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \omega_k + Z(\varphi_{k-}) \sum_{s=1}^{\infty} \delta(t - (t_s^m + \tau)), \quad (2.51)$$

где  $k, m = \overline{1, 2}$ ,  $k \neq m$ ,  $\delta(t)$  - это дельта-функция Дирака,  $t_s^m$  - моменты возбуждения  $m$ -го генератора, когда выполняется условие и  $\varphi_m(t_s^m) = 1$ . Таким образом,  $t_s^m + \tau$  - момент времени когда импульс  $m$ -го генератора приходит к  $k$ -му генератору, и мгновенно изменяет фазу  $\varphi_k$ . Эта динамика проиллюстрирована в Рис. 2.12.

#### 2.3.1. Сведение динамики системы к точечному отображению.

Как показано в разделе 2.1, вся информация о прошлом системы (2.51), необходимая для предсказания ее будущей динамики, заключается в моментах генерации импульсов  $t_s^k$ . Более того, можно ограничиться импульсами, попадающими в интервал  $[t - \tau; t]$ . Таким образом, состояние системы в некоторый момент времени  $t$  полностью определяется конечным множеством чисел

$$\{ \varphi_1, \varphi_2, t_{s_{1A}}^1, \dots, t_{s_{1B}}^1, t_{s_{2A}}^2, \dots, t_{s_{2B}}^2 \}, \quad (2.52)$$

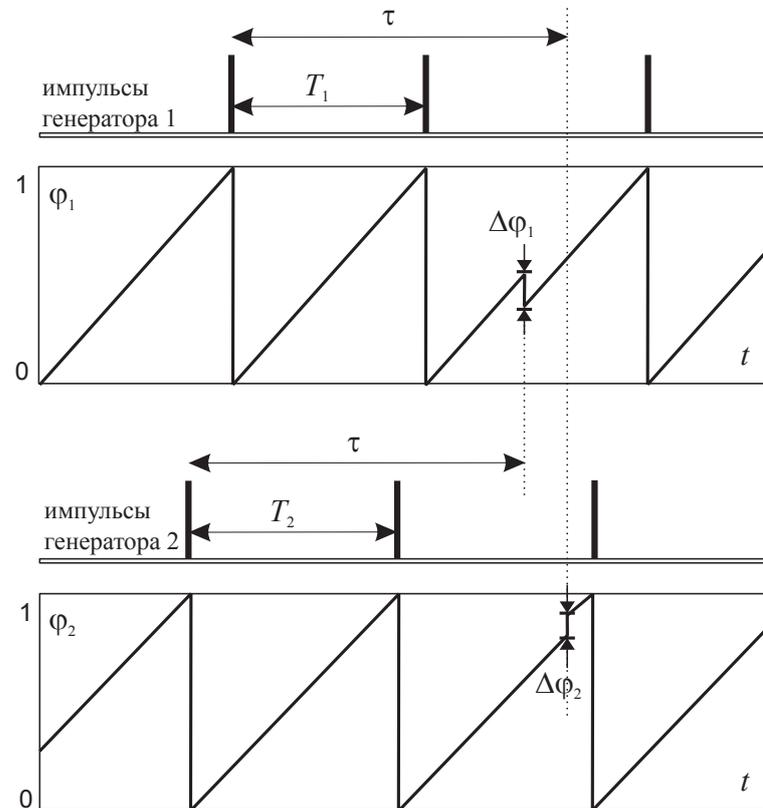


Рис. 2.12. Динамика двух импульсных генераторов с запаздывающей связью. Когда осцилляторы не взаимодействуют, они периодически испускают импульсы с периодами  $T_1 = 1/\omega_1$  и  $T_2 = 1/\omega_2$ . Связь означает, что каждый импульс, испускаемый генератором, воздействует на другой через некоторое время  $\tau$  и вызывает его фазовый сдвиг.

где  $t_{s_{kA}}^k, \dots, t_{s_{kB}}^k$  – времена возбуждения  $k$ -го генератора, попадающие в интервал  $[t - \tau; t]$ . Определим максимальное число  $M$  импульсов одного осциллятора, которое может попасть в интервал времени длительности  $\tau$ . Очевидно,  $M = \lceil \tau/T_{\min} \rceil + 1$ , где  $T_{\min}$  минимальное время между двумя последовательными возбуждениями  $t_s^k$  и  $t_{s+1}^k$ . Для достаточно слабой связи

$$T_{\min} = \frac{1 - Z_{\max}}{\omega_{\max}}, \quad (2.53)$$

где  $\omega_{\max} = \max(\omega_1, \omega_2)$ , и  $Z_{\max} = \max_{\varphi \in [0;1]} Z(\varphi)$ . Слабость связи означает, что  $Z_{\max} < 1$ . Следовательно,

$$M = \left\lceil \frac{\omega_{\max} \tau}{1 - Z_{\max}} \right\rceil + 1. \quad (2.54)$$

Для удобства дальнейшего исследования введем вектор  $\vec{\xi}(t)$ , характеризующий состояние системы (2.51) во момент времени  $t$ :

$$\vec{\xi}(t) = \{ \varphi_1(t), \varphi_2(t), x_1^1, \dots, x_M^1, x_1^2, \dots, x_M^2 \}, \quad (2.55)$$

где  $x_{\pm}^k t - t_j^k$  – время, прошедшее с момента  $t_s^k$ . Вектор  $\vec{\xi}$  имеет размерность  $2M + 2$ .

Построим отображение, описывающее изменения вектора  $\vec{\xi}$  во времени. Все компоненты этого вектора растут равномерно почти все время, за исключением счетного множества моментов, в которых происходят события: 1) возбуждение одного из генераторов или 2) воздействие импульса на генератор. Определим время, когда происходит ближайшее из этих событий.

Ближайшее возбуждение  $k$ -го генератора происходит в то время, когда  $t' = t + \theta_k$ , где

$$\theta_k = \frac{1 - \varphi_k}{\omega_k}. \quad (2.56)$$

В этом случае вектор  $\vec{\xi}$  изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \varphi_k(t') &= 0, \\
 \varphi_m(t') &= \varphi_m(t) + \omega_m \theta_k, \\
 x_1^k(t') &= 0, \\
 x_s^k(t') &= x_{s-1}^k(t) + \theta_k, \quad s \in [2; M], \\
 x_s^m(t') &= x_s^m(t) + \theta_k, \quad s \in [1; M],
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

где  $m \neq k$ . Обозначим преобразование (2.57) как отображение  $E_k : \vec{\xi}(t) \mapsto \vec{\xi}(t')$ .

Ближайший приход импульса к  $k$ -му генератору приходит в момент времени  $t' = t + \vartheta_k$ , где

$$\vartheta_k = \tau - x_{n_m}^m, \tag{2.58}$$

где  $n_m = \max_{j \in [1; M]} \{j | x_j^m < \tau\}$ .

В этом случае компоненты  $\vec{\xi}$  изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \varphi_k(t') &= \varphi_k(t) + \omega_k \vartheta_k + Z(\varphi_k(t) + \omega_k \vartheta_k), \\
 \varphi_m(t') &= \varphi_m(t) + \omega_m \vartheta_k, \\
 x_s^{k,m}(t') &= x_s^{k,m}(t) + \vartheta_k, \quad s \in [1; M].
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Обозначим преобразование (2.59) как отображение  $F_k : \vec{\xi}(t) \mapsto \vec{\xi}(t')$ .

Чтобы определить ближайшее событие, сравним значения  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\vartheta_1$ , и  $\vartheta_2$  и найдем минимальное значение, которое соответствует ближайшему событию. Используя уравнения (2.56)-(2.59), построим отображение  $G : \vec{\xi}(t) \mapsto \vec{\xi}(t')$  которое определяет преобразование состояния системы между ближайшими

событиями:

$$G : \vec{\xi}(t) \mapsto \vec{\xi}(t') = \begin{cases} E_1, & \theta_1 = \min(\theta_1, \theta_2, \vartheta_1, \vartheta_2), \\ E_2, & \theta_2 = \min(\theta_1, \theta_2, \vartheta_1, \vartheta_2), \\ F_1, & \vartheta_1 = \min(\theta_1, \theta_2, \vartheta_1, \vartheta_2), \\ F_2, & \vartheta_2 = \min(\theta_1, \theta_2, \vartheta_1, \vartheta_2). \end{cases} \quad (2.60)$$

**2.3.2. Режимы фазовой синхронизации.** С помощью полученного отображения рассмотрим режимы взаимной синхронизации генераторов. Под термином «синхронизация» будем понимать периодическое возбуждение обоих генераторов с одинаковым периодом. Заметим, что синхронизация не обязательно является полной, то есть разность фаз может быть ненулевой и даже изменяться в течение периода. Для изучения синхронизации введем сечение Пуанкаре  $\varphi_2 = x_1^2 = 0$  и определим изменение состояния системы в течение одного периода между двумя моментами возбуждения второго осциллятора  $t_s^2$  и  $t_{s+1}^2$ . За это время события, описанные отображениями  $E_k$  и  $F_k$  могут происходить в разном порядке. Например, они могут происходить следующим образом:  $E_1, F_1, F_2, E_2$ . Это означает, что первый генератор возбуждается, затем он получает импульс от второго генератора, затем второй генератор возбуждается, а затем он получает импульс от первого генератора, и так далее. В этом случае удобно рассматривать суперпозицию отображений  $E_1, F_1, F_2, E_2$ , которая дает отображение Пуанкаре

$$H = E_1 F_1 F_2 E_2 : \vec{\xi}(t_s^2) \mapsto \vec{\xi}(t_{s+1}^2). \quad (2.61)$$

Используя уравнения (2.56)-(2.59), мы получаем

$$H : \begin{cases} \overline{\varphi_1} &= \omega_1(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \theta_2) + Z(\omega_1\vartheta_1), \\ \overline{x_1^1} &= \vartheta_1 + \vartheta_2 + \theta_2, \\ \overline{x_s^{1,2}} &= x_{s-1}^{1,2} + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \theta_1 + \theta_2, \quad s \in [2; M], \end{cases} \quad (2.62)$$

где

$$\theta_1 = \frac{1 - \varphi_1}{\omega_1}, \quad (2.63)$$

$$\vartheta_1 = \tau - x_{n_2}^2 - \theta_1, \quad (2.64)$$

$$\vartheta_2 = \tau - x_{n_1-1}^1 - \theta_1 - \vartheta_1, \quad (2.65)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{\omega_2} - (\theta_1 + \vartheta_1 + \vartheta_2) - \frac{1}{\omega_2} Z(\omega_2(\theta_1 + \vartheta_1 + \vartheta_2)). \quad (2.66)$$

Для каждой другой последовательности событий  $E_k$  и  $F_k$  можно получить соответствующие формулы для отображения  $H$ . Обобщая эти формулы для всех возможных случаев, получим

$$H : \begin{cases} \overline{\varphi_1} &= \omega_1(T - \Delta) + a, \\ \overline{x_1^1} &= T - \Delta, \\ \overline{x_j^{1,2}} &= x_{j-1}^{1,2} + T, \quad j \in [2; M], \end{cases} \quad (2.67)$$

где

$$\Delta = \frac{1 - \varphi_1 - b}{\omega_1}, \quad (2.68)$$

$$T = \frac{1 - c}{\omega_2}, \quad (2.69)$$

$$a = (1 - \alpha)Z(\omega_1(\tau - \Delta - x_{n_2}^2)), \quad (2.70)$$

$$b = \alpha Z(\varphi_1 + \omega_1(\tau - x_{n_2}^2)), \quad (2.71)$$

$$c = Z(\omega_2(\tau - x_{n_1}^1)), \quad (2.72)$$

$$n_1 = \left\lceil \frac{\tau + \Delta}{T} \right\rceil, \quad (2.73)$$

$$n_2 = \left\lceil \frac{\tau}{T} \right\rceil + 1, \quad (2.74)$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \Delta < \tau \bmod T, \\ 1, & \Delta > \tau \bmod T; \end{cases} \quad (2.75)$$

при  $n_1 = 0$  используется  $x_0^1 \equiv -\Delta$ .

Синхронные режимы системы соответствуют неподвижным точкам отображения (2.67) с координатами

$$\begin{aligned} x_s^1 &= sT - \Delta, & s &= \overline{1, M} \\ x_s^2 &= (s - 1)T, & s &= \overline{2, M} \\ \varphi_1 &= \omega_1(T - \Delta) + a. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Значения  $T$  и  $\Delta$  имеют простой физический смысл:  $T$  – это период возбуждения генератора, а  $\Delta$  – это интервал времени между возбуждениями первого и второго генераторов, или межспайковая задержка. Используя (2.76), получим следующее уравнения для  $T$  и  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} Z(\omega_1((\tau - \Delta) \bmod T)) &= 1 - \omega_1 T, \\ Z(\omega_2((\tau + \Delta) \bmod T)) &= 1 - \omega_2 T. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Решая эти уравнения, получим выражения для значений  $T$  и  $\Delta$ , что полностью характеризует синхронный режим. Для изучения устойчивости синхронного режима линеаризуем отображение (2.67) вблизи неподвижной точки (2.76) и получим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 + \beta & 1 + \alpha\beta & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \cdots & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \cdots & \gamma & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha\beta & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

где

$$\beta = Z'(\omega_1(\tau - \Delta) \bmod T), \quad (2.79)$$

$$\gamma = Z'(\omega_2(\tau + \Delta) \bmod T). \quad (2.80)$$

Собственные значения матрицы определяют устойчивость или неустойчивость неподвижной точки. Для определённости в дальнейшем примем

$$Z(\varphi, \mu) = -\mu \sin 2\pi\varphi. \quad (2.81)$$

Такая форма кривой переустановки фазы соответствует классической модели изохронных часов [127], которая часто используется в работах по моделированию сердца и других работах [125, 196, 213, 306]. Для такой формы кривой переустановки фазы (2.77) представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}\sin 2\pi (\omega_1 ((\tau - \Delta) \bmod T)) &= \frac{\omega_1 T - 1}{\mu}, \\ \sin 2\pi (\omega_2 ((\tau + \Delta) \bmod T)) &= \frac{\omega_2 T - 1}{\mu}.\end{aligned}\tag{2.82}$$

Эти уравнения имеют решения в вещественных числах, когда  $T$  принадлежит интервалу

$$T \in \left[ \frac{1 - \mu}{\min(\omega_1, \omega_2)}; \frac{1 + \mu}{\max(\omega_1, \omega_2)} \right].\tag{2.83}$$

Для определенности выберем  $\omega_1 < \omega_2$ . Решая (2.82) и принимая во внимание что  $(\tau \pm \Delta) \bmod T \in [0; T)$ , получим

$$\begin{aligned}(\tau - \Delta) \bmod T &= \frac{1}{2\omega_1} \left( \frac{1}{2} + m_1(T) \pm g_1(T) \right), \\ (\tau + \Delta) \bmod T &= \frac{1}{2\omega_2} \left( \frac{1}{2} + m_2(T) \pm g_2(T) \right),\end{aligned}\tag{2.84}$$

где

$$m_k(T) = \begin{cases} 0, & T \geq \frac{1}{\omega_k}, \\ 1, & T < \frac{1}{\omega_k}, \end{cases}\tag{2.85}$$

$$g_k(T) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \left| \frac{\omega_k T - 1}{\mu} \right|.\tag{2.86}$$

Знак " $\pm$ " означает, что в зависимости от выбора либо плюса, либо минуса, получается одно из двух различных решений. Решая (2.84), получим выра-

жения для  $\tau$  и  $\Delta$  как функции от  $T$ :

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\omega_1(1+2m_2) + \omega_2(1+2m_1) \pm 2\omega_1g_2 \pm 2\omega_2g_1}{8\omega_1\omega_2} + \frac{pT}{2}, \\ \Delta &= \frac{\omega_1(1+2m_2) - \omega_2(1+2m_1) \pm 2\omega_1g_2 \mp 2\omega_2g_1}{8\omega_1\omega_2} + \frac{(p \bmod 2)T}{2},\end{aligned}\quad (2.87)$$

где  $p$  - произвольное целое число. Каждое из выражений (2.87) содержит два знака " $\pm$ ". Это означает, что подставляя плюсы или минусы можно получить *четыре* различных решения для каждого значения  $p$ .

**2.3.3. Интервалы и зоны синхронизации.** Для исследования свойств синхронных режимов удобно рассматривать (2.87) как параметрическую зависимость  $\Delta$  от  $\tau$ , где  $T$  рассматривается как параметр, изменяющийся в пределах (2.83). На Рис. 2.13 построен график относительной межспайковой задержки  $\Delta/T$  в зависимости от временной задержкой связи  $\tau$ . Жирные линии соответствуют устойчивым решениям, тонкие – неустойчивым. Сила связи  $\mu = 0.1$  постоянна для всех диаграмм, собственная частота первого генератора  $\omega_1 = 1$  также постоянна, в то время как собственная частота второго генератора увеличивается от (а) к (г).

Рис. 2.13(а) представляет собой синхронные режимы для пары одинаковых импульсных генераторов ( $\omega_1 = \omega_2$ ). Видно, что при различных значениях задержки  $\tau$ , возможна синфазная или противофазная синхронизация. Синфазная синхронизация соответствует  $\Delta = 0$  и происходит в интервалах  $\tau \in [0; 0.25]$ ,  $\tau \in [0.75; 1.35]$ ,  $\tau \in [1.66; 2.45]$  и для  $\tau > 2.55$ . Противофазная синхронизация соответствует  $\Delta = T/2$  и происходит в интервалах  $\tau \in [0.3; 0.8]$ ,  $\tau \in [1.2; 1.9]$  и  $\tau > 2.09$ . Кроме того, наблюдается внефазовая синхронизация в интервале  $\tau \in [0.25; 0.3]$ . В этом интервале межспайковая

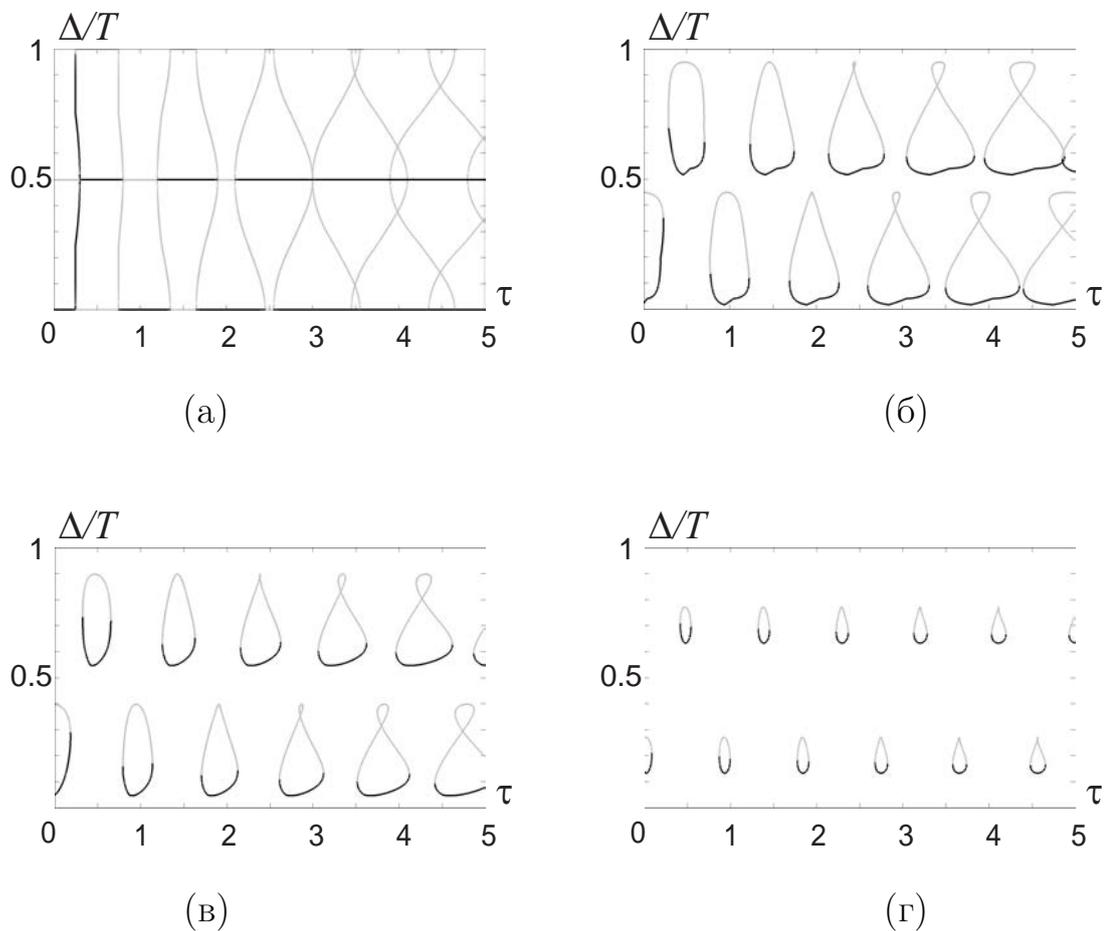


Рис. 2.13. Периодическое решение (2.51): относительная межспайковая задержка  $\Delta/T$  в зависимости от задержки связи  $\tau$ . Параметры  $\mu = 0.1$  и  $\omega_1 = 1$  постоянные, в то время как  $\omega_2$  возрастает от (а) до (г): (а)  $\omega_2 = 1$ , (б)  $\omega_2 = 1.05$ , (в)  $\omega_2 = 1.1$ , (г)  $\omega_2 = 1.2$ .

задержка между осцилляторами резко зависит от  $\tau$  и изменяется в пределах от 0 до 1.

На Рис. 2.13(б-г) проиллюстрированы синхронные режимы неидентичных генераторов. Для любого ненулевого значения частотной расстройки  $\zeta = \omega_2 - \omega_1$  система (2.51) имеет ряд периодических решений, существующих в соответствующих интервалах запаздывания  $\tau$ . В каждом интервале существует пара устойчивых и неустойчивых решений, которые появляются и исчезают через седло-узловую бифуркацию. Синхронизация происходит внутри этих интервалов, поэтому они названы *интервалами синхронизации*. Межспайковая задержка  $\Delta$  между осцилляторами сильно различается от одного интервала синхронизации к другому. В зависимости от величины относительной межспайковой задержки  $\Delta/T$  мы различаем «синфазную» и «противофазную» синхронизацию. Для неидентичных осцилляторов эти термины используются не в строгом смысле, поскольку  $\Delta$  не равна строго ни 0, ни  $T/2$ . Заметим, что интервалы, соответствующие синфазной и противофазной синхронизации, чередуются с ростом  $\tau$ . Ширина интервалов синхронизации уменьшается с ростом частотного расстройки  $\zeta$ . Эти интервалы превращаются в точку, а затем исчезают для

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{1 + \mu}{1 - \mu}, \quad (2.88)$$

что следует из (2.83). Таким образом, синхронизация происходит при расстройке частот

$$\zeta \leq \zeta_0 = \frac{2\mu\omega_1}{1 - \mu}.$$

Вне интервалов синхронизации, система (2.51) не имеет периодических решений: осцилляторы колеблются с разными периодами, синхронизации не

происходит. Для иллюстрации динамики системы внутри и вне интервалов синхронизации, приведена динамика межспайковой задержки  $\Delta$  между осцилляторами в зависимости от времени на Рис. 2.14 для  $\mu = 0.1$ ,  $\zeta = 0.1$  и двух разных значения  $\tau$ . На Рис. 2.14(а)  $\tau = 0.6$ , что соответствует второму интервалу синхронизации на Рис. 2.13(г). Межспайковая задержка быстро достигает значение  $\Delta \approx 0.6$ , а затем остается постоянной. На Рис. 2.14(б)  $\tau = 1.2$ , и это значение не относится ни к какому интервалу синхронизации. Межспайковая задержка изменяется неравномерно со временем в пределах от нуля до единицы и не выходит на постоянное значение.

На Рис. 2.14(в) построена бифуркационная диаграмма на плоскости параметров  $\tau - \zeta$ . На плоскости присутствует множество так называемых *зон синхронизации*, которые соответствуют интервалам синхронизации на предыдущих рисунках. Светло-серые зоны соответствуют синфазной синхронизации, темно-серые зоны соответствуют противофазной синхронизации. Ширина каждой зоны вдоль  $\tau$  уменьшается с ростом  $\zeta$ ; при  $\zeta > \zeta_0$ , зоны исчезают. Обратим внимание на то, что разные зоны могут перекрываться. Области перекрытия окрашены в черный цвет и соответствуют областям параметров, где система является мультистабильной.

**2.3.4. Особенности синхронизации с большой задержкой связи.** Остановимся подробнее на особенностях синхронизации при больших задержках связи. Интересно, что синхронные режимы существуют для *произвольно больших значений задержки  $\tau$* . Это следует из (2.87): подставляя большие значения  $p$ , можно получить сколь угодно большие значения  $\tau$ . Ширина интервалов синхронизации увеличивается с ростом  $\tau$ , что также следует

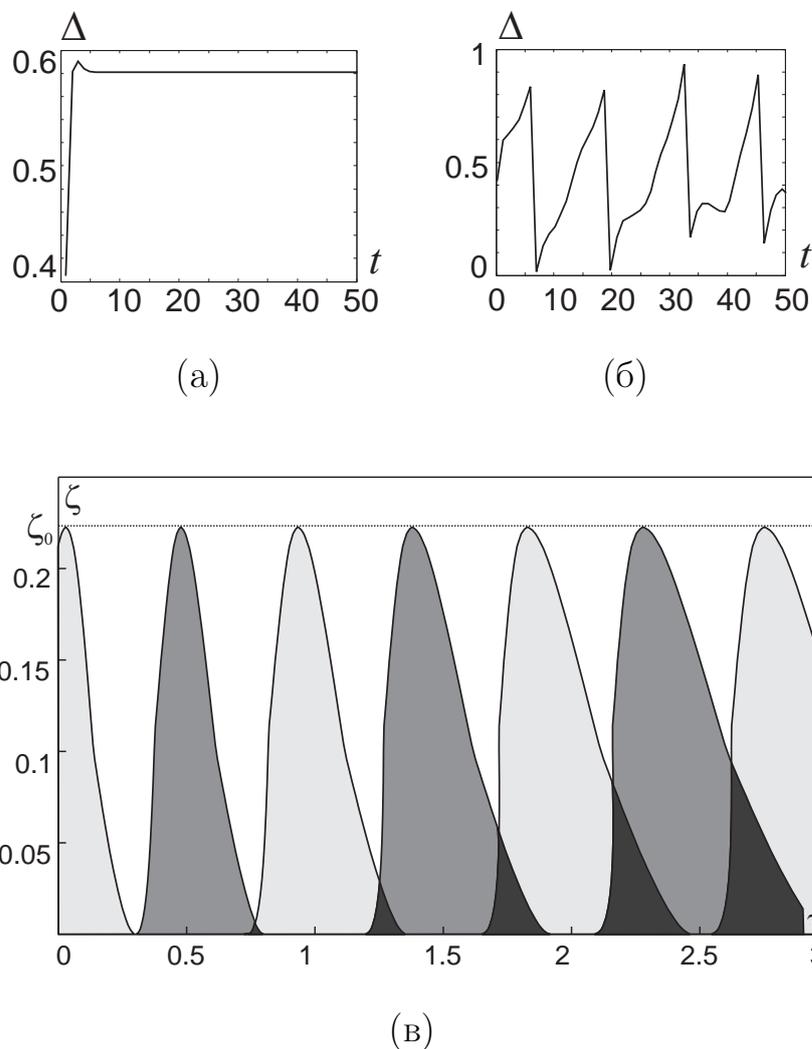


Рис. 2.14. (а)-(б) Динамика межспайкового интервала для  $\mu = 0.1$ ,  $\zeta = 0.1$ :

(а) внутри интервала синхронизации,  $\tau = 0.6$ ; (б) вне интервала синхронизации,  $\tau = 1.2$ . (в) Бифуркационная диаграмма  $\mu = 0.1$ , и  $\omega_1 = 1$ .

Зоны синхронизации. Светло-серый цвет соответствует синфазной синхронизации, а темно-серый-противофазной. Черные области перекрытия соответствуют мультистабильности.

из (2.87): если ширина нулевого интервала равна  $\Delta\tau_0$ , ширина  $z$ -го интервала равна  $\Delta\tau_p = \Delta\tau_0 + 0.5p\Delta T$ , где  $\Delta T$  является постоянной длиной интервала (2.83). Для больших значений  $\tau$ , соседние интервалы могут перекрываться. В этом случае существуют два или более синхронных решения для одного значения  $\tau$ , и система становится *мультистабильной*. Назовем сосуществование различных синхронных решений, которые отличаются периодом  $T$  и межспайковой задержкой  $\Delta$ , *мультистабильностью первого типа*. Мультистабильность первого типа характерна для больших задержек и малых частотных расстройек  $\zeta$ . Например, для идентичных осцилляторов и  $\mu = 0.1$ , синхронизация всегда бистабильна для  $\tau > 2.55$ . В этом случае синфазный и противофазный режимы существуют одновременно.

В дополнение к этому численное моделирование выявляет еще один тип мультистабильности, который мы называем *мультистабильностью второго типа*. Она заключается в сосуществовании синхронного и асинхронного режимов. Этот вид мультистабильности типичен, когда частотная расстройка  $\zeta$  достаточно велика, для  $\zeta \leq 0.1$  такого типа мультистабильности не наблюдается. Для  $\zeta = 0.15$  сосуществование синхронных и асинхронных режимов обнаруживается в интервалах синхронизации, начиная с 11-го ( $\tau \in [4.44; 4.88]$ ). В этом случае синхронизация происходит для одних начальных условий и не происходит для других. Далее вероятность перехода к синхронному режиму из случайных начальных условий уменьшается с увеличением  $\tau$ . Например, для 17-го интервала ( $\tau \in [7.15; 7.75]$ ) вероятность синхронизации составляет 10%, а для 18-го интервала ( $\tau \in [7.6; 8.25]$ ) уже около 5%. Для больших  $\tau$  бассейн притяжения синхронных решений становится чрезвычайно малым, поэтому синхронизация практически неосуществима.

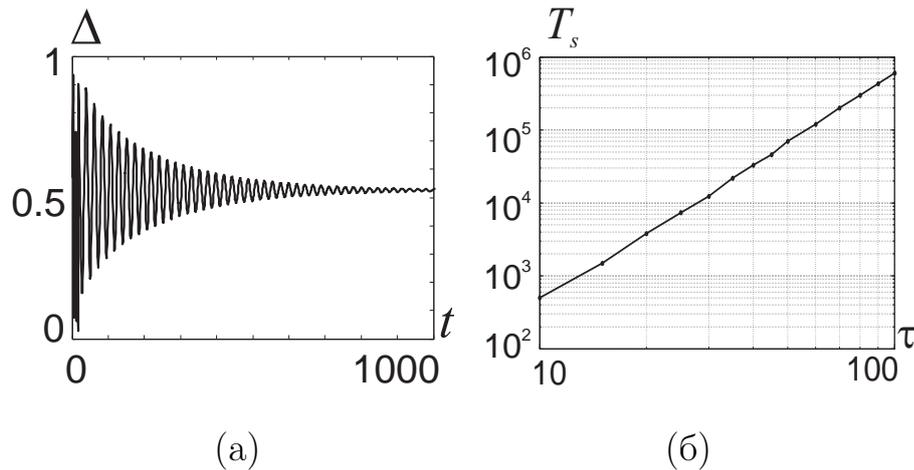


Рис. 2.15. Синхронизация с большой  $\tau$ . (а) Межспайковая задержка в зависимости от  $\tau = 10$ . (б) Время синхронизации  $T_s$  в зависимости от задержки  $\tau$  – пояснения в тексте.

Большая задержка связи также приводит к значительному увеличению длительности переходного процесса до достижения синхронизации. Динамика для больших  $\tau$  проиллюстрирован на Рис. 2.15(а), где межспайковая задержка между генераторами построена в зависимости от времени для  $\tau = 10$ . Фазовый сдвиг демонстрирует затухание колебаний, медленно приближающихся к постоянному значению. Для характеристики этого переходного процесса был введен термин «время синхронизации»  $T_s$  – среднее время, за которое фазовый сдвиг приобретает постоянное значение с точностью 10%, стартуя со случайных начальных условий. На Рис. 2.15(б)  $T_s$  построена в зависимости от  $\tau$  в логарифмическом масштабе, для больших  $\tau$  эта функция близка к  $T_s \sim \tau^3$ .

### 2.3.5. Синфазная, противофазная и внефазная синхронизация.

Для относительно небольших задержек ( $\tau \sim 1$ ) также можно наблюдать

некоторые интересные эффекты. В зависимости от параметров системы синхронизация может быть синфазной, противофазной или внефазовой. Термины «синфазный» и «противофазный» означают, что фазовый сдвиг между осцилляторами равен 0 или 0.5. Для неидентичных осцилляторов фазовый сдвиг не равен этим значениям в точности, поэтому синхронизация является «почти синфазной» или «почти противофазной». Области параметров с синфазной и противофазной синхронизацией чередуются с ростом  $\tau$ , и возможно их перекрытие. Эта особенность приводит к так называемой *бифуркации перескока фазы* [287, 288], которая изображена на Рис. 2.16(а). На этом рисунке  $\mu = 0.1$ ,  $\zeta = 10^{-3}$ , и  $\tau \in [1; 1.5]$ . В этом интервале времени  $\tau$  существуют два перекрывающихся интервала синхронизации: синфазный интервал для  $\tau < \tau_1 \approx 1.34$  и противофазный интервал для  $\tau > \tau_2 \approx 1.21$ . Таким образом, если  $\tau$  медленно нарастает от 1 до 1.5, для  $\tau < \tau_1$  происходит синфазная синхронизация, и для  $\tau > \tau_1$  система переходит в противофазный режим. Если  $\tau$  медленно убывает от 1.5 обратно к 1, обратное переключение с противофазного на синфазное происходит при  $\tau = \tau_2$ , таким образом, поведение системы характеризуется гистерезисом.

Внефазовая синхронизация наблюдается для малых  $\tau$  и для малых значений частотной расстройки  $\zeta$ . Для пары одинаковых осцилляторов существуют периодические решения с произвольными значениями фазового сдвига в узком интервале  $\tau \in [0.25; 0.3]$  (см. Рис. 2.13(а)). Этот факт может быть использован для эффективного управления динамикой с помощью запаздывания: слабое варьирование  $\tau$  приводит к сильному изменению межспайковой задержки  $\Delta$ . Эта особенность проиллюстрирована на Рис. 2.16(б), где построено периодическое решение (2.51) для  $\mu = 0.1$ ,  $\zeta = 10^{-3}$ , и  $\tau \in [0; 0.5]$ . В этом

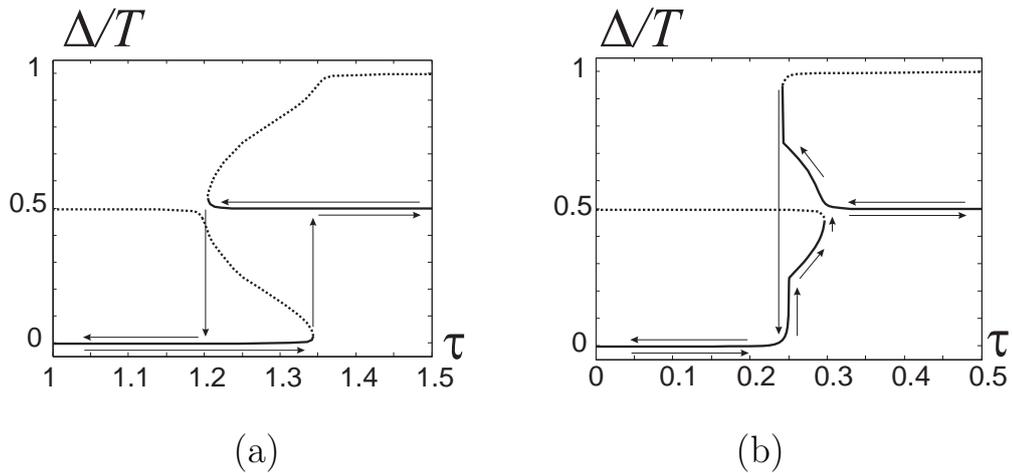


Рис. 2.16. Бифуркация перескока фазы  $\mu = 0.1$ ,  $\zeta = 10^{-3}$ . (а) Когда  $\tau$  медленно нарастает от 1 до 1.5, относительная межспайковая задержка  $\Delta/T$  между осцилляторами близка к нулю до перехода на  $\tau_1 \approx 1.34$  и близка к  $1/2$  после перехода. Когда  $\tau$  уменьшается, происходит обратный переход для  $\tau_2 \approx 1.21$ . (б) Когда  $\tau$  растёт от 0 до 0.5, относительный межспайковый интервал  $\Delta/T$  практически плавно растёт от 0 до 0.5. Когда  $\tau$  уменьшается, значение  $\Delta/T$  плавно растёт почти до 1 для  $\tau > \tau_4 \approx 0.25$ , затем прыгает к значению близкому к нулю, и плавно уменьшается до нуля.

интервале существуют два перекрывающихся интервала синхронизации, первый из которых предназначен для  $\tau < \tau_3 \approx 0.3$  и второй для  $\tau > \tau_4 \approx 0.25$ . Относительная межспайковая задержка  $\Delta/T$  меняется от 0 до почти 0.5 для первого интервала и от 0.5 до почти 1 для второго. Таким образом, изменяя  $\tau$ , можно получить режимы с произвольным значением межспайковой задержки.

Переключение с синфазного режима на противофазный и обратно возможно для  $\tau \in [0; 0.5]$  но оно отличается от описанной выше бифуркации фазового перескока. Если  $\tau$  возрастает от 0 до 0.5, фазовый сдвиг между

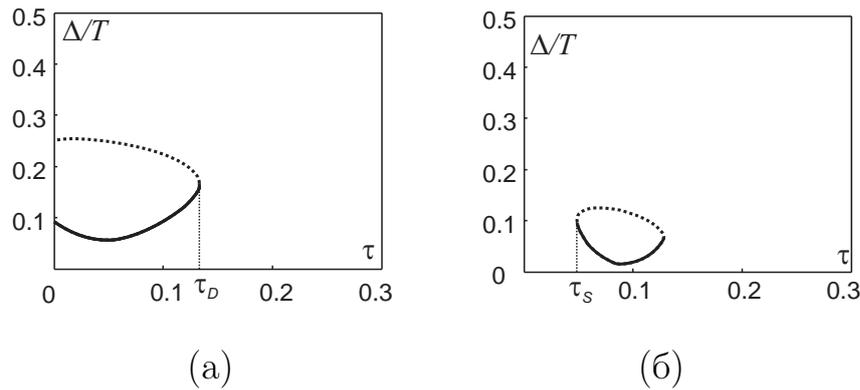


Рис. 2.17. Периодические решения для первого интервала синхронизации:

- (а) десинхронизация, вызванная задержкой,  $\mu = 0.2$ ,  $\omega_2 = 1.4$ ; (б) синхронизация, вызванная задержкой,  $\mu = 0.3$ ,  $\omega_2 = 1.8$ .

осцилляторами плавно растёт от 0 до 0.5 практически без скачков. Если  $\tau$  убывает от 0.5 до 0, для  $\tau > \tau_4$  фазовый сдвиг плавно растёт от 0.5 практически до 1. Для  $\tau = \tau_4$ , значение  $\Delta/T$  становится близким к нулю, но из-за эквивалентности нуля и единицы этот скачок невелик. Далее фазовый сдвиг плавно уменьшается до нуля. Таким образом, переключение между синфазным и противофазным происходит практически без скачков, что можно назвать «мягким переключением».

Также отметим, что задержка может иметь как синхронизирующий, так и десинхронизирующий эффект по сравнению со случаем случая мгновенной связи. Десинхронизирующая задержка означает, что колебания синхронны без временной задержки, но эта синхронизация нарушается, когда  $\tau$  становится ненулевым [45, 67, 86, 389]. Этот случай проиллюстрирован на Рис. 2.17(а) в которой строится решение, соответствующее первому интервалу синхронизации для  $\mu = 0.2$ ,  $\omega_1 = 1$ , и  $\omega_2 = 1.4$ . Здесь для  $\tau = 0$ , существует синхронизированный режим, в то время как для  $\tau > \tau_D \approx 0.132$  он исчезает.

Противоположный случай синхронизирующей задержки означает, что генераторы не могут быть синхронизированы мгновенной связью, но могут быть синхронизированы с конечным запаздыванием [81, 88, 99, 275, 315]. Это возможно, если первый интервал синхронизации начинается с ненулевого значения  $\tau$ , как на Рис. 2.17(б), где он построен для  $\mu = 0.3$ ,  $\omega_1 = 1$ , и  $\omega_2 = 1.8$ . Тогда для  $\tau = 0$  нет синхронизации, но она возникает для  $\tau > \tau_s \approx 0.048$ .

## 2.4. Кросс-частотная синхронизация автогенераторов с импульсными запаздывающими связями

В настоящем разделе рассматривается динамика двух автогенераторов с запаздывающими связями в случае, когда их собственные частоты существенно различаются. В этом случае естественно предположить, что также различаются и кривые переустановки фазы автогенераторов, так что их динамика описывается системой

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \omega_k + Z_k(\varphi_{k-}) \sum_{s=1}^{\infty} \delta(t - (t_s^m + \tau)), \quad (2.89)$$

Далее мы предположим пропорциональность кривой переустановки фазы частоте автогенератора, поскольку такой тип масштабирования представляется естественным для широкого класса систем и действительно выявляется при экспериментальном исследовании электронных осцилляторов (см. подраздел 2.4.2). В этом случае кривые переустановки фазы определяются в следующей форме:  $Z_j(\varphi) = \varepsilon \omega_j f(\varphi)$ , где  $\varepsilon$  – сила связи. Также положим без потери общности  $\omega_1 = 1$ , и обозначим  $\omega \equiv \omega_2$ .

Назовем кросс-частотной синхронизацией  $m : n$  периодический режима, когда первый осциллятор испускает  $m$  импульсов за период, а второй испускает  $n$  импульсов за период, где  $m$  и  $n$  являются несоизмеримыми целыми числами (далее, мы предположим  $m \geq n$ ). Для  $m = n = 1$  это означает частотную синхронизацию в обычном смысле. Отношение  $m : n$  также называется числом вращения  $\rho$ .

### 2.4.1. Аналитическое исследование кросс-частотной синхронизации при слабой связи.

Рассмотрим решения системы (2.89), соот-

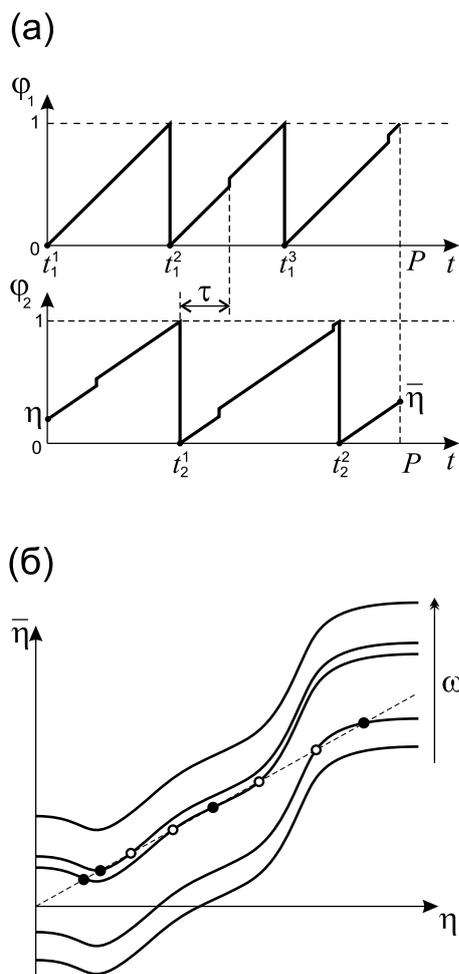


Рис. 2.18. (а) Динамика системы (2.18). Когда фаза достигает единицы, она сбрасывается на ноль, и генератор выдает импульс. Небольшие скачки фазы соответствуют моментам, когда генератор получает запаздывающие импульсы от другого генератора. (б) Правая часть отображения (2.100) для разных значений параметра  $\omega$ . Когда  $\omega$  кривая сдвигается вверх (как показано двойной стрелкой), и различные неподвижные точки появляются и исчезают последовательно. Устойчивые неподвижные точки изображаются сплошными кругами, неустойчивые - пустыми.

ветствующие синхронизации  $m : n$ . Предположим, что  $\varphi_1(t = 0) = 0$  и  $\varphi_2(t = 0) = \eta$ , а период искомого решения равен  $P$ . Это означает, что первый (второй) генератор излучил  $m$  ( $n$ ) импульсов при  $t \in [0; P)$  (такой режим проиллюстрирован на Рис. 2.18(a) для  $m = 3, n = 2$ ). Обозначим  $t_1^1, t_1^2, \dots, t_1^m$  моменты, когда первый генератор генерирует импульсы, и  $t_2^1, t_2^2, \dots, t_2^n$  моменты, когда это делает второй генератор. Тогда моменты прихода генераторами входных импульсов равны  $(t_2^p + \tau) \bmod P, p = 1, 2, \dots, n$  для первого генератора и  $(t_1^p + \tau) \bmod P, p = 1, 2, \dots, m$  для второго. Обозначим значения фаз непосредственно перед моментами прихода импульсов как  $\varphi_1^p = \varphi_1(t = (t_2^p + \tau) \bmod P)$  и  $\varphi_2^p = \varphi_2(t = (t_1^p + \tau) \bmod P)$ . Тогда значения фазовых сдвигов, вызванных импульсом, равны  $\Delta\varphi_j^p = \varepsilon\omega_j f(\varphi_j^p)$ . Это означает, что значения фаз для  $t = P$  равны

$$\varphi_1(P) = \left( P + \varepsilon \sum_{p=1}^n f(\varphi_1^p) \right) \bmod 1 = P + \varepsilon \sum_{p=1}^n f(\varphi_1^p) - m, \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(P) &= \left( \eta + \omega P + \omega\varepsilon \sum_{p=1}^m f(\varphi_2^p) \right) \bmod 1 = \\ &= \eta + \omega P + \omega\varepsilon \sum_{p=1}^m f(\varphi_2^p) - n. \end{aligned} \quad (2.91)$$

При условии  $\varphi_1(P) = 0$  можно получить уравнение для периода  $P$ :

$$P = m - \varepsilon \sum_{p=1}^n f(\varphi_1^p), \quad (2.92)$$

и вычислить новую разность фаз  $\bar{\eta} = \varphi_2(P) - \varphi_1(P)$ :

$$\bar{\eta} = \eta + \omega m - n + \omega\varepsilon \left( \sum_{p=1}^m f(\varphi_2^p) - \sum_{p=1}^n f(\varphi_1^p) \right). \quad (2.93)$$

Данное уравнение представляет собой отображение Пуанкаре, управляющее динамикой разности фаз  $\eta$  в окрестности периодического решения. Режим

синхронизации  $m : n$  соответствует устойчивой неподвижной точке отображения (2.93). Изучим отображение (2.93) для малого  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Легко видеть, что для  $\varepsilon = 0$

$$t_1^p = p, \quad (2.94)$$

$$t_2^p = \frac{p - \eta}{\omega_2}, \quad (2.95)$$

$$\varphi_1^p = t_2^p + \tau = \frac{p - \eta}{\omega} + \tau, \quad (2.96)$$

$$\varphi_2^p = \eta + \omega(t_1^p + \tau) = \eta + \omega(p + \tau), \quad (2.97)$$

и отображение (2.93) сводится к линейному отображению

$$\bar{\eta} = \eta + \omega m - n, \quad (2.98)$$

которое является нейтрально устойчивым при  $\omega = n/m$ . Для  $0 < \varepsilon \ll 1$  изменения  $\varphi_j^p$  по отношению к значениям (2.96-2.97) имеют порядок  $\varepsilon$ , и отображение (2.93) может быть записано с точностью до  $O(\varepsilon^2)$  как

$$\bar{\eta} = \eta + \omega m - n + \omega \varepsilon \left( \sum_{p=1}^m f(\eta + \omega(p + \tau)) - \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p - \eta}{\omega} + \tau\right) \right), \quad (2.99)$$

что подразумевает  $\omega = n/m + O(\varepsilon)$  и допускает дальнейшее упрощение:

$$\bar{\eta} = \eta + \omega m - n + \varepsilon \omega S_\tau^{mn}(\eta), \quad (2.100)$$

где

$$S_\tau^{mn}(\eta) = \sum_{p=1}^m f\left(\eta + \frac{n}{m}(p + \tau)\right) - \sum_{p=1}^n f\left(\frac{m}{n}(p - \eta) + \tau\right), \quad (2.101)$$

Форма функции  $S_\tau^{mn}(\eta)$  зависит от формы кривой переустановки фазы  $f(\varphi)$ , а также значений  $m$ ,  $n$  и задержки  $\tau$ . На рисунке 2.18(b) типичный вид правой части отображения (2.100) построен для разных значений  $\omega$  и фиксированных значений других параметров. При увеличении  $\omega$  кривая движется

вверх, и пары устойчивых и неустойчивых неподвижных точек появляются и исчезают последовательно. Синхронизация возможна при наличии хотя бы одной устойчивой неподвижной точки, что подразумевает следующее условие:

$$\frac{m}{n} + \frac{\varepsilon A_{\tau}^{mn}}{n} \leq \frac{1}{\omega} \leq \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon B_{\tau}^{mn}}{n}, \quad (2.102)$$

где  $A_{\tau}^{mn} := \sup_{\eta \in (0,1)} S_{\tau}^{mn}(\eta)$  и  $B_{\tau}^{mn} := \inf_{\eta \in (0,1)} S_{\tau}^{mn}(\eta)$ . Двойное неравенство (2.102) определяет так называемую зону синхронизации – область в пространстве параметров, внутри которой наблюдается синхронизация  $m : n$ .

Можно отметить ряд общих свойств зон синхронизации. Во-первых, для всех  $m$  и  $n$  функции  $A_{\tau}^{mn}$  и  $B_{\tau}^{mn}$  являются 1 - периодическими функциями задержки  $\tau$ . Это означает, что зоны существуют для произвольной большой задержки связи, а границы зон являются периодическими с периодом 1. Во-вторых, ширина всех зон линейно растет с силой связи  $\varepsilon$ . Точная форма зон синхронизации зависит от конкретной формы кривой переустановки фазы. Например, предположим, что  $f(\varphi) = -\sin(2\pi\varphi)$ . Это позволяет вычислить  $S_{\tau}^{mn}(\eta)$  следующим образом:

$$S_{\tau}^{mn}(\eta) = \begin{cases} -2 \sin(2\pi\eta) \cos(2\pi\tau), & \text{if } m = n = 1, \\ \sin(2\pi(\tau - m\eta)), & \text{if } m > 1, n = 1, \\ 0, & \text{if } m > n > 1. \end{cases} \quad (2.103)$$

что соответствует следующей форме зон синхронизации:

$$\begin{aligned} |\mu - 1| &\leq 2\varepsilon |\cos 2\pi\tau|, & \text{for } m = n = 1, \\ |\mu - m| &\leq \varepsilon, & \text{for } m > n = 1, \\ |\mu - \frac{m}{n}| &= 0, & \text{for } m > n > 1. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Заметим, что границы всех зон, кроме главной, не зависят от  $\tau$ . Другая неожиданная особенность заключается в том, что наблюдаются только зоны

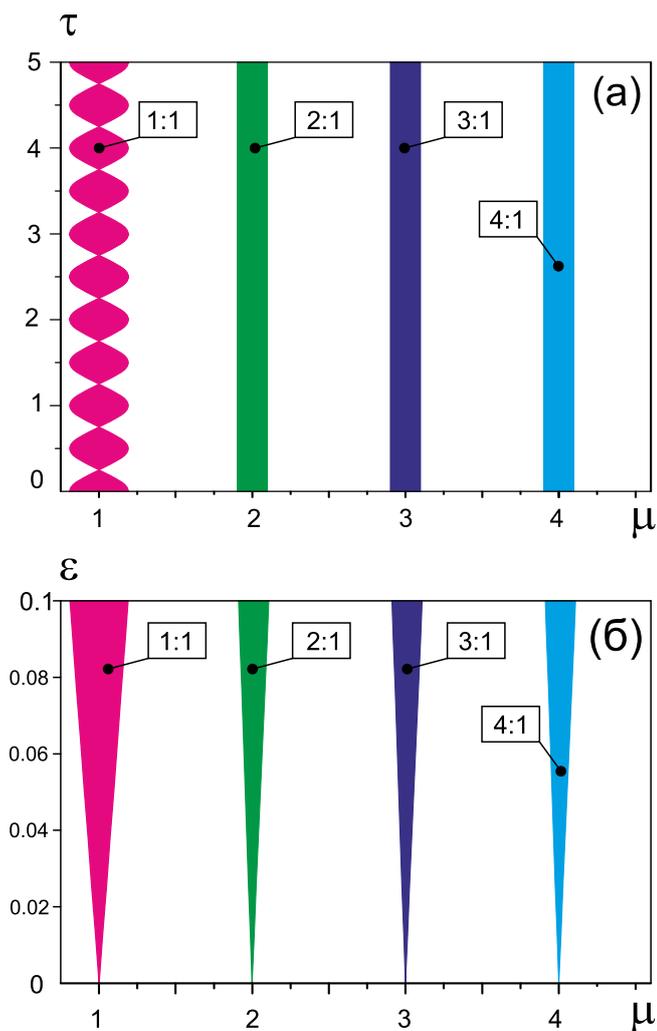


Рис. 2.19. Зоны синхронизации для  $f(\varphi) = -\sin(2\pi\varphi)$ . Номера зон приведены в столбцах. (а) Плоскость  $\mu - \tau$  для фиксированного значения  $\varepsilon = 0.1$ . (б) Плоскость  $\mu - \varepsilon$  для фиксированного значения  $\tau = 0.5$ .

$m : 1$ , в то время как зоны с  $m > n > 1$  имеют ширину порядка  $O(\varepsilon^2)$ . Однако обе эти особенности могут не иметь места для других типов кривой переустановки фазы. Зоны синхронизации для синусоидальной кривой переустановки фазы изображены на Рис. 2.19.

**2.4.2. Экспериментальное исследование кросс-частотной синхронизации.** Следующим этапом исследования была экспериментальная

проверка теоретических результатов. Для этого мы исследовали динамику двух электронных генераторов ФитцХью-Нагумо [318] с запаздывающими импульсными связями. Электронная схема одного генератора изображена на Рис. 2.11(a), вольт-амперная характеристика нелинейного резистора задается формулой  $F(u) = \alpha u(u - u_0)(u + u_0)$ , значения параметров были выбраны как  $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $\alpha = 2.02 \times 10^{-4}\Omega^{-1}\text{V}^{-2}$ ,  $u_0 = 0.82\text{ V}$ . Емкость  $C$  и индуктивность  $L$  являлись управляющими параметрами, позволяющими изменять период автоколебаний. Полная экспериментальная установка состояла из двух автогенераторов с импульсными связями через две линии задержки.

Внутренние параметры первого генератора были зафиксированы как  $C_1 = 47\text{nF}$  и  $L_1 = 9,4\text{H}$ , что соответствует периоду  $T_1 = 5\text{ms}$ . Параметры второго генератора изменялись пропорционально так, что  $C_2 = \mu C_1$  и  $L_2 = \mu L_1$ . Это гарантировало, что форма предельного цикла была фиксированной и изменялся только его период  $T_2 = \mu T_1$ . Значения задержек были установлены равными для обеих линий. Длительность входных импульсов была фиксированной и одинаковой для обоих генераторов:  $\theta = 0,05\text{ms}$ . Сила связи контролировалась амплитудой импульса  $E$ . Таким образом, управляющими параметрами системы были период второго осциллятора  $T_2 \equiv T$ , задержка связи  $D$  и сила связи  $E$ . Для обнаружения синхронизации между осцилляторами использовалась методика, основанная на фигурах Лиссажу, которые наблюдались на осциллографе с  $u_1$  на горизонтальной оси и  $u_2$  на вертикальной. При синхронизации  $m : n$  фигура Лиссажу имеет  $m$  горизонтальных и  $n$  вертикальных лепестков. Примеры фигуры Лиссажу для синхронизации  $3 : 2$  приведены на Рис. 2.23.

Основные экспериментальные результаты приведены на Рис. 2.20, где

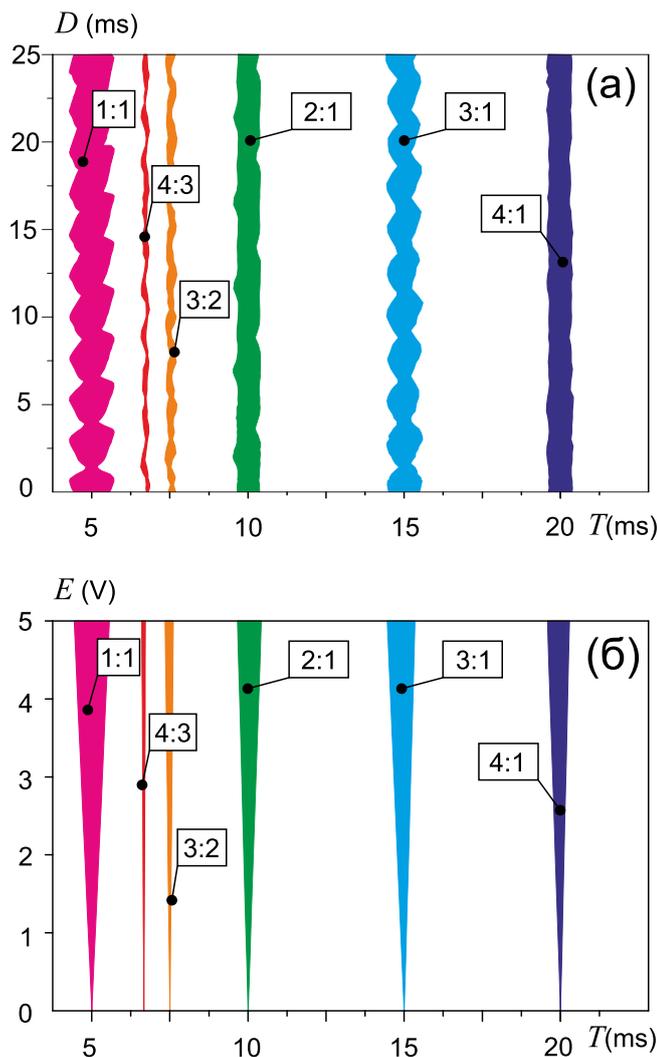


Рис. 2.20. Экспериментально полученные зоны синхронизации для двух электронных автогенераторов. (а) Плоскость  $T - D$  для фиксированного значения  $E = 5\text{В}$ . (б) Плоскость  $T - E$  для фиксированного значения

$$D = 2.5\text{мс.}$$

представлены экспериментально полученные бифуркационные диаграммы синхронных режимов  $1 : 1$ ,  $2 : 1$ ,  $3 : 1$ ,  $4 : 1$ ,  $3 : 2$  и  $4 : 3$ . Белые области соответствуют асинхронным режимам или синхронизации с номерами вращения, отличными от перечисленных выше. Наиболее примечательным результатом является то, что синхронный режим с любым числом вращения может наблю-

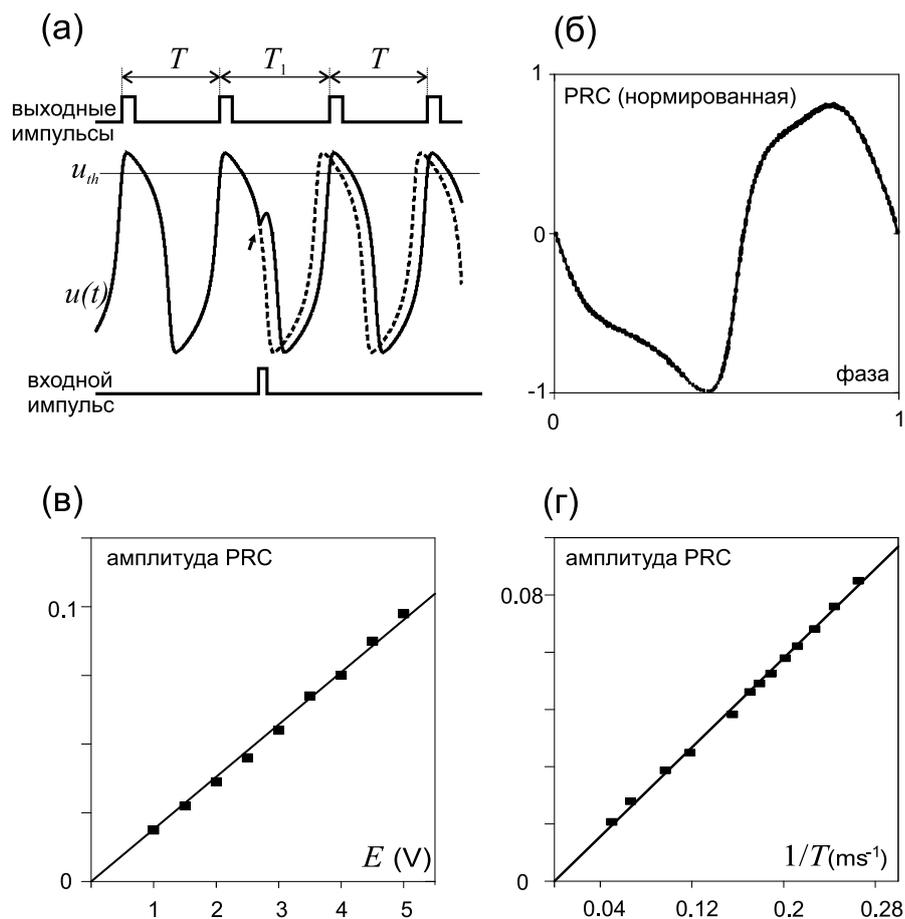


Рис. 2.21. (а) Определение кривой переустановки фазы (PRC): на генератор подается внешний импульс и измеряется возмущенный период. (б) Нормированная PRC автогенератора. (в) Линейная зависимость между амплитудой PRC и амплитудой импульса  $E$  (для  $T = 5$  мс). (г) Обрато линейная зависимость между амплитудой PRC и периодом осциллятора (для  $E = 5$  В).

даться при очень больших задержках связи, вплоть до  $D \sim 100T$  (данные не показаны). Ширина зон зависит от  $E$  линейно, а от  $D$  периодически, в согласии с теорией. Однако границы зон не являются строго периодическими, что наиболее отчетливо видно для зоны 1 : 1, которая искажается по мере роста  $D$ .

На рисунке 2.21(б) представлены кривые переустановки фазы, полученные для автогенераторов экспериментально. Форма кривой напоминает искаженную синусоиду. Для тестирования различной силы импульсной связи была зафиксирована длительность импульса  $\theta = 0,05\text{мс}$  и варьировалась его амплитуда  $E$ . Было показано, что форма кривой меняется несущественно вплоть до для  $E \leq 5\text{V}$ , а ее амплитуда масштабируется линейно (Рис. 2.21(в)). Другим важным наблюдением является то, что амплитуда кривой переустановки фазы масштабируется линейно с периодом  $1/T$  (Рис. 2.21(г)). Эти наблюдения позволяют использовать для кривой переустановки фазы следующее выражение:

$$Z(\varphi) = \varepsilon\omega f(\varphi), \quad (2.105)$$

где  $\varepsilon = E/E_0$ ,  $\omega = T_0/T$ ,  $f(\varphi)$  является нормированной кривой переустановки фазы, а константы  $E_0 = 64\text{V}$ ,  $T_0 = 5\text{мс}$ .

Используя полученную кривую переустановки фазы, мы рассчитали границы зон синхронизации в соответствии с (2.102). Эти границы нанесены на Рис. 2.22 сплошными линиями вместе с экспериментальными границами, изображенными квадратами. Различные цвета линий и квадратов соответствуют различным числам вращения. Видно, что экспериментальные результаты достаточно хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями, что свидетельствует об адекватности разработанной теории.

Также экспериментально были исследованы более тонкие динамические эффекты, а именно бифуркации внутри зон синхронизации. Было замечено, что плавное изменение параметров, например задержки связи, *внутри* зоны синхронизации, иногда приводит к быстрому переключению между различными режимами синхронизации одного и того же порядка. Пример этого

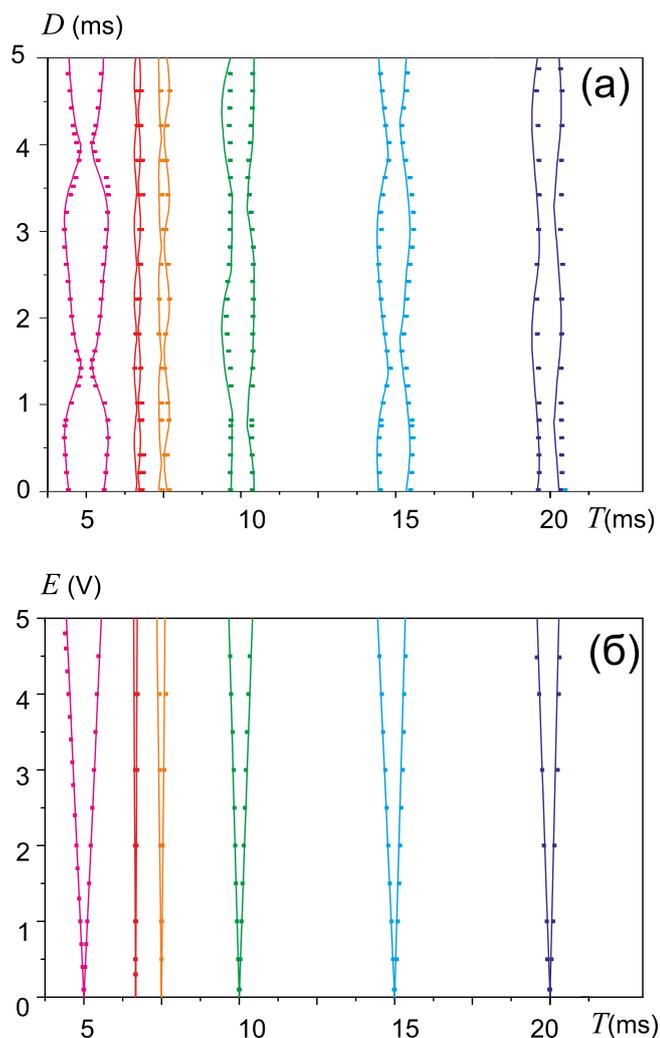


Рис. 2.22. Границы зон синхронизации: теоретические предсказания (сплошные линии) и экспериментальные результаты (точки). (а) Плоскость  $T - D$  для фиксированного значения  $E = 5\text{В}$ . (б) Плоскость  $T - E$  для фиксированного значения  $D = 2.5\text{мс}$ .

эффекта приведен на Рис. 2.23(а), в котором периоды генераторов относятся как  $2 : 1$ . Для диапазона задержки  $3.06\text{мс} \leq D \leq 3.4\text{мс}$  наблюдаются две различные фигуры Лиссажу, обе из которых соответствуют синхронизации  $2 : 1$ , с различными фазовыми соотношениями между генераторами. Таким образом, система демонстрирует бистабильность, а переключение между режимами происходит на границах интервала бистабильности и имеет гистерезис.

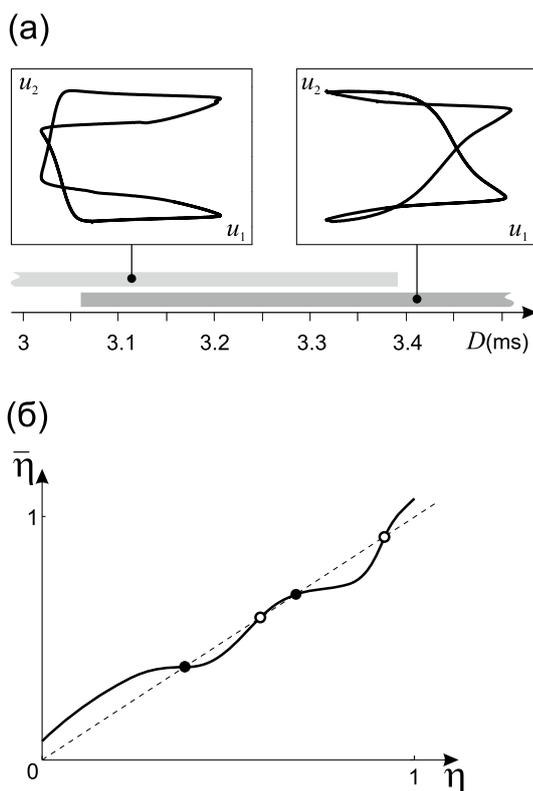


Рис. 2.23. (а) Бистабильность системы: Фигуры Лисажу для двух разных режимов 2 : 1 синхронизации (сверху) и интервалы задержки, в которых они существуют (внизу) (б) Отображение (2.100) в интервале бистабильности имеет две устойчивые (сплошные окружности) и две неустойчивые (пустые окружности) неподвижные точки.

резисный характер. После экспериментального наблюдения бистабильности было построено отображение (2.100) для параметров внутри интервала бистабильности, изображенное на Рис. 2.23(б). Можно видеть, что отображение имеет ровно две устойчивые неподвижные точки, соответствующие различным режимам синхронизации. На границах интервала бистабильности одна из устойчивых неподвижных точек исчезает через седло-узловую бифуркацию, и система переключается на другой режим.

## 2.5. Заключение ко второй главе

В настоящей главе в разделе 2.1 введена общая модель сети с запаздывающими импульсными связями и описан метод сведения динамики такой сети к точечному отображению. С помощью данной техники исследован ряд парадигматических систем, состоящих из небольшого числа автогенераторов с импульсными запаздывающими связями.

В разделе 2.2 исследована динамика одиночного автогенератора с импульсной запаздывающей обратной связью. Показано, что дестабилизация режима регулярной генерации импульсов может происходить по необычному сценарию, в котором размерность неустойчивого многообразия «взрывается» то есть скачкообразно изменяется от нуля до большой величины, пропорциональной значению задержки. Удивительно, что бифуркация определяется единственным условием  $Z'(\psi) = -1$ , то есть обладает коразмерностью один, хотя обычно бифуркации, в которых одновременно дестабилизируется несколько направлений, имеют большую коразмерность [192]. Таким образом, бифуркация мультидрожаания парадоксальным образом является вырожденной бифуркацией, которая однако наблюдается в общем случае при изменении единственного параметра. Этот парадокс проистекает из структуры отображения (2.28), рассматриваемого как  $P$ - мерное отображение

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (T_1, \dots, T_P) \\ \mapsto \mathbf{T}^{\text{new}} &= (T_1^{\text{new}}, \dots, T_P^{\text{new}}) \\ &= (T_2, \dots, T_P, 1 - Z(\psi)) \end{aligned} \quad (2.106)$$

где  $\psi = \tau - \sum_{k=1}^P T_k$ . Помимо расчета нового межимпульсного интервала  $T_P^{\text{new}} = 1 - Z(\psi)$ , отображение сдвигает прошлые интервалы только на

один компонент, что приводит к особой структуре якобиана отображения

$$D(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \alpha & \cdots & \cdots & \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.107)$$

где  $\alpha = Z'(\psi)$ . Хотя теоретически можно ввести произвольные возмущения отображения (2.106), лишь немногие из них имеют физический смысл. Например, если мы введем дополнительный параметр  $\epsilon$ , чтобы изменить первое уравнение отображения таким образом, что

$$T_1^{\text{new}} = T_2 + \epsilon g(\mathbf{T}) \quad (2.108)$$

с некоторой функцией  $g : \mathbb{R}^P \rightarrow \mathbb{R}$ , это не соответствует физически возможному возмущению системы, поскольку межимпульсные интервалы в прошлом не становятся длиннее или короче с течением времени. Аналогичные рассуждения показывают, что структура всего отображения должна быть сохранена, и физически допустимые возмущения могут влиять только на запаздывание  $\tau$  или форму функции  $Z(\cdot)$ . Все допустимые возмущения влияют исключительно на коэффициент  $\alpha$  в якобиане (2.107), тогда как его структура сохраняется. Таким образом, характеристическое уравнение сохраняет форму (2.35), что приводит к дестабилизации всех показателей одновременно при  $\alpha = -1$ .

Помимо «взрыва размерности», бифуркация мульти-дрожания сопровождается одновременным возникновением различных «дрожащих решений», число которых экспоненциально возрастает с ростом задержки. Это явление сродни повторному появлению периодических решений – хорошо известно-

му свойству дифференциальных уравнений с запаздыванием [385] (см. также подраздел 3.1.1). В отличие от этого типа повторного появления, в случае дрожащих решений наблюдается наблюдаем повторное появление не целых решений, а отдельных межимпульсных интервалов. Например, существование решения с периодом 2 и межимпульсными интервалами  $T_1$  и  $T_2$  подразумевает существование бесконечного числа двухчастных решений, которые состоят из именно этих межимпульсных интервалов. Действительно, если последовательность  $(\overline{T_1}, \overline{T_2})$  решает (2.28) для некоторого  $\tau = \tau_0$  и произвольной периодической последовательности двух интервалов, содержащей  $n_1$  интервалов  $T_1$  и  $n_2$  интервалов  $T_2$  за период, решает (2.28) для

$$\tau = \tau_0 + (n_1 - 1) T_1 + (n_2 - 1) T_2. \quad (2.109)$$

Комбинаторное разнообразие двухчастных решений вызывает экспоненциальный рост их количества с задержкой.

Хотя аналитическое исследование бифуркации мульти-дрожаания проведено для простейшей одномерной модели, результаты релевантны и для более реалистичных систем с более высокой размерностью фазового пространства и импульсами конечной длительности. Так, предсказываемые теорией дрожащие решения наблюдались в реальной электронной схеме, а также в исследованных другими авторами нейронных моделях [221] и лазерных системах [266].

Развитая теория предсказывает, а численное моделирование подтверждает, что существенным свойством для возникновения бифуркации мультидрожаания является достаточная крутизна кривой переустановки фазы, соответствующей импульсному действию обратной связи. Наличие областей с на-

клоном  $Z'(\varphi) < -1$  требует определенной структуры фазового пространства автогенератора. Рассмотрим отображение

$$f(\varphi) = \varphi + Z(\varphi), \quad (2.110)$$

который описывает изменение фазы под действием импульса. Заметим, что  $Z'(\varphi) < -1$  для некоторого  $\varphi$  тогда и только тогда, когда данное отображение немонотонно. Это означает, что действие импульса может менять порядок некоторых точек на предельном цикле, так что  $f(\varphi_2) < f(\varphi_1)$  для некоторых  $\varphi_2 > \varphi_1$ . Геометрически эту особенность можно интерпретировать как свойство изохрон в фазовом пространстве. Изохроны – это множества, состоящие из точек фазового пространства, имеющих одинаковую фазу, то есть таких, расстояние между которыми обращается в нуль при  $t \rightarrow \infty$  [139, 197, 261, 380]. Тот факт, что импульс инвертирует порядок фаз некоторых соседних точек предельного цикла, означает, что точка с меньшей фазой при действии импульса пересекает больше изохрон, чем точка с большей фазой. Если направление импульса не меняется, что обычно приводит к прямому смещению точек в фазовом пространстве, [170], изохроны должны иметь форму вложенных U-образных кривых, что проиллюстрировано на Рис. 2.24 для системы ФитцХью-Нагумо.

Приведенные выше рассуждения показывают, что бифуркация мультидрожания возможна только для автогенераторов с определенной структурой изохрон предельного цикла. Однако есть очень простой критерий, отражающий эту структуру, – наличие интервала кривой переустановки фазы с наклоном  $< -1$ . Кривыми переустановки фазы, обладающие этим свойством, наблюдались для многих автогенераторов различной природы, например для

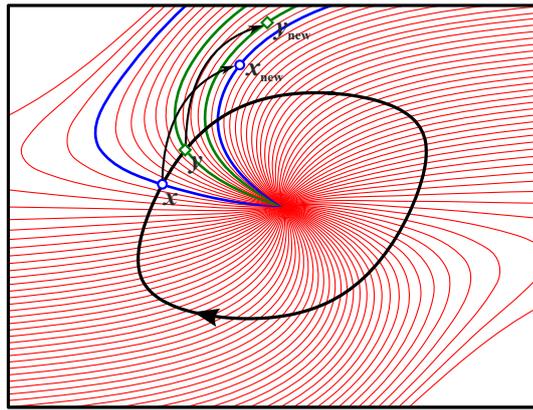


Рис. 2.24. Изохроны (тонкие красные линии) предельного цикла (жирная черная кривая) модели ФитцХью-Нагумо демонстрируют структуру, необходимую для  $Z'(\varphi) < -1$ . Порядок фаз в двух разных точках предельного цикла,  $x$  и  $y$ , меняется на противоположный под воздействием импульса. Это означает, что они переносятся в новые точки  $x_{\text{new}}$  и  $y_{\text{new}}$ , которые лежат на изохронах с противоположным порядком фаз.

химических генераторов [292,293], кардиальных клеток [140,161,162], а также нейронов и их моделей [3,185,313,348]. Таким образом, бифуркация мультидрожания может наблюдаться во многих реалистичных колебательных системах.

В разделе 2.3 исследована синхронизация двух автогенераторов с запаздывающими импульсными связями. Рассмотрен случай симметричных задержек, который, однако, может быть легко обобщен для асимметричного случая [215]. Показано, что синхронизация может наблюдаться при произвольно больших значениях задержки связи. Этот факт представляет большой интерес: два *неидентичных* генератора могут быть синхронизированы, даже если они взаимодействуют с временной задержкой, которая намного больше периодов их собственных колебаний. При поверхностном рассмотрении тот

факт, что синхронизация наблюдается для больших задержек, может показаться не таким удивительным. Можно предположить, что если при заданной задержке  $\tau$  система синхронизируется с периодом  $T$ , то при задержках  $\tau + nT$  (где  $n$  – целое число) ее динамика будет идентичной из-за свойства появления вновь периодических решений [385]. Однако детальное исследование показало, что увеличение задержки может привести к существенному изменению динамики системы. В частности, если увеличить задержку на величину  $nT$ , то в случае большой расстройки частот синхронизация может исчезнуть. Причиной этого является мультистабильность второго типа: для больших частотных расстроек рост запаздывания приводит к уменьшению бассейна притяжения периодических решений, и они становятся практически ненаблюдаемыми для больших запаздываний. Качественно данный эффект можно объяснить следующим образом: при больших задержках связи отображение Пуанкаре имеет высокую размерность, и его фазовое пространство гораздо сложнее, чем в случае малых задержек. Поэтому сложнее выбрать начальные условия, которые придут к периодическому решению.

Также специфическими свойствами связи с большой задержкой являются: 1) увеличение размера зон синхронизации в пространстве параметров с ростом задержки; 2) появление мультистабильности первого типа; 3) быстрый рост времени синхронизации как  $\tau^3$ . Всё это показывает, что случай больших задержек связи, ранее не привлекавший внимания специалистов, является интересным и дает новые динамические эффекты. При увеличении задержки наблюдается чередование интервалов синфазной и противофазной синхронизации. Этот результат согласуется с результатами других авторов, сообщивших о таких чередующихся структурах в пространстве па-

раметров [67, 70, 88]. Изменение задержки позволяет переключаться между синфазным и противофазным режимами. Наблюдаются два типа такого переключения, а именно бифуркация перескока фазы (ср. с [231, 287, 288]) и мягкое переключение (ср. с [33]). Другим интересным результатом является то, что для одного и того же типа связи задержка связи может вызывать как синхронизирующий, так и десинхронизирующий эффект относительно случая мгновенной связи. В предыдущих работах авторы сообщали о запаздывающей синхронизации [81, 88, 98, 99, 275, 315] и вызванная задержкой десинхронизация [45, 67, 86, 389], но эти эффекты наблюдались отдельно для разных типов связи. В настоящей работе оба эффекта наблюдаются в одной и той же системе с разными параметрами.

В разделе 2.4 рассмотрена кросс-частотная синхронизация двух генераторов с запаздывающими импульсными связями. Аналитическое исследование для слабой связи позволило найти зоны синхронизации  $m : n$  в пространстве параметров. Их наиболее интересное свойство заключается в том, что они делятся до бесконечности вдоль оси  $\tau$ , то есть синхронизация с произвольным числом вращения возможна при сколь угодно больших задержках связи. Кроме того, ширина зоны синхронизации является периодической функцией задержки и линейно зависит от силы связи  $\varepsilon$  для всех чисел вращения. Также было проведено экспериментальное исследование на основе двух электронных генераторов ФитцХью-Нагумо, в котором была получена межчастотная синхронизация с различными числами вращения при задержках связи, в сотни раз больших периода более быстрого генератора. Также была подтверждена линейная зависимость ширины зон синхронизации от силы связи и периодическая зависимость от задержки. Однако последняя зависимость не являет-

ся строго периодической: границы зон смещаются при увеличении задержки связи.

Кроме того, был экспериментально обнаружен и теоретически объяснен более тонкий эффект, а именно сосуществование нескольких различных синхронных режимов с одинаковым числом оборотов. Эти режимы характеризуются различными фазовыми соотношениями между генераторами, а при медленном изменении задержки система может переключаться с одного режима на другой, так что фазовый сдвиг между осцилляторами претерпевает резкий скачок. Такое поведение, наблюдаемое как для электронных, так и для химических [154, 201, 292] автогенераторов, по-видимому, характерно для систем с запаздывающими связями. Описанный эффект можно рассматривать как так называемой бифуркации скачка фазы, наблюдаемой для синхронизации 1:1 [287].

### ГЛАВА 3

## КОЛЛЕКТИВНАЯ ДИНАМИКА БОЛЬШИХ СЕТЕЙ АВТОГЕНЕРАТОРОВ С ИМПУЛЬСНЫМИ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Настоящая глава посвящена исследованию коллективной динамики больших сетей с импульсными запаздывающими связями. Поведение таких систем зависит от совокупности нескольких факторов, а именно локальной динамики составляющих сеть узлов, свойств межузловых соединений и структуры связей в сети. Будут исследованы особенности коллективной динамики в зависимости от всех этих факторов. А именно, будет рассмотрено влияние неоднородности локальных параметров узлов, временного запаздывания в связях и различных типов топологии соединений.

Раздел 3.1 посвящен исследованию сетей с кольцевой структурой связей. Кольцо является фундаментальным «мотивом», который часто встречается во многих сложных сетях, в частности нейронных сетей [108, 221, 222, 330, 370]. Более того, кольцевые мотивы связей, которые можно выделить из более сложных паттернов связности, часто играют важную роль в сетевой динамике [8, 166, 210, 215, 238]. Динамика колец с однонаправленной связью изучалась и раньше, включая вращающиеся волны и паттерны [25, 41, 277], хаотическую и сложную динамику [78, 227, 394] и переходные процессы [152, 153]. Влияние задержек связи было также исследовано теоретически [81, 85, 167, 356] и экспериментально [211, 304, 308, 376, 376].

В отличие от предыдущих работ, результаты настоящей работы носят более общий характер и демонстрируют, что длинные петли прямых связей

могут играть роль, аналогичную связи с большим временем задержки. Выявлена глубокая связь между периодическими решениями произвольной динамической системы с запаздыванием по времени и вращающимися волнами в кольцевой сети, включающей большое число систем того же типа. Показано, что периодическое решение одиночной системы (генератора) с запаздывающей обратной связью может быть «встроено» в кольцо в виде вращающейся волны при выполнении определенных соотношений между временами задержки в одном генераторе и в кольце. Для периодических решений с периодом, который является резонансным, т.е. рационально относящимся к времени задержки, встраивание возможно в кольцо с мгновенными связями. Кроме того, устойчивость периодического решения уединенной системы и вращающейся волны в кольце взаимосвязаны.

Раздел 3.2 посвящен исследованию синхронизации и сценариев ее разрушения в сети генераторов с импульсными запаздывающими связями «каждый с каждым». Такая топология связей также называется глобальной и является широко используемым приближением при изучении коллективного поведения взаимодействующих активных элементов, в частности их синхронизации. Взаимная синхронизация как подстройка ритмов колебаний взаимодействующих систем наблюдается в популяциях автоколебательных элементов самой различной природы [17, 279]. Исследование синхронизации многоэлементных систем началось с работы Kuramoto [189], в которой рассматривались колебательные системы с непрерывными связями и использовалось приближение глобальной связи. Синхронизация в сетях с импульсными связями была впервые изучена Mirollo и Strogatz [239], в которой также рассматривалась система с глобальными связями. Впоследствии были изучены

особенности синхронизации импульсных сетей в зависимости от различных факторов, таких как вид связи [28], длительность и форма импульсов [120], а также небольшое запаздывание в связях [51, 53, 99].

В недавней работе был изучен механизм разрушения синхронизацию ансамбля генераторов с импульсными связями [216]. Показано, что глобальная синхронизация в ансамбле дестабилизируется за счет возникновения множества двухкластерных состояний. В настоящей главе изучено, как задержки связей изменяют этот сценарий. В частности, показано, что при наличии задержки синхронный режим дестабилизируется вследствие вырожденной транскритической бифуркации, в которой возникают множественные гомоклинические орбиты. Это приводит к появлению интересных динамических паттернов, названных «проскальзыванием фазы». Эти паттерны характеризуются синхронным, регулярным всплеском группы осцилляторов, которое периодически прерывается управляющими последовательностями отдельных осцилляторов, которые проходят один период, а затем снова присоединяются к группе. В этом случае групповая частота синхронного срабатывания меньше, чем средняя частота срабатывания отдельных генераторов. Сообщаемое явление аналогично недавно наблюдаемому в возбужденных связанных элементах с отталкивающей связью [392].

Еще одним важным ингредиентом, оказывающим существенное влияние на синхронизацию сетевых систем, является неоднородность параметров индивидуальных элементов, неизбежная в физических системах [179, 273, 332, 340]. Неоднородность может проявляться на количественном уровне, как в классической модели Курамото [189], где все элементы являются автоколебательными, но обладают разными собственными частотами. В таких системах

наблюдается непрерывный переход к синхронизации когда связь между осцилляторами становится достаточно сильной [2, 302]. Однако во многих случаях неоднородность может быть достаточно сильной, чтобы вызвать качественные различия в индивидуальной динамике элементов: например, некоторые из элементов в популяции могут быть автоколебательными, а другие возбуждаемыми. В таких системах с качественным разнообразием было показано, что переход к синхронизации может быть как классическим, так и возвратным в зависимости от конкретной формы распределения параметров [193, 340].

В разделе 3.3 исследованы режимы макроскопической динамики в неоднородной популяции, состоящей из колебательных и возбуждаемых элементов. Получена полная структура бифуркаций и описаны два общих сценария возникновения и подавления синхронизации. Первый сценарий был описан ранее и связан с последовательным возникновением и подавлением колебаний среднего поля при увеличении степени неоднородности (дисперсии параметров). Второй сценарий был ранее неизвестен и включает гистерезисное поведение вследствие наличия областей бистабильности. Показано, что структура коллективных режимов системы сохраняется при добавлении небольшой задержки связи и слабого шума.

Материалы третьей главы опубликованы в работах [2A,3A,11A,12A,16A,20A,25A,26A,29A,30A,33A,36A].

### 3.1. Встраивание динамики одиночной системы с запаздыванием в сеть с кольцевыми однонаправленными связями

В настоящем разделе исследуется связь между динамикой произвольной динамической системы (автогенератора) с запаздывающей обратной связью и кольцевой сети из таких же систем. Динамика автогенератора описывается наиболее общим уравнением с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), x(t - \tau)), \quad (3.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^d$ , а  $\tau \geq 0$  – величина запаздывания.

**3.1.1. Периодические решения одиночного генератора с запаздыванием и вращающиеся волны в однонаправленно связанном кольце.** Предположим, что при  $\tau = \tau_0$  уравнение (3.1) имеет периодическое решение  $h(t)$  с периодом  $T$ . Легко показать, что при изменении запаздывания  $h(t)$  вновь возникает как периодическое решение при добавлении к величине запаздывания целого числа периодов  $T$ , то есть  $h(t)$  является решением при величинах задержки

$$\tau_k = \tau_0 + kT, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Заметим, что без потери общности можно предположить, что  $0 \leq \tau_0 < T$ , то есть  $\tau_0$  – минимальная положительная задержка, при которой решение  $h(t)$  существует, так что при  $k \geq 0$  мы получаем все возможные неотрицательные значения задержки, при которых решение  $h(t)$  возникает вновь. Более детально данное явление повторного появления решений описано в работе [277].

Теперь рассмотрим  $N$  автогенераторов вида (3.1), где вместо обратной

связи введена связь каждого генератора с соседним:

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = f(x_n(t), x_{n-1}(t - \sigma)) \quad (3.3)$$

Рассматривая индексы генераторов  $n = 1, \dots, N$  по модулю  $N$ , получим кольцо с однонаправленными связями, где запаздывание в связях обозначено как  $\sigma$  для отличия от запаздывания обратной связи в случае одного генератора (3.1). Как показано в работах [79, 80], периодическое решение  $h(t)$  одного генератора может быть использовано для построения решений в виде вращающихся бегущих волн в кольцевой системе (3.3) в следующей форме:

$$x_n(t) = h(t + n\theta), \quad (3.4)$$

где  $\theta$  – фазовый сдвиг между соседними генераторами. Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на кольце, этот сдвиг должен быть соразмерен периоду  $T$ , так что

$$\theta = \theta_M = MT/N \quad (3.5)$$

где  $M = 0, \dots, N - 1$  – волновое число в кольце. Легко видеть, что подстановка (3.4) является решением в виде вращающейся волны системы (3.3), если задержки в двух системах связаны условием совместимости:

$$\sigma = \sigma_{k,M} = \tau_0 + kT - \theta_M = \tau_k - \theta_M, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Таким образом, мы получаем для каждого фиксированного волнового числа возрастающую последовательность времен задержки  $\sigma_{k,M}$ , для которых периодическое решение  $h(t)$  одиночного осциллятора с запаздывающей обратной связью (3.1) можно «вложить» в однонаправленно связанную кольцевую

систему (3.3) в виде вращающейся волны. Обратите внимание, что для некоторых вариантов  $M$  первое значение  $\sigma_{0,M}$  может быть отрицательным, тогда первым положительным значением задержки в последовательности является  $\sigma_{1,M}$ .

Описанное соотношение между одиночным генератором и кольцом ро-иллюстрировано на Рис. 3.1. На Рис. 3.1(а) показана ветвь периодических решений для осциллятора Ван-дер-Поля с запаздывающей обратной связью,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \alpha (1 - x(t)^2) \frac{dx(t)}{dt} - x(t) + \kappa x(t - \tau), \quad (3.7)$$

а именно построен график зависимости периода  $T$  от времени задержки  $\tau$ . Такая форма бифуркационной диаграммы типична для ветвей с ограниченным периодом (подробнее см. [385]), и, очевидно, приводит к возрастающему числу сосуществующих периодических решений с ростом запаздывания.

Для кольца  $N$  осцилляторов с однонаправленной связью

$$\frac{d^2x_n(t)}{dt^2} = \alpha (1 - x_n(t)^2) \frac{dx_n(t)}{dt} - x_n + \kappa x_{n-1}(t - \sigma), \quad (3.8)$$

в случае  $N = 3$  мы получаем три ветви вращающихся волн, показанные на Рис. 3.1(б). В то время как ветвь для волнового числа  $M = 0$  совпадает с периодическим решением для одиночного осциллятора, показанного на панели (а), две другие ветви могут быть получены сдвигом на  $\theta_M = MT/N$  по горизонтальной оси. Области устойчивости выделены сплошными частями ветви, неустойчивости – штриховыми. Области устойчивости меняются от ветки к ветке, однако при больших задержках они оказываются совпадающими. Аналитическое объяснение этого явления приводится в следующем разделе.

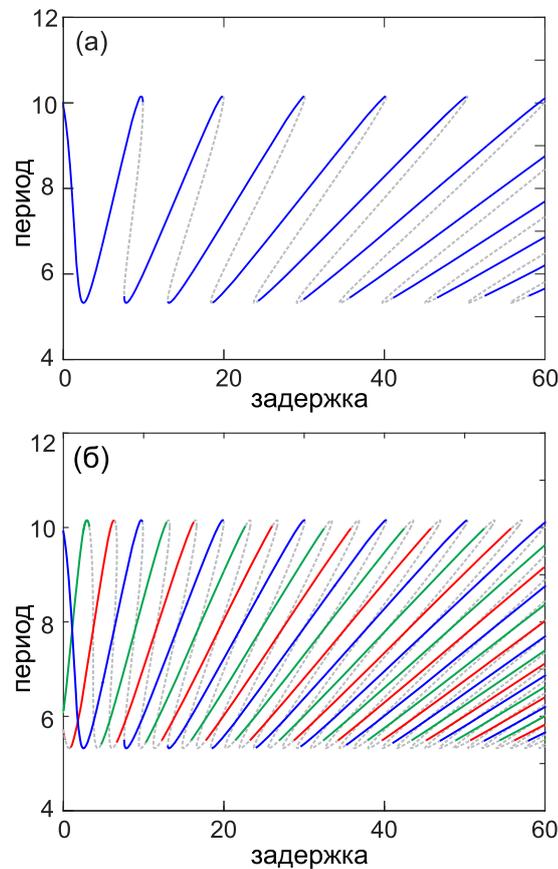


Рис. 3.1. (а) Ветвь периодических решений для одиночного осциллятора Ван-дер-Поля с запаздывающей обратной связью (3.7).

Сплошные/пунктирные участки кривой указывают на устойчивость/неустойчивость. (б) Ветви вращающихся волн для кольца из  $N = 3$  генераторов Ван-дер-Поля с запаздывающей связью (3.7). Цветные участки указывают на стабильность для  $M = 0$  (синий),  $M = 1$  (красный) и  $M = 2$  (зеленый).

**3.1.2. Сравнение устойчивости решений для уединенной и кольцевой систем.** Повторно появляющееся периодическое решение  $h(t)$  уравнения с запаздыванием (3.1) обычно имеет разные свойства устойчивости для разных значений  $k$  в последовательности повторного появления (3.2). Для больших значений  $k$ , соответствующих большим значениям запаздывания  $\tau_k$ , устойчивость может быть асимптотически описана с помощью сингулярного предела  $k \rightarrow \infty$ . Теоретические основы данной техники подробно описаны в [321, 385], где показано, что в этом случае спектр Флоке состоит из псевдодискретного спектра, сходящегося к непрерывным кривым, и сильно неустойчивого спектра, сходящегося к конечному числу изолированных точек. Эти объекты могут быть найдены в предельном случае и затем использоваться в качестве критерия устойчивости или неустойчивости для конечных, но достаточно больших задержек  $\tau_k$ .

На основе подобного подхода мы покажем, что периодическое решение  $h(t)$  одиночного осциллятора (3.1) и соответствующие решения в виде вращающейся волны (3.4) кольца (3.3) фактически имеют один и тот же предельный спектр и, следовательно, имеют одни и те же свойства линейной устойчивости, если в обоих случаях задержка достаточно велика, т.е.  $k \rightarrow \infty$  (см. также [79, 80]).

Линейная устойчивость решения  $h(t)$  в (3.1) дается следующим уравнением в вариациях для возмущения  $\delta(t) \in \mathbb{R}^d$ :

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = A(t)\delta(t) + B(t)\delta(t - \tau), \quad (3.9)$$

где  $A(t) = \partial_1 f(h(t), h(t - \tau))$  и  $B(t) = \partial_2 f(h(t), h(t - \tau))$  – производные  $f$  по первому и второму аргументам, соответственно. Для формулировки задачи

Флоке подставим  $\delta(t) = p(t)e^{\lambda t}$  и получим

$$\frac{dp(t)}{dt} = (A(t) - \lambda \text{Id})p(t) + e^{-\lambda \tau} B(t)p(t - \tau), \quad (3.10)$$

Комплексные значения  $\lambda$ , для которых уравнение (3.10) допускает  $T$ -периодическое решение  $p(t)$ , являются характеристическими показателями. Заметим, что матрицы коэффициентов  $A(t)$  и  $B(t)$  также являются  $T$ -периодическими. Решение  $h(t)$  является устойчивым, если все характеристические показатели имеют отрицательные действительные части.

Аналогично, линейная устойчивость решения в виде вращающейся волны (3.4) кольца (3.3) определяется уравнением в вариациях

$$\frac{d\delta_n(t)}{dt} = \partial_1 f(h(t + n\theta), h(t + (n - 1)\theta - \sigma))\delta_n(t) + \quad (3.11)$$

$$+ \partial_2 f(h(t + n\theta), h(t + (n - 1)\theta - \sigma))\delta_{n-1}(t - \sigma), \quad (3.12)$$

где  $\delta_n(t) \in \mathbb{R}^d$  является вариацией  $x_n$ . Применяя условие совместимости задержек (3.6) в форме  $\tau = \sigma + \theta$  к матрицам, и делая подстановку Флоке  $\delta_n(t) = r_n(t)e^{\lambda t}$ , получим

$$\frac{dr_n(t)}{dt} = (A(t + n\theta) - \lambda \text{Id}) r_n(t) + \quad (3.13)$$

$$+ e^{-\lambda \sigma} B(t + n\theta) r_{n-1}(t - \sigma), \quad (3.14)$$

где  $r_n(t)$  –  $T$ -периодические функции, а  $\lambda$  – искомые характеристические показатели. Применив покомпонентное преобразование временного сдвига

$$p_n(t) = r_n(t - n\theta) \quad (3.15)$$

(детали см. в работе [215]), получим

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = (A(t) - \lambda \text{Id})p_n(t) + e^{-\lambda \sigma} B(t)p_{n-1}(t - \tau). \quad (3.16)$$

Матрицу связи однонаправленного кольца можно диагонализировать, перейдя к дискретным модам Фурье

$$p_n(t) = \sum_{m=1}^N \hat{p}_m(t) e^{2\pi i m n / N}, \quad (3.17)$$

так что мы получаем разделенные спектральные задачи

$$\frac{d\hat{p}_m(t)}{dt} = (A(t) - \lambda_m \text{Id}) \hat{p}_m(t) + e^{-\lambda_m \sigma - i\psi_m} B(t) \hat{p}_m(t - \tau). \quad (3.18)$$

для  $m = 1, \dots, N$ , отличающиеся только фазовым множителем  $\psi_m = 2\pi m / N$  и имеющие сходную форму со спектральной задачей для одиночного уравнения (3.10). Как показано в Лемме 5 в работе [321], характеристические показатели задачи Флоке (3.10) для уединенного уравнения (3.1) могут быть получены из характеристического уравнения вида

$$F(\lambda, e^{-\lambda \tau_k}) = 0. \quad (3.19)$$

с некоторой аналитической функцией  $F$ . Эта же функция также может быть использована для определения предельного спектра при  $k \rightarrow \infty$ , который задается условием

$$F(\lambda, 0) = 0. \quad (3.20)$$

для сильно неустойчивого спектра и

$$F(i\omega, e^{-\gamma - i\varphi}) = 0 \quad (3.21)$$

для асимптотически непрерывных спектральных кривых, аппроксимирующих слабый спектр с предельным поведением

$$\lambda = i\omega + \frac{\gamma}{\tau} \quad (3.22)$$

для действительных  $\omega$  и  $\gamma$ . Эти кривые параметризованы дополнительным параметром  $\varphi$  в (3.21). Для разделенных спектральных задач (3.18) кольца мы получаем ту же функцию  $F(\cdot, \cdot)$  с заменой второго аргумента на  $e^{-\lambda\sigma - i\psi_m}$ . Однако полученные уравнения (3.20) и (3.21) для предельных спектров совпадают, поскольку фазовый множитель  $\psi_m$  может быть поглощен параметром  $\varphi$ . Следовательно, при большом запаздывании свойства устойчивости периодического решения в одиночного уравнения (3.10) совпадают с устойчивостью всех вращающихся волн, независимо от их волнового числа  $M$ .

**3.1.3. Случай кольца с мгновенными связями.** До сих пор рассматривалась ситуация с задержкой как в одиночном генераторе, так и в однонаправленно связанном кольце. Однако условие совместимости задержки (3.6) допускает  $\sigma = 0$ , то есть мгновенные связи в кольце. Это возможно, если для одиночного генератора имеется периодическое решение  $h(t)$  с периодом  $T$ , резонансным задержке  $\tau_0$ :

$$M_0 T / N_0 = \tau_0. \quad (3.23)$$

Предполагая, что  $M_0$  и  $N_0$  являются взаимно простыми числами, периодическое решение может быть встроено в кольцо минимального размера  $N_0$ , а также для всех целых кратных

$$N_j = j N_0 \quad (3.24)$$

с волновым числом, кратным  $M_0$ .

На Рис. 3.2(а) показано, что ветвь периодических решений с периодом, зависящим от запаздывания, в общем случае приводит к появлению резонансов периода и запаздывания. На рисунке серыми линиями показаны условия

резонанса для  $N = 6$ . Их пересечения с ветвью периодических решений для одиночного осциллятора Ван-дер-Поля с запаздывающей обратной связью (3.7) соответствуют резонансным периодическим решениям. Тонкая сплошная линия указывает на стабильную часть ветви, а толстая красная линия соответствует периодическим решениям, которые стабильны, когда они снова появляются при достаточно больших задержках. Как мы покажем ниже, это означает устойчивость соответствующих вращающихся волн. В этом случае устойчивые вращающиеся волны существуют только для  $M = 4$  и  $M = 5$ , показанных на панелях (б) и (в). Отметим, что вращающиеся волны с иными волновыми числами неустойчивы, хотя резонансные периодические решения для некоторых из них лежат на устойчивой части ветви.

Таким образом, устойчивость вращающейся волны может отличаться от устойчивости исходного периодического решения при  $\tau_0$ . Однако можно показать, что устойчивость вращающейся волны связана с устойчивостью  $h(t)$  при больших задержках  $\tau_k$ : если резонансное периодическое решение  $h(t)$  асимптотически устойчиво для всех достаточно больших  $\tau$ , то вращающаяся волна в кольце без запаздываний также устойчива.

Чтобы доказать это, заметим, что из устойчивости  $h(t)$  при большом запаздывании следует, что ветви асимптотического непрерывного спектра (3.22), заданная как (3.21), имеют отрицательные вещественные части, за исключением единственного нуля в точке  $\omega = \varphi = 0$ , соответствующего тривиальной моде Флоке, задаваемой сдвигом вдоль самого периодического решения (см. [321], лемма 18). Теперь предположим, что вращающаяся волна неустойчива, т.е. характеристическое уравнение

$$F(\lambda, e^{-\lambda\sigma - i\psi_m}) = 0, \quad (3.25)$$

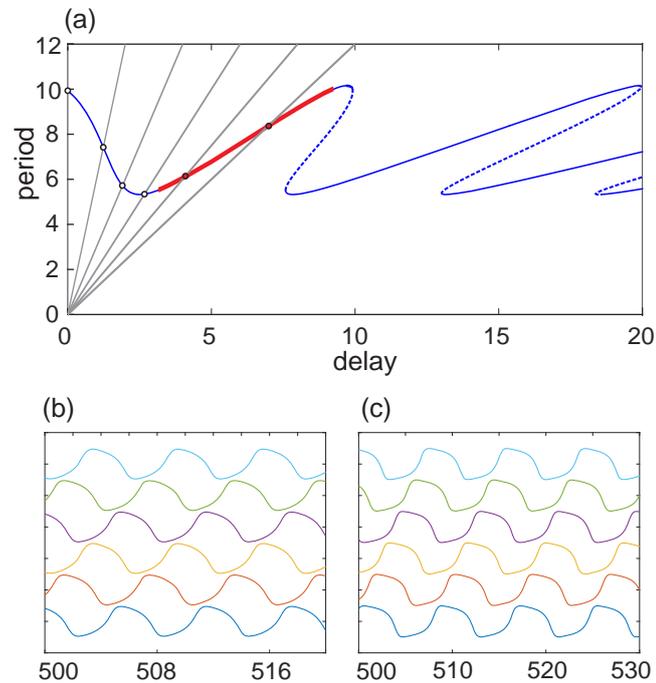


Рис. 3.2. (а) Ветвь периодических решений для одиночного осциллятора Ван-дер-Поля с запаздывающей обратной связью (3.7). Сплошные / пунктирные участки указывают на устойчивость / неустойчивость. Красный толстый участок соответствует периодическим решениям, которые устойчивы при повторном появлении при достаточно больших задержках. Серые линии указывают на условия резонанса  $\tau = MT/N$  для  $N = 6$  и  $M = 1, \dots, 5$ , а их пересечение с ветвью указывает на резонансные периодические решения, приводящие к вращающимся волнам. Полые точки соответствуют устойчивым, сплошные неустойчивым волнам. Устойчивые вращающиеся волны существуют при  $M = 4$  (б) и  $M = 5$  (в).

имеет решение  $\lambda$  с  $\operatorname{Re}\lambda > 0$  для  $\sigma = 0$ . Тогда при увеличении  $\sigma$  это решение должно пересечь мнимую ось в некоторой точке  $i\Omega$  для некоторого значения  $\sigma$ , поскольку при больших  $\sigma$  вращающаяся волна устойчива, как показано в предыдущем подразделе. Согласно (3.19) это решение удовлетворяет

$$F(i\Omega, e^{-i\Omega\sigma - i\psi_m}) = 0, \quad (3.26)$$

для некоторого волнового числа  $m$  возмущения. Это противоречит предположению об устойчивости  $h(t)$  при большом запаздывании, из которого следует, что  $F(i\omega, e^{-i\varphi}) \neq 0$  для всех значений  $\omega$  и  $\varphi$  отличных от нуля. Таким образом, асимптотическая устойчивость при большом запаздывании периодического решения одиночного осциллятора (3.1) гарантирует устойчивость соответствующих вращающихся волн с мгновенной связью в (3.3). Заметим, что это верно для всех целых чисел, кратных минимальному размеру кольца  $N_0$ .

Выбирая достаточно большой размер кольца  $N_j$ , можно также показать обратное: если резонансное периодическое решение  $h(t)$  одиночного осциллятора (3.1) слабо неустойчиво при большом запаздывании  $\tau_k$ , то соответствующая вращающаяся волна также неустойчива в кольце (3.3) достаточно большого размера  $N_j$  и нулевой задержке связи  $\sigma = 0$ . Действительно, в кольце с  $\sigma = 0$  характеристическое уравнение для вращающихся волн принимает вид

$$F(\lambda, e^{-i\psi_m}) = 0, \quad (3.27)$$

Устойчивость вращающейся волны означала бы, что все корни (3.27), кроме  $\psi_0 = 0$ , имеют отрицательную действительную часть. Поскольку при больших  $N$  фазы  $\psi_m$  плотно заполняют интервал  $[0; 2\pi]$ , в силу аналитичности  $F$

все корни

$$F(\lambda, e^{-i\varphi}) = 0 \quad (3.28)$$

с  $0 < \varphi < 2\pi$  также имеют отрицательную действительную часть. С другой стороны, если периодическое решение  $h(t)$  уравнения (3.1) слабо неустойчиво при большом запаздывании  $\tau_k$ , должна быть некоторая точка  $\Omega \neq 0$ , для которого псевдодискретный спектр пересекает мнимую ось, т.е.  $\gamma(\Omega) = 0$  и, следовательно,  $F(i\Omega, e^{-i\varphi}) = 0$ . Это противоречие доказывает, что вращательная волна действительно неустойчива.

Таким образом, устойчивость периодического решения одиночного генератора при большом запаздывании является достаточным условием устойчивости соответствующей вращающейся волны в кольце с мгновенной связью. Для большого количества осцилляторов  $N$  это тоже необходимое условие.

**3.1.4. Дрожащие волны в кольцах генераторов с мгновенной связью.** В предыдущих разделах мы показали, что периодические решения одиночного осциллятора с запаздывающей обратной связью могут быть встроены в виде вращающихся волн в кольцо с мгновенными связями. Этот факт означает, что режимы, которые наблюдались в системах с временной задержкой, следует ожидать в сетях с кольцевой структурой без задержек. Верно и обратное утверждение: динамические явления, наблюдаемые в кольцах связанных осцилляторов, также ожидаются в системах с большими задержками, например химерные состояния [198], резервуарные вычисления [199], нестабильность Экхауза [381], сложные псевдопространственные паттерны [121] и т. д. Таким образом, в кольцевых сетях с импульсными связями следует ожидать появления дрожащих режимов, описанных выше в

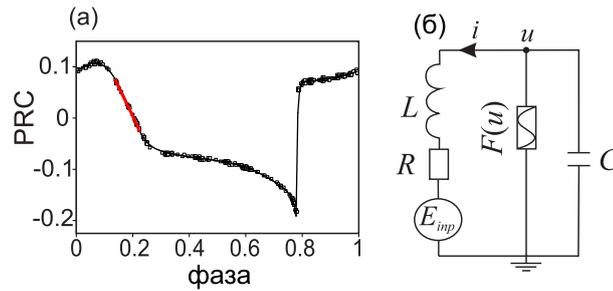


Рис. 3.3. (а) Кривая переустановки фазы и (б) схема электронного генератора ФитцХью-Нагумо.

## Разделе 2.2.

Рассмотрим в качестве одиночного генератора систему (2.21), причем кривую переустановки фазы выберем соответствующей электронному генератору ФитцХью-Нагумо [318], вид которой приведен на Рис. 3.3.

Бифуркационная диаграмма для (2.21) показана на Рис. 3.4, на котором периоды наблюдаемых режимов отложены в зависимости от задержки. Наиболее распространенный режим – регулярный, когда генератор испускает импульсы с постоянным интервалом между ними. Устойчивые участки соответствующей ветви изображены сплошной черной линией, неустойчивые – серой пунктирной линией. Кроме того, имеют место бифуркации мультидрожания для значений задержки

$$\tau_J = P(1 - Z(\psi^*)) + \psi^*, \quad (3.29)$$

где  $\psi^*$  – точки с наклоном  $Z'(\psi^*) = -1$ , а  $P \in \mathbb{N}$ . В каждой из этих бифуркаций регулярный режим дестабилизируется, и возникают «дрожащие» решения, которые характеризуются периодической последовательностью неравных межимпульсных интервалов. На Рис. 3.4 периоды дрожащих решений показаны зелеными линиями, а составляющие их межимпульсные интерва-

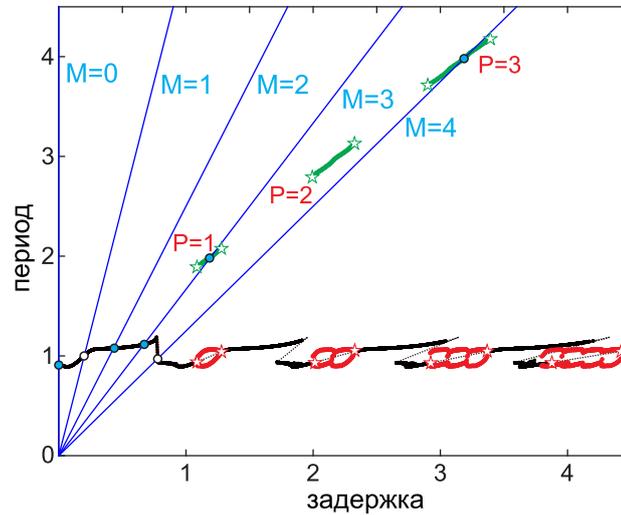


Рис. 3.4. Бифуркационная диаграмма генератора ФитцХью-Нагумо с импульсной запаздывающей обратной связью, период в зависимости от задержки. Черная сплошная линия соответствует стабильным регулярным режимам, серая пунктирная линия - нестабильному регулярному режиму, зеленая линия - режимам дрожания. Сплошные красные линии изображают интервалы между спайками, которые составляют режимы дрожания.

Звездочки обозначают точки бифуркации мультиджиттера.

Бифуркационная диаграмма объединена с семейством прямых  $\tau = MT/N$  с  $N = 5$ . Точки пересечения соответствуют вращающимся волнам в кольце импульсных генераторов без задержек (3.30). Полые точки соответствуют неустойчивым волнам, твердым или устойчивым.

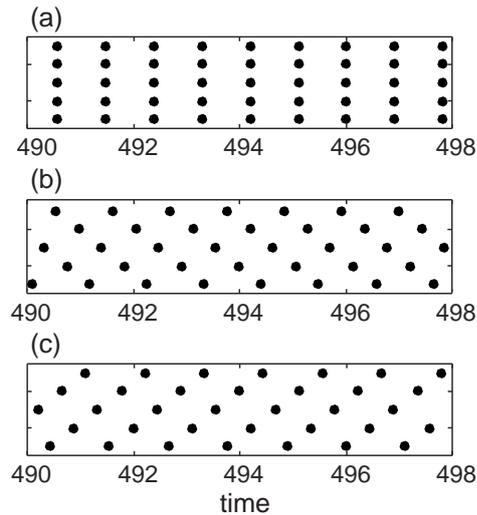


Рис. 3.5. Регулярные вращающиеся волны (3.30): (а)  $M = 0$ , (б)  $M = 2$  and (в)  $M = 3$ . Точками обозначены моменты генерации импульсов.

лы – красным. Красные кривые ответвляются от регулярной ветви в точках бифуркации, отмеченных звездочками.

Покажем, что соответствующие дрожащим режимам дрожащие волны могут появляться в кольцах без задержек. Рассмотрим кольцо осцилляторов с однонаправленными мгновенными импульсными связями:

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = 1 + Z(\varphi_n) \sum_{t_{n-1,p}} \delta(t - t_{n-1,p}), \quad (3.30)$$

где  $n = 1, \dots, N$ . Импульсы, сгенерированные  $(n-1)$ -и генератором в моменты  $t_{n-1,p}$  мгновенно действуют на  $n$ -й генератор.

Кольцо (3.30) состоит из тех же генераторов, что и (2.21), поэтому периодические решения (2.21) переходят во вращающиеся волны (3.30). Для получения вращающихся волновых решений дополним бифуркационную диаграмму на Рис. 3.4 семейством прямых  $\tau = MT/N$  (аналогично Рис. 3.2), где  $M = 0, 1, \dots, N-1$  и  $N = 5$ . Точки пересечения этих линий с ветвями периодических решений соответствуют вращающимся волнам. Как видно на

Рис. 3.4, существует 5 точек, где регулярная ветвь  $T(\tau)$  пересекает одну из прямых  $\tau = MT/N$ . Было установлено, что некоторые из этих точек соответствуют устойчивым вращающимся волнам в кольце. Эти точки отмечены синими кружками и появляются на асимптотически устойчивой части ветви. Остальные точки соответствуют неустойчивым вращающимся волнам и отмечены белыми кружками. Устойчивые регулярные волны наблюдаются в системе при  $M = 0, 2, 3$ , они показаны на Рис. 3.5 (а-в).

Линии на Рис. 3.4 также пересекают ветви дрожащих решений, что подразумевает существование дрожащих вращающихся волн. Эти волны действительно наблюдались, они показаны на Рис. 3.6 (а, б). На этих рисунках верхние панели показывают моменты генерации импульсов, а нижние панели изображают динамику межимпульсных интервалов. Последовательности межимпульсных интервалов одинаковы для всех генераторов, хотя и сдвинуты по времени, и состоят из двух различных значений. Заметим, что графики, соответствующие различным осцилляторам, сдвинуты по вертикальной оси для лучшего восприятия, но в действительности значения короткого и длинного интервалов между спайками также одинаковы для всех генераторов. Таким образом, по кольцу распространяется вращающаяся волна межимпульсных интервалов.

Таким образом, продемонстрированы дрожащие вращающиеся волны в кольце генераторов с импульсной связью без задержек. Ранее мы показали, что дрожащие решения возникают в генераторе с запаздывающей обратной связью в общем случае, и единственное необходимое условие для этого – наличие участков с крутизной  $< -1$  на кривой перестановки фазы. В этом случае соответствующий выбор задержки позволяет установить дрожащее

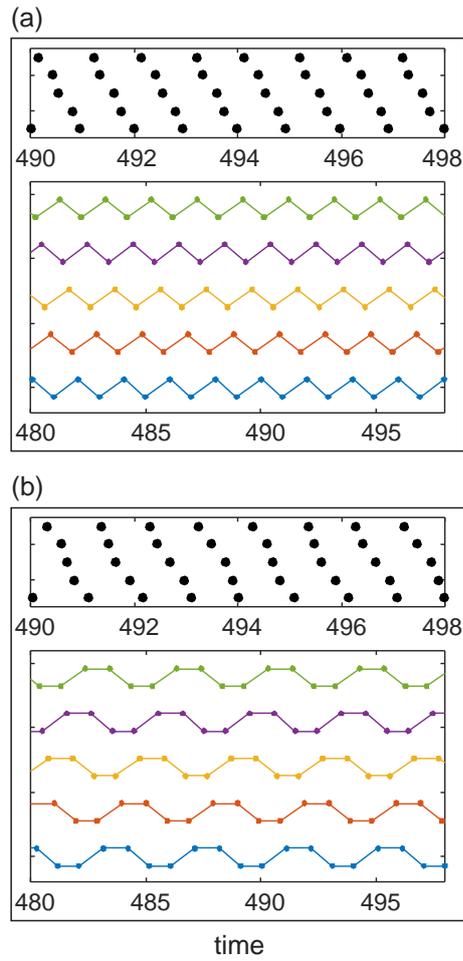


Рис. 3.6. Две различные дрожание вращающиеся волны, наблюдаемые в (3.30). На верхних панеля отмечены моменты генерации импульсов, на нижних показана временная динамика межимпульсных интервалов.

решение произвольной длительности. Можно показать, что дрожащие волны также возникают в общем случае в кольцах генераторов с мгновенной импульсной связью, а именно, что если один генератор с запаздывающей обратной связью (2.21) демонстрирует дрожащий режим, всегда можно выбрать достаточно большое количество  $N$  генераторов в кольце (3.30) без задержек, так что в этом кольце возникает дрожащая волна. Вспомним, что ветвь регулярных режимов генератора может быть определена параметрически как  $T(\psi)$ ,  $\tau(\psi)$  с помощью системы (2.31). Устойчивость регулярных решений задается условием  $-1 < \alpha < 1/P$ , где  $\alpha := Z'(\psi)$ . При  $\alpha = 1/P$  регулярные решения претерпевают седло-узловую бифуркацию, а при  $\alpha = -1$  — бифуркацию мультидрожаания. Дрожащие решения ответвляются от регулярных в точках бифуркации  $\tau(\psi^*) = P(1 - Z(\psi^*)) + \psi^*$ , где  $Z'(\psi^*) = -1$ . Каждый дрожащий режим состоит из межимпульсных интервалов  $\Theta_j$ , которые образуют периодическую последовательность. Эта последовательность имеет длину  $P + 1$ , таким образом, а ее период равен  $T = \Theta_1 + \Theta_2 + \dots + \Theta_{P+1}$ . В точке бифуркации все интервалы стремятся к периоду регулярного режима, от которого они ответвляются. Поскольку период регулярного решения равен  $T_R = 1 - Z(\psi^*)$ , период возникающего дрожащего решения в точке бифуркации равен  $T_J = (P + 1)(1 - Z(\psi^*))$ .

Легко показать, что в точке бифуркации период возникающего дрожащего решения  $T$  больше, чем задержка  $\tau$ . Каждая ветвь дрожащих решений соединяет две точки бифуркаций дрожаания А и В. Без ограничения общности предположим, что  $\tau_A/T_A < \tau_B/T_B < 1$ . Тогда всегда можно выбрать рациональное число  $M/N \in I = [\tau_A/T_A, \tau_B/T_B]$  так, что линия  $\tau/T = M/N$  пересекает ветвь дрожащих решений. Это гарантирует, что соответствующее

решение может быть встроено в виде дрожащей вращающейся волны в кольцо  $N$  осцилляторов с волновым числом  $M$  (см. (3.23)).

Таким образом, мы показали, что дрожащие вращающиеся волны возникают в кольцах с мгновенной связью в общем случае. Всегда можно взять достаточно большое количество осцилляторов и получить волну с произвольно большим периодом. Оценим минимальный размер кольца  $N$ , необходимый для вложения дрожащего решения. Подставляя выражения для бифуркационных параметров  $\tau_{A,B}$  и  $T_{A,B}$ , получаем

$$I = \left[ 1 - \frac{f(\psi_A)}{(P+1)}, 1 - \frac{f(\psi_B)}{(P+1)} \right], \quad (3.31)$$

где  $f(\varphi) = 1 - \varphi / (1 - Z(\varphi))$ . С ростом  $P$  интервал  $I$  сокращается и приближается к единице. Из этого наблюдения легко увидеть, что минимальный размер  $N$  пропорционален периоду дрожания  $P$ . Более того, для больших  $P$  волновое число  $M$  должно быть близко к  $N$ .

**3.1.5. Экспериментальное исследование кольца электронных генераторов ФитцХью-Нагумо.** Также были проведены эксперименты с электронными схемами, подтверждающие теоретические результаты. Было экспериментально исследовано кольцо из  $N = 5$  электронных генераторов ФитцХью-Нагумо с мгновенными однонаправленными связями. Схема одиночного электронного генератора, использованного в эксперименте, изображена на Рис. 3.3 (б) и детально описана в работе [318]. Здесь  $u$  - напряжение на конденсаторе,  $i$  - ток через катушку индуктивности,  $F(u) = \alpha u(u - u_0)(u + u_0)$  - вольт-амперная характеристика нелинейного резистора, а  $E_{inp}$  - входной сигнал. Значения параметров были установлены как

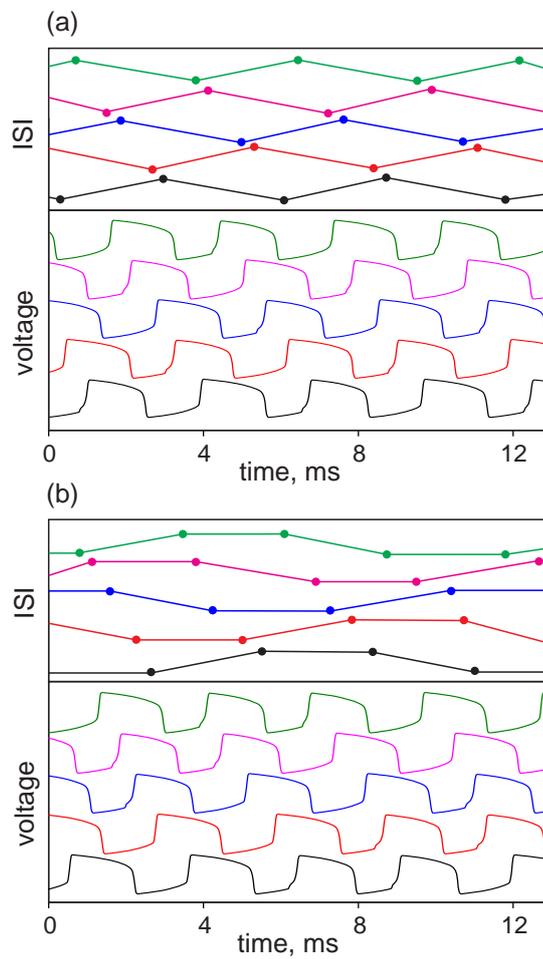


Рис. 3.7. Две разные колеблющиеся вращающиеся волны, экспериментально наблюдаемые в кольце из пяти электронных осцилляторов ФитцХью-Нагумо. На верхних панелях изображены интервалы между импульсами, на нижних - выходные напряжения генераторов.

$R = 1\text{k}\Omega$ ,  $\alpha = 2.02 \times 10^{-4}\Omega^{-1}\text{V}^{-2}$ ,  $u_0 = 0,82\text{V}$ . Емкость  $C = 5\text{нФ}$  и индуктивность  $L = 9,4\text{Гн}$  были заданы так, что в отсутствие связи каждый генератор периодически генерирует выбросы с периодом  $T \approx 2,95$  мс. Связь в кольце организована следующим образом: при превышении выходным напряжением любого генератора порогового значения  $u_{th} = 0,84\text{В}$  возникает импульс прямоугольной формы с амплитудой  $A_P = 5\text{В}$  и длительностью  $T_P = 42\mu\text{с}$ , подается на следующий генератор. Кривая переустановки фазы, соответствующая такому импульсу, изображена на Рис. 3.3(а).

В эксперименте отслеживалась динамика выходных напряжений и интервалов между импульсами для всех генераторов. Были обнаружены все режимы, предсказанные теоретически, за исключением глобальной синхронизации (Рис. 3.7(а)). Предположительная причина того, что этот режим не обнаружен – его низкая устойчивость и высокая чувствительность к расстройкам частоты. На Рис. 3.7 приведены примеры двух различных дрожащих вращающихся волн.

### 3.2. Синхронизация и ее разрушение в сети автогенераторов с глобальными импульсными запаздывающими связями

В настоящем разделе исследуется коллективная динамика сети автогенераторов с глобальными импульсными запаздывающими связями. Рассмотрим ансамбль идентичных автогенераторов с глобальными запаздывающими импульсными связями, описываемый следующей системой уравнений:

$$\frac{d\theta_j(t)}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon}{N} Z(\theta_j(t)) \sum_{k=1}^N \sum_{t_k^p} \delta(t - t_k^p - \tau), \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.32)$$

Здесь  $\omega = 1$  – собственная частота осцилляторов,  $\varepsilon$  – сила связи,  $Z(\cdot)$  – кривая перестановки фазы,  $\tau$  – задержка. В отсутствие взаимодействия фаза каждого генератора возрастает равномерно с скоростью  $\omega$ . При достижении фазой единичного значения генератор испускает импульс, после чего фаза обнуляется. Взаимодействия в сети организованы следующим образом: каждый импульс, сгенерированный  $k$ -м осциллятором в момент времени  $t_k^p$ , спустя время  $\tau$  поступает на вход всех генераторов. Поступивший импульс приводит к мгновенному изменению фазы осциллятора на величину  $\Delta\theta_j = \frac{\varepsilon}{N} Z(\theta_j(t-0))$ , где  $\theta_j(t-0)$  – величина фазы перед приходом импульса. Таким образом, фаза осциллятора меняется в соответствие с отображением импульса

$$\mu : \theta \mapsto \theta + \frac{\varepsilon}{N} Z(\theta). \quad (3.33)$$

Отметим, что при поступлении на осциллятор одновременно нескольких  $m > 1$  импульсов изменение фазы определяется  $m$ -кратной суперпозицией отображения импульса:

$$\mu^m(\theta) = \underbrace{\mu \circ \mu \circ \dots \circ \mu}_m(\theta). \quad (3.34)$$

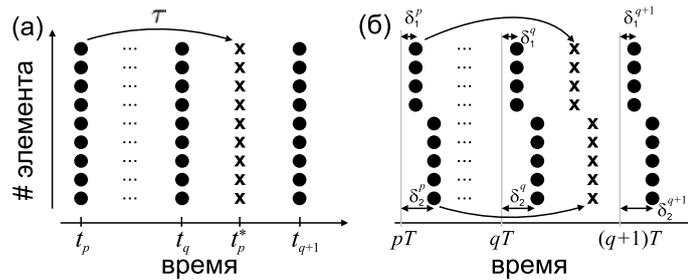


Рис. 3.8. Динамика сети, моменты испускания импульсов генераторами обозначены точками, а моменты приема импульсов – крестиками. (а) Глобальная синхронизация. (б) Двухкластерный режим.

Такое отображение мы будем называть отображением пачки.

Далее будем предполагать, что отображение импульса (3.33) строго монотонно, что эквивалентно условию  $\varepsilon Z'(\theta) > -N$ . Немонотонность может привести к появлению мультидрожания, описанного в разделе 2.2, однако в данном разделе это явление не рассматривается. Монотонность отображения импульса приводит к неизменности порядка фаз элементов: если фазы упорядочены как  $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_N$  перед поступлением импульса, то воздействие импульса данный порядок не изменяет. Между импульсами порядок фаз также сохраняется из-за равенства собственных частот генераторов.

**3.2.1. Глобальная синхронизация сети и ее устойчивость.** Базовым динамическим режимом сети (3.32) является глобальная синхронизация, когда все осцилляторы генерируют импульсы одновременно и периодически, см. Рис. 3.8. В этом режиме каждый осциллятор получает пачку из  $N$  импульсов одновременно спустя время задержки  $\tau$  после момента их генерации. Используя этот факт, мы можем определить период  $T$  синхронного решения. Действительно, обозначим моменты времени генерации им-

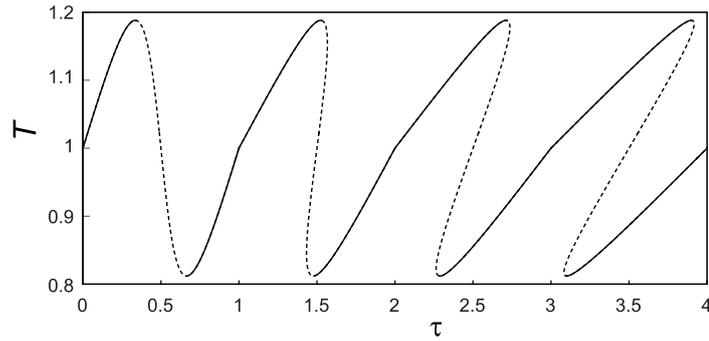


Рис. 3.9. Период  $T$  синхронного решения в зависимости от запаздывания  $\tau$  для  $Z(\varphi) = -\sin 2\pi\varphi$ ,  $N = 10$  и  $\varepsilon = 0.2$ . Устойчивые части ветви изображены сплошными линиями, неустойчивые – штриховыми линиями.

пульсов как  $t_p = pT$ , тогда импульсы поступают на каждый осциллятор при  $t_p^* = pT + \tau$ . Фазы осцилляторов растут равномерно за исключением моментов прихода импульсов и равны нулю во время генерации импульсов. Таким образом,  $\theta_j(t_p^*) = \psi = t_p^* - t_q$ , где  $t_q$  – момент генерации последнего импульса до прихода очередной пачки при  $t_p^*$ , см. Рис. 3.8. Легко видеть что  $\psi = \tau - PT = \tau \bmod T$ , где целое число  $P = q - p = [\tau/T]$  – количество импульсов, генерируемых за время задержки.

После получения пачки импульсов фазы осцилляторов изменяются в соответствии с отображением  $\mu^N(\cdot)$ , поэтому вызванный фазовый сдвиг равен  $\mu^N(\psi) - \psi$ . Принимая во внимание, что полное изменение фазы за период  $T = t_{q+1} - t_q$  равно единице, получаем

$$T = 1 + \psi - \mu^N(\psi) = 1 + (\tau \bmod T) - \mu^N(\tau \bmod T). \quad (3.35)$$

Данное выражение может быть представлено в параметрической форме как

$$T(\psi) = 1 + \psi - \mu^N(\psi), \quad (3.36)$$

$$\tau(\psi) = PT + \psi, \quad (3.37)$$

где  $\psi \in [0, 1]$  – фаза, в которой осцилляторы получают пачки импульсов, а  $P \in Z^+$  – число пачек, которые система успевает сгенерировать за время задержки. Изменяя  $\psi$  и  $P$  можно получить зависимость периода синхронного режима в зависимости от запаздывания.

Построим ветвь синхронного решения на плоскости  $\tau - T$ . Для этого удобно вывести приближенное выражение для отображения  $\mu^N(\cdot)$ . Методом математической индукции легко показать, что

$$\mu^m(\theta) = \theta + \varepsilon \frac{m}{N} Z(\theta) + \varepsilon^2 \frac{m(m-1)}{2N^2} Z(\theta)Z'(\theta) + O(\varepsilon^3). \quad (3.38)$$

Отсюда при большом  $N$  и слабой связи  $\varepsilon$

$$\mu^N(\theta) \approx \theta + \varepsilon Z(\theta) + \frac{\varepsilon^2}{2} Z(\theta)Z'(\theta). \quad (3.39)$$

Для кривой переустановки фазы в виде  $Z(\theta) = -\sin 2\pi\theta$  это выражение принимает вид

$$\mu^N(\theta) \approx \theta - \varepsilon \sin 2\pi\theta + \frac{\pi\varepsilon^2}{2} \sin 4\pi\theta. \quad (3.40)$$

График зависимости  $T(\tau)$  для данной формы PRC приведен на Рис. 3.9 при  $\varepsilon = 0.2$ . Данный график имеет характерную периодичную структуру с увеличением наклона ветвей при росте запаздывания.

Исследуем устойчивость синхронного режима сети. Для этого введем малые возмущения  $\delta_j^p \ll T$ , так что моменты генерации импульсов равны  $t_j^p = pT + \delta_j^p$ , и исследуем временную динамику данных возмущений. Теперь осцилляторы не генерируют импульсов одновременно, и в общем случае каждый осциллятор получает в течение периода  $N$  импульсов в различных фазах, что приводит сложному выражению для суммарного сдвига фаз. Для

упрощения исследования мы будем рассматривать лишь возмущения определенного класса, а именно так называемые двухкластерные возмущения. Класс двухкластерных возмущений  $\Pi_M$  определен как класс состояний, в котором осцилляторы разбиты на две группы, содержащие соответственно  $M$  и  $N - M$  элементов. Благодаря симметрии системы очевидно, что данный класс возмущений является инвариантным, то есть кластеры не могут произвольно распасться по ходу динамики сети. Двухкластерное возмущение описывается межкластерной дистанцией  $\Delta_p = t_2^p - t_1^p$ , где  $t_1^p = pT + \delta_1^p$  и  $t_2^p = pT + \delta_2^p$  — моменты возбуждения первого и второго кластеров, соответственно.

Проанализируем динамику межкластерной дистанции в течение одного периода. Как показано на Рис. 3.8 динамика сети характеризуется следующей последовательностью событий:

- (а) Первый кластер генерирует пачку импульсов при  $t = t_1^q$ ;
- (б) Второй кластер генерирует пачку импульсов при  $t = t_2^q$ ;
- (в) Сеть получает пачку, сгенерированную  $P$  периодов назад первым кластером при  $t = t_1^p$ ;
- (г) Сеть получает пачку, сгенерированную  $P$  периодов назад вторым кластером при  $t = t_2^p$ ;

Когда первый кластер генерирует пачку при  $t = t_q^1$ , его фаза принимает значение  $\varphi_1^{(a)} = 0$ . Таким образом, в момент получения сетью первой пачки фаза первого кластера равна

$$\varphi_1^{(c)} = t_1^p + \tau - t_1^q = \delta_1^p - \delta_1^q + \tau - PT = \psi + \delta_1^p - \delta_1^q. \quad (3.41)$$

После получения первой пачки эта фаза принимает значение  $\mu^M \left( \varphi_1^{(c)} \right)$ . К моменту прихода второй пачки фаза первого кластера равна

$$\varphi_1^{(d)} = \mu^M \left( \varphi_1^{(c)} \right) + t_2^p - t_1^p = \mu^M (\psi + \delta_1^p - \delta_1^q) + \delta_2^p - \delta_1^p. \quad (3.42)$$

Получение второй пачки приводит к мгновенному изменению фазы первого кластера до величины  $\mu^{N-M} \left( \varphi_1^{(d)} \right)$ .

Аналогичным образом можно показать, что фаза второго кластера перед приходом второй пачки равна

$$\varphi_2^{(d)} = \mu^M (\psi + \delta_1^p - \delta_2^q) + \delta_2^p - \delta_1^p. \quad (3.43)$$

После получения второй пачки значение фазы второго кластера становится равным  $\mu^{N-M} \left( \varphi_2^{(d)} \right)$ .

В результате, межкластерная дистанция  $\Delta_{q+1}$  после получения сетью обеих пачек становится равной

$$\Delta_{q+1} = \mu^{N-M} \left( \mu^M (\psi + \delta_1^p - \delta_1^q) + \Delta_p \right) - \mu^{N-M} \left( \mu^M (\psi + \delta_1^p - \delta_2^q) + \Delta_p \right). \quad (3.44)$$

При малых возмущениях линеаризация около синхронного состояния  $\Delta_q = 0$  приводит к выражению

$$\Delta_{q+1} = \left( \mu^{N-M} \right)' \left( \mu^M (\psi) \right) \times \left( \mu^M \right)' (\psi) \times \Delta_q = \alpha \Delta_q, \quad (3.45)$$

где  $(\mu^m)'(\varphi) \equiv \frac{d}{d\varphi} \mu^m(\varphi)$  и  $\alpha = \left( \mu^N \right)'(\psi)$ . Таким образом, динамика двухкластерных возмущений определяется единственным параметром – наклоном отображения пачки. Возмущения затухают при  $|\alpha| < 1$  и возрастают в противоположном случае.

Что касается динамики возмущений общего вида, заметим, что любое возмущение может быть представлено как суперпозиция двухкластерных возмущений различных классов  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{M-1}$ . Линеаризованная динамика

в каждом классе описывается отображением (3.45), поэтому полный спектр синхронного решения состоит из  $(N - 1)$  мультипликаторов, каждый из которых равен  $\alpha$ . Заметим, что при приближении  $|\alpha|$  к единице возникает одновременно  $(N - 1)$  критический мультипликатор, синхронный режим становится неустойчивым по отношению ко *всем* различным двухкластерным возмущениям. Рассмотрим данную ситуацию более подробно.

**3.2.2. Десинхронизация сети и проскальзывание фазы.** Определим бифуркационные параметры, при которых синхронный режим теряет устойчивость. Возможны два сценария такой потери устойчивости:  $\alpha = 1$  и  $\alpha = -1$ , однако второй из них предполагает потерю монотонности отображения импульса и поэтому не будет здесь рассмотрен. Отметим лишь, что соответствующий сценарий очень похож на сценарий мультидрожания, рассмотренный ранее для одного осциллятора в разделе 2.2. В дальнейшем мы сосредоточимся на случае  $\alpha = 1$ . Заметим, что в соответствии с (3.36) и (3.37) в точке бифуркации

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{T'_\psi}{\tau'_\psi} = \frac{1 - \alpha}{1 + P(1 - \alpha)} = 0, \quad (3.46)$$

то есть устойчивость синхронного режима изменяется в точках экстремума графика  $T(\tau)$ , как показано на Рис. 3.9). Для определения положений данных точек воспользуемся аппроксимацией (3.39), откуда получим

$$\alpha = 1 + \varepsilon Z'(\psi) + \varepsilon^2 \frac{N - 1}{2N} \left( (Z'(\psi))^2 + Z(\psi)Z''(\psi) \right) + O(\varepsilon^3). \quad (3.47)$$

Тогда бифуркационное условие  $\alpha = 1$  приводит к выражению

$$Z'(\psi) = -\varepsilon \frac{N - 1}{2N} Z(\psi)Z''(\psi) + O(\varepsilon^2). \quad (3.48)$$

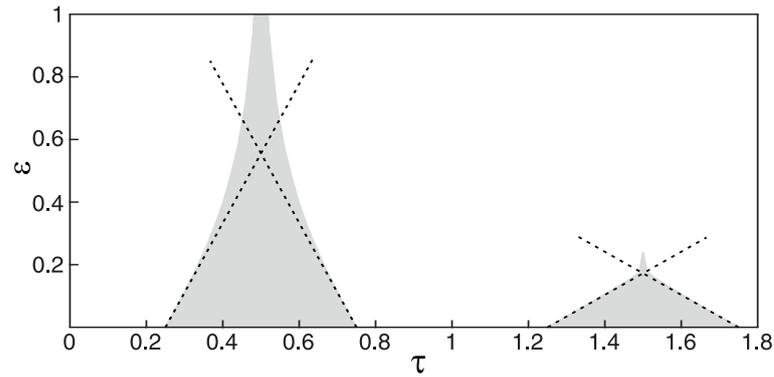


Рис. 3.10. Плоскость параметров сила связи  $\varepsilon$  – задержка  $\tau$  : области с устойчивым (белый цвет) и неустойчивым (серый цвет) синхронным режимами. Пунктирные линии представляют линейное приближение (3.49) для границ изменения устойчивости.

Таким образом, при слабой связи бифуркация происходит в областях параметров, где производная PRC мала. Определим  $\psi_0$  как точку, в которой производная PRC  $Z'(\psi_0)$  равна нулю, тогда  $Z''(\psi_0)(\psi - \psi_0)$ , и точка бифуркации определяется как

$$\psi_b = \psi_0 - \varepsilon \frac{N-1}{2N} Z(\psi_0) + O(\varepsilon^2). \quad (3.49)$$

Направление бифуркации определяется знаком второй производной  $Z''(\psi_0)$ . Действительно, подставляя (3.49) в (3.47) получим

$$\alpha = 1 + \varepsilon^2 Z''(\psi_0)(\psi - \psi_b) + O(\varepsilon^3). \quad (3.50)$$

Для положительных  $Z''(\psi_0)$  мультипликатор  $\alpha$  становится больше единицы когда  $\psi$  превышает  $\psi_b$ , то есть синхронизация теряет устойчивость при  $\psi > \psi_b$ . Для отрицательных  $Z''(\psi_0)$  ситуация обратная.

В соответствие с (3.36), бифуркационное значение задержки определяется

как

$$\tau_b = P (1 + \psi_b - \mu^N(\psi_b)) + \psi_b. \quad (3.51)$$

Применяя приближение (3.38) и формулу (3.49), получаем линейную оценку для линии бифуркации:

$$\tau_b = P + \psi_0 - \varepsilon \left( P + \frac{N-1}{2N} \right) Z(\psi_0) + O(\varepsilon^2). \quad (3.52)$$

Области устойчивой синхронизации изображены на Рис. 3.10 на плоскости задержки и силы связи, линейная оценка для границы данной области изображена на том же рисунке. Хорошее совпадение границы с линейной оценкой наблюдается при  $\varepsilon \lesssim 0.1$ .

При потере устойчивости синхронным решением в точке бифуркации в системе возникает десинхронизация. Для более глубокого понимания возникающих асинхронных режимов проанализируем отображение (3.44) вблизи точки бифуркации. Для простоты рассмотрения положим задержку малой  $\tau < T$ , откуда следует что  $P = 0$  и отображение является одномерным:

$$\Delta_{q+1} = \mu^{N-M} (\mu^M(\psi) + \Delta_q) - \mu^{N-M} (\mu^M(\psi - \Delta_q) + \Delta_q). \quad (3.53)$$

Обозначим  $\eta = \psi - \psi_b$  и предположим, что  $\Delta \sim \eta \ll \varepsilon$ , тогда используя приближение (3.38) и сохраняя члены до первого порядка по  $\varepsilon$  и до второго порядка по  $\eta$ , получим

$$\begin{aligned}
\Delta_{q+1} &= \mu^{N-M} \left( \psi + \varepsilon \frac{M}{N} Z(\psi) + \Delta_q \right) - \mu^{N-M} \left( \psi - \Delta_q + \varepsilon \frac{M}{N} Z(\psi - \Delta_q) + \Delta_q \right) = \\
&= \psi + \varepsilon \frac{M}{N} Z(\psi) + \Delta_q + \varepsilon \frac{N-M}{N} Z \left( \psi + \varepsilon \frac{M}{N} Z(\psi) + \Delta_q \right) - \\
&- \psi - \varepsilon \frac{M}{N} Z(\psi - \Delta_q) - \varepsilon \frac{N-M}{M} Z \left( \psi + \varepsilon \frac{M}{N} Z(\psi - \Delta_q) \right) = \\
&= \Delta_q + \frac{\varepsilon}{N} [M(Z(\psi) - Z(\psi - \Delta_q)) - (N-M)(Z(\psi + \Delta_q) - Z(\psi))]. \quad (3.54)
\end{aligned}$$

Учтем, что

$$Z(\psi_b + x) - Z(\psi_b + y) \approx Z'(\psi_b)(x - y) + \frac{Z''(\psi_b)}{2}(x^2 - y^2) \approx \frac{Z''(\psi_0)}{2}(x^2 - y^2), \quad (3.55)$$

тогда получим

$$\begin{aligned}
\Delta_{q+1} &= \Delta_q + \frac{\varepsilon Z''(\psi_0)}{2N} [M(\eta^2 - (\eta - \Delta_q)^2) + (N-M)((\eta + \Delta_q)^2 - \eta^2)] = \\
&= \Delta_q + \frac{\varepsilon Z''(\psi_0)}{2N} \Delta_q (2N\eta + N\Delta_q - 2M\Delta_q), \quad (3.56)
\end{aligned}$$

и окончательно

$$\Delta_{q+1} = \Delta_q + \varepsilon Z''(\psi_0) \Delta_q \left( \eta - \Delta_q \frac{2M-N}{2N} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (3.57)$$

Предположим для определенности, что  $Z''(\psi_0) > 0$  и  $M > N/2$ , тогда динамика отображения (3.57) проиллюстрирована на Рис. 3.11 для различных значений  $\eta$ . При  $\eta < 0$ , синхронное решение  $\Delta = 0$  является устойчивым, и оно теряет устойчивость через транскритическую бифуркацию когда  $\eta$  становится положительным. Для  $\eta > 0$  устойчивой становится неподвижная точка  $\Delta = 2\eta N / (2M - N)$ , соответствующая периодическому двухкластерному решению. Заметим однако, что устойчивость данной точки имеет место только в подпространстве двухкластерных возмущений с заданным размером кластеров. Возникающее двухкластерное решение может быть и действительно

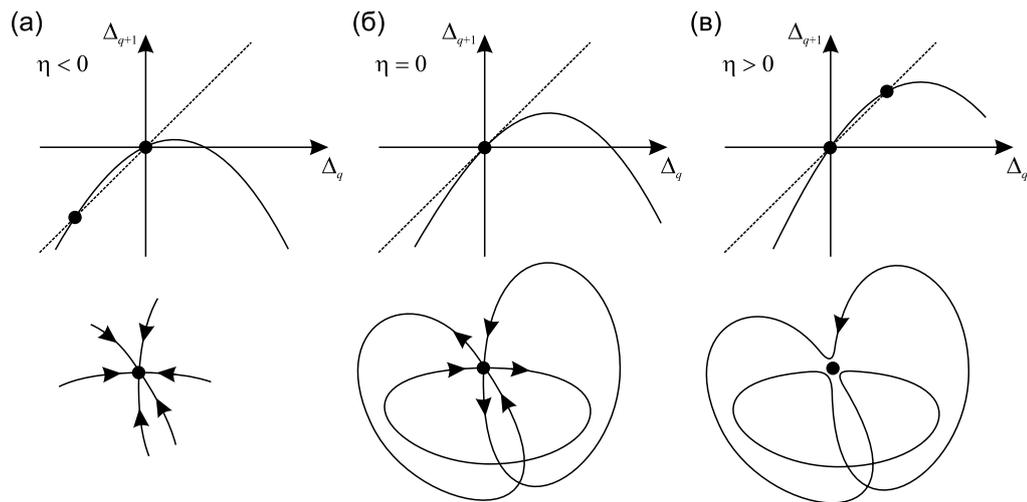


Рис. 3.11. Динамика отображения (3.57) (верхняя строка) и схематичное изображение фазового пространства сети (3.32) (нижняя строка) для (а)  $\eta < 0$ , (б)  $\eta = 0$  и (в)  $\eta > 0$ . (а) Синхронизированное состояние устойчиво.

(б) Синхронизированное состояние нейтрально устойчиво, возникают множественные гомоклинические петли. (в) Синхронизированное состояние теряет устойчивость, гомоклинические петли превращаются в замкнутые инвариантные кривые.

является неустойчивым по отношению к распадению на более мелкие кластеры. Таким образом, после прохождения бифуркации в системе существуют периодические двухкластерные решения со всеми возможными размерами кластеров, однако все они являются неустойчивыми по отношению к дальнейшему распаду кластеров.

Проанализируем более детально систему в точке бифуркации  $\eta = 0$ , в которой синхронное решение  $\Delta = 0$  является негрубым, см. Рис. 3.11(б). Заметим, что  $\Delta$  является циклической переменной, так как состояния с  $\Delta = \pm T$  эквивалентны состоянию  $\Delta = 0$ . Вследствие этого возникает гомоклиническая петля к тривиальной неподвижной точке: возмущения с положительным  $\Delta$  сначала училиваются, а потом сходятся к  $\Delta = T$ . Заметим, что в фазовом пространстве в точке бифуркации гомоклинические петли возникают одновременно для всех возможных значений  $M$ . Более того, благодаря перестановочной симметрии эквивалентными являются двухкластерные возмущения с любым элементарным составом кластеров. Таким образом, число различных двухкластерных возмущений для заданного  $M$  равно  $\frac{1}{2}C_M^N$ , а полное число гомоклинических петель, возникающих в точке бифуркации, может быть оценено как

$$L = \frac{1}{2} \sum_{M=1}^{N-1} C_M^N = 2^{N-1} - 1. \quad (3.58)$$

Множитель  $1/2$  здесь стоит для учета тождественности двухкластерных состояний с размерами кластеров  $M$  и  $N - M$ .

При прохождении точки бифуркации гомоклинические петли трансформируются в сложные инвариантные замкнутые кривые, соответствующие длиннопериодическим или квазипериодическим колебаниям. Пример соот-

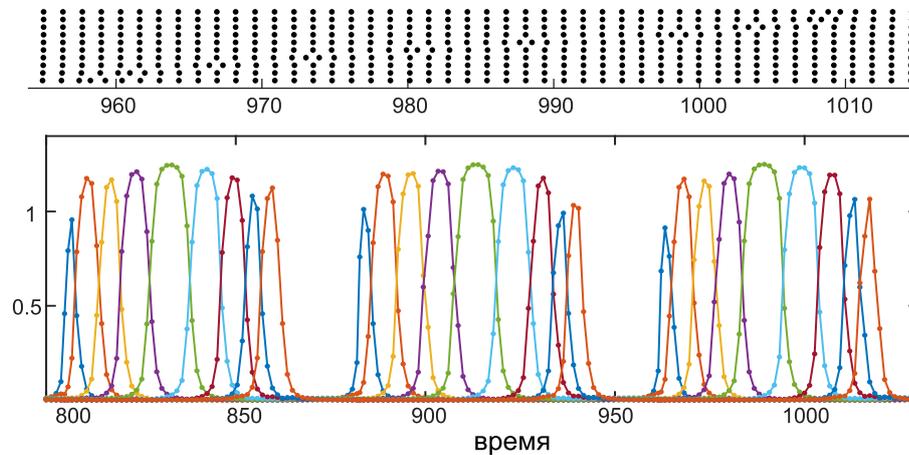


Рис. 3.12. Динамика сети (3.32) для  $N = 10$ ,  $\tau = 0.4$ ,  $\varepsilon = 0.375$  и кривой переустановки фазы  $Z(\varphi) = -\sin 2\pi\varphi$ . Верхний ряд: моменты генерации импульсов. Нижний ряд: интервалы между всплесками между последующими осцилляторами, то есть запаздывания  $t_j^p - t_{j-1}^p$  между моментами срабатывания последующих осцилляторов. Разные цвета соответствуют разным номерам генераторов  $j$ . Например, синяя кривая соответствует запаздыванию между первым и вторым колебаниями, красная кривая - запаздыванию между вторым и третьим осцилляторами и так далее. Обратите внимание, что все запаздывания имеют постоянный знак, что согласуется с сохранением порядка осцилляторов. Обратите внимание также на разницу во временных масштабах между верхним и нижним рядами.

ветствующей динамики приведен на Рис. 3.12. Из растрограммы динамики сети видно, что сеть близка к синхронному режиму. В некоторые моменты один осциллятор отрывается от синхронной группы и обгоняет ее, после чего вновь примыкает к группе. Затем процесс повторяется с другим осциллятором, и так далее. Такие «проскальзывания фазы» повторяются периодически, как проиллюстрировано на Рис. 3.12(б). Период проскальзывания уменьшается по мере удаления от точки бифуркации. Вдали от точки бифуркации колебания могут стать нерегулярными и породить более сложные динамические режимы.

### 3.3. Влияние неоднородности параметров на коллективную динамику сети активных элементов

В настоящем разделе исследуется влияние неоднородности параметров на коллективную динамику сетей. Для этого рассмотрим неоднородный ансамбль из  $N$  элементов с глобальными связями, описываемый системой уравнений

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i - a \sin \theta_i(t) - \frac{K}{N} \sum_j \sin(\theta_i(t) - \theta_j(t - \tau) + \alpha), \quad (3.59)$$

где  $i = 1, \dots, N$ ,  $\theta_i \in S^1$  – фазы элементов, а локальная динамика определяется параметром неизохронности  $a$  и собственной частотой  $\omega_i$ . Иногда элементы такого типа называют «активными ротаторами». Взаимодействие элементов является глобальным и характеризуется силой связи  $K$ , фазовым сдвигом  $\alpha$  и задержкой связи  $\tau$ .

Заметим, что термин «собственная частота» применяется к параметру  $\omega_i$  условно: элемент вращается равномерно с частотой  $\omega_i$  только при  $a \ll \omega_i$ , тогда как при конечном  $a$  его вращение становится неравномерным. Более того, автоколебательными являются только элементы с  $|\omega_i| > a$ , а остальные элементы являются возбуждаемыми. Таким образом, более точно  $\omega_i$  следует называть локальным бифуркационным параметром. При  $|\omega_i| < a$  изолированный элемент находится в состоянии покоя, соответствующем устойчивому узлу, а неустойчивый узел играет роль порога возбуждения. При  $|\omega_i| = a$  элемент претерпевает седлоузловую бифуркацию, что приводит к рождению автоколебательного режима.

Заметим, что в ансамбле (3.59) связи можно назвать импульсными довольно условно: в колебательном режиме элемент выдает периодический сигнал,

в котором импульсы являются короткими только при  $\omega$ , незначительно превышающем  $a$ . Тем не менее, основное внимание в данном разделе уделяется роли неоднородности параметров, а активные ротаторы в качестве базовых элементов модели были выбраны по причине того, что они допускают полностью аналитическое исследование. Перейдем к описанию примененных теоретических подходов.

**3.3.1. Вывод уравнений Отта-Антонсена** Для исследования коллективной динамики неоднородной популяции активных ротаторов в случае отсутствия задержки  $\tau = 0$  будем применять подход Отта-Антонсена [263, 264]. Для этого введем комплексный параметр порядка Курамото, который представляет собой центр масс всех ротаторов:

$$R(t) = \rho(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_j e^{i\theta_j(t)}, \quad (3.60)$$

тогда (3.59) может быть переписано как

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \frac{a}{2i}(e^{i\theta_i} - e^{-i\theta_i}) + \frac{K}{2i}(Re^{-i(\theta_i+\alpha)} - \overline{R}e^{i(\theta_i+\alpha)}), \quad (3.61)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. В термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  введем плотность вероятности частот  $g(\omega)$ , которая удовлетворяет условию нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)d\omega = 1$ . При этом макроскопическое состояние системы может быть описано функцией плотности вероятности  $f(\theta, \omega, t)$ , которая для рассматриваемого момента  $t$  дает относительное количество осцилляторов, фазы и частоты которых  $\theta_i(t) \approx \theta$ , а частоты  $\omega_k \approx \omega$ . Условие нормировки для функции плотности вероятности записывается как  $\int_0^{2\pi} f(\theta, \omega, t)d\theta = g(\omega)$ . Плотность  $f(\theta, \omega, t)$  удовлетворяет уравне-

нию неразрывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(fv) = 0, \quad (3.62)$$

где скорость

$$v(\theta, \omega, t) = \omega - \frac{a}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{K}{2i}(Re^{-i(\theta+\alpha)} - \bar{R}e^{i(\theta+\alpha)}). \quad (3.63)$$

В последнем выражении использовано представление Курамото для среднего поля в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{2\pi} f(\theta, \omega, t)e^{i\theta} d\theta, \quad (3.64)$$

Согласно теории Отта-Антонсена [263, 264], долговременная динамика уравнения непрерывности (3.66) сходится к определенному многообразию вида

$$f(\theta, \omega, t) = \frac{g(\omega)}{2\pi} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \bar{z}^n(\omega, t)e^{in\theta} + z^n(\omega, t)e^{-in\theta} \right] \right), \quad (3.65)$$

где комплексная амплитуда  $z(\omega, t)$  удовлетворяет  $|z(\omega, t)| \leq 1$ . Подставляя (3.65) в (3.62), получим, что  $z(\omega, t)$  удовлетворяет уравнению Отта-Антонсена

$$\dot{z}(\omega, t) = i\omega z + (1 - z^2)\frac{a}{2} + \frac{K}{2}Re^{-i\alpha} - \frac{K}{2}\bar{R}e^{i\alpha}z^2. \quad (3.66)$$

Величину  $z(\omega, t)$  следует интерпретировать как частотно-зависимый *локальный параметр порядка* в том смысле, что он количественно определяет степень синхронности элементов, собственные частоты которых лежат вблизи заданной частоты  $\omega$ . В континуальном пределе глобальный и локальный порядок связаны условием самосогласованности

$$R = \mathcal{G}z = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)z(\omega)d\omega, \quad (3.67)$$

которое следует из определения (3.64) и представления (3.65). Заметим, что (3.66) представляет собой обобщение соответствующего результата в [193] для  $a \neq 1, \alpha \neq 0$ .

**3.3.2. Стационарные решения уравнения Отта-Антонсена и их устойчивость.** Найдем решения уравнения Отта-Антонсена (3.66), для которых среднее поле Курамото  $R(t) = \rho(t)e^{i\psi(t)}$  постоянно. Для этого подставим решение вида  $z(\omega, t) = r(\omega, t)e^{i\varphi(\omega, t)}$  в (3.66), что приводит к системе

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{B}{2}(1 - r^2) \cos \phi, \\ r\dot{\phi} &= \omega r - \frac{B}{2}(1 + r^2) \sin \phi, \end{aligned} \quad (3.68)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{a^2 + K^2\rho^2 + 2aK\rho \cos(\psi - \alpha)}, \\ \beta &= \arctan \frac{K\rho \sin(\psi - \alpha)}{a + K\rho \cos(\psi - \alpha)}, \\ \phi &= \varphi - \beta. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Из системы (3.68) следует, что величина  $B$ , которая зависит только от силы связи и среднего поля, играет роль *параметра макроскопической возбудимости*. Микроскопическая структура стационарного состояния самоорганизуется таким образом, что ансамбль разделяется на две группы в соответствии с соотношением между соответствующими собственными частотами  $\omega_i$  и параметром  $B$ . Одна группа состоит из ротаторов в состоянии покоя, собственные частоты которых удовлетворяют  $|\omega| < B$ . Другая группа состоит из вращающихся элементов, собственные частоты которых удовлетворяют  $|\omega| > B$ . Анализ динамики уравнения из (3.69) показывает, что для  $|\omega| < B$  существу-

ют два стационарных состояния, задаваемые формулами

$$\begin{aligned} r^*(\omega) &= 1, \\ \phi^*(\omega) &= \arcsin \frac{\omega}{B}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

и

$$\begin{aligned} r^*(\omega) &= 1, \\ \phi^*(\omega) &= \pi - \arcsin \frac{\omega}{B}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

при этом устойчиво только решение (3.70). Для блоков внутри вращающейся группы  $|\omega| > B$  единственное состояние равновесия определяется как

$$\begin{aligned} r^*(\omega) &= \frac{|\omega|}{B} - \sqrt{\frac{\omega^2}{B^2} - 1} \\ \phi^*(\omega) &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \omega. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Чтобы полностью определить стационарные решения уравнения Отта-Антонсена (3.66), необходимо получить явное выражение для параметра макроскопической возбудимости  $B$ . Для этого используем уравнение самосоглашения (3.67). Применяя последнее к стационарному состоянию  $z^*(\omega) = r^*(\omega)e^{i\phi^*(\omega)+i\beta}$ , заданному через (3.70) и (3.72), получим

$$\begin{aligned} \rho e^{i(\psi-\beta)} &= \frac{i\Omega}{B} + \int_{|\omega|<B} d\omega g(\omega) \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{B^2}} - \\ &- \frac{i}{B} \int_{|\omega|>B} d\omega g(\omega) \omega \sqrt{1 - \frac{B^2}{\omega^2}}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

где  $\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega g(\omega) d\omega$  задает среднюю частоту ансамбля. Разделив действительную и мнимую части (3.73) и после некоторых преобразований, в

конечном итоге приходим к уравнению самосогласования для  $B$ :

$$f(B) = B^2 - a^2 - 2K(f_1(B) \sin \alpha + f_2(B) \cos \alpha) + K^2 \frac{f_1^2(B) + f_2^2(B)}{B^2} = 0, \quad (3.74)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(B) &= \Omega - \int_{|\omega| > B} d\omega g(\omega) \omega \sqrt{1 - \frac{B^2}{\omega^2}}, \\ f_2(B) &= \int_{|\omega| < B} d\omega g(\omega) \sqrt{B^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Заметим, что аналогичное выражение было получено в [193], но только для частного случая  $a = 1, \alpha = 0$ . Полученные результаты применимы для произвольного распределения собственных частот  $g(\omega)$ . Чтобы провести явный анализ устойчивости стационарных состояний, включая определение бифуркационных границ и характеров переходов между различными коллективными режимами, рассмотрим далее частный случай равномерного распределения частот на ограниченном интервале  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ :

$$g(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_1, \\ \gamma, & \omega_1 < \omega < \omega_2, \\ 0, & \omega > \omega_2, \end{cases} \quad (3.76)$$

где  $\gamma = 1/(\omega_2 - \omega_1)$  получается из условия нормализации. Данное распределение характеризуется средним значением  $\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  и шириной  $\Delta = \omega_2 - \omega_1$ . Преимущество такого выбора частотного распределения состоит в том, что он позволяет вычислить в явном виде интегралы в уравнении самосогласования

(3.75) для параметра макроскопической возбудимости:

$$f_1(B) = \begin{cases} \Omega - \gamma(F_1(\omega_2) - F_1(\omega_1)), & B < \omega_1, \\ \Omega - \gamma F_1(\omega_2), & \omega_1 < B < \omega_2, \\ \Omega, & B > \omega_2, \end{cases} \quad (3.77)$$

где

$$F_1(\omega) = \frac{|\omega|}{2} \sqrt{\omega^2 - B^2} + \frac{B^2}{2} \ln \frac{B}{|\omega| + \sqrt{\omega^2 - B^2}}, \quad (3.78)$$

и

$$f_2(B) = \begin{cases} 0, & B < \omega_1, \\ \gamma(\frac{\pi}{4}B^2 - F_2(\omega_1)), & \omega_1 < B < \omega_2, \\ \gamma(F_2(\omega_2) - F_2(\omega_1)), & B > \omega_2, \end{cases} \quad (3.79)$$

with

$$F_2(\omega) = \frac{|\omega|}{2} \sqrt{B^2 - \omega^2} + \frac{B^2}{2} \arcsin \frac{\omega}{B}. \quad (3.80)$$

Для анализ устойчивости стационарных решений уравнения Отта-Антонсена (3.66). проведем линеаризацию уравнения для вариаций около стационарного решения (3.70) - (3.72). Заметим, что для анализа устойчивости необходимо переписать систему в реальных переменных для исключения влияния комплексного сопряжения [258, 259]. Введем обозначения  $z(\omega, t) = x(\omega, t) + iy(\omega, t)$  и  $R(\omega, t) = X(\omega, t) + iY(\omega, t)$  для локального и

глобального параметров порядка, тогда (3.66) сводится к системе

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= F(x, y, X, Y) = \frac{a}{2}(y^2 - x^2 + 1) - \omega y - \\
 &\quad - Kxy(Y \cos \alpha - X \sin \alpha) - \frac{K}{2}(X \cos \alpha + Y \sin \alpha) \cdot \\
 &\quad \cdot (x^2 - y^2) + \frac{K}{2}(X \cos \alpha + Y \sin \alpha) \\
 \dot{y} &= G(x, y, X, Y) = -axy + \omega x - Kxy(Y \sin \alpha + X \cos \alpha) + \\
 &\quad + \frac{K}{2}(Y \cos \alpha - X \sin \alpha)(x^2 - y^2) + \\
 &\quad + \frac{K}{2}(Y \cos \alpha - X \sin \alpha). \tag{3.81}
 \end{aligned}$$

Тогда линеаризованное уравнение для возмущений  $\xi = (\delta x, \delta y)^T, \Xi = (\delta X, \delta Y)^T$  стационарного решения  $(x_0, y_0)$  в этом случае можно кратко записать в матричной форме как

$$\frac{d\xi(\omega, t)}{dt} = A(\omega)\xi(\omega, t) + B(\omega)\Xi(t), \tag{3.82}$$

где матрицы производных

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad B(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial G}{\partial X} & \frac{\partial G}{\partial Y} \end{pmatrix}. \tag{3.83}$$

Подставляя возмущения в виде  $\xi(\omega, t) = \xi(\omega)e^{\lambda t}$ , а также  $\Xi(t) = \Xi e^{\lambda t}$ , из (3.82) получим

$$(A(\omega) - \lambda I)\xi(\omega) + B(\omega)\Xi = 0, \tag{3.84}$$

где  $I$  обозначает единичную матрицу. Как показано в [258], непрерывный спектр Ляпунова состоит из собственных значений матрицы  $B(\omega)$  для всех  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ . В нашем случае непрерывный спектр оказывается всегда устойчивым или чисто мнимым, так что устойчивость стационарных решений определяется дискретным спектром. Чтобы получить дискретный спектр, мы

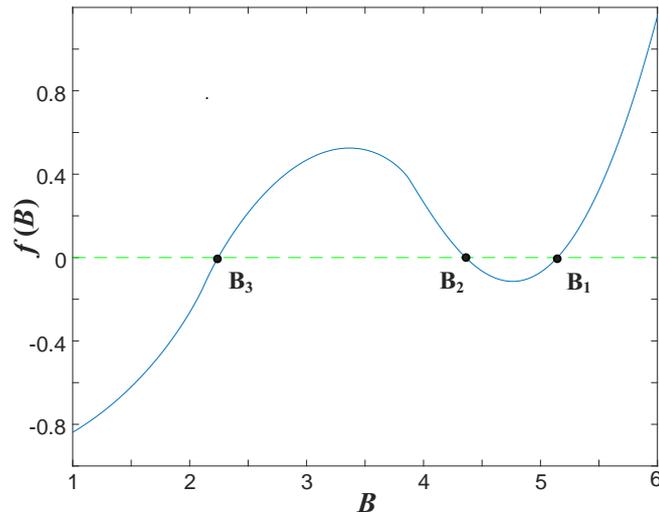


Рис. 3.13. Типичная форма функции  $f(B)$  и три решения  $B_1 > B_2 > B_3$  уравнения самосогласованности (3.74). Параметры системы:  $a = 1$ ,  $K = 5$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\Omega = 0.87$  and  $\Delta = 6$ .

умножим (3.84) слева на  $g(\omega)(A(\omega) - \lambda I)^{-1}$  и проинтегрируем по  $\omega$ , получив  $C(\lambda)\Xi = 0$ , где

$$C(\lambda) = I + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega g(\omega)(A(\omega) - \lambda I)^{-1} B(\omega). \quad (3.85)$$

Дискретный спектр может быть вычислен путем численного решения системы  $\det C(\lambda) = 0$ .

Заметим, что в случае ненулевой задержки  $\tau$  может быть применен тот же анализ с заменой  $X$  и  $Y$  в правой части (3.81) на запаздывающие переменные  $X(t - \tau)$  и  $Y(t - \tau)$ . Это приводит к той же матрице  $C(\lambda)$  как в (3.85), только с заменой  $B(\omega)$  на  $B(\omega)e^{-\lambda\tau}$ .

**3.3.3. Бифуркационный анализ коллективной динамики.** На основе полученных результатов для формы и устойчивости стационарных решений проведем подробный бифуркационный анализ системы. Прежде всего

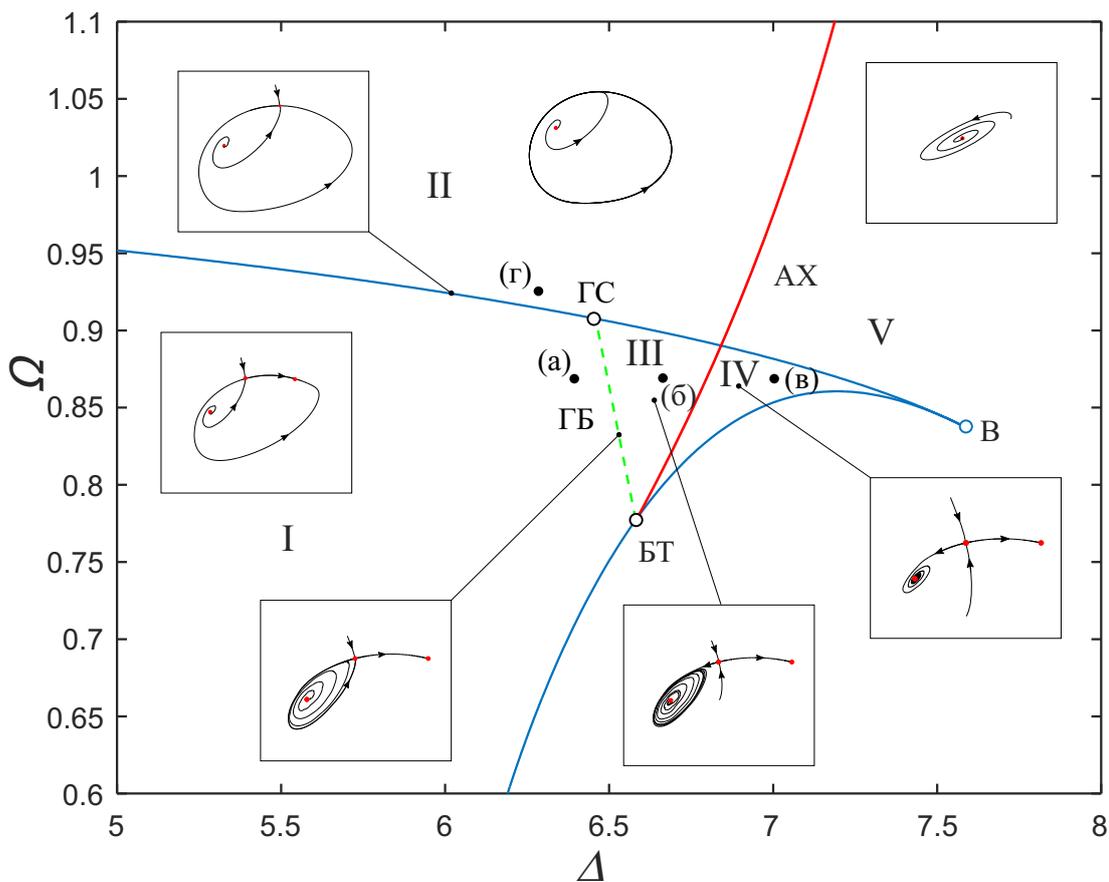


Рис. 3.14. Бифуркационная диаграмма на плоскости  $(\Omega, \Delta)$ , построенная методом анализа локальной устойчивости. Остальные параметры системы зафиксированы как  $a = 1$ ,  $K = 5$ ,  $\alpha = 0$ . Две ветви бифуркаций седло-узла (синие сплошные линии) исходят из точки трехкратного равновесия (В). Из точки Богданова-Тakens (БТ) исходят бифуркационная кривая Андронова-Хопфа (АХ), обозначенная красной сплошной линией, и ветвь бифуркации петли сепаратрисс седла (ГБ), показанная зеленой пунктирной линией. Верхняя ветвь седло-узловой бифуркации пересекает ГБ в точке гомоклинической складки (ГС). Жирными точками отмечены значения параметров, связанных с временным рядом на Рис. 3.15.

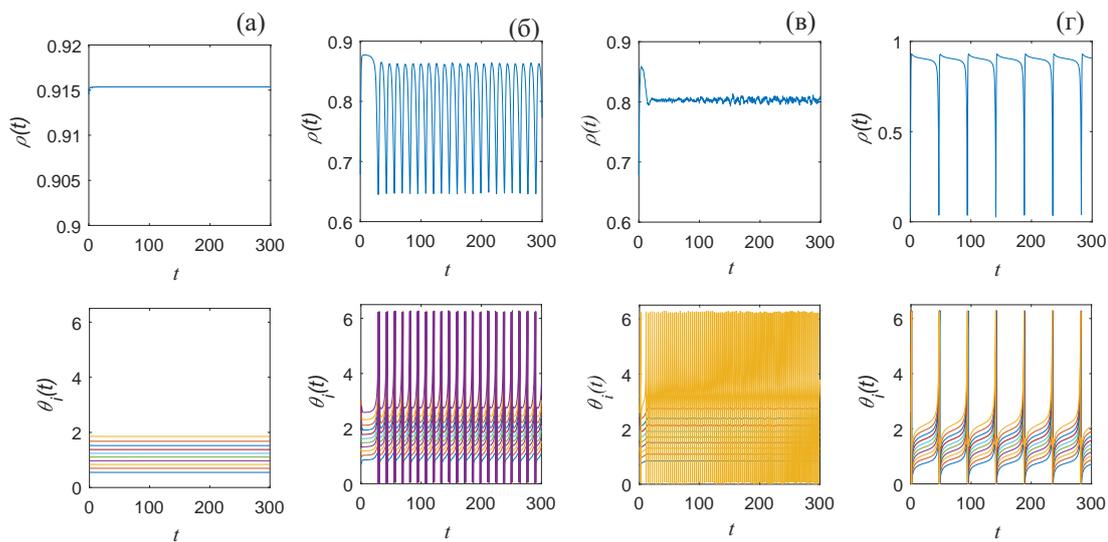


Рис. 3.15. Локальная и коллективная динамика в пределах характерных областей параметров, указанных на Рис. 3.14. В верхней строке приведены примеры временных рядов  $\rho(t) = |R(t)|$ , а в нижней строке показаны соответствующие локальные временные ряды  $\theta_i(t)$ , нормированные на  $2\pi$ . Конкретные значения параметров частотного распределения (обозначены жирными точками на Рис. 3.14): (а)  $(\Omega, \Delta) = (0.87, 6.64)$ , (б)  $(\Omega, \Delta) = (0.87, 6.76)$ , (в)  $(\Omega, \Delta) = (0.87, 7)$ , (г)  $(\Omega, \Delta) = (0.93, 6.6)$ .

Остальные параметры те же, что и на Рис. 3.14.

заметим, что число стационарных решений уравнения Отта-Антонсена зависят от числа решений уравнения самосогласования (3.74) для параметра  $B$ . Типичный вид функции  $f(B)$  показан на Рис. 3.13. Три корня  $f(B)$ , обозначенные  $B_1 > B_2 > B_3$ , соответствуют трем различным стационарным решениям уравнения Отта-Антонсена (3.66). Анализ показал, что макроскопический режим, связанный с  $B_1$ , представляет собой глобальное состояние покоя, поскольку параметр макроскопической возбудимости настолько велик, что частоты всех элементов лежат ниже него. Учитывая его микроскопическую структуру, в которой локальная динамика является исключительно возбудимой, это состояние также можно назвать однородным стационарным состоянием. Соответствующий временной ряд  $\theta_i(t)$  и эволюция модуля параметра порядка Курамото  $\rho(t) = |R(t)|$  показаны на Рис. 3.15(а). Ниже мы покажем, что глобальное состояние покоя может исчезнуть через седло-узловую бифуркацию. В отличие от макроскопического режима, задаваемого  $B_1$ , стационарное состояние, соответствующее  $B_3$ , обычно является неоднородным, включающим как покоящиеся ( $|\omega_i| < B_3$ ), так и колеблющиеся ( $|\omega_i| > B_3$ ) элементы, см. пример временного ряда на Рис. 3.15(в). В [193] неоднородное стационарное состояние упоминается как асинхронное, потому что колебательная активность наблюдается лишь на уровне отдельных элементов, но колебания среднего поля отсутствуют. Неоднородное состояние, как более подробно показано ниже, может претерпевать либо седлоузловую бифуркацию складки, либо бифуркацию Андронова-Хопфа. Стационарное состояние, связанное с  $B_2$ , соответствует седлу и может претерпевать седлоузловую бифуркацию либо с  $B_1$ , либо  $B_3$ .

На бифуркационной диаграмме на Рис. 3.14 показано, как изменяется ко-

личество и устойчивость стационарных решений уравнения Отта-Антонсена (3.66) при изменении параметров частотного распределения  $\Omega$  и  $\Delta$ . Диаграмма включает пять характерных областей и организована вокруг трех точек бифуркации коразмерности 2, а именно (а) точки трехкратного равновесия, в которой сходятся две линии седлоузловых бифуркаций, (б) точки Богданова-Тakensа, в которой сходятся бифуркационные линии Андронова-Хопфа и петли сепаратрис седла, и (в) точка вырожденной петли сепаратрис седла, где ветвь седло-узловых бифуркаций пересекает кривую петли сепаратрис коразмерности один. Верхняя и нижняя ветви седлоузловых бифуркаций соответствуют слиянию состояния  $B_2$  с  $B_1$  и  $B_3$  соответственно. Верхняя / нижняя ветвь была получена путем нахождения параметров, при которых локальный минимум / максимум функции  $f(B)$  пересекает нулевой уровень. Кривая бифуркации Андронова-Хопфа была определена путем анализа локальной устойчивости стационарного состояния  $B_3$ . Заметим, что локальный анализ не позволяет найти ветвь петли сепаратрис, однако ее существование следует из общей структуры бифуркации Богданова-Тakensа [307, 327].

Далее мы предоставляем подробное описание режимов в областях параметров I-V, приводя соответствующие фазовые портреты (Рис. 3.14) и выявляя бифуркации на границах различных режимов. В точке бифуркации вилки (В) две ветви бифуркаций седло-узел сливаются, см. две синие сплошные линии на Рис. 3.14. Из стационарных состояний  $B_1 - B_3$  на Рис. 3.13 справа от точки В существует только устойчивая неподвижная точка  $B_2$ . После бифуркации вилки  $B_2$  становится седлом, тогда как возникают два устойчивых узла,  $B_1$  и  $B_3$ . Область параметров, допускающая только одно устойчивое стационарное состояние, будь то  $B_1, B_2$  или  $B_3$ , обозначена как

$V$  на Рис. 3.14. С уменьшением ширины распределения  $\Delta$  состояние  $B_1$  претерпевает только седло-узловую бифуркацию, тогда как  $B_3$  испытывает бифуркации седло-узла и Андронова-Хопфа, возникающие в точке Богданова-Такенса (БТ). Вдоль нижней ветви седлоузловой бифуркации сливаются и исчезают  $B_2$  и  $B_3$ , так что справа от этой кривой и до точки  $B$  единственным устойчивым стационарным состоянием системы является узел  $B_1$ . Бифуркационная кривая Андронова-Хопфа, исходящая из точки БТ, изменяет устойчивость стационарного состояния  $B_3$ , так что оно становится неустойчивым при уменьшении  $\Delta$ . Это означает, что внутри области  $IV$ , ограниченной кривой Андронова-Хопфа справа и двумя кривыми седло-узла слева, наблюдается *бистабильность между двумя стационарными состояниями*, а именно стабильным узлом  $B_1$  и устойчивым фокусом  $B_3$ , которые разделены устойчивым многообразием седла  $B_2$ , ср. соответствующий фазовый портрет на Рис. 3.14. При уменьшении  $\Delta$  состояние  $B_3$  претерпевает суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа (АХ), в результате чего слева от кривой (область  $III$ ) возникает *бистабильность между предельным циклом и устойчивым узлом  $B_1$* . Временные ряды, иллюстрирующий микроскопическую и макроскопическую динамику колебательных состояний для  $(\Omega_1, \Delta_1) = (0.87, 6.76)$ , представлены на Рис. 3.15(б).

В соответствии со сценарием Богданова-Такенса, предельный цикл, порожденный бифуркацией Андронова-Хопфа, дестабилизируется посредством гомоклинической бифуркации седла  $B_2$ , см. зеленую пунктирную линию ГБ на Рис. 3.14. Данная бифуркация является нелокальной и не может быть изучена аналитически, однако исчезновение предельного цикла наблюдалось численными методами. Кривая ГБ заканчивается в точке гомоклинической

складки (ГС), где она соединяется с верхней ветвью седло-узловой бифуркации. В точке ГС устойчивое многообразие седла  $B_2$  касается инвариантной окружности. При дальнейшем уменьшении  $\Delta$  в области I система имеет устойчивый узел  $B_1$  и две неустойчивые точки: седло  $B_2$  и неустойчивый фокус  $B_3$ .

На верхней ветви седло-узла при увеличении  $\Delta$  устойчивый узел  $B_1$  и седло  $B_2$  сливаются и исчезают. Для значений  $\Delta$  меньше, чем в точке ГС, седло-узловая бифуркация происходит на инвариантной окружности, что приводит к возникновению предельного цикла, и система демонстрирует переход к макроскопическому колебательному состоянию. Последняя характеризуется синхронными локальными колебаниями большого периода, ср. временной ряд на Рис. 3.15(г). Для многообразий справа от точки ГС седло-узловая бифуркация  $B_1$  и  $B_2$  не происходит на инвариантной окружности, и единственный аттрактор в области VI соответствует небольшому предельному циклу, возникающему в результате дестабилизации  $B_3$ . При увеличении  $\Delta$  состояние  $B_3$  стабилизируется через обратную бифуркацию Андронова-Хопфа.

**3.3.4. Классические и гистерезисные переходы между коллективными режимами.** Охарактеризовав все режимы макроскопической активности и их области устойчивости, сосредоточимся на сценариях, ведущих к возникновению и подавлению коллективных колебаний. Согласно классической парадигме [193], систематическое увеличение разнообразия (ширины распределения  $\Delta$ ) при фиксированной средней частоте вызывает последовательность переходов между тремя режимами коллективной динамики, а именно состояние глобального покоя, синхронное состояние (соответствующее

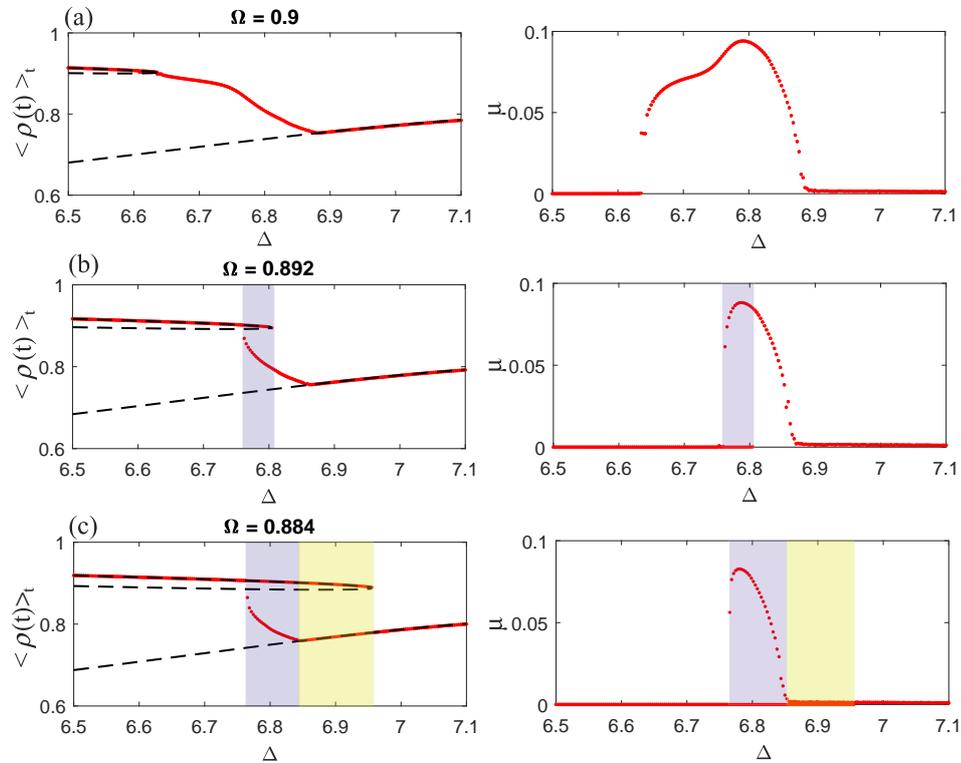


Рис. 3.16. Характерные последовательности переходов между различными макроскопическими режимами при увеличивающемся разнообразии для фиксированного значения  $\Omega$ . Состояния описываются усредненным по времени модулем параметра порядка Курамото  $\langle \rho(t) \rangle_t$  (левый столбец) и соответствующей дисперсией  $\mu$  (правый столбец). Средние частоты равны (а)  $\Omega = 0.9$ , (б)  $\Omega = 0.892$  и (в)  $\Omega = 0.884$ . Классический сценарий переходов проиллюстрирован на (а), тогда как два гистерезисных сценария, включающие прохождение одной или двух областей бистабильности, изображены на (б) и (в).

щее макроскопическим колебаниям) и асинхронное состояние (неоднородное состояние, демонстрирующее смешанную возбудимую и колебательную локальную динамику). Настоящее исследование показывает, что помимо этого существуют два других общих сценария переходов, включающих *гистерезисное поведение*. Для иллюстрации данных сценариев изобразим, как усредненный по времени модуль среднего поля Курамото  $\rho(t) = |R(t)|$  и соответствующая дисперсия  $\mu = \sqrt{\langle \rho^2 \rangle_t - \langle \rho \rangle_t^2}$  изменяется при изменении ширины  $\Delta$  для трех характерных средних частот  $\Omega \in \{0.9, 0.892, 0.884\}$ , см. Рис. 3.16. Чтобы выявить потенциальное бистабильное поведение, проведем последовательное увеличение и уменьшение  $\Delta$  с применением метода численного продолжения решений.

Классическая последовательность переходов наблюдается при  $\Omega = 0.9$ , см. Рис. 3.16(а). Коллективные колебания возникают через бифуркацию петли сепаратрисс седло-узла, в которой происходит переход от однородного стационарного состояния  $B_1$  к периодическому решению. Прекращение коллективных колебаний происходит через обратную бифуркацию Андронова-Хопфа, которая стабилизирует неоднородное стационарное состояние  $B_3$ , что аналогично сценарию типа Курамото, где система десинхронизируется при возрастающем беспорядке. Для  $\Omega = 0.892$  установлен сценарий гистерезисного перехода, возникающий при прохождении через область бистабильности III на Рис. 3.14, и характеризующийся сосуществованием однородного стационарного состояния  $B_1$  и периодического решения, возникшего из  $B_3$ , ср. Рис. 3.16(б). В этом случае возникновение коллективных колебаний происходит через бифуркацию Андронова-Хопфа, а их исчезновение – через петлю сепаратрисс седла. При  $\Omega = 0.884$  последовательность переходов остается

гистерезисной, но становится более сложной, см. Рис. 3.16(в). В частности, при увеличении ширины система проходит через две области бистабильности, обозначенные III и IV на Рис. 3.14. В то время как первая область качественно такая же, как для  $\Omega = 0.892$ , во второй области сосуществуют два стационарных состояния  $B_1$  и  $B_3$ . Тем не менее, возникновение и подавление коллективных колебаний происходит по тому же сценарию, что и на Рис. 3.16(б). Отметим, что описанные переходные последовательности наблюдаются, если средняя частота  $\Omega$  достаточно велика.

Чтобы продемонстрировать общность описанных сценариев и подтвердить теоретические предсказания относительно областей параметров, поддерживающих коллективные колебания, мы провели обширное численное исследование динамики системы с изменением параметров  $\Delta$  и  $\Omega$ , см. Рис. 3.18. В частности, было выполнено двунаправленное сканирование по обоим параметрам с использованием метода численного продолжения решений. Это позволило разделить плоскость  $(\Omega, \Delta)$  на различные области в соответствии с количеством и типом поддерживаемых аттракторов. Сравнение границ этих областей с бифуркационными кривыми на Рис. 3.14, которые показаны наложенными друг на друга, подтверждает согласие между теорией и численными результатами.

Также было проверено, сохраняется ли качественная картина, описанная выше, при изменении силы связи  $K$ . Показано, что общая структура бифуркаций качественно сохраняется, что указывает на общность сценариев, лежащих в основе переходов между различными коллективными режимами. Тем не менее, можно отметить, что при увеличении силы связи все бифуркационные кривые смещаются в сторону увеличения  $\Delta$ .

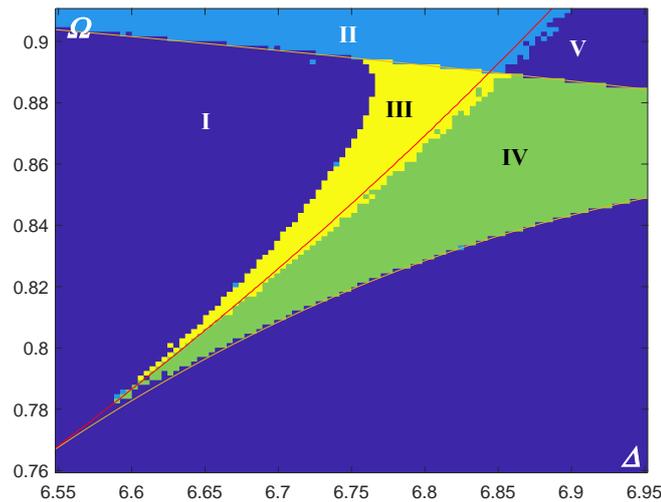


Рис. 3.17. Плоскость параметров  $(\Delta, \Omega)$  разделена на области с различной макроскопической динамикой: моностабильное стационарное состояние (синий, области I и V), моностабильный предельный цикл (голубой, область II), бистабильность с двумя сосуществующими стационарными состояниями (зеленый, область IV) и бистабильность между стационарным состоянием и предельным циклом (желтый, область III). Значения параметров такие же, как на Рис. 3.14. На рисунок наложены соответствующие бифуркационные кривые, полученные аналитически в рамках Отга-Антонсена.

Заметим, что физическая картина, описанная выше для случая без задержки, качественно сохраняется и при наличии небольшой задержки связи, значения которой значительно меньше типичного периода локальных колебаний. Эффекты малой задержки связи проиллюстрированы на Рис. 3.18(a), на котором показаны характерные области макроскопического поведения в плоскости  $(\Omega, \Delta)$  для задержки  $\tau = 0.3$ . Наблюдается хорошее соответствие между бифуркационными кривыми, полученными аналитически с помощью локального анализа устойчивости, и численно наблюдаемыми границами областей. Очевидно, что введение задержки связи не влияет на координаты

стационарных состояний уравнения Отта-Антонсена (3.66), что означает, что ветви седло-узловых бифуркаций остаются неизменными. Ключевой эффект задержки заключается в том, что бифуркация Андронова-Хопфа состояния  $B_3$ , лежащая в основе одного из сценариев возникновения колебательного режима, смещается в сторону меньшего разнообразия  $\Delta$  по сравнению со случаем без задержки. Это означает, что задержка способствует мультистабильному поведению в том смысле, что область бистабильности IV, характеризующаяся сосуществованием между стабильными стационарными состояниями  $B_1$  и  $B_3$ , становится шире. С другой стороны, последнее также предполагает, что задержка связи способствует возникновению коллективных колебаний за счет дестабилизации стационарного состояния  $B_3$ , но подавляет сценарий, в котором  $B_1$  и  $B_2$  подвергаются бифуркации петли сепаратрисс седлоузла. На Рис. 3.18(б) явно показано, как критическое значение  $\Delta_H$ , связанное с бифуркацией Андронова-Хопфа, уменьшается с ростом  $\tau$ .

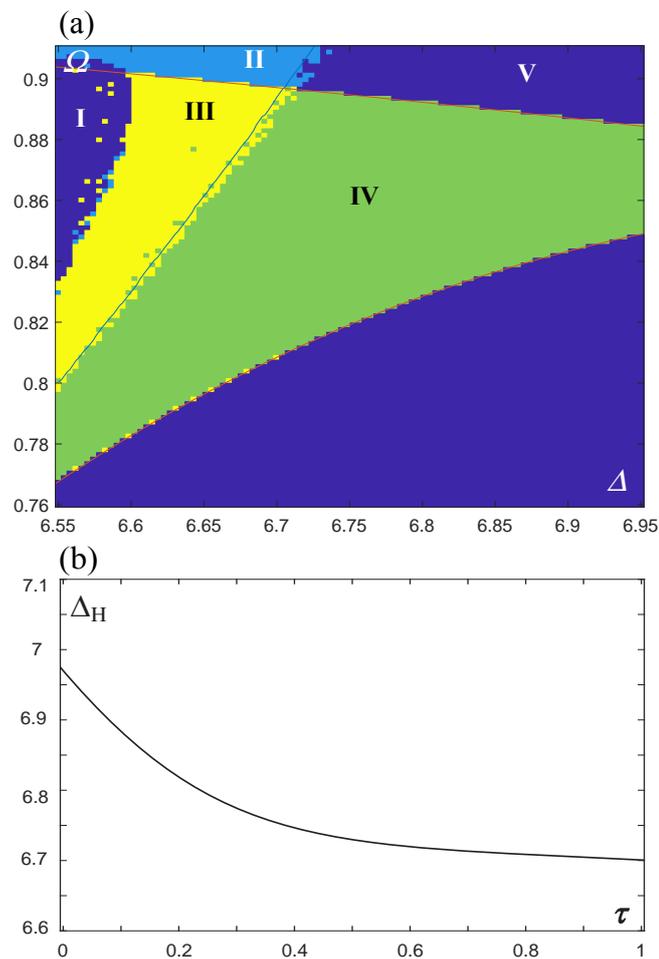


Рис. 3.18. (а) Характерные области макроскопического поведения в плоскости  $(\Omega, \Delta)$  для задержки связи  $\tau = 0.3$ . Цветовая кодировка, а также остальные параметры системы такие же, как на Рис. 3.17. Наложены бифуркационные кривые, полученные с помощью подхода локальной устойчивости, описанного в Приложении. (б) Критическая величина  $\Delta_H$ , соответствующая дестабилизации состояния  $B_3$  в зависимости от  $\tau$  при фиксированном  $\Omega = 0.88$ .

### 3.4. Заключение к третьей главе

В настоящей главе проведено исследование коллективной динамики больших сетей с импульсными связями. Поведение таких систем зависит от совокупности нескольких факторов, а именно локальной динамики составляющих сеть узлов, свойств межузловых соединений и структуры связей в сети. Проведено исследование особенностей коллективной динамики сети в зависимости от всех этих факторов, а именно, рассмотрено влияние неоднородности локальных параметров узлов, временного запаздывания в связях и различных типов топологии соединений.

В разделе 3.1 для кольцевой сети с однонаправленными связями показано, что ее динамика глубоко связана с динамикой одного элемента с запаздывающей обратной связью, а именно:

1) Периодические решения периода  $T$  одиночного элемента с запаздыванием  $\tau$  могут возникать как вращающиеся волны в кольце при величинах задержки связи  $\sigma = \tau - MT/N + kT$ , где  $k \in \mathbb{Z}$  и  $M = 0, \dots, N - 1$  – волновое число вращающейся волны.

2) В частном случае, когда период рационально связан с задержкой как  $\tau = MT/N$ , периодическое решение возникает в виде волны в кольце с мгновенными связями  $\sigma = 0$ .

3) Устойчивость вращательных волн в кольце при больших задержках.  $\sigma$  эквивалентна устойчивости соответствующего периодического решения в одиночном осцилляторе для больших запаздываний  $\tau$ .

4. При большом количестве  $N$  элементов в кольце устойчивость волны при  $\sigma = 0$  совпадает с устойчивостью соответствующего периодического решения

для  $\tau \rightarrow \infty$ . Для малых  $N$ , устойчивость периодического решения для  $\tau \rightarrow \infty$  является необходимым условием устойчивости волны при  $\sigma = 0$ .

Полученные результаты, в частности, обозначают, что наблюдаемые динамические режимы в системах с задержками можно также наблюдать в системах без задержек, но с кольцевой топологией. В качестве примера такого соответствия были рассмотрены «дрожащие» режимы в генераторах с импульсной обратной связью. Показано, что эти режимы в общем случае могут наблюдаться как дрожащие вращающиеся волны в кольцах генераторов с импульсной связью без задержек.

В разделе 3.2 для колебательной сети с топологией связей «каждый с каждым» была исследована глобальная синхронизация в случае импульсных связей с задержкой. Был получен аналитический критерий устойчивости глобальной синхронизации. При слабой связи устойчивость глобальной синхронизации зависит от крутизны кривой переустановки фазы отдельного автогенератора в фазе получения импульсов. Задержка связи определяет эту фазу и поэтому сильно влияет на синхронизацию: для одного и того же кривой переустановки фазы сеть может синхронизироваться для одних значений задержки и десинхронизироваться для других. В принципе, для случая монотонно убывающей кривой переустановки фазы синхронизация устойчива при произвольной ненулевой задержке (ср. [51]). Другой важный момент состоит в том, что для синхронизации важен только наклон, но не значение или даже знак кривой переустановки фазы, поэтому как возбуждающая, так и тормозная связь может привести к синхронизации.

По мере увеличения силы связи границы зон синхронизации изменяются. Для умеренной связи фактическое положение границ адекватно предска-

вается линейным приближением. Ширина зон синхронизации расширяется с увеличением силы связи, и это свойство является общим для импульсной и непрерывной связи [88, 389]. Дестабилизация глобальной синхронизации порождает сложные длительные или квазипериодические колебания сети, названные «проскальзываниями фазы». Частота проскальзываний падает до нуля по мере приближения системы к границе зоны синхронизации. По мере удаления параметров от бифуркации частота растет, и соответствующие колебания могут стать нерегулярными или дестабилизировать. Описанные режимы тесно связаны с известной гетероклинической динамикой, проявляющейся в последовательном прохождении различных седловых состояний в фазовом пространстве системы [6, 19, 178, 191, 294]. Существенное отличие состоит в том, что в данном случае система последовательно повторно посещает одно и то же синхронизированное состояние, ср. [392]. Специфика бифуркации, порождающей проскальзывания фаз, заключается в ее высокой вырожденности, проявляющейся в одновременной дестабилизации всех возможных направлений в фазовом пространстве. Действительно, синхронное решение становится неустойчивым по отношению к любому возмущению, что приводит к появлению большого числа гомоклинических петель. Возможность столь сильного вырождения связано с высокой симметрией сети с идентичными элементами и связями.

В разделе 3.3 изучено влияние неоднородности внутренних параметров на динамику сети. Для этого была рассмотрена неоднородная популяция активных ротаторов, демонстрирующих возбудимую или колебательную локальную динамику. Были классифицированы макроскопические режимы сети и описаны сценарии возникновения и подавления коллективных синхронных

колебаний. Исследование проводилось в рамках теории Отта-Антонсена, что позволило определить три макроскопических стационарных состояния при произвольном распределении локальных параметров. Были выделены однородное состояние равновесия, в котором все элементы находятся в состоянии покоя, и неоднородное (смешанное) состояние, состоящее из элементов частично в возбуждимом, частично в колебательном режиме.

Была получена сложная бифуркационная структура, определяющая границы устойчивости различных макроскопических режимов, организованная вокруг трех точек коразмерности два: точка Богданова-Тakensа, трехкратное равновесие и гомоклиническая складка. Анализ выявил существование пяти характерных областей параметров, три из которых поддерживают моностабильное коллективное поведение, а две допускают бистабильность, предполагающую либо сосуществование двух устойчивых стационарных состояний, либо сосуществование между стационарным и периодическим решением. Обнаружено, что в зависимости от средней частоты возникновение и подавление коллективного режима могут возникать по двум качественно различным сценариям. В частности, для малой средней частоты начало коллективных колебаний при уменьшении разброса частот происходит через бифуркацию Андронова-Хопфа, а их прекращение – через гомоклиническую бифуркацию. С другой стороны, при достаточно большой средней частоте увеличение разброса частот вызывает коллективные колебания через бифуркацию петли сепаратрис седло-узла, а подавление колебаний происходит через обратную бифуркацию Андронова-Хопфа. Структура бифуркаций сохраняется при введении небольшой задержки в связях.

Классическая последовательность переходов между коллективными ре-

жими в гетерогенных системах при увеличивающемся разброса параметров включает три характерных состояния, а именно состояние глобального покоя, синхронное состояние, характеризующееся макроскопическими колебаниями, и асинхронное состояние [193]. В дополнение к этому, в настоящей работе выявлено два новых сценария, которые являются гистерезисными и включают переход через одну или две бистабильные области. По первому сценарию переход из глобального состояния покоя в асинхронное состояние происходит через два бистабильных режима, первый из которых предполагает сосуществование периодического решения и состояния покоя, а второй – сосуществование между состоянием покоя и асинхронным состоянием. Второй гистерезисный сценарий аналогичен, но промежуточный этап включает только сосуществование между однородным и колебательным состояниями.

## ГЛАВА 4

### СРЕДНЕПОЛЕВАЯ ДИНАМИКА НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ С КЛАСТЕРНОЙ СТРУКТУРОЙ СИНАПТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

Настоящая глава посвящена исследованию динамики нейронных сетей со сложной, реалистичной структурой синаптических связей.

Структура нейронных связей определяет поток информации в нейронных сетях и, следовательно, имеет важное значение для их функционирования. Для нейронных сетей коры головного мозга характерны редкие синаптические связи [31, 149, 228, 229, 323, 342, 343] структура которых часто предполагается случайной [337]. Однако ряд недавних исследований выявил ряд особенностей структуры нейронных связей в кортикальных сетях, включая негауссовское распределение синаптических весов и неслучайные паттерны соединений [165, 180, 202, 228, 276, 326, 388, 390].

Первая обнаруженная особенность – это длинный тяжелый хвост в распределении возбуждающих постсинаптических потенциалов между кортикальными нейронами [157, 202, 326]. Это означает, что небольшое количество очень сильных связей в локальных корковых сетях несет существенную часть общего синаптического веса, в то время как большинство синапсов являются слабыми [23, 149]. Такое длиннохвостое (обычно логнормальное) распределение силы синапсов генерирует спонтанную реверберационную активность, оптимальную для спайковых коммуникаций посредством стохастического резонанса [339]. Вторая особенность – это существенно неслучайная структура синаптических связей между корковыми нейронами. Было показано, что статистика связей в корковых сетях сильно отличается от стати-

стихи случайных сетей как в локальном, так и в глобальном масштабе. В частности, нейроны, выбранные случайным образом из локальных корковых сетей, демонстрируют определенные паттерны или мотивы соединений, значительно чаще, чем если бы их связи были случайными [276, 289, 326]. Третья нетривиальная особенность – корреляция между паттернами связи и синаптическими весами: более сильные связи с большей вероятностью будут обнаружены между нейронами, принадлежащими определенным сетевым мотивам [276, 326]. Неслучайные паттерны синаптических связей создают дополнительную сложность в структуре и динамике нейронных сетей [56, 57, 114, 122, 148, 173, 209, 243, 255, 269, 281, 329, 395]. Однако точная структура связи корковых сетей остается неизвестной.

В разделе 4.1 настоящей главы предлагается модель структуры нейронных связей в локальных кортикальных сетях на основе их статистических характеристик, известных из экспериментов. Модель предполагает наличие в локальных сетях кластеров из плотно и сильно связанных нейронов, предсказывает типичный размер кластера и определяет статистическую взаимосвязь между связностью и весом связей. Изучена роль такой кластерной структуры в коллективной динамике как в небольшой сети с одним кластером, так и в крупномасштабной сети со многими кластерами. Показано, что кластеризация связей имеет решающее значение для генерации бистабильных состояний нейронов внутри кластера, которые, в свою очередь, создают богатый репертуар динамического поведения, потенциально полезного для различных типов памяти.

В следующих разделах данной главы коллективная динамика кластерных сетей исследуется более детально с помощью среднеполевого подхода, позво-

ляющего описывать активность сетей на макроскопическом уровне и взаимодействий нейронных популяций. С биологической точки зрения данный подход наиболее подходит для среднеуровневых (мезоскопических) популяций, таких как кортикальные колонки [245, 341]. Сети такого размера включают, с одной стороны, достаточно большое количество нейронов для применения аппарата статистической физики, а с другой стороны, достаточно малы, чтобы считать их однородными.

Среднеполевые подходы и ранее широко применялись к сетевым структурам, а также к пространственно распределенным нейронным системам [341, 341]. В основополагающих работах Wilson и Cowan [378], а также Amagi [9] использовался эвристический подход, позволяющий дать огрубленное описание динамики нейронных популяций. Подобные модели воспроизводят ряд важных динамических режимов, включая мультистабильность [9, 378], крупномасштабные колебания [43, 163, 300], бегущие фронты и импульсы [91, 105, 280], спиральные волны [194], а также пространственно локализованные колебания [104, 267]. В данной работе применяется другой подход, основанный на выводе среднеполевой модели из уравнений для микроскопической динамики отдельных нейронов популяции и позволяющий продемонстрировать, как колебания и флуктуации транслируются с уровня отдельного элемента на сетевой уровень.

Шум в нейронных системах может происходить как из, так и из внутренних источников [14, 100, 147, 234]. Внешний шум в основном возникает из-за случайных входных сигналов, поступающих от большого количества афферентных нейронов (синаптический шум), тогда как внутренний шум в основном связан со случайным открытием конечного числа ионных каналов (шум

ионных каналов). Вопрос о том, как шум от единичного уровня преобразуется в шум в макроскопическом масштабе, весьма нетривиален. Существует два подхода к построению стохастических среднеполевых моделей. Подход «сверху вниз» не учитывает деталей локальной динамики нейронов, что приводит к феноменологическим стохастическим моделям нейронного поля [32, 39, 40, 89, 101, 155, 341]. Построение стохастических моделей среднего поля «снизу вверх» в основном предпринималось для сетей нейронов «накопление и сброс» [36, 37, 120]. Hasegawa предложил метод построения таких моделей для реит-нейронов с произвольной передаточной функцией [145, 146], однако лишь для сетей со связями «каждый с каждым». Предлагаемый в настоящей главе подход, основанный на гипотезе Гауссового замыкания [112, 208, 391], позволяет получить модели для сетей с более биологически релевантной топологией связей. В разделе 4.2 этот подход применен для сетей с случайными редкими связями, а в разделе 4.3 – для сетей с кластерными связями.

Материалы четвертой главы опубликованы в работах [6A, 8A, 18A, 27A, 28A].

#### 4.1. Моделирование кластеризации синаптических связей в локальных кортикальных сетях

В настоящем разделе предложена модель структуры синаптических связей в локальных нейронных сетях зрительной коры головного мозга крыс размером порядка 100 мкм. На таких пространственных масштабах вероятность соединения между соседними нейронами не сильно зависит от расстояния между ними, поэтому в модели не учитывается пространственное положение нейронов. Самой простой и наиболее часто используемой моделью для редко связанных сетей является так называемая модель «случайной сети» [93], в которой вероятность соединений между двумя произвольно выбранными нейронами является постоянной. Однако экспериментальные наблюдения показывают, что локальная кортикальная сеть на масштабах 100 мкм уже демонстрирует неслучайные паттерны связности и тенденцию к кластеризации [276,326]. Поэтому была предложена модель так называемой «кластерной сети», в которой синаптические связи распределяются по сети неоднородно и образуют определенное количество кластерных групп нейронов. Также в сети присутствуют нейроны, которые не принадлежат ни к какому кластеру. Данная модель приводит к значительному отклонению статистических свойств кластерной сети от свойств случайной сети с той же средней вероятностью соединения.

**4.1.1. Модель кластерной сети.** Предлагаемая модель представляет собой как сеть из  $N$  нейронов, которая содержит  $K$  кластеров с  $M$  нейронами в каждом кластере. Заметим, что  $KM$  может быть меньше  $N$ , т.е. некоторые нейроны сети могут не принадлежать ни одному из кластеров. Ве-

роятность соединения двух нейронов равна  $c_2$ , если они принадлежат одному кластеру, и  $c_1$  в противном случае (если они принадлежат разным кластерам, или один из них или оба не принадлежат ни одному кластеру). Статистические свойства сети полностью определяются константами  $c_1$  и  $c_2$ , числом кластеров  $K$  и относительным размером кластера  $\beta = M/N$ . Также удобно определить коэффициент кластеризации  $\alpha = K\beta^2$ , который равен вероятности того, что два случайно выбранных нейрона принадлежат одному кластеру. Все остальные характеристики сети могут быть рассчитаны через эти параметры. Так, средняя связность, то есть вероятность того, что два случайно выбранных элемента связаны между собой, задается как

$$c = c_1 + \alpha(c_2 - c_1). \quad (4.1)$$

Вероятность того, что два нейрона будут взаимно связаны в случайной сети со связностью  $c$ , равна  $P_{R0} = c^2$ , тогда как в кластерной сети эта вероятность равна  $P_R = c_1^2 + \alpha(c_2^2 - c_1^2)$ . Это различие приводит к следующему коэффициенту, характеризующему перепредставленность взаимных связей в кластерной сети по отношению к случайной сети:

$$R = \frac{P_R}{P_{R0}} = 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left( \frac{c_2}{c} - 1 \right)^2. \quad (4.2)$$

Вероятность нахождения «треугольника», состоящего из трех нейронов, связанных друг с другом (взаимно или однонаправленно) в кластерной сети, складывается из вероятностей следующих трех случаев, где  $p_i$  – вероятность нахождения тройки нейронов соответствующего типа, а  $P_{iT}$  – вероятность того, что они образуют треугольник:

Случай 1. Никакие из трех нейронов не принадлежит одному кластеру:

$$p_1 = 1 - 3\frac{KM^2}{N^2} + 2\frac{KM^3}{N^3}, \quad P_{1T} = c_1^3(2 - c_1)^3. \quad (4.3)$$

Случай 2. Два нейрона принадлежат одному кластеру:

$$p_2 = 3\frac{KM^2(N - M)}{N^3}, \quad P_{2T} = c_2(2 - c_2)c_1^2(2 - c_1)^2. \quad (4.4)$$

Случай 3. Все три нейрона принадлежат одному кластеру:

$$p_3 = \frac{KM^3}{N^3}, \quad P_{3T} = c_2^3(2 - c_2)^3. \quad (4.5)$$

Все эти вероятности рассчитаны приблизительно для  $N, M \gg 1$ . Для расчета полной вероятности нахождения треугольника необходимо учесть все три типа троек:

$$P_T = c_1^3(2 - c_1)^3(1 - 3\alpha + 2\alpha\beta) + 3\alpha c_2 c_1^2(1 - \beta)(2 - c_2)(2 - c_1)^2 + \alpha\beta c_2^3(2 - c_2)^3. \quad (4.6)$$

Эта вероятность, рассчитанная для кластерной сети, выше, чем вероятность  $P_{T0} = c^3(2 - c)^3$  нахождения треугольника в случайной сети со связностью  $c$ . Более того, перепредставленность треугольников не является следствием перепредставленности взаимных связей, которая сама по себе дала бы вероятность нахождения треугольника  $P_{T1} = c^3(2 - Rc)^3$ . Отношение  $T = P_T/P_{T1}$  задает коэффициент перепредставленности треугольных мотивов.

**4.1.2. Определение параметров модели из экспериментальных данных.** Определим параметры модели, при которых она может описать экспериментально наблюдаемые неслучайные свойства связности кортикальных сетей. Будем брать за основу экспериментальные данные о связности

локальных сетей в слое 5 зрительной коры головного мозга крысы [326], из которых следует, что средняя вероятность обнаружения синаптической связи между парой нейронов составляет  $c = 0.1157$ , коэффициент перепредставленности взаимных связей составляет  $R = 4.025$ , а коэффициент перепредставленности треугольников  $T = 2.73$ . Настраиваемыми параметрами модели являются вероятности  $c_1$  и  $c_2$ , количество кластеров  $K$  и коэффициент  $\alpha$ . Последние два параметра определяют относительный размер каждого кластера  $\beta = M/N = \sqrt{\alpha/K}$ . Сначала исследуем диапазон допустимых значений  $\alpha$ . Используя (4.2) и (4.2), выразим  $c_1$  и  $c_2$  как

$$c_{1,2} = c \left( 1 \mp \sqrt{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\mp 1}} \right), \quad (4.7)$$

где плюс или минус соответствует  $c_1$  или  $c_2$ . Очевидные условия  $0 \leq c_{1,2} \leq 1$  задают диапазон возможных значений  $\alpha$  как

$$\alpha_{\min} = \left[ \frac{(1/c - 1)^2}{R - 1} + 1 \right]^{-1}, \quad \alpha_{\max} = 1/R. \quad (4.8)$$

Экспериментально наблюдаемые значения  $c$  и  $R$  дают  $\alpha \in [0.05; 0.25]$ .

Теперь вычислим возможный диапазон значений  $\beta$ . С этой целью исследуем коэффициент перепредставленности треугольников  $T$  в зависимости от  $\alpha$  для различных фиксированных значений  $\beta$  (Рис. 4.1). График  $T(\alpha)$  смещается вверх по мере увеличения значения  $\beta$ , и целевое значение  $T = 2.73$  достигается в узком интервале  $\beta \in [0.156; 0.222]$ . Затем, учитывая интервалы  $\alpha$  и  $\beta$ , и принимая во внимание, что  $K = \alpha/\beta^2$  должно быть целым числом, и должно выполняться  $K\beta < 1$ , было найдено шесть возможных наборов значений параметров. Эти наборы соответствуют разному количеству кластеров  $K = 1...6$ . Размеры кластеров различны для каждого из наборов и

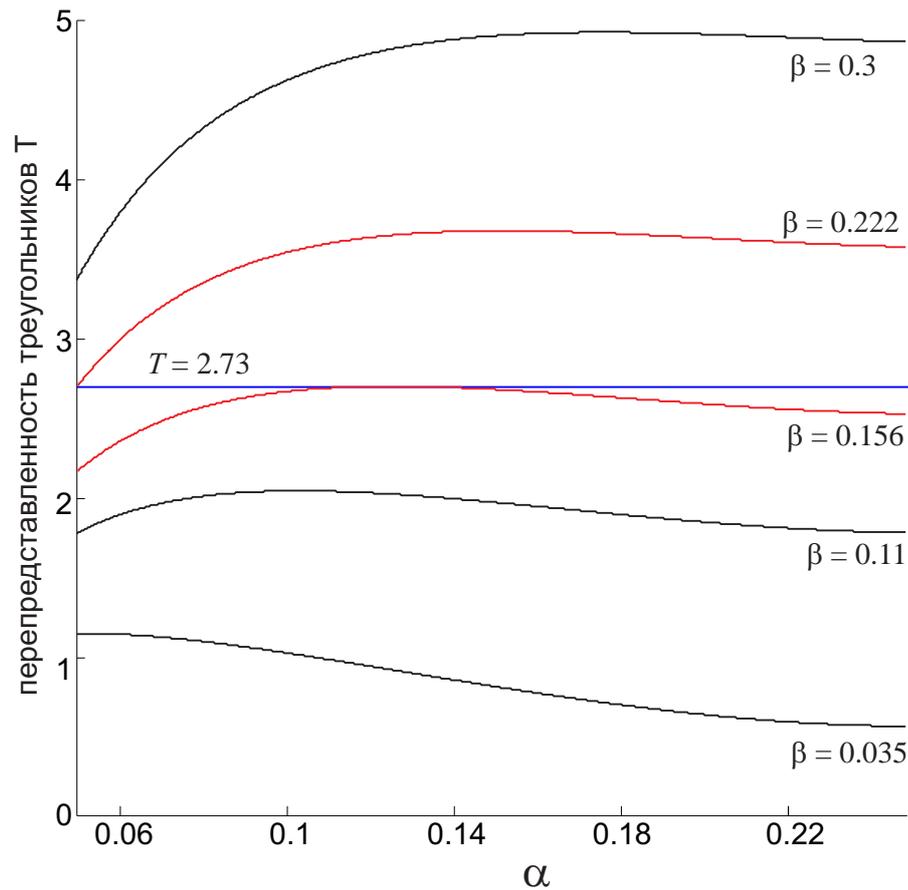


Рис. 4.1. Коэффициент перепредставленности треугольников  $T$  в зависимости от коэффициента кластеризации  $\alpha$  при фиксированном  $\beta$ .

варьируются в пределах  $\beta \in [0.16; 0.22]$ .

Остановимся теперь на распределении синаптических весов в сети. Веса связей описываются с помощью матрицы связности  $W$ , в которой элемент  $W_{ij}$  является нулевым при отсутствии связи нейрона  $i$  с нейроном  $j$ , а при наличии этой связи совпадает со ее весом. Ряд экспериментов показал, что амплитудное распределение весов связей в кортикальных сетях не гауссово, а ближе к логнормальному распределению с длинным хвостом, где среднее значение и дисперсия были определены как  $\mu = 0.702$  мВ и  $\sigma = 0.9355$  мВ соответственно [326]. Сходные распределения с тяжелыми хвостами известны

в соматосенсорной коре мышей [202] и гиппокампе крыс [157]. Кроме того, эксперименты показали, что синаптические веса положительно коррелируют с определенными мотивами связей, таких как взаимно связанные пары и нейронные треугольники. Как правило, более сильные связи группируются основано на наблюдении, что перепредставленность сильно связанных мотивов увеличивается с увеличением силы связей [276, 326].

Чтобы воспроизвести описанные экспериментально наблюдаемые свойства, мы предполагаем, что распределения синаптических весов различны для связей внутри и вне кластеров, где «внутри» означает соединение, связывающее два нейрона, принадлежащих к одному кластеру, а «вне» означает любую другую связь. Пусть распределения ненулевых синаптических весов описываются разными кумулятивными функциями распределения  $F_{1,2}(w) = \text{Pr}(W_{ij} < w)$ , где индексы 1 и 2 относятся к внешним и внутренним связям, соответственно. Тогда кумулятивная функция распределения синаптических весов в сети в целом определяется как

$$F(w) = F_1(w) + \frac{\alpha c_2}{c} (F_2(w) - F_1(w)) \quad (4.9)$$

Отсюда можно вычислить перепредставленность  $\rho(w)$  взаимных связей для синаптических связей, превышающих порог  $w$ , как

$$\rho(w) = \frac{k_1^2(w)(1 - \alpha) + k_2^2(w)\alpha}{k^2}, \quad (4.10)$$

где  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k$  – вероятности найти соединение  $> w$  вне кластеров, внутри кластеров и во всей сети, соответственно. Эти вероятности могут быть найдены как  $k_{1,2}(w) = c_{1,2}(1 - F_{1,2}(w))$  и  $k = k_1(1 - \alpha) + k_2\alpha$ . Поскольку  $F_{1,2}(0) = 0$ , при нулевом пороге получим  $\rho(0) = R$ . Если функции  $F(w)$  и  $\rho(w)$  определяются из экспериментальных данных, мы можем явно получить выражения

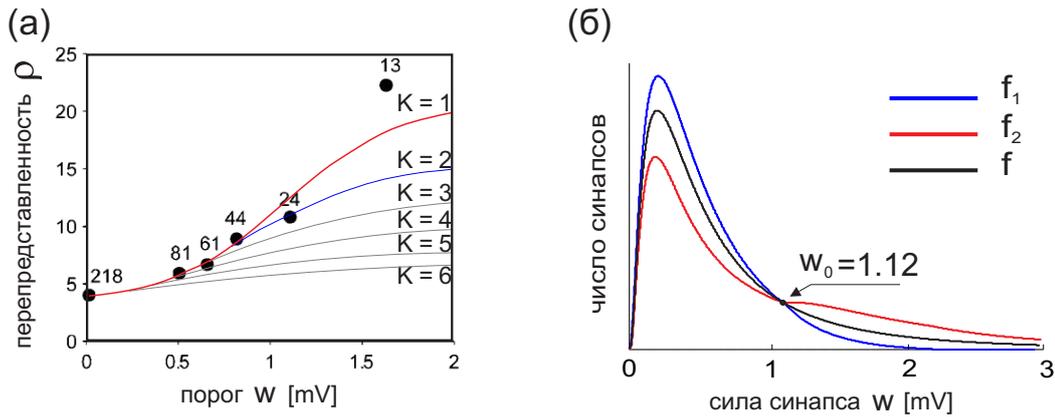


Рис. 4.2. (а) Экспериментально наблюдаемая зависимость перепредставленности взаимных связей и ее аппроксимация моделью для различных значений  $K$ . (б) Плотности вероятностей синаптических весов для  $K = 1$ :  $f_2(w)$  для соединений внутри кластера,  $f_1(w)$  – для остальных соединений, а  $f(w)$  - для всех соединений.

кумулятивных весовых распределений как

$$F_1(w) = 1 - \frac{c}{c_1}(1 - F(w)) \frac{1 - \alpha G(w)}{1 - \alpha}, \quad (4.11)$$

$$F_2(w) = 1 - \frac{c}{c_2}(1 - F(w))G(w), \quad (4.12)$$

где

$$F(w) = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\ln w - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \quad (4.13)$$

является кумулятивной функцией логнормального распределения, а

$$G(w) = 1 + \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}} (\rho(w) - 1). \quad (4.14)$$

Таким образом, выбирая функции  $F_{1,2}(w)$  в соответствии с уравнениями (4.11-4.12), можно получить желаемую функцию  $\rho(w)$ .

На Рис. 4.2(а) показаны экспериментально полученные данные для  $\rho(w)$  [326] и кривые, получаемые для кластерной сети при одном шести наборов

параметров, полученных ранее. Заметим, что максимальное значение  $\rho$  зависит от  $\alpha$  и задается как  $\rho_{\max} = 1/\alpha$ . Значения  $\alpha$  различаются среди шести наборов параметров, и максимальное экспериментально наблюдаемое значение  $\rho_{\max} \approx 22$  достижимо только при  $K = 1$ . Таким образом, наша модель оптимально учитывает все экспериментальные наблюдения с набором значений параметров  $K = 1$ ,  $\beta = 0.222$ ,  $c_1 = 0.07$  и  $c_2 = 1$ . Именно этот набор используется в дальнейшем. Соответствующие функции плотности вероятности показаны на Рис. 4.2(б), из которого видно, что сильные связи больше представлены внутри кластера, а слабые снаружи. Порог между «слабыми» и «сильными» связями можно определить как  $w_0 \approx 1.12$  мВ, при котором две плотности вероятности равны.

Пример матрицы связи для возбуждающих нейронов, сгенерированной в соответствии с описанной моделью, представлен на рис 4.3а. Поскольку модель описывает небольшие локальные кортикальные сети, было взято  $N = 80$  возбуждающих нейронов, что соответствует размеру минимального функционального модуля неокортекса, так называемой микроколонки [245, 301]. Нейроны упорядочены таким образом, что первые ( $M = \beta N$ ) = 18 из них принадлежали кластеру. Связи внутри кластера плотные и сильные, в то время как все остальные связи редкие и слабые. На Рис. 4.3(б) черными точками представлено распределение ненулевых синаптических весов во всей сети, которое действительно оказывается близким к логнормальному с требуемыми параметрами. Красные точки представляют распределение синаптических весов внутри кластера, где чаще встречаются более сильные связи. Сгенерированная матрица связей включает перепредставленные мотивы из двух и трех нейронов. Коэффициенты перепредставления в зависимости от

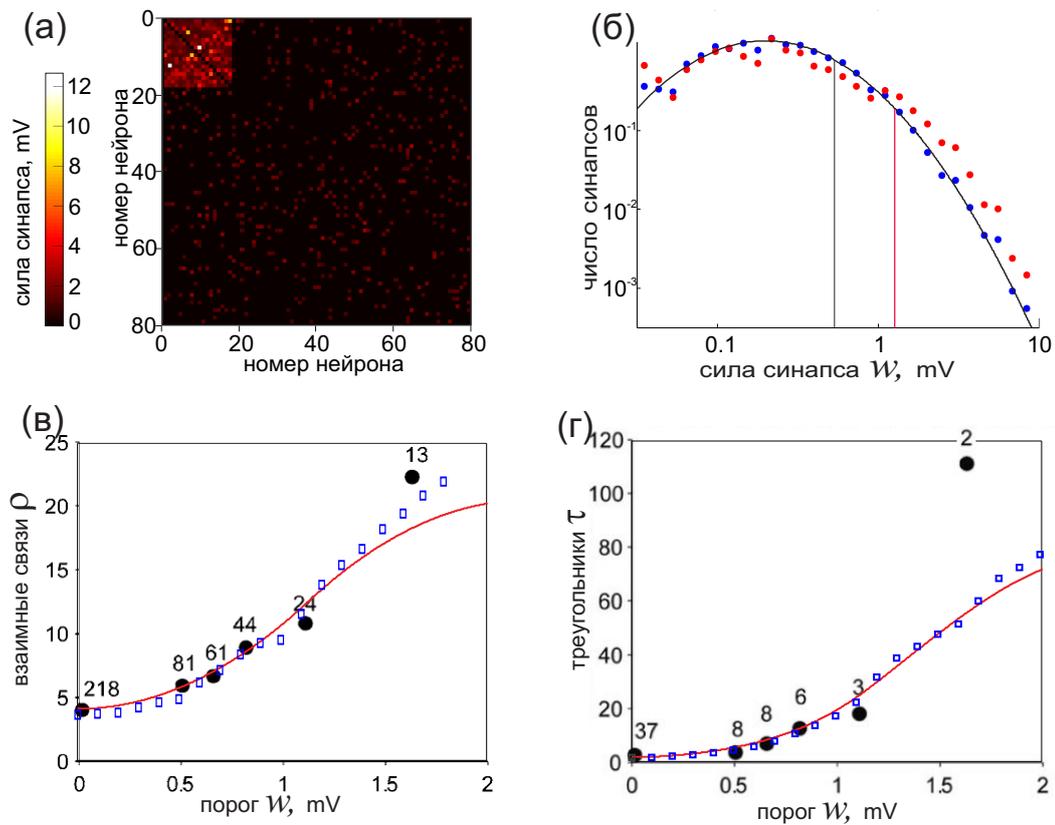


Рис. 4.3. (а) Пример матрицы связности для 80 возбуждающих нейронов, содержащих один кластер. (б) Плотность вероятности ненулевых синаптических весов в логарифмической шкале. Черные кружки показывают распределение веса, полученное для всей сети, а красные кружки показывают распределение внутри кластера. Сплошная кривая показывает логнормальное распределение. (в) Коэффициент перепредставленности взаимных связей  $\rho$  в зависимости от порогового значения  $w$ . Синие квадраты – модель, черные кружки – экспериментальные данные [326]. (г) Коэффициент перепредставленности треугольников  $\tau(w)$ .

силы связи построены на Рис. 4.3(в) для взаимных связей и на Рис. 4.3(г) для треугольников. Характеристики сети хорошо согласуются с экспериментальными данными [326].

Предложенная модель синаптических связей была получена на основе статистических данных, полученных из слоя 5 зрительной коры головного мозга крыс. Тем не менее, присутствие кластеров нейронов было зарегистрировано в и других слоях, областях и видах, включая слой 5 соматосенсорной коры крыс [228, 276], слой 2/3 зрительной коры головного мозга крысы [390] и слой 2/3 соматосенсорной коры мышей [388]. В частности в соматосенсорной коре обнаружено значительное преобладание сильно связанных мотивов для групп, состоящих из нескольких (до шести) нейронов [276]. В той же работе также обнаружена взаимосвязь между количеством связей между группой из шести нейронов и средним синаптическим весом для группы: синаптический вес растет с увеличением количества связей и почти насыщается после того, как сформировано 20% возможных связей. Предложенная модель качественно воспроизводит эти результаты, как показано на Рис. 4.4.

**4.1.3. Бистабильная динамика кластерной сети.** Выше показано, что локальные корковые сети могут содержать относительно большие кластеры очень плотно связанных нейронов. Для исследования влияния такой структуры связей на динамику сети сравним активность сетей с кластерной структурой и без нее. Для этого рассмотрим (а) кластерную сеть с набором значений параметров, описанным выше, и (б) сеть со случайной структурой связей, имеющую такую же среднюю вероятность связи и то же распределение сил связи, что и кластерная сеть. Обе сети состояли из 80 воз-

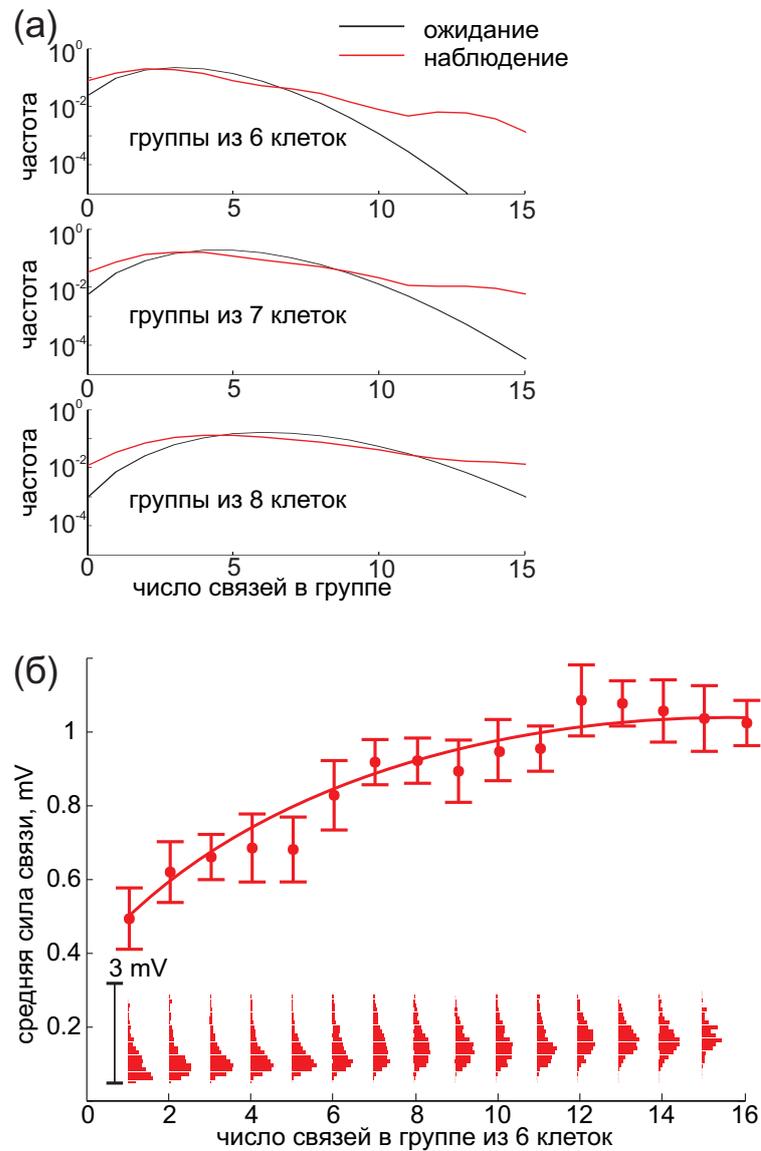


Рис. 4.4. Статистика связей в группах нейронов (а). Ожидаемая (черный) и наблюдаемая (красный) частоты нейронных групп с заданным количеством связей. (б) Средняя сила связи в группе из 6 нейронов в зависимости от количества связей в группе. На вставках показаны распределения силы связей в соответствующих группах.

буждающих и 20 тормозных нейронов. В обеих сетях средняя вероятность соединения возбуждающих нейронов  $c = 0.12$ , а средняя амплитуда ненулевых связей  $w \approx 0.8$  мВ. Кластерная сеть содержит кластер из 18 нейронов, которые связаны каждый с каждым со средней силой  $w \approx 1.1$  мВ. Общее распределение сил связей в обеих сетях является логнормальным. Поскольку существующая сеть очень мала, она не способна к автономной активности, поэтому для всех нейронов были добавлены некоррелированные входные сигналы с идентичными статистическими характеристиками.

Для моделирования динамики нейронов была использована модель на основе работы [367], которая реалистично описывает нейронные сети и включает синапсы AMPA, NMDA и GABA, адаптацию частоты спайков и кратковременную депрессию. Сетевая модель состоит из двух популяций возбуждающих нейронов NE и тормозных нейронов NI = 0,25NE. Каждый возбуждающий нейрон описывается следующим уравнением:

$$C_m \frac{dV_m}{dt} = -I_L - I_{AHP} - I_{syn} + I_{app}, \quad (4.15)$$

$$\frac{d[Ca^{2+}]}{dt} = \alpha_{Ca} \sum_j \delta(t - t_j) - \frac{[Ca^{2+}]}{\tau_{Ca}}. \quad (4.16)$$

Здесь  $C_m = 0.5$  нФ – мембранная емкость,  $V_m$  – мембранный потенциал,  $I_L = g_L(V_m - V_L)$  – ток утечки,  $g_L = 0.025$  мкСм,  $V_L = -70$  мВ,  $I_{AHP} = g_{AHP}[Ca^{2+}](V_m - V_K)$  – активируемый кальцием калиевый ток для адаптации частоты спайков,  $I_{syn} = I_{AMPA} + I_{NMDA} + I_{GABA}$  – рекуррентный синаптический вход от остальных нейронов сети. Если  $V_m$  достигает порога  $V_{thr}$ , он сбрасывается до  $V_L$  и удерживается там в течение рефрактерного периода  $\tau_r = 2$  мс. Тормозные нейроны описываются (4.15) с  $I_{AHP} = 0$  (без адаптации частоты спайков) и  $g_L = 0.05$  мкСм.

Синаптические токи задаются уравнениями  $I_{AMPA} = g_{AMPA}s_{AMPA}(V_m - V_E)$ ,  $I_{NMDA} = g_{NMDA}s_{NMDA}(V_m - V_E)/(1 + [Mg^{2+}] \exp(-0.062V_m)/3.57)$ ,  $I_{GABA} = g_{GABA}s_{GABA}(V_m - V_I)$ , где  $V_E = 0\text{мВ}$ ,  $V_I = -70\text{мВ}$ ,  $g_{AMPA} = 2.3\text{мкСм}$ ,  $g_{NMDA} = 0.16\text{мкСм}$ ,  $g_{GABA} = 0.1\text{мкСм}$ ,  $[Mg^{2+}] = 1\text{мМ}$ . Управляющие переменные  $s$  для каждого типа рецепторов описываются уравнениями кинетики второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_x \sum_j \delta(t - t_j) - \frac{x}{\tau_x}, \quad (4.17)$$

$$\frac{ds}{dt} = \alpha_s x(1 - s) - \frac{s}{\tau_s}, \quad (4.18)$$

где сумма учитывает моменты всех пресинаптических спайков. Для каналов AMPA  $\tau_x = 0.05\text{мс}$  и  $\tau_s = 2\text{мс}$ , для каналов NMDA  $\tau_x = 2\text{мс}$  и  $\tau_s = 80\text{мс}$ , а для рецепторов GABA  $\tau_x = 0.1\text{мс}$  и  $\tau_s = 10\text{мс}$ . Для всех типов рецепторов  $\alpha_s = 1$ , а значения  $\alpha_x$  варьировались для контроля величины EPSP / IPSP.

Топология и величина связей между возбуждающими нейронами были выбраны в соответствии с разработанной ранее моделью кластерной сети. Соотношение между параметрами  $\alpha_x$  для синапсов AMPA и NMDA было выбрано таким образом, чтобы воздействия токов AMPA и NMDA было примерно одинаковыми. Связи от возбуждающих к тормозным и от тормозных ко всем нейронам имели топологию «каждый к каждому», величина  $\alpha_x$  для них была случайно распределена в интервале  $[0; 0.1]$ . Синаптические задержки были распределены случайным образом от 1 до 3 мс для всех типов соединений. Внешний вход  $I_{app}$  представлял собой Пуассоновскую последовательность AMPA-подобных спайков с  $\alpha_x = 0.1$  интенсивностью  $\lambda = 100\text{Гц}$ .

Когда слабый внешний шумовой вход подается на случайную сеть, все нейроны начинают генерировать спайки нерегулярно с низкой средней частотой.

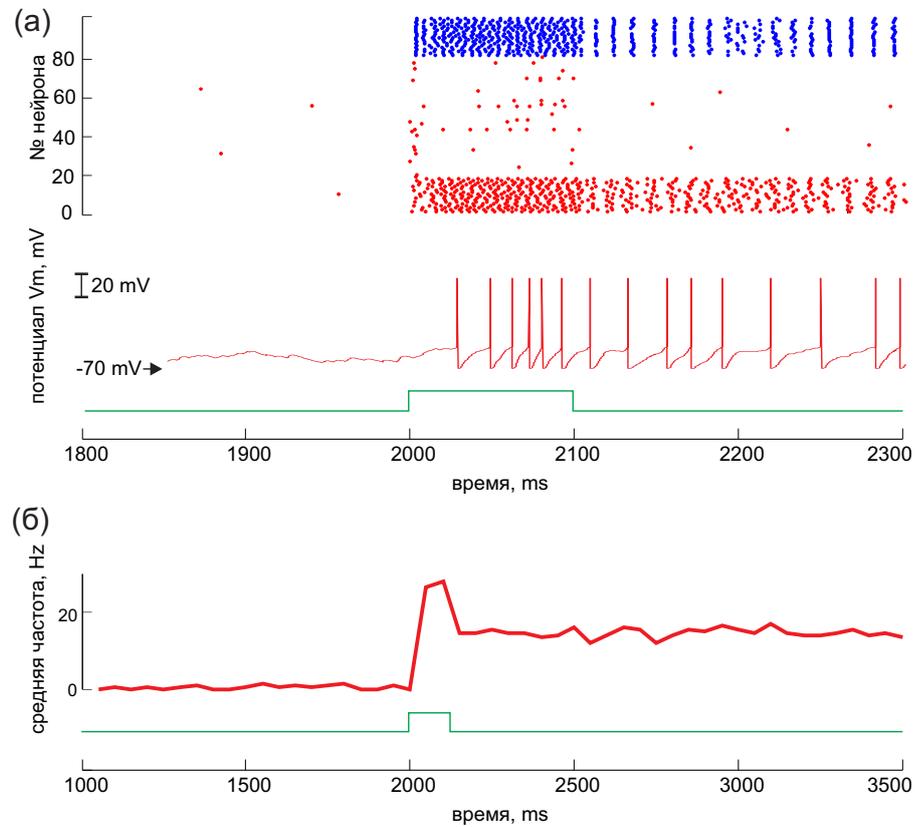


Рис. 4.5. (а) Переключение кластерной сети из «низкого» в «высокое» состояния посредством внешнего стимула. Вверху: спайковый растр сети, красные точки – возбуждающие, синие – тормозные нейроны. Кластер состоит из нейронов с номерами от 1 до  $K = 18$ . Внизу: выходное напряжение одного из кластерных нейронов (красным) и внешний сигнал (зеленым). (б) Средняя частота возбуждения сети (красная кривая) перед стимуляцией близка к нулю, затем увеличивается и остается повышенной (около 20 Гц) после прекращения стимуляции.

той около 1 Гц. Назовем этот режим «низким состоянием». Динамика кластерной сети также может демонстрировать низкое состояние, аналогичное случайной сети. Интересно, однако, что у кластерной сети присутствует и другой режим, в котором нейроны генерируют спайки с гораздо более высокой средней частотой, примерно несколько десятков герц. Назовем это состояние «высоким состоянием». Состояние сети изменяется с низкого на высокое с помощью кратковременной дополнительной стимуляции (Рис. 4.5(а)). В высоком состоянии кластеризованные нейроны возбуждаются с высокой частотой, тогда как остальная часть сети возбуждается редко. Важно отметить, что в кластерной сети стабильны как низкое, так и высокое состояние, как показано на Рис. 4.5(б), что означает, что сеть становится бистабильной.

Таким образом, кластеризация соединений обеспечивает бистабильность в относительно небольших сетях. Чтобы показать это, было проведено параметрическое исследование, в котором изменился относительный размер кластера  $\beta$  и связность внутри кластера  $c_2$  при неизменной средней связности ( $c = 0.1156$ ) и средней силе связи ( $w = 0.8$ ). Для нескольких значений  $\beta$  производилось изменение  $c_2$  с минимального значения  $c_2 = c$  (без кластеризации) до максимального значения  $c_2 = 1$  (максимальная кластеризация) и искался минимальный размер сети  $N$ , достаточный для возникновения бистабильности. Для  $\beta = 0,22$  и максимальной кластеризации ( $c_2 = 1$ ) высокое состояние стабильно уже для  $N = 40$ . На среднем уровне кластеризации ( $c_2 = 0.5$ ) для бистабильности требуется как минимум  $N = 140$  нейронов. Без кластеризации ( $c_2 = c$ ) бистабильность возникает только при  $N > 1000$ . Мы также получили аналогичные результаты для других значений относительного размера кластеров ( $\beta = 0.1$  и  $\beta = 0.3$ ). Таким образом, кластеризация

соединений резко уменьшает минимальный размер сети, необходимый для возникновения бистабильности.

**4.1.4. Влияние локальной кластеризации на коллективную динамику крупномасштабных сетей.** Как показано выше, кластеризация соединений делает активность локальных кортикальных сетей бистабильной. Однако локальные сети в головном мозге не функционируют изолированно от соседних сетей, и локальная кластеризация синаптических связей также может оказывать нетривиальное влияние на динамику крупномасштабной сети. Эта проблема ранее была рассмотрена в крупномасштабных сетях автоколебательных нейронов [209], а в настоящей работе она рассматривается в крупномасштабных сетях более реалистичных возбудимых нейронов. С этой целью введем кластеры в сетевую модель, которая была ранее предложена для моделирования асинхронной нерегулярной активности кортикальных нейронов на низких частотах 1-2 Гц [339]. Сеть состоит из 10000 возбуждающих нейронов и 2000 тормозных нейронов с редкими случайными связями с вероятностями 10% для возбуждающих и 50% для тормозных связей. Нейроны описываются с помощью модели накопление и сброс, для синапсов используется модель на основе проводимости:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V_L - v}{\tau_m} - g_E(v - V_E) - g_I(v - V_I), \quad (4.19)$$

где  $v$  – мембранный потенциал,  $\tau_m$  – постоянная времени мембраны,  $V_L$ ,  $V_E$  и  $V_I$  – реверсные потенциалы тока утечки, возбуждающего и тормозного постсинаптических токов, соответственно. Возбуждающая и тормозная синапти-

ческие проводимости  $g_E$  и  $g_I$  описывается следующим уравнением:

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{g}{\tau_s} + \sum_j G_j \sum_{s_j} \delta(t - s_j - d_j), \quad (4.20)$$

где  $\tau_s$  – постоянная затухания синаптического тока. Второй член представляет синаптические входы от пресинаптических нейронов,  $G_j$  и  $d_j$  – вес и задержка синаптических входов от  $j$ -го пресинаптического нейрона, а  $s_j$  – моменты спайков нейрона. Значения параметров были выбраны как  $V_L = -70$ мВ,  $V_E = 0$ мВ,  $V_I = -80$ мВ,  $\tau_m = 20$ мс для возбуждающих нейронов и 10мс для тормозных нейронов, и  $\tau_s = 2$ мс. Порог возбуждения  $V_{thr} = -50$ мВ, рефрактерный период – 1мс.

Первоначально значения  $G_{ij}$  для возбуждающих синапсов выбираются так, чтобы соответствующие EPSP распределялись согласно логнормальному распределению. Значения  $G_{ij}$  для других типов соединений были выбраны как 0.018, 0.002 и 0.0025 для синапсов возбуждающий-тормозной, тормозной-возбуждающий и тормозной-тормозной, соответственно. Синаптические задержки были выбраны случайным образом из равномерного распределения  $[d_0 - 1, d_0 + 1]$  со средним значением  $d_0$ , установленным как 2мс для возбуждающих соединений и 1мс для других типов соединений. Сбой синаптической передачи между возбуждающими нейронами происходит с вероятностью  $p = a/(a + EPSP)$ , где  $a = 0.1$ мВ.

Чтобы ввести кластеризацию, сеть была разделена на более мелкие подсети, каждая из которых состоит из  $N_s$  нейронов. Соединения внутри каждой группы были изменены в соответствии с описанной выше моделью кластерной сети. Таким образом, каждая подсеть содержала кластерные нейроны в числе  $\beta N_s$  ( $\beta \approx 0.22$ ). Связи между подсетями не изменялись. В результате

была получена сеть с локальными кластерами плотно связанных нейронов, разреженной связностью в глобальном масштабе и логнормальным распределением сил синапсов. В сеть не поступало внешних сигналов.

После введения локальных кластеров динамика крупномасштабной сети приобретает несколько новых особенностей. Сеть сохраняет способность генерировать стабильную низкочастотную асинхронную нерегулярную активность без внешних сигналов. Эта спонтанная активность возможна, потому что каждый нейрон получает достаточно сильный рекуррентный вход в крупномасштабной сети, в отличие от небольшой сети, рассмотренной выше. Кроме того, сеть становится способной демонстрировать режимы с локализованной повышенной активностью, напоминающей высокое состояние малой сети (Рис. 4.6). В таком режиме одна или несколько локальных подсетей могут быть переведены в состояние высокой активности кратковременными внешними стимулами и генерировать спайки с высокой частотой, в то время как остальная часть сети возбуждается редко. Средняя скорость генерации по всей сети немного увеличивается, но остается низкой.

Была проведена серия симуляций, в которой варьировался размер каждой подсети  $N_s$ . Обнаружено, что устойчивость высокого состояния локальной подсети сильно зависит от ее размера. Для относительно небольших значений  $N_s$  состояние высокой активности является метастабильным: подсеть, активированная внешним входом, срабатывает с более высокой частотой в течение примерно 100мс, но постепенно возвращается в состояние низкого уровня (Рис. 4.6(a)). Для больших  $N_s$  состояние повышенной активности является устойчивым: активированная подсеть переходит на высокий уровень и продолжает работать с высокой скоростью, пока другая подсеть не будет

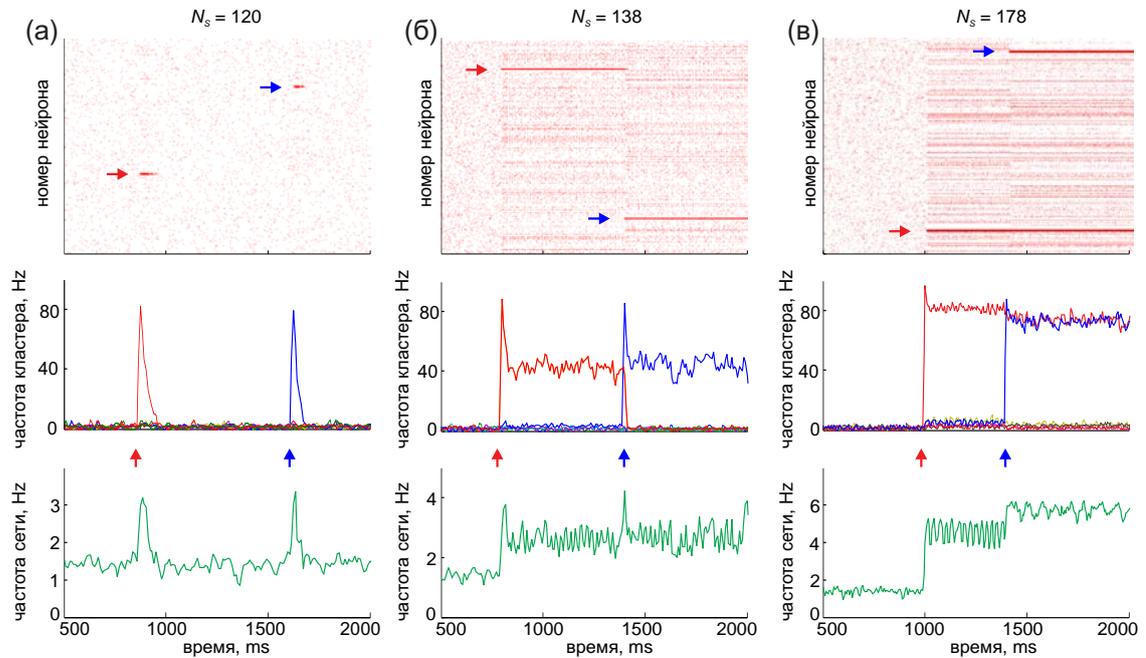


Рис. 4.6. Растрограммы спайков всех 10000 возбуждающих нейронов (вверху), усредненная частота возбуждения локальных кластеров (посередине) и усредненная частота возбуждения всей сети (внизу) для различных значений размера каждой подсети: (а)  $N_s = 120$ , (б)  $N_s = 138$ , (в)  $N_s = 178$ . На средних панелях частота различных кластеров показана разными цветами. Стрелки на верхней и средней панелях указывают кластеры нейронов, активируемых короткими внешними стимулами.

активирована внешним входом. Из-за рекуррентного торможения в крупномасштабной сети возникает конкуренция между различными подсетями. По этой причине только одна подсеть может находиться в состоянии высокого уровня в данный момент, и если какая-либо подсеть ранее находилась на высоком уровне, она переключается обратно на низкий уровень, когда другая подсеть переходит на высокий уровень (Рис. 4.6(б)). Дальнейшее увеличение  $N_s$  снижает конкуренцию и позволяет нескольким подсетям одновременно находиться в состоянии высокого уровня (Рис. 4.6(в)).

## 4.2. Среднеполевая динамика нейронной сети со случайной структурой связей

В данном разделе сделан первый шаг для аналитического исследования коллективной динамики кластерной сети, а именно проведен вывод и анализ среднеполевой модели, описывающей динамику сети с однородными случайными связями. В дальнейшем тот же подход будет использован для среднеполевого описания кластерной сети.

**4.2.1. Вывод уравнений для среднего поля.** Рассмотрим сеть из  $N$  нейронов, каждый из которых генерирует спайки в моменты времени  $t_i^p$ , где  $i$  – номер нейрона, а  $p$  – номер спайка. Тогда активность каждого нейрона можно описать частотами генерации спайков  $r_i, i \in [1, N]$ , динамика которой определяется уравнением

$$\frac{dr_i}{dt} = -\lambda r_i(t) + \mathcal{H}(I_i). \quad (4.21)$$

Здесь  $\lambda$  – скорость релаксации, характеризующая инертность нейрона,  $I_i$  – входной ток, а  $\mathcal{H}(I_i)$  – так называемая передаточная функция. Приведенная модель иногда называется моделью рейт-нейрона и является парадигматической [11, 145]. Исследователями был проведен значительный объем теоретической работы для аналитического вывода конкретного вида передаточных функций для ряда моделей нейронов [36, 109, 320].

В рекуррентной сети входной ток нейрона формируется за счет активности других нейронов и внешних входных сигналов:

$$I_i(t) = \kappa u_i(t) + I + \sqrt{2B}\xi_i(t) \quad (4.22)$$

Здесь  $\kappa = c/N$  – коэффициент связи, а  $I$  – внешний ток, который считается постоянным, а последнее слагаемое представляет собой шумовую компоненту внешнего воздействия, которую мы будем аппроксимировать белым шумом интенсивности  $2B$ . Входной сигнал  $u_i$ , получаемый  $i$ -м нейроном от остальных нейронов сети, выражается как

$$u_i(t) = \sum_j a_{ij} \sum_p \delta(t - t_j^p) \quad (4.23)$$

где  $a_{ij}$  – матрица связи сети. При отсутствии корреляций между моментами генерации импульсов различными нейронами можно записать приближенно как

$$u_i(t) = \sum_j a_{ij} r_j(t). \quad (4.24)$$

Также учтем влияние на динамику нейрона внутреннего шума, связанного со случайным срабатыванием ионных каналов, тогда окончательно получим систему уравнений для динамики сети в виде

$$\frac{dr_i}{dt} = -\lambda r_i(t) + \mathcal{H} \left( \kappa \sum_j a_{ij} r_j + I + \sqrt{2B} \zeta_i(t) \right) + \sqrt{2D} \xi_i(t), \quad (4.25)$$

где  $2D$  – интенсивность внутреннего шума, который также будем считать белым.

Будем далее предполагать, что топология сети является случайной, что соответствует сети Эрдёша-Реньи [93]. Выведем модель среднего поля для коллективной динамики сети, заданной системой (4.25). Используемый подход основан на так называемом приближении гауссова замыкания [110, 111, 208, 391] приводит к модели среднего поля для макроскопической динамики второго порядка. Коллективное поведение сети при этом описывается в терминах средней (по сети) частоты возбуждения и связанной с ней дисперсии:

$$R(t) = \langle r_i \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_i r_i$$

$$S(t) = \langle (r_i(t) - R(t))^2 \rangle = \langle r_i(t)^2 \rangle - R(t)^2. \quad (4.26)$$

Прежде чем перейти к аналитической части, сформулируем явно приближения, необходимые для вывода модели среднего поля. Первое касается требования, чтобы случайные величины  $r_i(t)$  в любой момент  $t$  и для достаточно больших  $N$  удовлетворяли  $\langle r_i \rangle \approx [r_i(t)]$ , где  $[\cdot]$  обозначает математическое ожидание по различным стохастическим реализациям. Математическая основа этого приближения заключается в законе больших чисел, который гласит, что среднее  $Y_N = N^{-1} \sum_{i=1}^N y_i$  от  $N$  независимо и идентично распределенные случайные величины  $y_i$  почти наверняка сходятся к математическому ожиданию  $[y_i]$  для  $N \rightarrow \infty$ . Форма сходимости для больших, но конечных  $N$  задается центральной предельной теоремой. С физической точки зрения выходы нейронов  $r_i$  можно считать идентично распределенными, если распределение количества входящих соединений (степеней связности) по популяции достаточно узкое.

Второе приближение состоит в требовании, чтобы корреляция между выходами нейронов была незначительной:  $[r_i(t)r_j(t)] = [r_i(t)][r_j(t)]$ . Это выполняется, когда элементы имеют лишь небольшую часть общего входа из сети [37, 358]. Так как рассматриваются случайные сети Эрдёша-Реньи, в которых вероятность соединения между двумя нейронами равна постоянному значению  $p$ , то доля общего входа для двух нейронов составляет  $p$ , а коэффициент вариации количества входящих соединений равен  $\sqrt{(1-p)/pN}$ . Оба значения малы для  $N \gg pN \gg 1$ . Таким образом, в больших редко-

связанных случайных сетях должны выполняться описанные приближения.

При этом выход каждого нейрона можно представить как

$$r_i = R + \sqrt{S}\rho_i, \quad (4.27)$$

где  $\rho_i$  – некоррелированные случайные переменные с нулевым средним и единичной интенсивностью, ср. [42, 43, 349].

Переходя к выводу модели среднего поля, введем обозначение  $x_i = \kappa u_i + I + \sqrt{2B}\zeta_i$  для полного входного сигнала  $i$ -го нейрона. Используя (4.27), последнее можно записать как

$$x_i = X + k\nu_i R + \kappa\sqrt{S} \sum_j a_{ij}\rho_j + \sqrt{2B}\zeta_i, \quad (4.28)$$

где  $n_i = \sum_j a_{ij}$  обозначает количество входящих соединений  $i$ -го нейрона,  $n = \langle n_i \rangle = pN$  – среднее число соединений,  $\nu_i = n_i - n$  и  $X = \kappa n R + I$ . Отклонения  $\nu_i$  имеют порядок  $\sqrt{pN}$ , а независимость переменных  $\rho_i$  означает  $\sum_j a_{ij}\rho_j \sim \sqrt{n}$ . Следовательно, второй и третий члены в правой части (4.28) имеют порядок  $1/\sqrt{N}$ , т.е. малы. Если внешний шум  $B$  также мал, функция  $\mathcal{H}(x_i)$  может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности  $X$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x_i) &\approx \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}'(X)(x_i - X) + \frac{1}{2}\mathcal{H}''(X)(x_i - X)^2 = \\ &= H_0 + \kappa H_1 \nu_i R + H_2 (\kappa^2 \nu_i^2 R^2 + \kappa^2 S n_i + 2B) + \\ &+ (H_1 + 2\kappa H_2 \nu_i R) \left( \kappa\sqrt{S} \sum_j a_{ij}\rho_j + \sqrt{2B}\zeta_i \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

В последнем выражении введены обозначения  $H_0 = \mathcal{H}(X)$ ,  $H_1 = \mathcal{H}'(X)$  и  $H_2 = \frac{1}{2}\mathcal{H}''(X)$ . Заметим, что произведения шумовых членов заменяются соответствующими выражениями:  $\rho_i\rho_j = \delta_{ij}$ ,  $\zeta_i\zeta_j = \delta_{ij}$ ,  $\rho_i\zeta_j = 0$ .

Подставив (4.29) в (4.25), приходим к уравнению для локальных частот

$$\frac{dr_i}{dt} = -\lambda r_i + h_i + \gamma_i \sum_j a_{ij} \rho_j + \beta_i \zeta_i + \sqrt{2D} \xi_i, \quad (4.30)$$

где  $h_i = H_0 + \kappa H_1 R \nu_i + H_2 (\kappa^2 \nu_i^2 R^2 + \kappa^2 S n_i + 2B)$ ,  $\gamma_i = (H_1 + 2\kappa H_2 \nu_i R) \kappa \sqrt{S}$  и  $\beta_i = (H_1 + 2\kappa H_2 \nu_i R) \sqrt{2B}$ . Взяв среднее по популяции для уравнения микроскопической динамики (4.30), получим следующее уравнение для средней (макроскопической) частоты  $R$ :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} = & -\lambda R + H(R) + \frac{1}{N} \sum_{i,j} \gamma_i a_{ij} \rho_j + \\ & + \frac{1}{N} \sum_i \beta_i \zeta_i + \frac{\sqrt{2D}}{N} \sum_i \xi_i. \end{aligned} \quad (4.31)$$

где  $H(R) = \langle h_i \rangle = H_0 + H_2 (\kappa^2 M_2 R^2 + \kappa^2 S n + 2B)$ , а  $M_2 = \langle \nu_i^2 \rangle = p(1-p)N$  – второй центральный момент распределения степени связанности. Заметим, что уравнение (4.31) фактически включает три шумовых члена. Помимо внешнего и внутреннего шума, существует также «сетевой шум» из-за разницы в степени связанности. Чтобы оценить сетевой шум, перепишем соответствующий член в виде  $\frac{1}{N} \sum_{i,j} \gamma_i a_{ij} \rho_j = \sum_j \rho_j \frac{1}{N} \sum_i \gamma_i a_{ij} = \sum_j \rho_j \langle \gamma_i a_{ij} \rangle$ . Поскольку  $\gamma_i$  и  $a_{ij}$  не коррелированы, выполняется  $\langle \gamma_i a_{ij} \rangle \approx p \langle \gamma_i \rangle$ . Принимая это во внимание, сумму шумовых членов в (4.31) можно переписать как  $\xi_R = \frac{1}{N} \sum_i (c p H_1 \sqrt{S} \rho_i + \beta_i \zeta_i + \sqrt{2D} \xi_i)$ , что эквивалентно белому шуму с интенсивностью  $2\Psi/N$ , где

$$2\Psi = H_1^2 c^2 p^2 S + 2B H_1^2 + 2D. \quad (4.32)$$

В последнем выражении не учитывались члены порядка  $1/N^2$ .

Теперь выведем уравнение для дисперсии  $S$ . Взяв соответствующие про-

изводные Ито, получим

$$\frac{dS}{dt} = \left\langle 2r_i \frac{dr_i}{dt} + \gamma_i^2 n_i + \beta_i^2 + 2D \right\rangle - 2R \frac{dR}{dt} - 2\Psi/N.$$

Нетрудно показать, что шумовые члены полностью компенсируют друг друга. Используя предположение, что выходы  $\rho_i$  не коррелируют со связностью  $\nu_i$ , мы приходим к следующему уравнению для дисперсии:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = & 2D + 2BH_1^2 - 2\lambda S + \frac{1}{N} 8p(1-p)BH_2^2 c^2 R^2 \\ & - \frac{1}{N} p(1-p)H_1^2 c^2 S. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Принимая во внимание (4.31), (4.32) и (4.33), стохастическая среднеполевая модель для сети имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} = & -\lambda R + H_0 + 2H_2 B + \frac{c^2 H_2}{N} (p(1-p)R^2 + pS) \\ & + \sqrt{\frac{1}{N} (H_1^2 c^2 p^2 S + 2BH_1^2 + 2D)} \eta, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} = & 2D + 2BH_1^2 + \frac{1}{N} 8p(1-p)BH_2^2 c^2 R^2 \\ & - \left( 2\lambda + \frac{1}{N} p(1-p)H_1^2 c^2 \right) S. \end{aligned} \quad (4.35)$$

**4.2.2. Анализ среднеполевой модели в термодинамическом пределе.** В термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  стохастическим членом в (4.34) можно пренебречь, так что динамика сети становится детерминированной. Влияние шума описывается при этом интенсивностями  $B$  и  $D$ , которые можно рассматривать как дополнительные параметры системы. Далее для

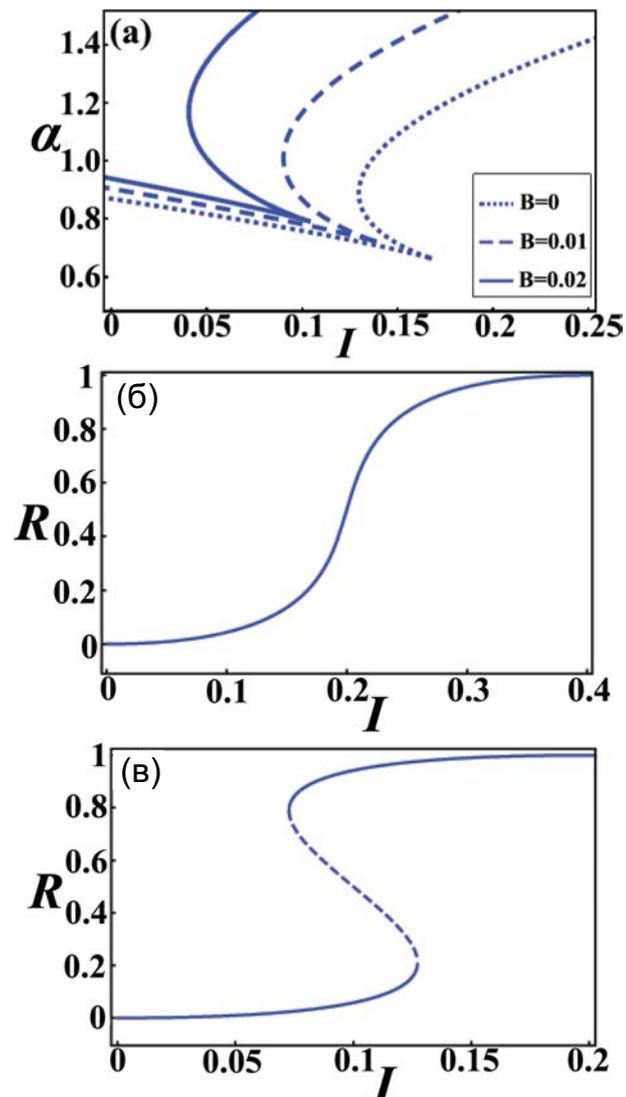


Рис. 4.7. (а) Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма сети в термодинамическом пределе. Линии показывают бифуркации седло-узел в плоскости  $I - \alpha$  для трех различных значений  $B$ . (б,в)

Однопараметрическая бифуркационная диаграмма  $R(I)$  для  $B = 0$ ,  $\alpha = 0.6$  (б) и  $\alpha = 0.8$  (в). Сплошными линиями показаны устойчивые, пунктирными – неустойчивые ветви.

простоты положим  $\lambda = 1$  и рассмотрим функцию активации  $\mathcal{H}(x)$  вида

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3x^2 - 2x^3, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad (4.36)$$

В соответствии с введенными выше обозначениями, ср. (4.29),  $H_0 = 3X^2 - 2X^3$ , а производные первого и второго порядка равны  $H_1 = 6X - 6X^2$  и  $H_2 = 6 - 12X$  для  $0 < X < 1$ . Динамика дисперсии  $S$  в термодинамическом пределе описывается уравнением

$$\frac{dS}{dt} = 2D + 2BH_1^2 - 2S. \quad (4.37)$$

После релаксации дисперсия достигает стационарного значения

$$S_0 = D + BH_1^2. \quad (4.38)$$

Тогда динамика средней скорости  $R$  из (4.34) сводится к уравнению

$$\frac{dR}{dt} = -R + H_0 + 2H_2B \quad (4.39)$$

которое не зависит от дисперсии  $S$ . Принимая во внимание, что  $X = \alpha R + I$ , где  $\alpha = cr$ , можно переписать (4.39) как

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} = F(X) = & -2\alpha X^3 + 3\alpha X^2 - (12\alpha B + 1)X + \\ & + 6\alpha B + I. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Анализ (4.40) показывает, что уравнение всегда имеет по крайней мере одно стабильное стационарное состояние. Для значений параметров

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{2}{3(1 - 8B)}, \quad I = I_0 = \frac{1 - \alpha_0}{2}, \quad (4.41)$$

уравнение (4.40) демонстрирует бифуркацию трехкратного равновесия, когда возникают два устойчивых состояния, разделенных неустойчивым. Устойчивые состояния соответствуют двум различным уровням активности (средней частоты возбуждения) сети, которые далее назовем «низким» и «высоким» состоянием. При достаточно сильной связи  $\alpha > \alpha_0$  высокое (низкое) состояние возникает через бифуркацию седло-узел, которая происходит при значении параметра

$$I = \frac{1 - \alpha}{2} \mp \frac{2}{3\sqrt{3}} \left( \frac{\alpha}{\alpha_0} - 1 \right)^{3/2}, \quad (4.42)$$

где знак минус соответствует высокому состоянию, а плюс – низкому состоянию. Для  $I$  между этими двумя значениями сосуществуют высокое и низкое состояния, так что сеть находится в бистабильном режиме. Двумерная бифуркационная диаграмма на Рис. 4.7(а) показывает кривые (4.42) для различных значений  $B$ . Видно, что две кривые образуют «язык», внутри которого сеть бистабильна. На рисунках 4.7(б) и (в) показаны одномерные бифуркационные диаграммы для значений параметров вне и внутри языка бистабильности соответственно.

Отметим важную роль, которую играет интенсивность внешнего шума  $B$ . Обнаружено, что она влияет на положение области бистабильности, сдвигая ее в область более сильных связей. Это наблюдение выявляет возможный механизм управления сетью через интенсивность шума. Чтобы проиллюстрировать этот механизм, проанализируем, как динамика сети зависит от  $B$ . Для этого решим уравнение  $F(X) = 0$  относительно  $B$ , получим

$$B = \frac{1}{24} \left( \left( 3 - \frac{2}{\alpha} \right) - 4 \left( X - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\frac{2I-1}{\alpha} + 1}{X - \frac{1}{2}} \right). \quad (4.43)$$

Для  $I > \frac{1}{2}(1 - \alpha)$  соответствующая одномерная бифуркационная диаграмма

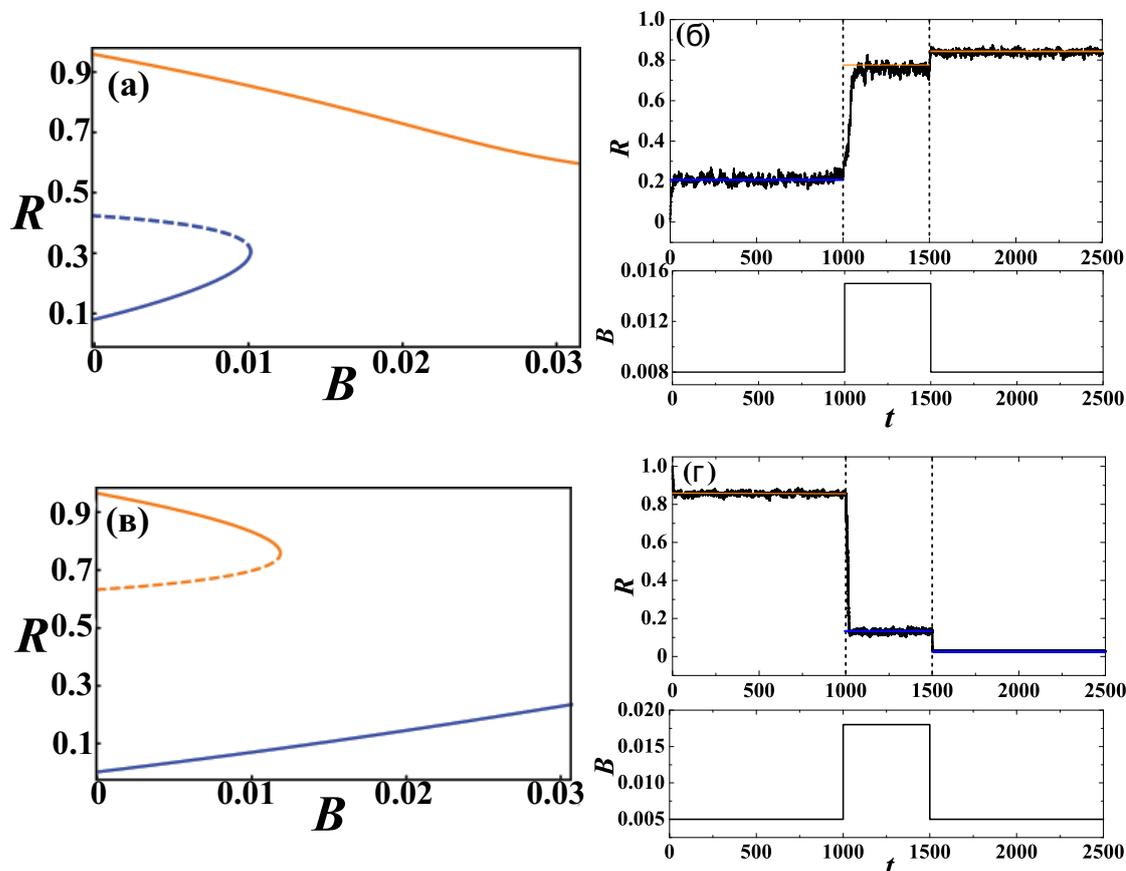


Рис. 4.8. (а) Однопараметрическая бифуркационная диаграмма  $R(B)$  при  $\alpha = 0.8$ ,  $I = 0.11$ . Сплошными линиями показаны устойчивые, пунктирной – неустойчивые ветви. (б) Динамика сети при временном усилении внешнего шума. Черной жирной линией показаны численные результаты, тонкие линии отмечают теоретически полученные стабильные уровни. (в) и (г) – аналогично при  $\alpha = 0.9$ ,  $I = 0.02$ . Размер сети при моделировании составляет  $N = 300$ .

представлена на Рис. 4.8(а). Зависимость  $X(B)$  однозначна при  $B > B_0$ , где  $B_0 = \frac{1}{24} \left( \left( 3 - \frac{2}{\alpha} \right) - 3 \left( \frac{2I-1}{\alpha} + 1 \right)^{2/3} \right)$ . Для такого  $B$  существует только высокое состояние сети. При  $B = B_0$  происходит бифуркация седло-узел, в результате чего рождается низкое состояние. Последнее состояние существует для  $B < B_0$ . Поскольку физически значимы только положительные значения  $B$ , ветвь низкого состояния существует только для  $B_0 > 0$ , что эквивалентно условию  $\alpha > 2/3$  и

$$\frac{1}{2}(1 - \alpha) < I < \frac{1}{2}(1 - \alpha) + \frac{(\alpha - 2/3)^{3/2}}{\alpha^{1/2}}. \quad (4.44)$$

Для  $\alpha$  и  $I$ , удовлетворяющих (4.44), сеть является бистабильной для  $B < B_0$  и имеет только высокое состояние для  $B > B_0$ . Следовательно, импульсное увеличение  $B$  может переключить сеть из низкого состояния в высокое. Этот эффект проиллюстрирован на Рис. 4.8(б), где показана динамика сети до, во время и после импульсного изменения интенсивности внешнего шума  $B$ . Перед усилением уровень внешнего шума составляет  $B = 10^{-3}$ , так что сеть является бистабильной и находится в низком состоянии. Когда интенсивность внешнего шума временно увеличивается до  $B = 5 \times 10^{-3}$ , низкое состояние исчезает, и сеть переключается в высокое состояние. Когда  $B$  восстанавливает начальное значение, (4.40) снова допускает бистабильный режим, но сеть остается в высоком состоянии. Таким образом, временное увеличение  $B$  привело к переключению сети из низкого состояния в высокое.

Обратите внимание, что для  $I < \frac{1}{2}(1 - \alpha)$  возможен обратный случай, при котором сеть может переключаться из высокого состояния в низкое путем импульсного увеличения внешнего шум. Пример такого случая показан на Рис. 4.8(в) и Рис. 4.8(г).

Интересно, что внешний шум влияет не только на стационарные состо-

яния сети, но и на ее переходную динамику. Переходная динамика важна, когда внешний вход изменяется, и сеть должна отслеживать это изменение и соответственно адаптироваться к нему. В этом случае короткое время отклика сети является важным преимуществом [359]. Анализ показывает, что при определенных условиях введение внешнего шума может значительно сократить время отклика сети. Рассмотрим ситуацию, когда вход  $I$  переключается с некоторого значения  $I_1$  на новое значение  $I_2$ . Для простоты предположим, что остальные параметры выбраны так, что сеть всегда является моностабильной. Тогда сеть перейдет из предыдущего стационарного состояния  $X_1$  в новое  $X_2$ . Согласно (4.40) скорость  $\Gamma$  релаксации системы к  $X_2$  определяется модулем производной  $F'(X_2)$ :

$$\Gamma = -F'(X_2) = -6\alpha X_2^2 + 6\alpha X_2 + 12\alpha B + 1. \quad (4.45)$$

Таким образом, усиление внешнего шума  $B$  увеличивает скорость  $\Gamma$  и ускоряет отклик сети. Этот вывод подтверждается численным моделированием, показанным на Рис. 4.9. Здесь рассматриваются две сети: первая без внешнего шума ( $B = 0$ , синяя кривая) и вторая с шумом ( $B = 0,01$ , красная кривая). Значения остальных параметров указаны под рисунком. В обоих случаях вход  $I$  изменяет свое значение в момент  $t = 0$ , так что стационарное значение  $X$  изменяется с  $X_1 = 0,25$  на  $X_2 = 0,5$ . Оценка (4.45) тогда дает  $\Gamma = 0.025$  без шума и  $\Gamma = 0.103$  с шумом, что подразумевает четырехкратное ускорение отклика сети. Отметим, что численные результаты удовлетворительно согласуются с теоретическими предсказаниями.

**4.2.3. Влияние эффектов конечного размера.** Проанализируем влияние эффектов конечного размера в случае, когда сеть большая, но ко-

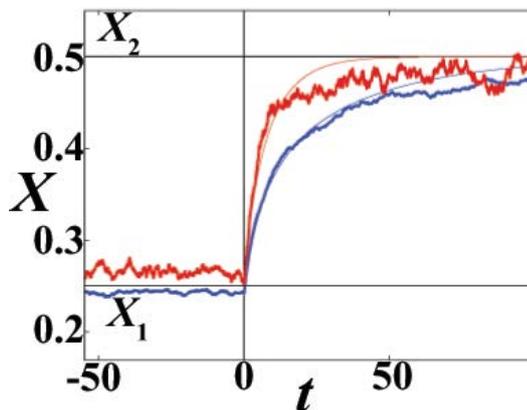


Рис. 4.9. Зависимость переходной динамики сети от  $B$ . Изменение внешнего входа происходит при  $t = 0$ . Отклик сети для  $B = 0$  показан синими (светло-серыми) линиями, а для  $B = 0,01$  - красными (темно-серыми) линиями. Остальные параметры сети:  $N = 400$ ,  $\alpha = 0.65$ ,  $D = 0.001$ . Толстые линии представляют численные результаты, тонкие линии – предсказания модели.

нечная, а именно  $N \gg 1$ . Тогда шумовой член в (4.34) больше не может считаться нулевым и может вызвать стохастические флуктуации средней частоты около значений, полученных для термодинамического предела. Чтобы оценить величину флуктуаций, перепишем (4.34) следующим образом:

$$\frac{dX}{dt} = F(X) + \frac{1}{N}G(X, S) + \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{2\Psi(X, S)}\eta. \quad (4.46)$$

Для больших  $N$  переменные  $X$  и  $S$  близки к соответствующим значениям  $X_0$  и  $S_0$  из термодинамического предела, при этом  $X_0$  определяется из условия  $F(X_0) = 0$ , а  $S_0$  из (4.38). Поскольку флуктуации  $x = X - X_0$  малы, можно линеаризовать (4.46) и получить

$$\frac{dx}{dt} = F'(X_0)x + \frac{1}{N}G(X_0, S_0) + \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{2\Psi(X_0, S_0)}\eta. \quad (4.47)$$

Поскольку состояние стабильно в термодинамическом пределе, имеет место  $F'(X_0) < 0$ . Смещение установившегося состояния из-за эффекта конечных размеров равно

$$x_0 = \frac{G(X_0, S_0)}{-NF'(X_0)} = \frac{H_2 (\mu(X_0 - I)^2 + \alpha^2 p (D + BH_1^2))}{Np^2 (12\alpha B + 1 - \alpha H_1)}. \quad (4.48)$$

Это отклонение порядка  $1/N$ , в то время как случайные колебания  $X$  из-за шума имеют порядок  $1/\sqrt{N}$ . Это позволяет пренебречь вторым членом в (4.47) и получить следующее выражение для дисперсии  $X$  по стохастическим реализациям:

$$[x^2] = \frac{2\Psi(X_0, S_0)}{-2NF'(X_0)} = \frac{(D + BH_1^2) (2 + \alpha^2 H_1^2)}{2N (12\alpha B + 1 - \alpha H_1)}. \quad (4.49)$$

Выражения (4.48) и (4.49) содержат в знаменателе  $F'(X_0)$ . Когда значение  $F'(X_0)$  становится малым, обе формулы расходятся, поскольку линеаризация (4.46) больше не является адекватной.

Отметим, что влияние конечного размера сети на величину дисперсии  $S$  сводится лишь к ее небольшому изменению, которое имеет порядок  $1/N$ . А именно, стационарное значение дисперсии при больших  $N$  равно

$$S = S_0 + \frac{p(1-p)c^2}{2N} (B(8H^2R^2 - H_1^2) - DH_1^2). \quad (4.50)$$

Для проверки точности разработанного среднеполевого подхода было выполнено прямое моделирование сети (4.25) и сравнение результатов с предсказаниями теории. Было обнаружено, что для  $B < 0.01$ ,  $D < 0.01$  и  $N > 100$  средняя скорость сети обычно предсказывается с точностью не менее 5%. Точность среднеполевой модели снижается при значениях  $R$ , близких к нулю и единице, поскольку вторая производная  $H_2$  в этих точках имеет разрыв. Сравнение численных и теоретических результатов представлено на

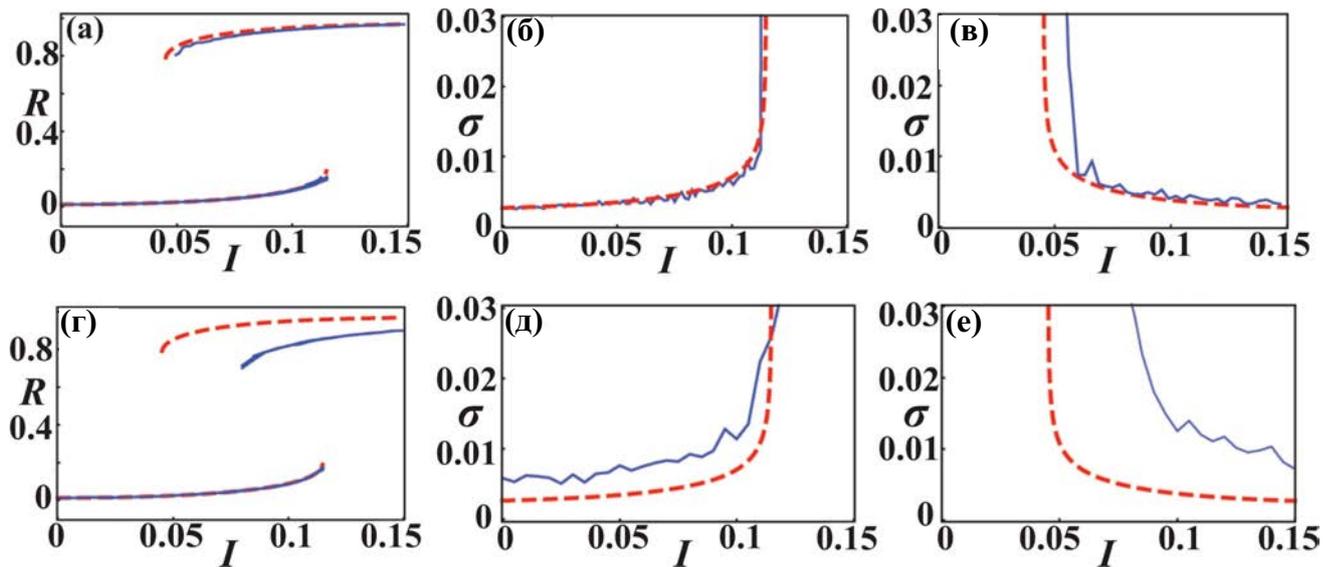


Рис. 4.10. (а) Однопараметрическая бифуркационная диаграмма  $R(I)$ .

Синие сплошные линии показывают значения, наблюдаемые после переходного процесса, а красные пунктирные линии показывают теоретические предсказания для стабильных уровней. (б) и (в) Дисперсия средней частоты  $\sigma = \sqrt{[\delta X^2]}$ . Сплошной линией обозначены численные результаты, а штриховой линией - приближенная модель. Значения параметров:  $N = 400$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 4.2$ ,  $B = D = 0.002$ . (г,д,е) – то же для  $N = 70$ .

Рис. 4.10. Сначала была рассмотрена достаточно большая сеть  $N = 400$ , в которой среднеполевая модель должна работать достаточно хорошо, см. верхнюю строку на Рис. 4.10(а). Для каждого набора значений параметров сеть моделируется на периоде  $T = 200$ , начиная с 10 различных случайно выбранных начальных условий. После переходного процесса  $T_{tr} = 50$  все наблюдаемые средние частоты  $R$  были сохранены и нанесены на график в зависимости от соответствующего значения параметра. На этот график наложено теоретическое предсказание для среднего значения. Чтобы проверить пред-

сказания величины стохастических флуктуаций, были построены наблюдаемая дисперсию и оценка (4.49), ср. Рис. 4.10(б),(в). Поскольку сеть является бистабильной в определенном интервале параметров, результаты показаны отдельно для нижней и верхней ветвей. Как и ожидалось, теория становится неадекватной в окрестности бифуркаций седла-узла. В остальном интервале параметров теоретическая оценка достаточно точна.

Вторая строка на Рис. 4.10 иллюстрирует нарушение среднеполевой теории для сетей малого размера при  $N = 70$ . Заметим, что верхняя ветвь существенно отклоняется от теоретического прогноза также величина стохастических флуктуаций намного больше, чем ожидается в приближенной модели, потому что допущения, лежащие в основе (4.49), больше не выполняются.

**4.2.4. Медленные флуктуации активности.** Заметим, что уравнение (4.46) может быть переписано как уравнение движения частицы в потенциальном поле с шумом. Заменяя  $S$  его стационарным значением, данное уравнение можно записать как

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{dV}{dX} + \sqrt{\Psi}\xi, \quad (4.51)$$

где  $V$  представляет собой потенциал  $V(X) = \alpha X^4/2 - \alpha X^3 + (6\alpha B + 1/2)X^2 - (6\alpha B + I)X + \mathcal{O}(1/N)$ , тогда как макроскопический шум имеет интенсивность

$$\Psi = \alpha^2 (2 + \alpha^2) \frac{36BX^2(1 - X)^2 + D}{N}. \quad (4.52)$$

В области бистабильности профиль  $V(X)$  имеет форму двухъямного потенциала с минимумами, которые соответствуют двум стационарным уровням детерминированной части модели. При этом вблизи бифуркации трехкратного состояния равновесия барьер между двумя минимума является достаточно

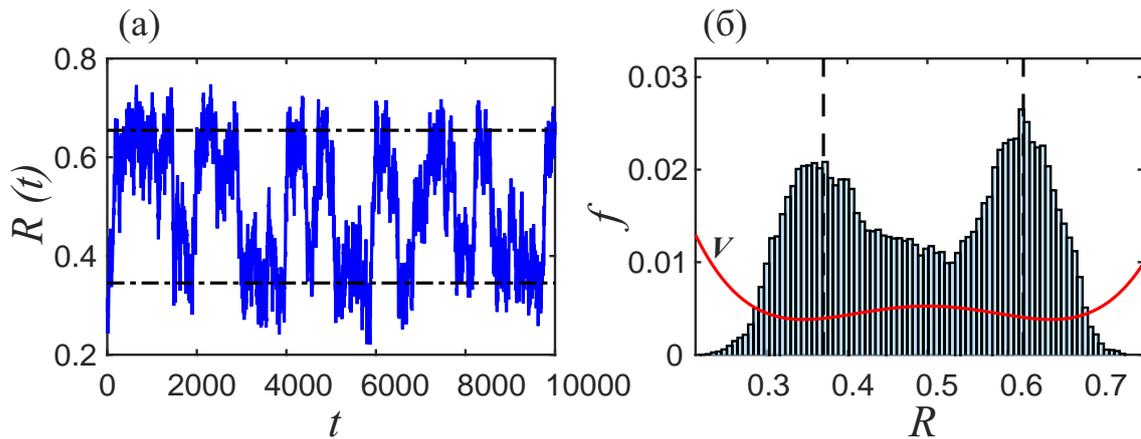


Рис. 4.11. Спонтанные переключения сети: (а) динамика  $R(t)$ , (б) распределение  $f(R)$  за длительное время. Результаты получены численно для  $I = 0.15$ ,  $\alpha = 0.7$ ,  $B = 0.004$ ,  $D = 0.02$  и размера сети  $N = 400$ .

Пунктирные линии на (а) указывают уровни высокой и низкой активности соответствующей модели среднего поля в термодинамическом пределе.

Сплошной линией на (б) показан двухъямный потенциал  $V$ .

низким, что позволяет шуму переключать систему между двумя состояниями. Пример спонтанных переключений системы между двумя состояниями приведен на Рис. 4.11.

Заметим, что данное явление ограничено достаточно малой областью параметров вблизи бифуркации. За пределами этой области потенциальный барьер становится слишком высоким, чтобы шум мог его преодолеть. В принципе, макроскопический шум  $\Psi(X)$  является мультипликативным, что делает поиск аналитического выражения для частоты переходов чрезвычайно трудным. Тем не менее, в первом приближении система может быть сведена к классической задаче Крамерса [183], если  $\Psi$  заменить на его среднее значение  $\Psi_m$ , полученное усреднением по значениям  $X$  между двумя потенциалами ямы. Рисунок 4.12(а) показывает, что  $\Psi_m$  можно считать хорошим

приближением для всего диапазона значений  $\Psi(X)$ . В этом случае время первого пересечения барьера между двумя ямами можно определить по формуле Крамерса [29, 116, 272]

$$T_{X_{\pm} \rightarrow X_{\mp}} \approx \frac{\pi}{\sqrt{|V''(X_{max})|V''(X_{\pm})}} \exp \left[ \frac{V(X_{max}) - V(X_{\pm})}{\Psi_m} \right], \quad (4.53)$$

где  $X_{\pm}$  относятся к двум минимумам двухъямного потенциала, тогда как  $X_{max}$  обозначает расположение его максимума. Тогда общая частота переключений определяется выражением  $\theta = 1 / (T_{X_{+} \rightarrow X_{-}} + T_{X_{-} \rightarrow X_{+}})$ . Для значений  $\alpha$  вблизи точки бифуркации последнее выражение дает хорошее качественное соответствие с численно наблюдаемыми данными, см. Рис. 4.12(б). Область, где  $\theta(\alpha)$  положительна, хорошо соответствует области, где точная система демонстрирует переключательную динамику, причем порядок значений  $\theta$  такой же, как и полученный в результате моделирования.

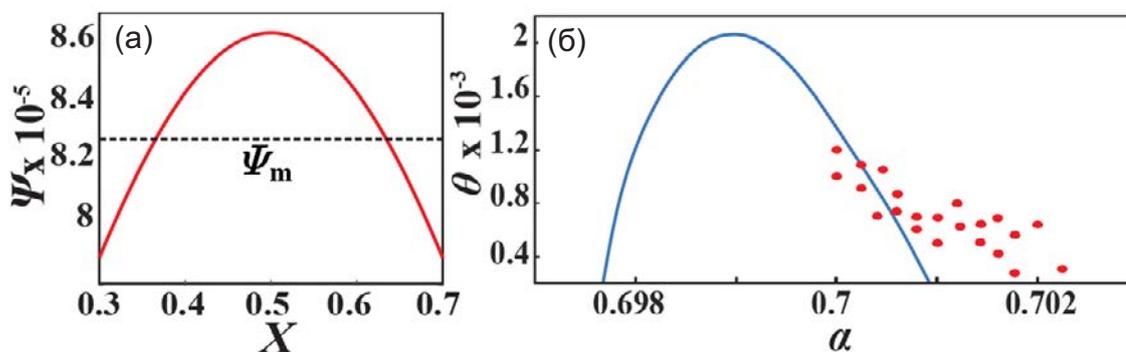


Рис. 4.12. (а) Макроскопический шум  $\Psi$  как функция среднего входа  $X$ .

Пунктирная линия указывает среднее значение  $\Psi_m$  в соответствующем диапазоне значений  $X$ . (б) Сплошной линией показана зависимость  $\theta(\alpha)$ ,

полученная для модели среднего поля по формуле Крамерса (4.49).

Точками указаны частот переключения, полученные численно для

$$I = 0.15, B = 0.004, D = 0.02 \text{ и } N = 400.$$

### 4.3. Среднеполевая динамика нейронной сети с кластерной структурой связей

В данном разделе среднеполевой подход обобщен на нейронные сети с кластерной архитектурой связей. Рассмотрим сеть, состоящую из  $N$  нейронов, организованных в кластеры, так что плотность связей внутри каждого кластера больше, чем плотность связей между нейронами из разных кластеров. Локальная динамика данного нейрона  $i$  из кластера  $X$  описывается моделью рейт-нейрона, аналогичной (4.21):

$$\frac{dr_{Xi}}{dt} = -\lambda_X r_{Xi} + H(I_{Xi}) + \sqrt{2D_X} \xi_{Xi}(t), \quad (4.54)$$

где  $\lambda_X$  определяет время релаксации,  $\xi_{Xi}(t)$  обозначает внутренний нейронный шум, а  $H$  – нелинейная передаточная функция. Общий ввод нейрона  $I_{Xi} = u_{Xi} + I_X + \sqrt{2B_X} \eta_{Xi}(t)$  состоит из синаптического ввода  $u_{Xi} = \sum_Y \kappa_{YX} \sum_j a_{YXji} r_{Yj}$  и тока внешнего смещения  $I_X$ , а также флуктуирующей компоненты  $\eta_{Xi}(t)$ . Топология связей в сети задается матрицей смежности  $a_{YXji} \in \{0, 1\}$ , где коэффициент  $a_{YXji}$  относится к связи от нейрона  $j$  в кластере  $Y$  к нейрону  $i$  из кластера  $X$ . Веса связи между двумя кластерами или внутри одного кластера считаются однородными, поэтому предполагается масштабирование  $\kappa_{YX} = K_{YX}/N$ . Как внешние, так и внутренние флуктуации моделируются гауссовым белым шумом, причем  $\langle\langle \xi_{Xi}(t) \xi_{Yj}(t') \rangle\rangle = \langle\langle \eta_{Xi}(t) \eta_{Yj}(t') \rangle\rangle = \delta_{XY} \delta_{ij} \delta(t - t')$  и  $\langle\langle \xi_{Xi}(t) \eta_{Yj}(t') \rangle\rangle = 0$ .

**4.3.1. Вывод среднеполевых уравнений.** В рамках среднеполевого подхода коллективная динамика каждого кластера  $X$  описывается сред-

ним значением  $R_X$  и соответствующей дисперсией  $S_X$ :

$$R_X = \frac{1}{N_X} \sum_i r_{Xi} \equiv \langle r_{Xi} \rangle$$

$$S_X = \langle r_{Xi}^2 \rangle - R_X^2, \quad (4.55)$$

где  $N_X = n_x N$  размер кластера  $X$ , тогда как  $\langle \cdot \rangle$  относится к усреднению по нейронам в данном кластере. Поведение сети в целом будет описывается набором взаимодействующих среднеполевых систем, каждая из которых относится к определенному кластеру. Сначала выведем стохастическую среднеполевую (макроскопическую) модель второго порядка для произвольного кластера путем усреднения локальной (микроскопической) динамики нейронов. Предположим, что  $r_{Xi}$  можно записать как  $r_{Xi} = R_X + \sqrt{S_X} \rho_{Xi}$ , где  $\rho_{Xi}$  – шумовые составляющие, удовлетворяющие  $\langle \rho_{Xi} \rangle = 0$ ,  $\langle \rho_{Xi}^2 \rangle = 1$ . Тогда общий вход  $I_{Xi}$  можно переписать как  $I_{Xi} = U_X + \delta v_{Xi}$ , где

$$U_X = I_X + \frac{1}{N} \sum_Y K_{YX} p_{YX} N_Y R_Y \quad (4.56)$$

$$\delta v_{Xi} = \frac{1}{N} \sum_Y K_{YX} R_Y \nu_{YXi} + \frac{1}{N} \sum_Y K_{YX} \sqrt{S_Y} \sigma_{YXi}. \quad (4.57)$$

Уравнение (4.56) представляет средний вход для кластера  $X$ , где  $p_{YX}$  обозначает вероятность связи от кластера  $Y$  к кластеру  $X$ . Отклонение  $\delta v_{Xi}$  от среднего входа  $U_X$  содержит два члена, а именно «топологический» и «динамический», при этом  $\nu_{YXi} = \sum_j a_{YXji} - p_{YX} N_Y$  учитывает отклонение от среднего числа связей  $p_{YX} N_Y$ , а  $\sigma_{YXi} = \sum_j a_{YXji} \rho_{Yj}$  описывает влияние локальной частоты колебаний.

Уравнения (4.56) и (4.57) позволяют разложить  $H(v_{Xi})$  в окрестности  $U_X$ , в результате чего получим  $H(v_{Xi}) = H_{0X} + H_{1X} \delta v_{Xi} + H_{2X} \delta v_{Xi}^2$ , где

$H_{0X} \equiv H(U_X)$ ,  $H_{1X} = \frac{dH}{dv_{Xi}}(U_X)$ ,  $H_{2X} = \frac{1}{2} \frac{d^2H}{dv_{Xi}^2}(U_X)$ . Из последнего выражения и определения  $R_X$  получим

$$\begin{aligned} \frac{dR_X}{dt} = & -\lambda_X \langle r_{Xi} \rangle + H_{0X} + 2B_X H_{2X} + H_{1X} \langle \Gamma_{1X} \rangle + \\ & H_{2X} \langle \Gamma_{2X} \rangle + \sqrt{2D_X} \langle \xi_{Xi}(t) \rangle, \end{aligned} \quad (4.58)$$

где  $\langle \Gamma_{1X} \rangle$  и  $\langle \Gamma_{2X} \rangle$  заданы как

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{1X} \rangle = & \frac{1}{N} \sum_Y K_{YX} R_Y \langle \nu_{YXi} \rangle + \frac{1}{N} \sum_Y K_{YX} \sqrt{S_Y} \langle \sigma_{YXi} \rangle \\ & + \sqrt{2B_X} \langle \eta_{Xi} \rangle, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{2X} \rangle = & \frac{1}{N^2} \sum_{YZ} K_{YX} K_{ZX} R_Y R_Z \langle \nu_{YXi} \nu_{ZXi} \rangle + \\ & \frac{1}{N^2} \sum_{YZ} K_{YX} K_{ZX} \sqrt{S_Y S_Z} \langle \sigma_{YXi} \sigma_{ZXi} \rangle + \\ & \frac{2}{N^2} \sum_{YZ} K_{YX} K_{ZX} R_Y \sqrt{S_Z} \langle \nu_{YXi} \sigma_{ZXi} \rangle + \\ & \frac{2\sqrt{2B_X}}{N} \sum_Y K_{YX} R_Y \langle \nu_{YXi} \eta_{Xi}(t) \rangle + \\ & \frac{2\sqrt{2B_X}}{N} \sum_Y K_{YX} \sqrt{S_Y} \langle \sigma_{YXi} \eta_{Xi}(t) \rangle. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Чтобы вычислить окончательное выражение для средней частоты кластера, необходимо оценить члены, содержащие  $\nu_{YXi}$  и  $\sigma_{YXi}$ , и соответствующие средние значения. Оценим по отдельности порядок каждого члена, составляющего  $\langle \Gamma_{1X} \rangle$  и  $\langle \Gamma_{2X} \rangle$ .

**4.3.2. Оценка эффектов конечного размера.** Сначала обратимся к выражению  $\nu_{YXi}$ , которое по определению представляет отклонение от среднего числа связей  $p_{YX} N_Y$ , проецируемых из кластера  $Y$  в данный

узел  $i$  кластера  $X$ . Из теории сложных сетей известно, что среднее по ансамблю различных сетевых конфигураций, которое мы обозначим через  $[\cdot]$ , равно  $[\nu_{YXi}] = 0$ , тогда как соответствующая дисперсия равна  $[\nu_{YXi}^2] = p_{YX}(1 - p_{YX})N_Y$ . Отсюда следует, что  $\langle \nu_{YXi} \rangle$  вносит свой вклад в постоянный случайный параметр, зависящий от конкретной конфигурации сети. Разброс данного члена между различными конфигурациями составляет порядка  $[\langle \nu_{YXi} \rangle^2] = \frac{p_{YX}(1-p_{YX})N_Y}{N_X} \approx \widetilde{p_{YX}}N_Y/N_X$ , где  $\widetilde{p_{YX}} = p_{YX}$  для редких связей  $p_{YX} \ll 1$  и  $\widetilde{p_{YX}} = 0$  для частых связей  $p \sim 1$ . Выражение  $\langle \nu_{YXi}\nu_{ZXi} \rangle$  можно трактовать аналогичным образом, различая однако случаи  $Y = Z$  и  $Y \neq Z$ . Если  $Y = Z$ , можно явно использовать оценку  $[\langle \nu_{YXi}^2 \rangle] = p_{YX}(1 - p_{YX})N_Y \approx p_{YX}N_Y$ , а если  $Y \neq Z$ , выражение  $\langle \nu_{YXi}\nu_{ZXi} \rangle$  вносит вклад в случайный постоянный параметр, дисперсия которого по ансамблю различных сетевых конфигураций может быть оценена как  $[\langle \nu_{YXi}\nu_{ZXi} \rangle^2] = p_{YX}N_Y p_{ZX}N_Z/N_X$ .

Выражения, содержащие  $\sigma_{YXi}$ , можно оценить следующим образом. Из определения следует, что  $\sigma_{YXi} = \sum_j a_{YXji}\rho_{Yj} = \sum_{j \in \mathcal{C}_{YXi}} \rho_{Yj}$ , т. е. сумма проходит по подмножеству нейронов из кластера  $Y$ , которые проецируются на нейрон  $i$  из кластера  $X$ . Такая подборка содержит небольшое количество элементов  $p_{YX}N_Y$ , если связь между кластерами  $Y$  и  $X$  редкая ( $p_{YX} \ll 1$ ). Если же связь частая ( $p_{YX} \sim 1$ ), то сумма  $\sigma_{YXi} \approx 0$ , поскольку отклонение от предельного случая  $p_{YX} = 1$  из-за подмножества нейронов, которые не проецируются из  $Y$  в  $Xi$ , невелико. Хотя нельзя *априори* ничего сказать о распределении  $\rho_{Yj}$ , в первом приближении их можно рассматривать как набор нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Это позволяет нам рассматривать  $\sigma_{YXi}$  как набор нормально

распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией  $p_{YX}N_Y$ . Также заметим, что корреляция  $\sigma_{YXk}\sigma_{YXl} = \sum_{i,j} a_{YXik}a_{YXjl} = p_{YX}^2 N_Y$ , мала из-за малости  $p_{YX}$ , так что все члены  $\sigma_{YXi}$  можно считать некоррелированными.

Приведенные выше аргументы подразумевают, что  $\langle \sigma_{YXi} \rangle$  можно оценить как шумовые с нулевым средним и дисперсией  $[\langle \sigma_{YXi} \rangle^2] = (1 - \widetilde{p_{YX}})N_Y/N_X$ . Аналогично можно показать, что переменные  $\sigma_{YXi}^2$  могут рассматриваться как случайные величины, среднее значение и дисперсия которых удовлетворяют  $[\sigma_{YXi}^2] = p_{YX}N_Y$  и  $[\sigma_{YXi}^4] - [\sigma_{YXi}^2]^2 = 2p_{YX}^2 N_Y^2$  соответственно.

Полученные результаты позволяют систематически оценить вклад всех членов правых частей уравнений (4.59) и (4.60). В уравнении (4.59) таким образом возникают эффекты конечного размера различной природы. В частности, первый член содержит эффективный случайный параметр, связанный с данной сетевой конфигурацией, и может быть записан как  $\frac{1}{N}K_{YX}R_Y\sqrt{p_{YX}N_Y/N_X}\gamma_1$ , где  $\gamma_1$  – случайный параметр  $\mathcal{N}(0,1)$ , который зависит от конфигурации сети но не меняется со временем. Второй элемент из правой части уравнения (4.59) можно представить как шум с интенсивностью порядка  $\mathcal{O}(1/N)$ , который задается выражением  $\frac{1}{N}K_{YX}\sqrt{S_Y}\sqrt{p_{YX}N_Y/N_X}\gamma_2(t)$ . Третий член из правой части уравнения (4.59) представляет собой сумму локальных внешних шумов, которая дает макроскопический шум  $\sqrt{2B_X/N_X}\xi_X(t)$ .

Что касается  $\langle \Gamma_{2X} \rangle$ , члены, содержащие  $\langle \nu_{YXi}\nu_{ZXi} \rangle$  и  $\langle \sigma_{YXi}\sigma_{ZXi} \rangle$  для  $Y = Z$  вместе обеспечивают детерминированный эффект конечного размера порядка  $\mathcal{O}(1/N)$  и вида  $\frac{1}{N}K_{YX}^2 p_{YX} n_Y (R_Y^2 + S_Y)$ . Остаточный вклад таких членов для  $Y = Z$  и  $Y \neq Z$  составляет случайные постоянные параметры и шу-

мовые члены, интенсивность которых имеет порядок  $\mathcal{O}(N^{-3/2})$ , поэтому ими можно пренебречь. Так например, члены, содержащие  $\langle \nu_{YX} \nu_{ZX} \rangle$  для  $Y \neq Z$ , могут быть оценены как  $\frac{1}{N^2} K_{YX} K_{ZX} R_Y R_Z \sqrt{p_{YX} p_{ZX} N_Y N_Z / N_X} \sim \mathcal{O}(N^{-3/2})$ . Наконец, усреднение по всем членам из правой части уравнения (4.60), содержащим шум  $\eta_{X_i}(t)$  на макроскопическом уровне, обеспечивает стохастические эффекты порядка  $\mathcal{O}(1/N^2)$ , которыми также можно пренебречь.

Объединяя все результаты, полученные ранее, приходим к следующему уравнению для среднеполевой динамики кластера:

$$\begin{aligned} \frac{dR_X}{dt} = & -\lambda_X R_X + H_{0X} + 2B_X H_{2X} + \\ & H_{2X} \sum_Y K_{YX}^2 p_{YX} n_Y (R_Y^2 + S_Y) / N + \\ & \sqrt{\Psi_X} \beta(t) + \sqrt{\Omega_X} \eta, \end{aligned} \quad (4.61)$$

где макроскопический шум имеет интенсивность

$$\Psi_X = \frac{1}{N} (2D_X + 2B_X H_{1X}^2) + \frac{1}{N} H_{1X}^2 \sum_Y K_{YX}^2 p_{YX} \frac{N_Y}{N_X} S_Y, \quad (4.62)$$

величина «топологической неопределенности»

$$\Omega_X = \frac{1}{N} H_{1X}^2 \sum_Y K_{YX}^2 p_{YX} \frac{N_Y}{N_X} R_Y^2, \quad (4.63)$$

$\beta(t)$  представляет собой белый шум единичной интенсивности, а  $\eta$  – постоянное случайное число  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Из трех членов, составляющих макроскопический шум, два члена в первой скобке представляют вклад от локального внутреннего и внешнего шума, переведенный на макроскопический уровень, тогда как третий член имеет другой характер и отражает влияние локальных флуктуаций входных сигналов, поступающих на каждый нейрон в кластере.

Применяя производную Ито, можно аналогично получить уравнения для дисперсии  $S_X$ . Опуская детали вычислений, отметим лишь, что если при этом пренебречь эффектами конечного размера порядка  $\mathcal{O}(1/N)$ , а также всеми шумовыми членами и членами, связанными с топологической неопределенностью, окончательное уравнение для дисперсии имеет вид

$$\frac{dS_X}{dt} = -2\lambda_X S_X + 2B_X H_{1X}^2 + 2D_X. \quad (4.64)$$

Уравнения (4.61) и (4.64) представляют стохастическую среднеполевую модель второго порядка, описывающую коллективную активность каждого кластера в сети.

**4.3.3. Мультистабильность и медленные флуктуации активности в кластерной сети.** В предыдущем разделе мы показали, что в однородных случайных сетях существует область бистабильности, и в непосредственной близости от бифуркации трехкратного состояния равновесия в ней наблюдаются спонтанные переключения между метастабильными состояниями. Ниже будет показано, что кластеризация связей способствует возрастанию мультистабильности сети, то есть появлению большего числа уровней активности. Увеличение числа уровней сети происходит из-за состояний с нарушенной симметрией, где *подмножества кластеров* занимают разные уровни, находящиеся либо в верхнем, либо в нижнем состоянии. Также в случае кластерной сети увеличивается область параметров, в которой наблюдаются спонтанные переключения между уровнями. Причина этого в том, что стохастические члены могут вызывать переключения в пределах одного кластера, и кроме того влияние эффекта конечного размера более выражено для отдельных кластеров, чем для всей сети.

Рассмотрим случай, когда сеть состоит из  $m$  равных кластеров размером  $N_c = N/m$ . Для адекватного сравнения со случаем однородной средняя вероятность связности во все сети сохраняется на уровне  $p = 0.2$ . Введем параметр кластеризации  $g$  для характеристики топологической неоднородности, равный соотношению между связанностью внутри кластера  $\alpha_{in} = Kp_{in}/N_c$  и между кластерами, и  $\alpha_{out} = Kp_{out}/N_c$  соответственно, так что  $\alpha_{in} = g\alpha_{out}$ , где  $g > 1$ . Чем больше  $g$ , тем сильнее кластеризация, при этом предельный случай  $g = 1$  описывает некластеризованную сеть, тогда как случай  $g \rightarrow \infty$  соответствует сети несвязанных кластеров. Можно показать, что  $\alpha_{in}$  и  $\alpha_{out}$  могут быть выражены в терминах связности исходной однородной сети  $\alpha$  как

$$\begin{aligned}\alpha_{in} &= \frac{gm}{m-1+g}\alpha \\ \alpha_{out} &= \frac{m}{m-1+g}\alpha.\end{aligned}\tag{4.65}$$

Это позволяет сравнивать соответствующие области параметров между однородной и кластерной сетями.

Рассмотрим стационарное решение системы, в котором  $l$  кластеров занимают состояние  $R_1$ , а  $m-l$  кластеры лежат в  $R_2$ . В то время как однородное состояние обладает перестановочной симметрией  $\Sigma_m$  относительно всех кластерных индексов, рассматриваемые решения имеют пониженную симметрию  $\Sigma_l \otimes \Sigma_{m-l}$ . В классе таких решений среднеполевая модель для активности

кластеров в термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dR_1}{dt} &= -2U_1(R_1, R_2)^3 + 3U_1(R_1, R_2)^2 + \\ &\quad 6B(1 - 2U_1(R_1, R_2)) - R_1 \\ \frac{dR_2}{dt} &= -2U_2(R_1, R_2)^3 + 3U_2(R_1, R_2)^2 + \\ &\quad 6B(1 - 2U_2(R_1, R_2)) - R_2,\end{aligned}\tag{4.66}$$

где

$$\begin{aligned}U_1(R_1, R_2) &= I_1 + \frac{\alpha}{m-1+g}[(g+l-1)R_1 + (m-l)R_2] \\ U_2(R_1, R_2) &= I_2 + \frac{\alpha}{m-1+g}[lR_1 + (g+m-l-1)R_2].\end{aligned}\tag{4.67}$$

Дисперсии  $S_1$  и  $S_2$  могут быть заменены их соответствующими стационарными значениями  $S_i^* = (B_X H_i^2 + D)/\lambda$ , с  $i \in \{1, 2\}$ . Используя (4.67), можно выразить  $R_1$  и  $R_2$  через  $U_1$  и  $U_2$ :

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{U_1 - I}{\alpha} + \frac{m-l}{\alpha(g-1)}(U_1 - U_2) \\ R_2 &= \frac{U_2 - I}{\alpha} + \frac{l}{\alpha(g-1)}(U_2 - U_1).\end{aligned}\tag{4.68}$$

Подставляя последние выражения в (4.66), стационарные состояния среднего поля определяется системой

$$\begin{aligned}I - f(U_1) + \delta(m-l)(U_2 - U_1) &= 0 \\ I - f(U_2) + \delta l(U_2 - U_1) &= 0,\end{aligned}\tag{4.69}$$

где  $f(U) = 2\alpha U^3 - 3\alpha U^2 + (1 + 12B\alpha)U - 6B\alpha$ , и  $\delta = (g-1)^{-1}$ . Заметим, что  $f(U_i)$  в (4.69) имеют точно такую же форму, что и правая часть уравнения (4.40) для однородной случайной сети. Система (4.69) естественно обладает симметрией относительно замены  $l$  на  $m-l$  и  $U_1$  на  $U_2$  ( $l \leftrightarrow m-l, U_1 \leftrightarrow U_2$ ).

Анализ (4.69) показывает, что помимо однородных состояний, описанных в разд. 4.2.4., существуют также и неоднородные состояния, в которых активность двух групп кластеров различна,  $R_1^* \neq R_2^*$ . Рассмотрим для примера сеть из  $m = 5$  кластеров, в которой из-за симметрии случаи  $l = 1$  и  $l = 2$  исчерпывают все возможные кластерные решения. Бифуркационные диаграммы для неоднородных состояний приведены на Рис. 4.13, левый и правый графики относятся к случаям  $l = 1$  и  $l = 2$ , соответственно. Для значений  $\delta$ , меньших уровня, указанного зеленой пунктирной линией на Рис. 4.13(б), существует область значений  $I$ , в которой могут сосуществовать два неоднородных решения, тогда как выше заданные  $\delta$  можно найти только моностабильные неоднородные состояния.

Заметим, что область сосуществования двух неоднородных состояний допускает в общей сложности 9 стационарных решений среднеполевой модели (4.66), тогда как в двух областях с одним неоднородным кластерным режимом существует 7 решений. Большинство кривых на Рис. 4.13, соответствуют бифуркациям седло-узел. В частности, переходы из областей с 1 решением в области с 3 решениями и наоборот соответствуют возникновению или исчезновению однородных состояний. Кроме того, граница между областями с решениями 5 и 7 задается ветвями бифуркаций седло-узел, которые сходятся в точке трехкратного состояния равновесия. Переходы между областями с 3 и 5 решениями представляют собой седло-узловые бифуркации неоднородных состояний внутри подгруппы симметрии  $\Sigma_l \otimes \Sigma_{m-l}$ . Большая средняя связность  $\alpha$  позволяет неоднородным состояниям возникать при более низкой кластеризации, что подтверждается сдвигом соответствующей области  $\delta$  к более низким значениям при увеличении  $\alpha$  и сохранении всех осталь-

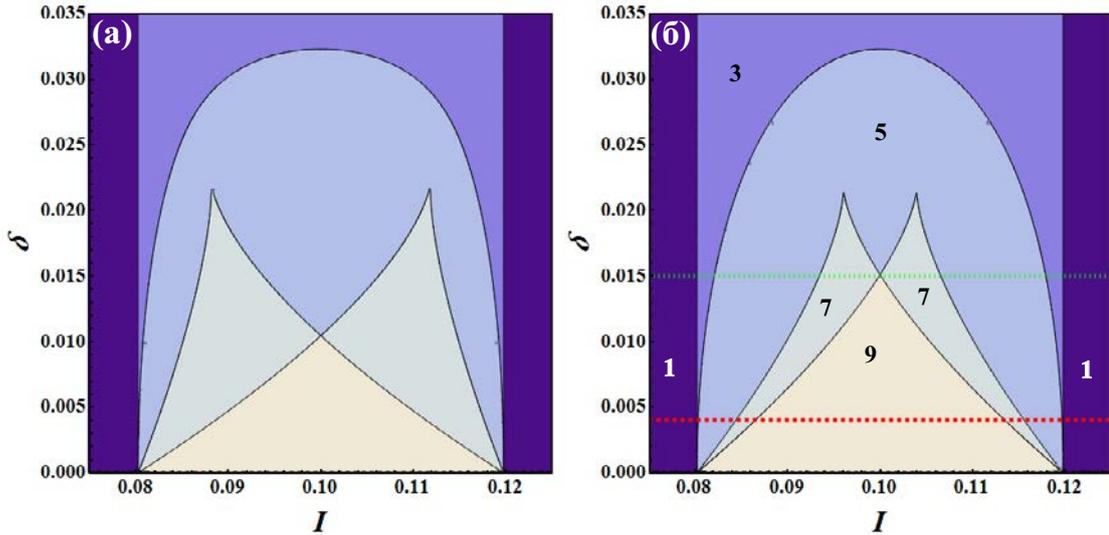


Рис. 4.13. Бифуркационные диаграммы  $\delta(I)$  для неоднородных решений модели среднего поля (4.66). (a) соответствует случаю  $l = 1$ , тогда как (b) относится к случаю  $l = 2$ . В (b) указано общее количество решений,

полученных для модели среднего поля в различных областях параметров.

Области с 1 и 3 решениями допускают только однородные состояния, а область с 5 решениями содержит неустойчивые неоднородные состояния. Области с решениями 7 и 9 обеспечивают моностабильные неоднородные состояния и сосуществование между двумя неоднородными состояниями соответственно. Бистабильность возникает только при достаточно сильной кластеризации, обозначенной зеленой пунктирной линией. Остальные

параметры сети:  $m = 5$ ,  $B = 0.004$ ,  $\alpha = 0.8$ .

ные параметры фиксированными. Также данная область  $\delta$  уменьшается при увеличении шума  $B$ , а также смещается в сторону более низкого  $\delta$  при увеличении количества кластеров  $m$  (не показано).

Более подробную картину неоднородных состояний и областей их существования можно получить, анализируя соответствующие бифуркационные

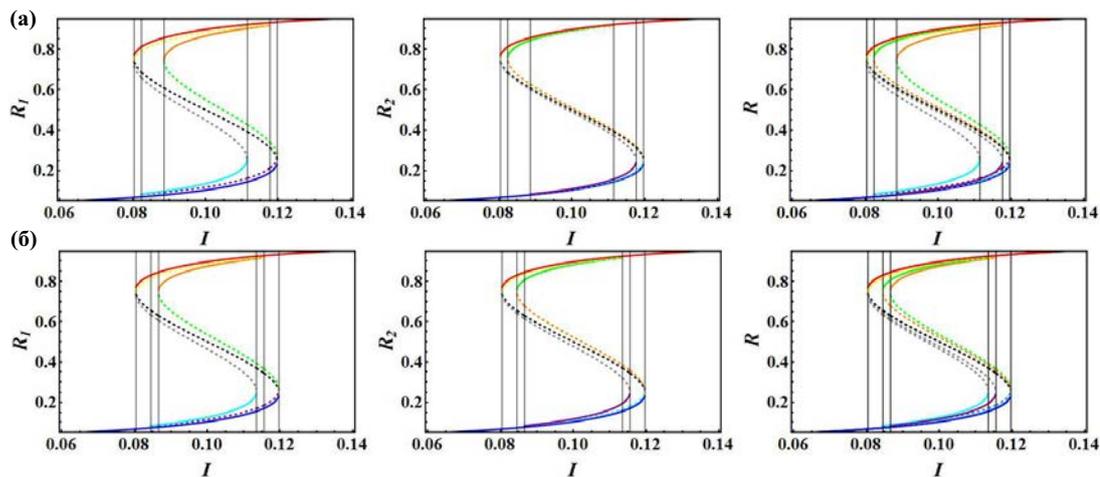


Рис. 4.14. Бифуркационные диаграммы  $R(I)$  для сильной кластеризации  $\delta = 0.004$ , см. уровень, обозначенный красной пунктирной линией на Рис. 4.13(б). Группы рисунков (а) и (б) соответствуют случаям  $l = 1$  и  $l = 2$  соответственно. Левая и средняя колонки относятся к состояниям определенных групп кластеров  $R_1$  и  $R_2$ . Последние накладываются в правом столбце, чтобы указать возможные состояния сети. Устойчивые решения показаны сплошными линиями, а неустойчивые ветви - штриховыми линиями. Остальные параметры системы:  $m = 5, B = 0.004, \alpha = 0.8$ .

диаграммы  $R(I)$  при фиксированных  $(m, l, B, \delta, \alpha)$ . Графики на Рис. 4.14 относятся к значениям  $(\delta, I)$ , которые поддерживают сосуществование двух неоднородных состояний. Верхняя и нижняя группа графиков относятся к  $l = 1$  и  $l = 2$  соответственно. Левый и средний столбцы относятся к состояниям, занятым группами кластеров  $l$  и  $m - l$ , соответственно, тогда как правый столбец относится ко всей сети (левый и средний графики наложены друг на друга).

Четко различаются области, где стабильно только одно кластерное решение (либо  $l$  кластеров в нижнем состоянии и  $ml$  в верхнем состоянии, ли-

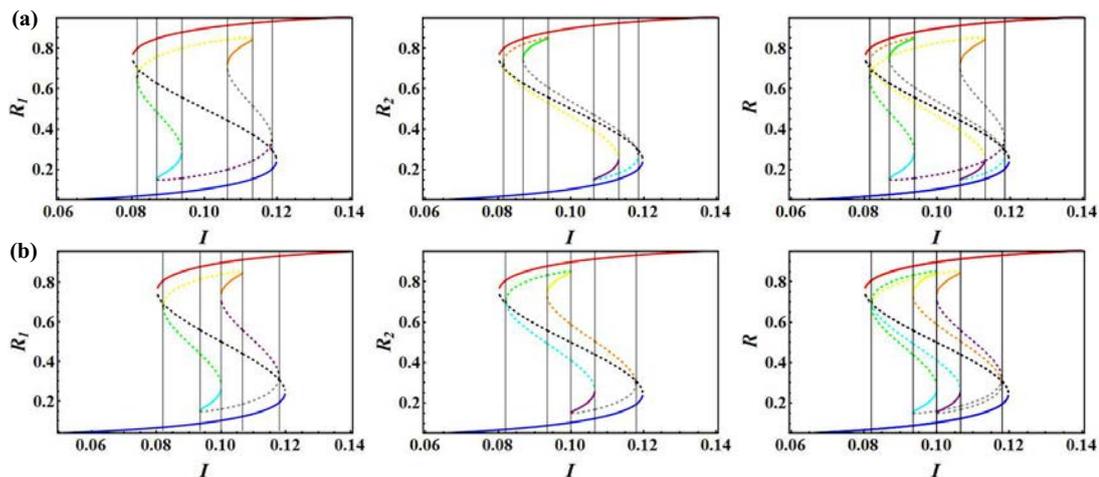


Рис. 4.15. Бифуркационные диаграммы  $R(I)$  в случае слабой кластеризации  $\delta = 0,0151$ , значение чуть выше уровня, обозначенного красной пунктирной линией на Рис. 4.13(б). Верхняя и нижняя панели соответствуют случаям  $l = 1$  и  $l = 2$  соответственно. Вид графиков такой же, как на Рис. 4.14.

Остальные параметры сети:  $m = 5$ ,  $B = 0.004$ ,  $\alpha = 0.8$ .

бо наоборот), и центральную область  $I$ , где два кластерные решения сосуществуют. Например, сосуществование двух кластерных решений обнаружено для  $I \in (0.0866, 0.1135)$ , тогда как области с  $l$  кластерами на верхнем или нижнем уровне в качестве единственных кластерных решений задаются  $I \in (0.0845, 0.0866)$  и  $I \in (0.1135, 0.1156)$ . Заметим, что самая верхняя и самая нижняя кривые на обоих уровнях указывают на однородные состояния. Области существования неоднородных состояний меньше, чем области, поддерживающие однородные состояния.

На Рис. 4.15 показаны бифуркационные диаграммы  $R(I)$  для меньшей кластеризации, которые больше не допускает бистабильности между неоднородными состояниями. Верхние и нижние графики снова относятся к случаям  $l = 1$  и  $l = 2$ , соответственно. Два интервала  $I$ , в которых существуют оди-

ночные кластерные решения, разделены интервалом  $I$ , в котором существуют только два однородных состояния.

Анализ мультистабильности кластерной сети, полученный для среднеполевой модели в термодинамическом пределе, позволяет классифицировать все состояния сети, а также получить представление о механизме, лежащем в основе спонтанных переключений при конечном размере сети. В последнем случае предсказания модели носят лишь качественный характер, так как среднеполевая модель становится неточной в окрестности бифуркаций, где флуктуации за счет эффектов конечного размера наиболее выражены. Тем не менее, с помощью среднеполевых моделей можно сравнить динамику однородной и кластерной сети. В частности, для однородной сети переключения происходят в области бистабильности, причем преимущественно в непосредственной близости от бифуркации трехкратного равновесия. Для кластеризованной сети мультистабильность, возникающая за счет кластерной топологии, способствует переключениям, так как приводит к большему количеству уровней активности с меньшим «расстоянием» между уровнями. Тогда переключение между различными уровнями становится более вероятным. Другой причиной является то, что эффект конечного размера внутри кластеров более выражен, учитывая их меньший размер по сравнению со всей сетью.

Чтобы проиллюстрировать влияние кластеризации на возникновение колебаний с медленной скоростью, рассмотрим пример, в котором параметры системы  $B, I, \alpha$  зафиксированы как  $B = 0.01, I = 0.0513, \alpha = 0.9$ . Для данного  $B$  выбранные значения  $(\alpha, I)$  лежат глубоко внутри языка бистабильности однородной случайной сети, вдали от бифуркации трехкратного равновесия.

При этом спонтанные переключения в однородной сети не наблюдаются (не показано). Если же ввести в данной сети кластеризацию, то для достаточно большого  $g$  (малого  $\delta$ ) кластерная сеть демонстрирует выраженные переключения для тех же значений  $(I, \alpha)$ , см. Рис. 4.16. На данном рисунке представлена зависимость от времени активности отдельных кластеров  $R_i(t)$  и всей сети  $R_N(t)$ . Заметим, что параметры кластерной сети принадлежат области, поддерживающей максимальную мультистабильность, т.е. области, где модель среднего поля (4.66) допускает 9 различных решений, допускающих сосуществование двух неоднородных состояний в одной и той же подгруппе симметрии  $\Sigma_l \otimes \Sigma_{m-l}$ . Переключения сети между различными уровнями происходят спонтанно и достаточно часто, при этом изменяется как активность отдельных кластеров, так и средняя активность всей сети.

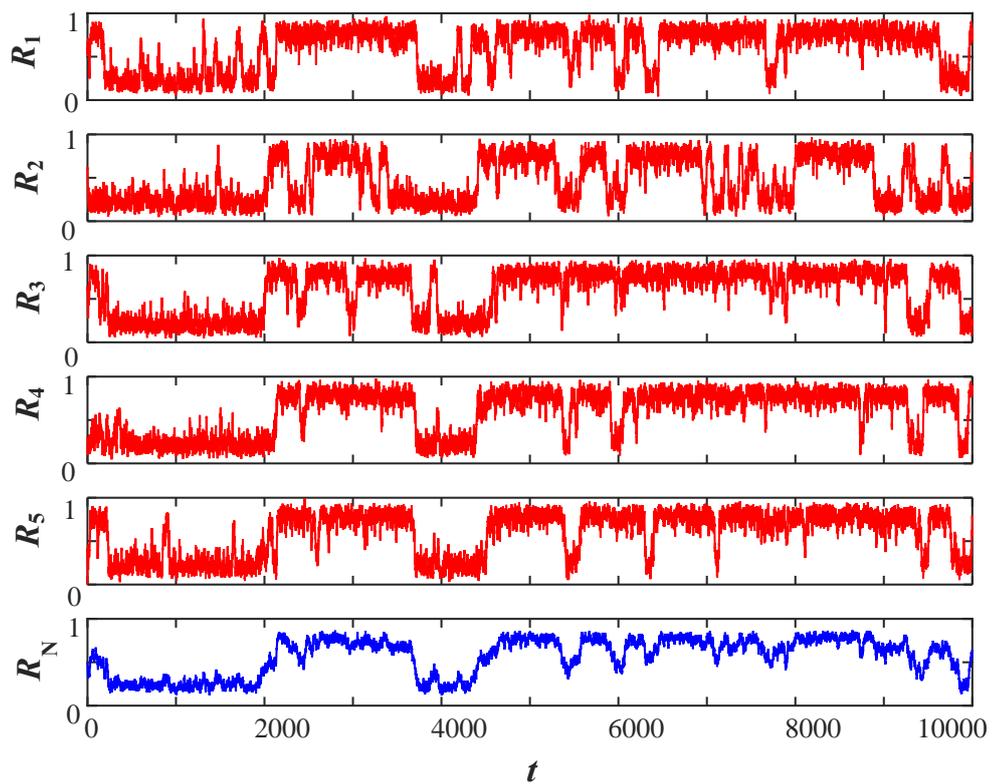


Рис. 4.16. Переключательная динамика кластерной сети: средняя частота отдельных кластеров  $R_i(t)$ ,  $i \in \{1, \dots, 5\}$  и всей сети  $R_N(t)$ . Параметры сети  $m = 5$ ,  $B = 0.01$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $I = 0.0513$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $N = 500$ .

#### 4.4. Заключение к четвертой главе

В настоящей главе предложена модель кластерной сети, воспроизводящая экспериментально наблюдаемые статистические характеристики синаптических связей в кортикальных сетях коры головного мозга крыс, а также исследовано влияние кластеризации синаптических связей на коллективную динамику нейронных сетей.

В разделе 4.1 представлена модель кластеризации синаптических соединений в зрительной коре головного мозга крыс. Модель предполагает существование выделенных подмножеств кластерных нейронов с разной связностью и различным распределением синаптических весов внутри и вне кластеров. Модель воспроизводит несколько основных характеристик, наблюдаемых экспериментально: (а) вероятность обнаружения тесно связанных небольших групп нейронов выше, чем в случайных сетях; (б) синаптические связи между элементами тесно связанных групп сильнее, чем в среднем; (в) общее распределение сил синапсов подчиняется логнормальному распределению с длинным хвостом. Также примечательно, что хотя наша модель в первую очередь касается слоя 5 зрительной коры головного мозга крыс, было показано, что модель согласуется с недавними экспериментальными наблюдениями, полученными из других областей коры головного мозга [269, 276]. Эти результаты предполагают, что отражаемые моделью особенности неслучайной связи и кластеризации могут быть более широко применимы в различных областях мозга.

Модель делает несколько предсказаний об архитектуре проводки локальных корковых цепей, которые в принципе могут быть проверены эксперимен-

тально. Первое предсказание состоит в том, что небольшие объемы неокортекса содержат относительно большие кластеры возбуждающих нейронов, которые очень плотно связаны друг с другом. Нейроны в кластере составляют примерно одну пятую от общей популяции коры. Таким образом, локальные подсети, состоящие примерно из ста нейронов, содержат кластеры примерно из двадцати тесно связанных между собой нейронов. Во-вторых, предсказано, что распределения сил синапсов будут иметь разные профили в нейронах, принадлежащих кластеру, и в нейронах, не принадлежащих ему. Хотя экспериментальное подтверждение полной диаграммы связности корковых нейронов в настоящее время кажется затруднительным, компьютерно-автоматизированные методы реконструкции в сочетании с современными технологиями обработки изображений, такими как коннектомика [7, 24, 34, 61], могут позволить получить такие данные в ближайшем будущем.

Интересно отметить взаимосвязь между кластеризацией, предсказываемой моделью, и специфическими для функции анатомическими связями в локальных корковых цепях. В ряде недавних исследований сообщается, что вероятность связи между корковыми нейронами зависит от их функциональных свойств. Например, слой 2/3 первичной соматосенсорной коры имеет подмножество высокоактивных пирамидных нейронов, которые, вероятно, связаны друг с другом чаще, чем другие [388]. Связь между нейронами слоя 2/3 в зрительной коре существенно зависит от сходства визуально вызванных нейронных ответов [175] и паттерна межслойных проекций в локальных кортикальных сетях [390].

С динамической точки зрения непосредственным следствием синаптической кластеризации является генерация бистабильного режима в сетевой ди-

намике с четко различимыми «высокими» и «низкими» состояниями. Разумеется, бистабильность может быть достигнута и в рекуррентной сети без кластеров путем усиления связей или увеличения размера сети [367, 378]. Параметрическое исследование показывает, что сети без кластеризации демонстрируют бистабильность только тогда, когда они становятся очень большими ( $N \sim 1000$ ), в то время как с кластеризацией они становятся бистабильными при гораздо более низких значениях  $N \sim 100$ . Это также верно для разных размеров кластеров ( $\beta = 0.1$  и  $\beta = 0.3$ ). Таким образом, относительно большие и плотные кластеры приводят к появлению бистабильности в мелкомасштабных корковых цепях.

Бистабильное поведение играет важную роль для различных задач нейронных вычислений [378], таких как временная интеграция при принятии решений [181, 256] и рабочая память [241, 271, 367]. В настоящей главе этот феномен продемонстрирован в сети с биологически релевантной структурой связи. Примечательно, что минимальный размер сети, допускающей бистабильность, примерно соответствует количеству клеток в «миниколонке» [228, 245], которая является минимальным функциональным модулем неокортекса. Также отметим, что предложенная модель демонстрирует устойчивые состояния возбуждения в сенсорной коре, области, в которой ряд недавних экспериментов предполагал наличие рабочей памяти, включая V4, МТ, нижневисочную кору (IT), первичную и вторичную соматосенсорную кору [271, 365]. Устойчивые состояния возбуждения были также ранее продемонстрированы в слуховой коре [316, 369] и гиппокампе [200].

В то время как бистабильное поведение небольшой сети ясно показывает возможную роль кластерных соединений, роль разреженных некластери-

зованных соединений остается неясной в небольшой сети. Возможная роль некластеризованных соединений проявляется в динамике крупномасштабных сетей, в которых редкие некластеризованные соединения генерируют низкочастотную спонтанную активность [339]. На фоне этой низкой активности кластерные соединения создают локальные области, демонстрирующие высокую активность. Было показано, что стабильность этой повышенной активности и количество кластеров, которые могут быть совместно активированы одновременно, зависят от размера кластеров. Таким образом, изменение размера каждого кластера дает простой, но полезный метод управления количеством одновременно доступных модулей памяти в локальных кортикальных сетях без какой-либо тонкой настройки.

Влияние кластеризации соединений на динамику крупномасштабной сети изучалось и ранее. Так, Litwin-Kumar и Doiron [209] показали, что кластеризация соединений вызывает медленную динамику в сети, вызывая кратковременное увеличение или уменьшение активности кластеров. Таким образом, состояния с высокой и низкой активностью становятся метастабильными. Для более детального исследования роли кластеризации в динамике кортикальных сетей был применен среднеполевой подход, позволяющий сводить динамику таких сетей к низкоразмерным редуцированным моделям, допускающим аналитическое исследование.

В разделе 4.2 была получена и детально исследована среднеполевая модель для сети с однородными случайными редкими связями. Динамика сети была описана в терминах усредненной частоты возбуждения и связанной с ней дисперсии. В термодинамическом пределе динамика сети носит детерминированный характер. Были определены стационарные уровни сете-

вой активности, и показано, что при достаточно сильных связях сеть демонстрирует бистабильный режим, характеризуемый сосуществованием низкого и высокого стабильных состояний. Также развитая теория позволила рассмотреть динамику больших, но конечных сетей. Эффекты конечного размера имеют двойной характер и состоят в (а) смещении стационарных уровней и (б) в возникновении стохастических флуктуаций средней скорости. Было продемонстрировано, что разработанный подход обеспечивает удовлетворительную оценку величины флуктуаций для области параметров, достаточно удаленной от бифуркаций. Однако наиболее интересные эффекты возникают в непосредственной близости к бифуркации трехкратного состояния равновесия, где сеть обладает двумя стабильными уровнями активности, которые относительно близки друг к другу. При этом величина флуктуаций может стать порядка расстояния между уровнями, что вызывает стохастическое переключение между низким и высоким состоянием. При этом динамика активности сети может быть описана в парадигме движения частицы в двухъямном потенциале под действием шума. Данный механизм сам по себе является универсальным, однако он ограничен небольшой окрестностью точки бифуркации.

В разделе 4.3 среднеполевой подход применен к кластерной сети, включающей в себя несколько подмножеств нейронов – кластеров – связи в которых существенно более плотные, чем по сети в целом. Проведен вывод редуцированной системы, которая описывает сетевую активность в терминах взаимодействующих моделей среднего поля, представляющих каждый из кластеров. Было продемонстрировано, что модель среднего поля может быть использована для качественного анализа спонтанной активности кластерной сети.

Показано, что кластеризация влияет на коллективную динамику нейронных сетей нетривиальным образом, способствуя увеличению ее мультистабильности, а также спонтанным переключениям между метастабильными уровнями с различной активностью.

Бифуркационный анализ модели кластерной сети в термодинамическом пределе показал, что ключевой эффект введения кластеризации заключается в увеличении мультистабильности сети путем формирования новых уровней локализованной активности. Каждый такой уровень соответствует состоянию, при котором активность одного или нескольких кластеров повышена по сравнению с активностью сети в целом. Таким образом, различные группы кластеров находятся в верхнем либо нижнем состояниях. При исследовании сетей конечного размера показано, что наличие большого числа уровней способствует спонтанной переключательной динамике, так как переключение между различными уровнями сети может быть достигнуто путем изменения состояний отдельных кластеров, а не всей сети. При этом переключение внутри отдельных кластеров более вероятно, поскольку эффект конечного размера для них более выражен, чем для сети в целом. Таким образом, феномен спонтанных переключений становится более устойчивым и распространяется на области параметров, в которых его нельзя наблюдать в некластеризованной сети.

## Заключение

Полученные в диссертационной работе основные научные результаты заключаются в следующем:

1. Разработана концепция функции перестановки фазы, описывающей отклик автоколебательной динамической системы на внешний сигнал в форме последовательности импульсов. Подход на основе функции перестановки фазы является обобщением классического подхода на основе кривой переустановки фазы и применим для описания фазовой динамики в случае сильных и частых воздействий.

2. Определены понятия порога устойчивости и порога переключения мультистабильных динамических систем, характеризующие форму и взаимное расположение бассейнов притяжения различных аттракторов. Предложены численные алгоритмы определения данных характеристик для широкого класса динамических систем. Показано, что матрица порогов переключения в мультистабильной системе позволяет получить важную информацию о динамике такой системы под внешним воздействием, в том числе стохастическим.

3. Разработана техника редукции динамики сетевых систем с импульсными запаздывающими связями к многомерным точечным отображениям. Динамика сети разворачивается как последовательность дискретных событий, связанных с генерацией и получением импульсов ее узлами. На основе полученных точечных отображений разработаны эффективные методы численного моделирования сетевых систем с импульсными запаздывающими связями.

4. В автоколебательных системах с импульсной запаздывающей обратной связью при большом запаздывании обнаружен новый сценарий дестабили-

зации колебаний с периодом, близким к собственному. При этом в системе возникают сложные длиннопериодические, квазипериодические и хаотические колебания, характеризующиеся высокой мультистабильностью. Период возникающих периодических колебаний пропорционален величине задержки, а число сосуществующих режимов возрастает экспоненциально с ростом величины задержки.

5. Показано, что в автоколебательных сетях с запаздывающими связями синхронизация между элементами сети может наблюдаться при сколь угодно большой величине запаздывания. При этом в зоны синхронизации в пространстве параметров формируют структуру, близкую к периодической по отношению к величине запаздывания. В больших сетях дестабилизация синхронных режимов на границах зон происходит через механизм проскальзывания фазы.

6. Показано, что в неоднородной популяции автоколебательных и возбудимых элементов при увеличении дисперсии локальных параметров происходит переход от состояния покоя к синхронным колебаниям сети, а затем к асинхронным колебаниям. Продемонстрировано, что такой переход может быть как непрерывным, так и скачкообразным с гистерезисным поведением системы.

7. Получена редуцированная система уравнений для усредненных переменных, описывающая макроскопическую динамику нейронной сети со случайными редкими связями и шумом. Получена редуцированная среднеполевая модель, описывающая сетевую динамику сети с кластерной структурой связей в терминах связанных стохастических моделей второго порядка для каждого кластера.

8. Описаны динамические механизмы возникновения мультистабильности в нейронных сетях со случайными и кластерными связями, а также механизмы спонтанных переключений между уровнями различной активности. Показано, что кластеризация связей способствует мультистабильности и спонтанным переключениям.

## Список публикаций по теме диссертации

[1A] Klinshov V. V., Nekorkin V.I. Synchronization of time-delay coupled pulse oscillators // *Chaos, Solitons and Fractals*. . 2011. V. 44, № 1-3. P. 98-107.

[2A] Klinshov V.V., Nekorkin V.I. Global Synchronization of Large Ensembles of Pulse Oscillators with Time-Delay Coupling // *Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*. 2012. V. 1, № 3. P. 253-261.

[3A] Klinshov V., Nekorkin V. Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling // *Cybernetics and Physics*. 2012. V. 1, № 2. P. 106-112.

[4A] Клиньшов В.В., Некоркин В.И. Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // *Успехи Физических Наук*. 2013. Т. 183, № 12. С. 1323-1336.

[5A] Klinshov V.V., Nekorkin V.I. The map with no predetermined firing order for the network of oscillators with time-delayed pulsatile coupling // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*. 2013. V. 18, № 4. P. 973-977.

[6A] Klinshov V. V., Teramae J.N., Nekorkin V.I., Fukai T. Dense neuron clustering explains connectivity statistics in cortical microcircuits. // *PLoS One*. 2014. V. 9, № 4. P. e94292.

[7A] Klinshov V. V, Shchapin D.S., Nekorkin V.I. Cross-frequency synchronization of oscillators with time-delayed coupling // *Physical Review E*. 2014. V. 90, № 4. P. 042923.

[8A] Klinshov V., Franović I. Mean field dynamics of a random neural network with noise // *Physical Review E*. 2015. V. 92, № 6. P. 062813.

[9A] Klinshov V., Lücker L., Shchapin D., Nekorkin V., Yanchuk S. Emergence

and combinatorial accumulation of jittering regimes in spiking oscillators with delayed feedback // *Physical Review E*. 2015. V. 92, № 4. P. 042914.

[10A] Klinshov V., Lücker L., Shchapin D., Nekorkin V., Yanchuk S. Multistable jittering in oscillators with pulsatile delayed feedback // *Physical Review Letters*. 2015. V. 114, № 17. P. 178103.

[11A] Klinshov V.V., Shapin D.S., Dmitrichev A.S., Nekorkin V.I., Andreev Y. V., Andreyev Y.V. Cellular Automata for Modeling Wireless Sensor Networks // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2015. V. 18, № 4. P. 429-442.

[12A] Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Nekorkin V. Jittering waves in rings of pulse oscillators // *Physical Review E*. 2016. V. 94, № 1. P. 012206.

[13A] Vanag V.K., Smelov P.S., Klinshov V. V. Dynamical regimes of four almost identical chemical oscillators coupled via pulse inhibitory coupling with time delay // *Physical Chemistry Chemical Physics*. 2016. V. 18, № 7. P. 5509-5520.

[14A] Klinshov V., Maslennikov O., Nekorkin V. Jittering regimes of two spiking oscillators with delayed coupling // *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*. 2016. V. 1, № 1. P. 197-206.

[15A] Klinshov V. V., Nekorkin V.I., Kurths J. Stability threshold approach for complex dynamical systems // *New Journal of Physics*. 2016. V. 18, № 1. P. 13004.

[16A] Klinshov V., Shchapin D., Lücker L., Yanchuk S., Nekorkin V. Experimental study of jittering chimeras in a ring of excitable units // *AIP Conference Proceedings*. 2016. V. 1738, № 1. P. 210007.

[17A] Franović I., Kostić S., Perc M., Klinshov V., Nekorkin V., Kurths J. Phase response curves for models of earthquake fault dynamics // *Chaos: An*

Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2016. V. 26, № 6. P. 063105.

[18A] Klinshov V., Franović I. Slow rate fluctuations in a network of noisy neurons with coupling delay // Europhysics Letters. 2016. V. 116, № 4. P. 48002.

[19A] Klinshov V., Yanchuk S., Stephan A., Nekorkin V. Phase response function for oscillators with strong forcing or coupling // Europhysics Letters. 2017. V. 118. P. 50006.

[20A] Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Wolfrum M., D’Huys O., Nekorkin V. Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring // Physical Review E. 2017. V. 96. P. 042217.

[21A] Klinshov V. V., Nekorkin V.I. Event-based simulation of networks with pulse delayed coupling // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2017. V. 27. P. 101105.

[22A] Safonov D.A., Klinshov V. V, Vanag V.K. Dynamical regimes of four oscillators with excitatory pulse coupling // Physical Chemistry Chemical Physics. 2017. Vol. 19, № 19. P. 12490-12501.

[23A] Klinshov V. V, Kirillov S., Kurths J., Nekorkin V. Interval stability for complex systems // New Journal of Physics. 2018. V. 20. P. 043040.

[24A] Дмитричев А.С., Касаткин Д.В., Клиньшов В.В., Кириллов С.Ю., Масленников О.В., Шапин Д.С., Некоркин, В.И. Нелинейные динамические модели нейронов: Обзор // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, №4, С. 5-58.

[25A] Klinshov V., Lücker L., Yanchuk S. Desynchronization by phase slip patterns in networks of pulse-coupled oscillators with delays // The European Physical Journal Special Topics. 2018. V. 227, № 10-11. P. 1117-1128.

[26A] Bacić I., Klinshov V., Nekorkin V., Perc M., Franović I. Inverse

stochastic resonance in a system of excitable active rotators with adaptive coupling // EPL. 2018. V. 124, № 4.

[27A] Franović I., Klinshov V. Stimulus-evoked activity in clustered networks of stochastic ratebased neurons // The European Physical Journal Special Topics. 2018. V. 1076. P. 1063-1076.

[28A] Franović I., Klinshov V. Clustering promotes switching dynamics in networks of noisy neurons // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2018. V. 28. P. 023111.

[29A] Klinshov V., Franović I. Two scenarios for the onset and suppression of collective oscillations in heterogeneous populations of active rotators // Physical Review E. 2019. V. 100, № 6. P. 62211.

[30A] Kasatkin D., Klinshov V., Nekorkin V. Wandering chimeras in adaptive network of pulse coupled oscillators // Physical Review E. 2019. V. 99. P. 022203.

[31A] Klinshov V., Nekorkin V. Switching thresholds for multistable systems under strong external perturbation // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations. 2020. V. 83. P.105067.

[32A] Клиньшов В. В. (2020). Коллективная динамика сетей активных элементов с импульсными связями: Обзор // Известия Высших Учебных Заведений. Прикладная Нелинейная Динамика. 2020. Т.28, № 5, С. 465-490.

[33A] Kirillov S. Y., Klinshov V. V, Nekorkin V. I. The role of timescale separation in oscillatory ensembles with competitive coupling // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2020. V.30, № 5. P. 051101.

[34A] Klinshov V., Shchapin D., D’Huys O. Mode hopping in oscillating systems with stochastic delays // Physical Review Letters. 2020. V.125, № 3. P. 034101.

[35A] Klinshov V., Lücken L., Feketa P. On the interpretation of Dirac  $\delta$  pulses in differential equations for phase oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. V.31, № 3. P. 31102.

[36A] Klinshov V. V., Zlobin D. A., Maryshev B. S., Goldobin D. S. Effect of noise on the collective dynamics of a heterogeneous population of active rotators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. V.31, № 4. P. 43101.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Abbott L.F., Van Vreeswijk C. Asynchronous states in networks of pulse-coupled oscillators // Physical Review E. American Physical Society, 1993. Vol. 48, № 2. P. 1483-1490.
2. Acebrón J.A., Bonilla, L. L., Vicente, C., J.Pèrez., Ritort, F., Spigler, R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // Reviews of Modern Physics. American Physical Society, 2005. Vol. 77, № 1. P. 137-185.
3. Achuthan S., Canavier C.C. Phase-resetting curves determine synchronization, phase locking, and clustering in networks of neural oscillators // Journal of Neuroscience. 2009. Vol. 29, № 16. P. 5218-5233.
4. Afraimovich V.S., Nekorkin, V. I., Osipov, G. V., Shalfeev, V. D. Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization networks. Singapore: World Scientific, 1994.
5. Afraimovich V.S., Bykov V. V, Shilnikov L.P. On the origin and structure of the Lorenz attractor // Akademiia Nauk SSSR Doklady. 1977. Vol. 234, № 481supp. P. 253-255.
6. Afraimovich V., Ashwin P., Kirk V. Robust heteroclinic and switching dynamics // Dynamical Systems. Taylor & Francis, 2010. Vol. 25, № 3. P. 285-286.
7. Alivisatos A.P., Chun, M., Church, G. M., Greenspan, R. J., Roukes, M. L., Yuste, R. The Brain Activity Map Project and the Challenge of Functional Connectomics // Neuron. Elsevier, 2012. Vol. 74, № 6. P. 970-974.
8. Alon U. Network motifs: Theory and experimental approaches // Nature Reviews Genetics. 2007. Vol. 8, № 6. P. 450-461.

9. Amari S. Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields // *Biological Cybernetics*. Springer, 1977. Vol. 27, № 2. P. 77-87.
10. Amit D.J., Brunel N. Dynamics of a recurrent network of spiking neurons before and following learning // *Network: Computation in Neural Systems*. Taylor & Francis, 1997. Vol. 8, № 4. P. 373-404.
11. Andersen R.A., Musallam S., Pesaran B. Selecting the signals for a brain-machine interface // *Current Opinion in Neurobiology*. Elsevier, 2004. Vol. 14, № 6. P. 720-726.
12. Andreev A. V., Frolov, N. S., Pisarchik, A. N., Hramov, A. E. Chimera state in complex networks of bistable Hodgkin-Huxley neurons // *Physical Review E*. APS, 2019. Vol. 100, № 2. P. 22224.
13. Angeli D., Ferrell J.E., Sontag E.D. Detection of multistability, bifurcations, and hysteresis in a large class of biological positive-feedback systems // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. National Acad Sciences, 2004. Vol. 101, № 7. P. 1822-1827.
14. Anishchenko V.S., Astakhov, V., Neiman, A., Vadivasova, T., Schimansky-Geier, L. *Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: tutorial and modern developments*. Springer Science & Business Media, 2007.
15. Anumonwo J.M., Delmar, M., Vinet, A., Michaels, D. C., Jalife, J. Phase resetting and entrainment of pacemaker activity in single sinus nodal cells // *Circulation Research*. 1991. Vol. 68, № 4. P. 1138-1153.
16. Arecchi F.T., Meucci, R., Puccioni, G., Tredicce, J. Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser // *Physical Review Letters*. 1982. Vol. 49, № 17. P. 1217-1220.

17. Arenas A., Diaz-Guilera, A., Kurths, J., Moreno, Y., Zhou, C. Synchronization in complex networks // *Physics Reports*. Elsevier B.V., 2008. Vol. 469, № 3. P. 93-153.
18. Ashwin P., Burylko O. Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2015. Vol. 25, № 1. P. 13106.
19. Ashwin P., Burylko O., Maistrenko Y. Bifurcation to heteroclinic cycles and sensitivity in three and four coupled phase oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2008. Vol. 237, № 4. P. 454-466.
20. Bair W., Koch, C., Newsome, W., Britten, K. Power spectrum analysis of bursting cells in area MT in the behaving monkey // *Journal of Neuroscience*. Soc Neuroscience, 1994. Vol. 14, № 5 I. P. 2870-2892.
21. Barabási A.L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. Vol. 286, № October. P. 509-512.
22. Bezruchko B.P., Karavaev, A. S., Ponomarenko, V. I., Prokhorov, M. D. Reconstruction of time-delay systems from chaotic time series // *Physical Review E*. 2001. Vol. 64, № 5. P. 6.
23. Binzegger T., Douglas R.J., Martin K.A.C. A quantitative map of the circuit of cat primary visual cortex // *Journal of Neuroscience*. 2004. Vol. 24, № 39. P. 8441-8453.
24. Bock D.D., Lee, W.C. A., Kerlin, A. M., Andermann, M. L., Hood, G., Wetzell, A. W., Yurgenson, S., Soucy, E. R., Kim, H. S., Reid, R. C. Network anatomy and in vivo physiology of visual cortical neurons // *Nature*. Nature Publishing Group, 2011. Vol. 471, № 7337. P. 177-184.

25. Bonnin M. Waves and patterns in ring lattices with delays // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2009. Vol. 238, № 1. P. 77-87.
26. Börgers C., Kopell N. Synchronization in networks of excitatory and inhibitory neurons with sparse, random connectivity // *Neural Computation*. 2003. Vol. 15, № 3. P. 509-538.
27. Borges F.S., Protachevycz, P. R., Pena, R. F.O., Lameu, E. L., Higa, G. S.V., Kihara, A. H., Matias, F. S., Antonopoulos, C. G., de Pasquale, R., Roque, A. C., Iarosz, K. C., Ji, P., Batista, A. M. Self-sustained activity of low firing rate in balanced networks // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. Elsevier, 2020. Vol. 537. P. 122671.
28. Bottani S. Pulse-coupled relaxation oscillators: From biological synchronization to self-organized criticality // *Physical Review Letters*. 1995/05/22. American Physical Society, 1995. Vol. 74, № 21. P. 4189-4192.
29. Bovier A., Den Hollander F. *Metastability: a potential-theoretic approach*. Springer, 2016. Vol. 351.
30. Boyd R.W., Gauthier D. Controlling the velocity of light pulses // *Science*. 2009. Vol. 326, № 5956. P. 1074-1077.
31. Braitenberg V., Schüz A. *Cortex: Statistics and Geometry of Neuronal Connectivity* // *Cortex: Statistics and Geometry of Neuronal Connectivity*. Springer Science & Business Media, 2013.
32. Bressloff P.C. Metastable states and quasicycles in a stochastic Wilson-Cowan model of neuronal population dynamics // *Physical Review E*. APS, 2010. Vol. 82, № 5. P. 51903.
33. Bressloff P.C., Coombes S. Dynamics of strongly coupled spiking neurons // *Neural Computation*. 2000. Vol. 12, № 1. P. 91-129.

34. Briggman K.L., Helmstaedter M., Denk W. Wiring specificity in the direction-selectivity circuit of the retina // *Nature*. Nature Publishing Group, 2011. Vol. 471, № 7337. P. 183-190.
35. Brown E., Moehlis J., Holmes P. On the Phase Reduction and Response Dynamics of Neural Oscillator Populations // *Neural Computation*. 2004. Vol. 16, № 4. P. 673-715.
36. Brunel N. Phase diagrams of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking neurons // *Neurocomputing*. Springer, 2000. Vol. 32-33, № 3. P. 307-312.
37. Brunel N., Hakim V. Fast Global Oscillations in Networks of Integrate-and-Fire Neurons with Low Firing Rates // *Neural Computation*. MIT Press, 1999. Vol. 11, № 7. P. 1621-1671.
38. Brunel N., Wang X.J. What determines the frequency of fast network oscillations with irregular neural discharges? I. Synaptic dynamics and excitation-inhibition balance // *Journal of Neurophysiology*. American Physiological Society, 2003. Vol. 90, № 1. P. 415-430.
39. Buice M.A., Cowan J.D., Chow C.C. Systematic fluctuation expansion for neural network activity equations // *Neural Computation*. MIT Press, 2010. Vol. 22, № 2. P. 377-426.
40. Buice M.A., Cowan J.D. Field-theoretic approach to fluctuation effects in neural networks // *Physical Review E*. APS, 2007. Vol. 75, № 5. P. 51919.
41. Bungay S.D., Campbell S.A. Patterns of oscillation in a ring of identical cells with delayed coupling // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2007. Vol. 17, № 9. P. 3109-3125.

42. Burkitt A.N. A review of the integrate-and-fire neuron model: I. Homogeneous synaptic input // *Biological cybernetics*. Springer, 2006. Vol. 95, № 1. P. 1-19.
43. Buzsaki G. *Rhythms of the Brain*. Oxford University Press, 2006.
44. Cabré X., Fontich E., de la Llave R. The parameterization method for invariant manifolds III: Overview and applications // *Journal of Differential Equations*. Elsevier, 2005. Vol. 218, № 2. P. 444-515.
45. Campbell S.R., Wang D.L. Relaxation oscillators with time delay coupling // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1998. Vol. 111, № 1-4. P. 151-178.
46. Campbell S.R., Wang D.L., Jayaprakash C. Synchrony and desynchrony in integrate-and-fire oscillators. // *Neural computation*. 1999. Vol. 11, № 7. P. 1595-1619.
47. Canavier C.C. Phase response curve // *Scholarpedia*. 2006. Vol. 1, № 12. P. 1332.
48. Canavier C.C., Achuthan S. Pulse coupled oscillators and the phase resetting curve // *Mathematical Biosciences*. Elsevier Inc., 2010. Vol. 226, № 2. P. 77-96.
49. Canavier C.C., Baxter, D. A., Clark, J. W., Byrne, J. H. Control of multistability in ring circuits of oscillators // *Biological Cybernetics*. 1999. Vol. 80, № 2. P. 87-102.
50. Canavier C.C., Kazanci F.G., Prinz A.A. Phase resetting curves allow for simple and accurate prediction of robust N:1 phase locking for strongly coupled neural oscillators // *Biophysical Journal*. Biophysical Society, 2009. Vol. 97, № 1. P. 59-73.
51. Canavier C.C., Tikidji-Hamburyan R.A. Globally attracting synchrony in a network of oscillators with all-to-all inhibitory pulse coupling // *Physical Review E*. 2017. Vol. 95, № 3. P. 32215.

52. Castejón O., Guillamon A., Huguet G. Phase-amplitude response functions for transient-state stimuli // *The Journal of Mathematical Neuroscience*. Springer, 2013. Vol. 3, № 1. P. 13.
53. Chandrasekaran L. Effect of phase response curve skew on synchronization with and without conduction delays // *Frontiers in neural circuits*. 2013. Vol. 7, № December. P. 194.
54. Chandrasekaran L., Achuthan S., Canavier C.C. Stability of two cluster solutions in pulse coupled networks of neural oscillators // *Journal of Computational Neuroscience*. Springer, 2011. Vol. 30, № 2. P. 427-445.
55. Chen T., Tinsley, M. R., Ott, E., Showalter, K. Echo behavior in large populations of chemical oscillators // *Physical Review X*. 2016. Vol. 6, № 4. P. 41054.
56. Chen W., Hobbs, J. P., Tang, A., Beggs, J. M. A few strong connections: Optimizing information retention in neuronal avalanches // *BMC Neuroscience*. 2010. Vol. 11, № 1. P. 3.
57. Chialvo D.R. Emergent complex neural dynamics // *Nature Physics*. Nature Publishing Group, 2010. Vol. 6, № 10. P. 744-750.
58. Chizhov A. V. Conductance-based refractory density approach: comparison with experimental data and generalization to lognormal distribution of input current // *Biological Cybernetics*. Springer, 2017. Vol. 111, № 5-6. P. 353-364.
59. Chizhov A. V., Graham L.J. Population model of hippocampal pyramidal neurons, linking a refractory density approach to conductance-based neurons // *Physical Review E*. American Physical Society, 2007. Vol. 75, № 1.

60. Chizhov A.V., Graham L.J. Efficient evaluation of neuron populations receiving colored-noise current based on a refractory density method // *Physical Review E*. APS, 2008. Vol. 77, № 1. P. 11910.
61. Chklovskii D.B., Vitaladevuni S., Scheffer L.K. Semi-automated reconstruction of neural circuits using electron microscopy // *Current Opinion in Neurobiology*. Elsevier, 2010. Vol. 20, № 5. P. 667-675.
62. Chua L.O. A zoo of strange attractors from the canonical Chua's circuits // *Midwest Symposium on Circuits and Systems*. 1992. Vol. 1992-Augus, № M92/87. 916-926 p.
63. Colet P., Roy R. Digital communication with synchronized chaotic lasers // *Optics Letters*. OSA, 1994. Vol. 19, № 24. P. 2056.
64. Collins J.J., Stewart I.N. Coupled nonlinear oscillators and the symmetries of animal gaits // *Journal of Nonlinear Science*. 1993. Vol. 3, № 1. P. 349-392.
65. Conn A.R., Gould N., Toint P.L. Large-scale Nonlinear Constrained Optimization: a Current Survey // *Algorithms for Continuous Optimization*. Springer, 1994. P. 287-332.
66. Coombes S., Bressloff P.C. Mode locking and Arnold tongues in integrate-and-fire neural oscillators // *Physical Review E*. 1999. Vol. 60, № 2. P. 2086-2096.
67. Coombes S., Lord G.J. Desynchronization of pulse-coupled integrate-and-fire neurons // *Physical Review E*. American Physical Society, 1997. Vol. 55, № 3. P. R2104-R2107.
68. Cornelius S.P., Kath W.L., Motter A.E. Realistic control of network dynamics // *Nature Communications*. Nature Publishing Group, 2013. Vol. 4. P. 1942.

69. Courbage M., Nekorkin V.I., Vdovin L. V. Chaotic oscillations in a map-based model of neural activity // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. AIP Publishing, 2007. Vol. 17, № 4. P. 43109.
70. Crook S.M., Ermentrout G.B., Bower J.M. Dendritic and synaptic effects in systems of coupled cortical oscillators // *Journal of Computational Neuroscience*. 1998. Vol. 5, № 3. P. 315-329.
71. Crowley M.F., Epstein I.R. Experimental and theoretical studies of a coupled chemical oscillator: Phase death, multistability, and in-phase and out-of-phase entrainment // *Journal of Physical Chemistry*. 1989. Vol. 93, № 6. P. 2496-2502.
72. Danino T., Mondragón-Palomino, O., Tsimring, L., Hasty, J. A synchronized quorum of genetic clocks // *Nature*. 2010. Vol. 463, № 7279. P. 326-330.
73. Dayan. P., Abbott L.F. *Theoretical Neuroscience Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems* Peter // *The effects of brief mindfulness intervention on acute pain experience: An examination of individual difference*. The MIT Press, 2015. Vol. 1. 1689-1699 p.
74. Deco G., Jirsa V.K. Ongoing cortical activity at rest: Criticality, multistability, and ghost attractors // *Journal of Neuroscience*. Soc Neuroscience, 2012. Vol. 32, № 10. P. 3366-3375.
75. Delisle Burns B., Webb A.C. The spontaneous activity of neurones in the cat's cerebral cortex // *Proceedings of the Royal Society B*. The Royal Society London, 1976. Vol. 194, № 1115. P. 211-223.
76. Derickson D.J., Morton, P. A., Bowers, J. E., Thornton, R. L. Comparison of timing jitter in external and monolithic cavity mode-locked semiconductor lasers // *Applied Physics Letters*. AIP Publishing, 1991. Vol. 59, № 26. P. 3372-3374.

77. Dhamala M., Jirsa V.K., Ding M. Enhancement of Neural Synchrony by Time Delay // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 92, № 7. P. 74104.
78. D’Huys O., Fischer, I., Danckaert, J., Vicente, R. Spectral and correlation properties of rings of delay-coupled elements: Comparing linear and nonlinear systems // *Physical Review E*. 2012. Vol. 85, № 5. P. 0-4.
79. D’Huys O., Jüngling T., Kinzel W. On the interplay of noise and delay in coupled oscillators // *Understanding Complex Systems* / ed. Schöll E., Klapp S., Hövel P. Springer Complexity, 2016. Vol. 0. P. 127-145.
80. D’Huys O., Jüngling T., Kinzel W. Stochastic switching in delay-coupled oscillators // *Physical Review E*. 2014. Vol. 90, № 3. P. 1-9.
81. D’Huys O., Vicente, R., Erneux, T., Danckaert, J., Fischer, I. Synchronization properties of network motifs: Influence of coupling delay and symmetry // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2008/12/03. AIP, 2008. Vol. 18, № 3. P. 37116.
82. Di Volo M., Romagnoni, A., Capone, C., Destexhe, A. Biologically realistic mean-field models of conductance-based networks of spiking neurons with adaptation // *Neural computation*. MIT Press, 2019. Vol. 31, № 4. P. 653-680.
83. Dijkstra H.A., Ghil M. Low-frequency variability of the large-scale ocean circulation: A dynamical systems approach // *Reviews of Geophysics*. Wiley Online Library, 2005. Vol. 43, № 3. P. 1-38.
84. Dmitriev A.S., Kassian G.A., Khilinsky A.D. Chaotic synchronization. Information viewpoint // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. World Scientific, 2000. Vol. 10, № 4. P. 749-761.

85. Dodla R., Sen A., Johnston G.L. Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators // *Physical Review E*. 2004/07/13. American Physical Society, 2004. Vol. 69, № 5. P. 12.
86. Dorizzi B., Grammaticos B. Delay-induced desynchronization in neuronal oscillations // *Physical Review A*. American Physical Society, 1991. Vol. 44, № 10. P. 6958-6961.
87. Douglas R.J., Martin K.A., Whitteridge D. An intracellular analysis of the visual responses of neurones in cat visual cortex. // *The Journal of Physiology*. Wiley Online Library, 1991. Vol. 440, № 1. P. 659-696.
88. Earl M.G., Strogatz S.H. Synchronization in oscillator networks with delayed coupling: A stability criterion // *Physical Review E*. 2003/04/12. 2003. Vol. 67, № 3. P. 4.
89. El Boustani S., Destexhe A. A master equation formalism for macroscopic modeling of asynchronous irregular activity states // *Neural computation*. MIT Press, 2009. Vol. 21, № 1. P. 46-100.
90. Emelianova Y.P., Kuznetsov, A. P., Turukina, L. V., Sataev, I. R., Chernyshov, N. Y. A structure of the oscillation frequencies parameter space for the system of dissipatively coupled oscillators // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. Elsevier, 2014. Vol. 19, № 4. P. 1203-1212.
91. Enculescu M., Bestehorn M. Activity dynamics in nonlocal interacting neural fields // *Physical Review E*. APS, 2003. Vol. 67, № 4. P. 8.
92. Engel A.K., König, P., Kreiter, A. K., Singer, W. Interhemispheric synchronization of oscillatory neuronal responses in cat visual cortex // *Science*. 1991/05/24. 1991. Vol. 252, № 5009. P. 1177-1179.

93. Erdos P., R enyi A. On the evolution of random graphs // Transactions of the American Mathematical Society. 2011. Vol. 9781400841, № 1. P. 38-82.
94. Ermentrout B. Type I Membranes, Phase Resetting Curves, and Synchrony // Neural Computation. 1996. Vol. 8, № 5. P. 979-1001.
95. Ermentrout G.B., Beverlin, B., Troyer, T., Netoff, T. I. The variance of phase-resetting curves // Journal of Computational Neuroscience. Springer US, 2011. Vol. 31, № 2. P. 185-197.
96. Ermentrout G.B., Kopell N. Multiple pulse interactions and averaging in systems of coupled neural oscillators // Journal of Mathematical Biology. Springer Berlin / Heidelberg, 1991. Vol. 29, № 3. P. 195-217.
97. Erneux T. Applied Delay Differential Equations // Applied Delay Differential Equations. Springer Science & Business Media, 2009., 2009. Vol. 3. 204 p.
98. Ernst U., Pawelzik K., Geisel T. Synchronization induced by temporal delays in pulse-coupled oscillators // Physical Review Letters. 1995/02/27. American Physical Society, 1995. Vol. 74, № 9. P. 1570-1573.
99. Ernst U., Pawelzik K., Geisel T. Delay-induced multistable synchronization of biological oscillators // Physical Review E. American Physical Society, 1998. Vol. 57, № 2. P. 2150-2162.
100. Faisal A.A., Selen L.P.J., Wolpert D.M. Noise in the nervous system // Nature Reviews Neuroscience. Nature Publishing Group, 2008. Vol. 9, № 4. P. 292-303.
101. Faugeras O., Touboul J., Cessac B. A constructive mean-field analysis of multi-population neural networks with random synaptic weights and stochastic inputs // Frontiers in Computational Neuroscience. Frontiers, 2009. Vol. 3, № FEB. P. 1.

102. Flunkert V., D'Huys, O., Danckaert, J., Fischer, I., Schöll, E. Bubbling in delay-coupled lasers // *Physical Review E*. 2009/08/08. American Physical Society, 2009. Vol. 79, № 6. P. 65201.
103. Flunkert V., Yanchuk, S., Dahms, T., Schöll, E. Synchronizing distant nodes: A universal classification of networks // *Physical Review Letters*. American Physical Society, 2010. Vol. 105, № 25. P. 254101.
104. Folias S.E., Bressloff P.C. Breathers in two-dimensional neural media // *Physical Review Letters*. APS, 2005. Vol. 95, № 20. P. 208107.
105. Folias S.E., Bressloff P.C. Stimulus-locked traveling waves and breathers in an excitatory neural network // *SIAM journal on Applied Mathematics*. SIAM, 2005. Vol. 65, № 6. P. 2067-2092.
106. Foss J., Longtin, A., Mensour, B., Milton, J. Multistability and Delayed Recurrent Loops // *Physical Review Letters*. 1996. Vol. 76. P. 708-711.
107. Foss J., Milton J. Oscillations and multistability in delayed feedback control. // *Case studies in mathematical modeling: Ecology, physiology and cell biology* / ed. Othmer H.G. et al. New Jersey: Prentice Hall, 1997. P. 179-198.
108. Foss J., Milton J. Multistability in recurrent neural loops arising from delay // *Journal of Neurophysiology*. 2000/08/12. 2000. Vol. 84, № 2. P. 975-985.
109. Fourcaud N., Brunel N. Dynamics of the firing probability of noisy integrate-and-fire neurons // *Neural Computation*. MIT Press, 2002. Vol. 14, № 9. P. 2057-2110.
110. Franović I., Todorović, K., Vasović, N., Burić, N. Spontaneous formation of synchronization clusters in homogenous neuronal ensembles induced by noise and interaction delays // *Physical Review Letters*. 2012. Vol. 108, № 9. P. 94101.

111. Franović I., Todorović, K., Vasović, N., Burić, N. Persistence and failure of mean-field approximations adapted to a class of systems of delay-coupled excitable units // *Physical Review E*. 2014. Vol. 89, № 2. P. 22926.
112. Franović I., Todorović, K., Vasović, N., Burić, N. Mean-field approximation of two coupled populations of excitable units // *Physical Review E*. APS, 2013. Vol. 87, № 1. P. 12922.
113. Friedrich J., Kinzel W. Dynamics of recurrent neural networks with delayed unreliable synapses: Metastable clustering // *Journal of Computational Neuroscience*. 2008/12/17. 2009. Vol. 27, № 1. P. 65-80.
114. Gaiteri C., Rubin J.E. The interaction of intrinsic dynamics and network topology in determining network burst synchrony // *Frontiers in Computational Neuroscience*. Frontiers, 2011. Vol. 5. P. 10.
115. Galàn R.F., Ermentrout G.B., Urban N.N. Efficient estimation of phase-resetting curves in real neurons and its significance for neural-network modeling // *Physical Review Letters*. American Physical Society, 2005. Vol. 94, № 15. P. 158101.
116. Gardiner C.W. *Handbook of stochastic methods*. Springer Berlin, 1985. Vol. 3.
117. Gerstner W. Rapid phase locking in systems of pulse-coupled oscillators with delays // *Physical Review Letters*. 1996/03/04. 1996. Vol. 76, № 10. P. 1755-1758.
118. Gerstner W. Population dynamics of spiking neurons: Fast transients, asynchronous states, and locking // *Neural Computation*. 2000. Vol. 12, № 1. P. 43-89.
119. Gerstner W., Kistler W.M. *Spiking neuron models: Single neurons, populations, plasticity*. Cambridge university press, 2002.

120. Gerstner W., Van Hemmen J.L. Coherence and incoherence in a globally coupled ensemble of pulse-emitting units // *Physical Review Letters*. 1993. Vol. 71, № 3. P. 312-315.
121. Giacomelli G., Politi A. Relationship between delayed and spatially extended dynamical systems // *Physical Review Letters*. 1996. Vol. 76, № 15. P. 2686-2689.
122. Gilson M., Fukai T. Stability versus neuronal specialization for STDP: Long-tail weight distributions solve the dilemma // *PLoS ONE*. 2011. Vol. 6, № 10.
123. Glass L. Synchronization and rhythmic processes in physiology // *Nature*. 2001. Vol. 410, № 6825. P. 277-284.
124. Glass L., Guevara, M. R., Belair, J., Shrier, A. Global bifurcations of a periodically forced biological oscillator // *Physical Review A*. American Physical Society, 1984. Vol. 29, № 3. P. 1348-1357.
125. Glass L., Mackey M.C. *From clocks to chaos: The rhythms of life*. Princeton University Press, 1988.
126. Glass L., Sun J. Periodic forcing of a limit-cycle oscillator: Fixed points, Arnold tongues, and the global organization of bifurcations // *Physical Review E*. 1994. Vol. 50, № 6. P. 5077-5084.
127. Goel P., Ermentrout B. Synchrony, stability, and firing patterns in pulse-coupled oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2002. Vol. 163, № 3-4. P. 191-216.
128. Goldental A., Vardi, R., Sardi, S., Sabo, P., Kanter, I. Broadband macroscopic cortical oscillations emerge from intrinsic neuronal response failures // *Frontiers in Neural Circuits*. *Frontiers*, 2015. Vol. 9, № OCTOBER. P. 1-11.
129. Goldobin D.S., Tyulkina, I. V., Klimenko, L. S., Pikovsky, A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators // *Chaos: An*

- Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. AIP Publishing LLC, 2018. Vol. 28, № 10. P. 101101.
130. Golomb D., Hansel D. The number of synaptic inputs and the synchrony of large, sparse neuronal networks // Neural Computation. MIT Press, 2000. Vol. 12, № 5. P. 1095-1139.
131. Golubitsky M., Stewart I. Nonlinear dynamics of networks: The groupoid formalism // Bulletin of the American Mathematical Society. 2006. Vol. 43, № 3. P. 305-364.
132. Golubitsky M., Stewart I. The Symmetry Perspective: From Equilibrium to Chaos in Phase Space and Physical Space. Birkhäuser Basel, 2004.
133. Gray C.M., König, P., Engel, A. K., Singer, W. Oscillatory responses in cat visual cortex exhibit inter-columnar synchronization which reflects global stimulus properties. // Nature. 1989. Vol. 338, № 6213. P. 334-337.
134. Gray P., Scott S.K. Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor. Oscillations and instabilities in the system  $A + 2B \rightarrow 3B; B \rightarrow C$  // Chemical Engineering Science. Elsevier, 1984. Vol. 39, № 6. P. 1087-1097.
135. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos // Physica D: Nonlinear Phenomena. Elsevier, 1983. Vol. 7, № 1-3. P. 181-200.
136. Grigorieva E. V., Kaschenko S.A. Chaotic spiking induced by variable delayed optoelectronic feedback in a model of class B laser // Optics Communications. Elsevier, 2018. Vol. 407. P. 9-16.
137. Grigorieva E. V., Kaschenko S.A. Multistability of Spiking Regimes in a Model of a Laser with Delayed-Feedback // Radiophysics and Quantum Electronics. Springer, 2019. Vol. 61, № 8-9. P. 614-622.

138. Grigorieva E. V., Kashchenko S.A. Regular and Chaotic Pulsations in Laser Diode With Delayed Feedback // International Journal of Bifurcation and Chaos. World Scientific, 1993. Vol. 03, № 06. P. 1515-1528.
139. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer Science & Business Media, 2013. Vol. 42.
140. Guevara M.R., Glass L., Shrier A. Phase locking, period-doubling bifurcations, and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells // Science. 1981. Vol. 214, № 4527. P. 1350-1353.
141. Guillamon A., Huguet G. A computational and geometric approach to phase resetting curves and surfaces // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2009. Vol. 8, № 3. P. 1005-1042.
142. Hammond C., Bergman H., Brown P. Pathological synchronization in Parkinson's disease: networks, models and treatments // Trends in Neurosciences. 2007. Vol. 30, № 7. P. 357-364.
143. Hansel D., Mato G. Asynchronous states and the emergence of synchrony in large networks of interacting excitatory and inhibitory neurons // Neural Computation. 2003. Vol. 15, № 1. P. 1-56.
144. Harish O., Hansel D. Asynchronous Rate Chaos in Spiking Neuronal Circuits // PLoS Computational Biology. 2015. Vol. 11, № 7. P. 1-38.
145. Hasegawa H. Generalized rate-code model for neuron ensembles with finite populations // Physical Review E. 2007. Vol. 75, № 5. P. 51904.
146. Hasegawa H. Population rate codes carried by mean, fluctuation and synchrony of neuronal firings // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. Elsevier B.V., 2009. Vol. 388, № 4. P. 499-513.

147. Hauschildt B. et al. Noise-induced cooperative dynamics and its control in coupled neuron models // *Physical Review E. APS*, 2006. Vol. 74, № 5. P. 51906.
148. Hiratani N., Teramae J.N., Fukai T. Associative memory model with long-tail-distributed Hebbian synaptic connections // *Frontiers in Computational Neuroscience. Frontiers*, 2013. Vol. 6, № FEB. P. 102.
149. Holmgren C. et al. Pyramidal cell communication within local networks in layer 2/3 of rat neocortex // *The Journal of Physiology*. 2003. Vol. 551, № 1. P. 139-153.
150. Hopfield J.J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 1982. Vol. 79, № 8. P. 2554-2558.
151. Hopfield J.J., Herz A.V. Rapid local synchronization of action potentials: Toward computation with coupled integrate-and-fire neurons // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. National Acad Sciences*, 1995. Vol. 92, № 15. P. 6655-6662.
152. Horikawa Y., Kitajima H. Duration of transient oscillations in ring networks of unidirectionally coupled neurons // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2009. Vol. 238, № 2. P. 216-225.
153. Horikawa Y., Kitajima H. Effects of noise and variations on the duration of transient oscillations in unidirectionally coupled bistable ring networks // *Physical Review E. American Physical Society*, 2009. Vol. 80, № 2. P. 21934.
154. Horvath V., Gentili, P. L., Vanag, V. K., Epstein, I. R. Pulse-coupled chemical oscillators with time delay // *Angewandte Chemie*. 2012. Vol. 51, № 28. P. 6878-6881.
155. Hutt A., Longtin A., Schimansky-Geier L. Additive noise-induced Turing transitions in spatial systems with application to neural fields and the Swift-

- Hohenberg equation // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. Elsevier, 2008. Vol. 237, № 6. P. 755-773.
156. Ijspeert A.J. Central pattern generators for locomotion control in animals and robots: A review // *Neural Networks*. Elsevier, 2008. Vol. 21, № 4. P. 642-653.
157. Ikegaya Y., Sasaki, T., Ishikawa, D., Honma, N., Tao, K., Takahashi, N., Minamisawa, G., Ujita, S., Matsuki, N. Interpyramid spike transmission stabilizes the sparseness of recurrent network activity // *Cerebral Cortex*. 2013. Vol. 23, № 2. P. 293-304.
158. Isler J.R., Grieve, P. G., Czernochowski, D., Stark, R. I., Friedman, D. Cross-frequency phase coupling of brain rhythms during the orienting response // *Brain Research*. Elsevier, 2008. Vol. 1232. P. 163-172.
159. Izhikevich E.M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, 2007.
160. Jahnke S., Memmesheimer R.M., Timme M. Stable irregular dynamics in complex neural networks // *Physical Review Letters*. APS, 2008. Vol. 100, № 4. P. 48102.
161. Jalife J., Antzelevitch C. Phase resetting and annihilation of pacemaker activity in cardiac tissue // *Science*. American Association for the Advancement of Science, 1979. Vol. 206, № 4419. P. 695-697.
162. Jalife J., Moe G.K. Effect of electrotonic potentials on pacemaker activity of canine Purkinje fibers in relation to parasystole // *Circulation Research*. 1976. Vol. 39, № 6. P. 801-808.
163. Jirsa V.K., Haken H. A derivation of a macroscopic field theory of the brain from the quasi-microscopic neural dynamics // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. Elsevier, 1997. Vol. 99, № 4. P. 503-526.

164. Judd K.T., Aihara K. Pulse propagation networks: A neural network model that uses temporal coding by action potentials // *Neural Networks*. 1993. Vol. 6, № 2. P. 203-215.
165. Kalisman N., Silberberg G., Markram H. The neocortical microcircuit as a tabula rasa // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. National Acad Sciences, 2005. Vol. 102, № 3. P. 880-885.
166. Kanter I., Zigzag, M., Englert, A., Geissler, F., Kinzel, W. Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor // *Europhysics Letters*. 2011. Vol. 93, № 6. P. 60003.
167. Kantner M., Yanchuk S. Bifurcation analysis of delay-induced patterns in a ring of Hodgkin-Huxley neurons // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2013. Vol. 371, № 1999. P. 20120470.
168. Karaboga D., Basturk B. Artificial Bee Colony (ABC) optimization algorithm for solving constrained optimization problems // *International Fuzzy Systems Association World Congress*. Springer, 2007. Vol. 4529 LNAI. P. 789-798.
169. Kasimatis T., Hizanidis J., Provata A. Three-dimensional chimera patterns in networks of spiking neuron oscillators // *Physical Review E*. APS, 2018. Vol. 97, № 5. P. 52213.
170. Kazantsev V.B., Nekorkin, V. I., Makarenko, V. I., Llinàs, R. Self-referential phase reset based on inferior olive oscillator dynamics // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. National Acad Sciences, 2004. Vol. 101, № 52. P. 18183-18188.
171. Kelso J.A.S. Multistability and metastability: understanding dynamic coordination in the brain // *Philosophical Transactions of the Royal Society B*. The Royal Society, 2012. Vol. 367, № 1591. P. 906-918.

172. Kim S., Hee S., Ryu C.S. Multistability in coupled oscillator systems with time delay // *Physical Review Letters*. American Physical Society, 1997. Vol. 79, № 15. P. 2911-2914.
173. Kitano K., Fukai T. Variability v.s. synchronicity of neuronal activity in local cortical network models with different wiring topologies // *Journal of Computational Neuroscience*. Springer, 2007. Vol. 23, № 2. P. 237-250.
174. Klimesch W. Memory processes, brain oscillations and EEG synchronization // *International Journal of Psychophysiology*. Elsevier, 1996. Vol. 24, № 1-2. P. 61-100.
175. Ko H., Hofer, S. B., Pichler, B., Buchanan, K. A., Sjöström, P. J., Mrcic-Flogel, T. D. Functional specificity of local synaptic connections in neocortical networks // *Nature*. Nature Publishing Group, 2011. Vol. 473, № 7345. P. 87-91.
176. Ko T.W., Ermentrout G.B. Effects of axonal time delay on synchronization and wave formation in sparsely coupled neuronal oscillators // *Physical Review E*. 2008/02/01. APS, 2007. Vol. 76, № 5. P. 56206.
177. KOCAREV L., HALLE, K. S., ECKERT, K., CHUA, L. O., PARLITZ, U. Experimental Demonstration of Secure Communications Via Chaotic Synchronization // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. World Scientific, 1992. Vol. 02, № 03. P. 709-713.
178. Komarov M.A., Osipov G. V., Zhou C.S. Heteroclinic contours in oscillatory ensembles // *Physical Review E*. APS, 2013. Vol. 87, № 2. P. 22909.
179. Komin N., Toral R. Order parameter expansion and finite-size scaling study of coherent dynamics induced by quenched noise in the active rotator model // *Physical Review E*. APS, 2010. Vol. 82, № 5. P. 51127.

180. Koulakov A.A., Hromádka T., Zador A.M. Correlated connectivity and the distribution of firing rates in the neocortex // *Journal of Neuroscience*. 2009. Vol. 29, № 12. P. 3685-3694.
181. Koulakov A.A., Raghavachari, S., Kepecs, A., Lisman, J. E. Model for a robust neural integrator // *Nature Neuroscience*. Nature Publishing Group, 2002. Vol. 5, № 8. P. 775-782.
182. Kozyreff G., Vladimirov A.G., Mandel P. Global coupling with time delay in an array of semiconductor lasers // *Physical Review Letters*. 2000. Vol. 85, № 18. P. 3809-3812.
183. Kramers H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // *Physica*. Elsevier, 1940. Vol. 7, № 4. P. 284-304.
184. Kriener B., Enger, H., Tetzlaff, T., Plesser, H. E., Gewaltig, M. O., Einevoll, G. T. Dynamics of self-sustained asynchronous-irregular activity in random networks of spiking neurons with strong synapses // *Frontiers in Computational Neuroscience*. Frontiers, 2014. Vol. 8, № October. P. 136.
185. Krogh-Madsen T., Butera, R., Bard Ermentrout, G., Glass, L. Phase resetting neural oscillators: Topological theory versus the realworld // *Phase Response Curves in Neuroscience*. Springer, 2012. P. 33-51.
186. Kuang Y. Delay differential equations with applications in population dynamics // *Mathematics and Computers in Simulation*. Academic Press, 1993. Vol. 35, № 5. 452-453 p.
187. Kumar A., Schrader, S., Aertsen, A., Rotter, S. The high-conductance state of cortical networks // *Neural Computation*. MIT Press, 2008. Vol. 20, № 1. P. 1-43.

188. Kunysz A.M., Shrier A., Glass L. Bursting behavior during fixed-delay stimulation spontaneously beating chick heart cell aggregates // American Journal of Physiology. Am Physiological Soc, 1997. Vol. 273, № 1 42-1. P. C331—C346.
189. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence. Springer-Verlag (Berlin and New York), 1984. Vol. 19. 156 p.
190. Kuznetsov A.P., Stankevich N. V., Turukina L. V. Coupled van der Pol-Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues // Physica D: Nonlinear Phenomena. Elsevier B.V., 2009. Vol. 238, № 14. P. 1203-1215.
191. Kuznetsov A.S., Kurths J. Stable heteroclinic cycles for ensembles of chaotic oscillators // Physical Review E. 2002. Vol. 66, № 2. P. 4,26201.
192. Kuznetsov Y. Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer-Verlag, 1995. Vol. 112. 591 p.
193. Lafuerza L.F., Colet P., Toral R. Nonuniversal results induced by diversity distribution in coupled excitable systems // Physical Review Letters. 2010. Vol. 105, № 8. P. 84101.
194. Laing C.R. Spiral waves in nonlocal equations // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. SIAM, 2005. Vol. 4, № 3. P. 588-606.
195. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations // Theory of Impulsive Differential Equations. World scientific, 1989. Vol. 6.
196. Lamar M.D., Smith G.D. Effect of node-degree correlation on synchronization of identical pulse-coupled oscillators // Physical Review E. American Physical Society, 2010. Vol. 81, № 4. P. 46206.

197. Langfield P., Krauskopf B., Osinga H.M. Solving Winfree's puzzle: The isochrons in the FitzHugh-Nagumo model // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. American Institute of Physics, 2014. Vol. 24, № 1. P. 013131.
198. Larger L., Penkovsky B., Maistrenko Y. Virtual chimera states for delayed-feedback systems // *Physical Review Letters*. American Physical Society, 2013. Vol. 111, № 5. P. 54103.
199. Larger L., Soriano, M. C., Brunner, D., Appeltant, L., Gutierrez, J. M., Pesquera, L., Mirasso, C. R., Fischer, I. Photonic information processing beyond Turing: an optoelectronic implementation of reservoir computing // *Optics Express*. OSA, 2012. Vol. 20, № 3. P. 3241.
200. Lau P.M., Bi G.Q. Synaptic mechanisms of persistent reverberatory activity in neuronal networks // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. National Acad Sciences, 2005. Vol. 102, № 29. P. 10333-10338.
201. Lavrova A.I., Vanag V.K. Two pulse-coupled non-identical, frequency-different BZ oscillators with time delay // *Physical Chemistry Chemical Physics*. 2014. Vol. 16, № 14. P. 6764-6772.
202. Lefort S., Tómm, C., Floyd Sarria, J. C., Petersen, C. C. H. The Excitatory Neuronal Network of the C2 Barrel Column in Mouse Primary Somatosensory Cortex // *Neuron*. Elsevier, 2009. Vol. 61, № 2. P. 301-316.
203. Leon-Garcia A., Widjaja I. *Communication networks*. McGraw-Hill, Inc., 2003.
204. Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I. *Frequency methods in oscillation theory*. Springer Science & Business Media, 2012. Vol. 357.

205. Lewis J.E., Glass, L., Bachoo, M., Polosa, C. Phase resetting and fixed-delay stimulation of a simple model of respiratory rhythm generation // *Journal of Theoretical Biology*. Elsevier, 1992. Vol. 159, № 4. P. 491-506.
206. Lewis J., Bachoo, M., Glass, L., Polosa, C. Complex dynamics resulting from repeated stimulation of nonlinear oscillators at a fixed phase // *Physics Letters A*. Elsevier, 1987. Vol. 125, № 2-3. P. 119-122.
207. Lichtner M., Wolfrum M., Yanchuk S. The spectrum of delay differential equations with large delay // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2011. Vol. 43, № 2. P. 788-802.
208. Lindner B., Garcia-Ojalvo, J., Neiman, A., Schimansky-Geier, L. Effects of noise in excitable systems // *Physics Reports*. Elsevier, 2004. Vol. 392, № 6. P. 321-424.
209. Litwin-Kumar A., Doiron B. Slow dynamics and high variability in balanced cortical networks with clustered connections // *Nature Neuroscience*. Nature Publishing Group, 2012. Vol. 15, № 11. P. 1498-1505.
210. Lizier J.T., Atay F.M., Jost J. Information storage, loop motifs, and clustered structure in complex networks // *Physical Review E*. 2012. Vol. 86, № 2. P. 1-5.
211. Lohmann J., D’Huys, O., Haynes, N. D., Schöll, E., Gauthier, D. J. Transient dynamics and their control in time-delay autonomous Boolean ring networks // *Physical Review E*. APS, 2017. Vol. 95, № 2. P. 22211.
212. Lopera A., Buldú, J. M., Torrent, M. C., Chialvo, D. R., Garcia-Ojalvo, J. Ghost stochastic resonance with distributed inputs in pulse-coupled electronic neurons // *Physical Review E*. APS, 2006. Vol. 73, № 2. P. 21101.
213. Loskutov A., Rybalko S., Zhuchkova E. Model of cardiac tissue as a conductive system with interacting pacemakers and refractory time // *International Journal*

- of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 2004. Vol. 14, № 7. P. 2457-2466.
214. Luccioli S., Politi A. Irregular collective behavior of heterogeneous neural networks // *Physical Review Letters*. 2010. Vol. 105, № 15. P. 158104.
215. Lüthen L., Pade, J. P., Knauer, K., Yanchuk, S. Reduction of interaction delays in networks // *Europhysics Letters*. 2013. Vol. 103, № 1. P. 10006.
216. Lüthen L., Yanchuk S. Two-cluster bifurcations in systems of globally pulse-coupled oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2012. Vol. 241, № 4. P. 350-359.
217. Lundström N.L.P. How to find simple nonlocal stability and resilience measures // *Nonlinear dynamics*. Springer, 2018. Vol. 93, № 2. P. 887-908.
218. Luo C.H., Rudy Y. A model of the ventricular cardiac action potential. Depolarization, repolarization, and their interaction // *Circulation Research*. Am Heart Assoc, 1991. Vol. 68, № 6. P. 1501-1526.
219. Luzyanina T.B. Synchronization in an oscillator neural network model with time-delayed coupling // *Network: Computation in Neural Systems*. Taylor & Francis, 1995. Vol. 6, № 1. P. 43-59.
220. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion // *International Journal of Control*. Taylor & Francis, 1992. Vol. 55, № 3. P. 531-534.
221. Ma J., Wu J. Multistability in spiking neuron models of delayed recurrent inhibitory loops // *Neural Computation*. MIT Press, 2007. Vol. 19, № 8. P. 2124-2148.
222. Ma J., Wu J. Patterns, memory and periodicity in two-neuron delayed recurrent inhibitory loops // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2010. Vol. 5, № 2. P. 67-99.

223. Maass W., Schmitt M. On the Complexity of Learning for Spiking Neurons with Temporal Coding // Information and Computation. Academic Press Inc, 1999. Vol. 153, № 1. P. 26-46.
224. Machowski J., Lubosny, Z., Bialek, J.W., Bumby, J. R. Power system dynamics: stability and control. John Wiley & Sons, 2020.
225. Mackey M.C., Glass L. Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. 1977. Vol. 197, № 4300. P. 287-289.
226. Manor Y., Koch C., Segev I. Effect of geometrical irregularities on propagation delay in axonal trees // Biophysical Journal. Elsevier, 1991. Vol. 60, № 6. P. 1424-1437.
227. Marino I.P., Pèrez-Muñuzuri, V., Pérez-Villar, V., Sánchez, E., Matias, M. A. Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1999. Vol. 128, № 2-4. P. 224-235.
228. Markram H. A network of tufted layer 5 pyramidal neurons // Cerebral Cortex. Oxford Univ Press, 1997. Vol. 7, № 6. P. 523-533.
229. Markram H., Lübke, J., Frotscher, M., Roth, A., Sakmann, B. Physiology and anatomy of synaptic connections between thick tufted pyramidal neurones in the developing rat neocortex. // The Journal of physiology. 1997. Vol. 500, № 2. P. 409-440.
230. Marquardt F., Harris J.G.E., Girvin S.M. Dynamical multistability induced by radiation pressure in high-finesse micromechanical optical cavities // Physical Review Letters. 2006. Vol. 96, № 10.
231. Masoller C., Torrent M.C., Garcia-Ojalvo J. Dynamics of globally delay-coupled neurons displaying subthreshold oscillations // Philosophical

Transactions of the Royal Society A. 2009/07/22. 2009. Vol. 367, № 1901. P. 3255-3266.

232. Mauroy A., Mezić I. Global computation of phase-amplitude reduction for limit-cycle dynamics // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2018. Vol. 28, № 7. P. 1-23.
233. Mauroy A., Rhoads, B., Moehlis, J., Mezić, I. Global isochrons and phase sensitivity of bursting neurons // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2014. Vol. 13, № 1. P. 306-338.
234. McDonnell M.D., Ward L.M. The benefits of noise in neural systems: Bridging theory and experiment // *Nature Reviews Neuroscience*. Nature Publishing Group, 2011. Vol. 12, № 7. P. 415-425.
235. Memmesheimer R.M., Timme M. Stable and unstable periodic orbits in complex networks of spiking neurons with delays // *Discrete & Continuous Dynamical Systems*. 2010. Vol. 28, № 4. P. 1555-1588.
236. Menck P.J., Heitzig, J., Marwan, N., Kurths, J. How basin stability complements the linear-stability paradigm // *Nature Physics*. Nature Publishing Group, 2013. Vol. 9, № 2. P. 89-92.
237. Menck P.J., Heitzig, J., Kurths, J., Schellnhuber, H. J. How dead ends undermine power grid stability // *Nature Communications*. 2014. Vol. 5, № September 2015. P. 3969.
238. Milo R., Shen-Orr, S., Itzkovitz, S., Kashtan, N., Chklovskii, D., Alon, U. Network Motif: Simple Building Blocks of Complex Networks // *Science*. 2002. Vol. 298, № 5594. P. 298.

239. Mirollo R.E., Strogatz S.H. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1990. Vol. 50, № 6. P. 1645-1662.
240. Mitra C., Choudhary, A., Sinha, S., Kurths, J., Donner, R. V. Multiple-node basin stability in complex dynamical networks // Physical Review E. 2017. Vol. 95, № 3.
241. Mongillo G., Barak O., Tsodyks M. Synaptic Theory of Working Memory // Science. American Association for the Advancement of Science, 2008. Vol. 319, № 5869. P. 1543-1546.
242. Montbrió E., Pazó D., Roxin A. Macroscopic description for networks of spiking neurons // Physical Review X. 2015. Vol. 5, № 2. P. 21028.
243. Morgan R.J., Soltesz I. Nonrandom connectivity of the epileptic dentate gyrus predicts a major role for neuronal hubs in seizures // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2008. Vol. 105, № 16. P. 6179-6184.
244. Moses E., Fineberg J., Steinberg V. Multistability and confined traveling-wave patterns in a convecting binary mixture // Physical Review A. 1987. Vol. 35, № 6. P. 2757-2760.
245. Mountcastle V.B. The columnar organization of the neocortex // Brain: a journal of neurology. 1997. Vol. 120, № 4. P. 701-722.
246. Muller M.E. A note on a method for generating points uniformly on n-dimensional spheres // Communications of the ACM. ACM, 1959. Vol. 2, № 4. P. 19-20.
247. Nagatani T., Nakanishi K. Delay effect on phase transitions in traffic dynamics // Physical Review E. APS, 1998. Vol. 57, № 6. P. 6415-6421.

248. Nakamura Y., Tominaga F., Munakata T. Clustering behavior of time-delayed nearest-neighbor coupled oscillators // *Physical Review E*. 1994/06/01. 1994. Vol. 49, № 6. P. 4849-4856.
249. Naud R., Gerstner W. Coding and Decoding with Adapting Neurons: A Population Approach to the Peri-Stimulus Time Histogram // *PLoS Computational Biology*. Public Library of Science, 2012. Vol. 8, № 10. P. e1002711.
250. Nekorkin V.I. Introduction to Nonlinear Oscillations // *Introduction to Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, 2015. 1-250 p.
251. Niebur E., Schuster H.G., Kammen D.M. Collective frequencies and metastability in networks of limit-cycle oscillators with time delay // *Physical Review Letters*. 1991/11/11. 1991. Vol. 67, № 20. P. 2753-2756.
252. Nixon M., Fridman, M., Ronen, E., Friesem, A. A., Davidson, N. Phase locking of two fiber lasers with time-delayed coupling // *Optics Letters*. 2009. Vol. 34, № 12. P. 1864.
253. Nizette M., Rachinskii, D., Vladimirov, A., Wolfrum, M. Pulse interaction via gain and loss dynamics in passive mode locking // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2006. Vol. 218, № 1. P. 95-104.
254. Novićenko V., Pyragas K. Computation of phase response curves via a direct method adapted to infinitesimal perturbations // *Nonlinear Dynamics*. Springer, 2012. Vol. 67, № 1. P. 517-526.
255. Ohiorhenuan I.E., Mechler, F., Purpura, K. P., Schmid, A. M., Hu, Q., Victor, J. D. Sparse coding and high-order correlations in fine-scale cortical networks // *Nature*. Nature Publishing Group, 2010. Vol. 466, № 7306. P. 617-621.

256. Okamoto H., Fukai T. Recurrent network models for perfect temporal integration of fluctuating correlated inputs // PLoS Computational Biology. 2009. Vol. 5, № 6. P. 1-10.
257. Olmi S., Politi A., Torcini A. Collective chaos in pulse-coupled neural networks // Europhysics Letters. 2010. Vol. 92, № 6. P. 60007.
258. Omel'chenko O.E., Wolfrum M. Bifurcations in the Sakaguchi-Kuramoto model // Physica D: Nonlinear Phenomena. Elsevier, 2013. Vol. 263. P. 74-85.
259. Omel'chenko O.E., Wolfrum M. Nonuniversal transitions to synchrony in the Sakaguchi-Kuramoto model // Physical Review Letters. APS, 2012. Vol. 109, № 16. P. 164101.
260. Oprisan S.A., Prinz A.A., Canavier C.C. Phase resetting and phase locking in hybrid circuits of one model and one biological neuron // Biophysical Journal. The Biophysical Society, 2004. Vol. 87, № 4. P. 2283-2298.
261. Osinga H.M., Moehlis J. Continuation-based computation of global isochrons // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. SIAM, 2010. Vol. 9, № 4. P. 1201-1228.
262. Ostojic S. Two types of asynchronous activity in networks of excitatory and inhibitory spiking neurons // Nature Neuroscience. 2014. Vol. 17, № 4. P. 594-600.
263. Ott E., Antonsen T.M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. American Institute of Physics, 2008. Vol. 18, № 3. P. 37113.
264. Ott E., Antonsen T.M. Long time evolution of phase oscillator systems // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2009. Vol. 19, № 2. P. 23117.

265. Otto A., Rauh, S., Kolouch, M., Radons, G. Extension of Tlusty's law for the identification of chatter stability lobes in multi-dimensional cutting processes // International Journal of Machine Tools and Manufacture. 2014. Vol. 82-83. P. 50-58.
266. Otto C., Lüdge, K., Vladimirov, A. G., Wolfrum, M., Schöll, E. Delay-induced dynamics and jitter reduction of passively mode-locked semiconductor lasers subject to optical feedback // New Journal of Physics. 2012. Vol. 14, № 11. P. 113033.
267. Owen M.R., Laing C.R., Coombes S. Bumps and rings in a two-dimensional neural field: Splitting and rotational instabilities // New Journal of Physics. IOP Publishing, 2007. Vol. 9, № 10. P. 378.
268. Pagliari R., Scaglione A. Scalable network synchronization with pulse-coupled oscillators // IEEE Transactions on Mobile Computing. IEEE, 2011. Vol. 10, № 3. P. 392-405.
269. Pajevic S., Plenz D. The organization of strong links in complex networks // Nature Physics. Nature Publishing Group, 2012. Vol. 8, № 5. P. 429-436.
270. Parga N., Abbott L.F. Network Model of Spontaneous Activity Exhibiting Synchronous Transitions Between Up and Down States // Frontiers in Neuroscience. Frontiers, 2007. Vol. 1, № 1. P. 57-66.
271. Pasternak T., Greenlee M.W. Working memory in primate sensory systems // Nature Reviews Neuroscience. 2005. Vol. 6, № 2. P. 97-107.
272. Pavliotis G.A. Stochastic Processes and Applications (Diffusion Processes, the Fokker-Planck and Langevin Equations) // Book. Springer, 2014. Vol. 60. 1-345 p.

273. Pazó D., Montbrió E. Universal behavior in populations composed of excitable and self-oscillatory elements // *Physical Review E. APS*, 2006. Vol. 73, № 5. P. 55202.
274. Pecora L.M., Carroll T.L. Master stability functions for synchronized coupled systems // *Physical Review Letters*. 1998. Vol. 80, № 10. P. 2109-2112.
275. Peil M., Heil, T., Fischer, I., Elsässer, W. Synchronization of Chaotic Semiconductor Laser Systems: A Vectorial Coupling-Dependent Scenario // *Physical Review Letters*. 2002. Vol. 88, № 17. P. 4.
276. Perin R., Berger T.K., Markram H. A synaptic organizing principle for cortical neuronal groups // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. National Acad Sciences*, 2011. Vol. 108, № 13. P. 5419-5424.
277. Perlikowski P., Yanchuk, S., Popovych, O. V., Tass, P. A. Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators // *Physical Review E*. 2010. Vol. 82, № 3. P. 36208.
278. Peskin C.S. *Mathematical aspects of heart physiology* // Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1975. 268-278 p.
279. Pikovsky A., Kurths, J., Rosenblum, M., Kurths, J. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge university press, 2003. Vol. 12.
280. Pinto D.J., Ermentrout G.B. Spatially structured activity in synaptically coupled neuronal networks: I. Traveling fronts and pulses // *SIAM journal on Applied Mathematics*. SIAM, 2001. Vol. 62, № 1. P. 206-225.

281. Plenz D., Thiagarajan T.C. The organizing principles of neuronal avalanches: cell assemblies in the cortex? // Trends in Neurosciences. 2007. Vol. 30, № 3. P. 101-110.
282. Politi A., Ullner E., Torcini A. Collective irregular dynamics in balanced networks of leaky integrate-and-fire neurons // The European Physical Journal Special. 2018. Vol. 227, № 10-11. P. 1185-1204.
283. Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Estimating delay from a dynamical system response to a weak pulsed action // Technical Physics Letters. Springer, 2009. Vol. 35, № 11. P. 1058-1061.
284. Popovych O. V., Yanchuk S., Tass P.A. Delay- and coupling-induced firing patterns in oscillatory neural loops // Physical Review Letters. American Physical Society, 2011. Vol. 107, № 22. P. 228102.
285. Potjans T.C., Diesmann M. The cell-type specific cortical microcircuit: Relating structure and activity in a full-scale spiking network model // Cerebral Cortex. 2014. Vol. 24, № 3. P. 785-806.
286. Powell M.J.D. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations // Numerical analysis. Springer, 1978. P. 144-157.
287. Prasad A., Dana, S. K., Karnatak, R., Kurths, J., Blasius, B., Ramaswamy, R. Universal occurrence of the phase-flip bifurcation in time-delay coupled systems // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2008/07/08. 2008. Vol. 18, № 2. P. 23111.
288. Prasad A., Iglesias, P. A., Levchenko, A. Phase-flip bifurcation induced by time delay // Physical Review E. 2006/10/10. 2006. Vol. 74, № 3. P. 35204.

289. Prill R.J., Iglesias P.A., Levchenko A. Dynamic properties of network motifs contribute to biological network organization // PLoS Biology. 2005. Vol. 3, № 11. P. 1881-1892.
290. Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. Reconstruction of time-delay systems using small impulsive disturbances // Physical Review E. APS, 2009. Vol. 80, № 6. P. 66206.
291. Prokhorov M.D., Ponomarenko, V. I., Karavaev, A. S., Bezruchko, B. P. Reconstruction of time-delayed feedback systems from time series // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2005. Vol. 203, № 3-4. P. 209-223.
292. Proskurkin I.S., Lavrova A.I., Vanag V.K. Inhibitory and excitatory pulse coupling of two frequency-different chemical oscillators with time delay // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2015. Vol. 25, № 6. P. 64601.
293. Proskurkin I.S., Vanag V.K. New type of excitatory pulse coupling of chemical oscillators via inhibitor // Physical Chemistry Chemical Physics. Royal Society of Chemistry, 2015. Vol. 17, № 27. P. 17906-17913.
294. Rabinovich M.I., Varona, P., Tristan, I., Afraimovich, V. S. Chunking dynamics: Heteroclinics in mind // Frontiers in Computational Neuroscience. Frontiers Media SA, 2014. Vol. 8, № MAR.
295. Ramana Reddy D. V., Sen A., Johnston G.L. Time Delay Induced Deatu in Coupled Limit Cycle Oscillators // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80, № 23. P. 5109-5113.
296. Ramón y Cajal S. Histology of the nervous system of man and vertebrates. Oxford University Press, USA, 1995. Vol. 1.

297. Ratas I., Pyragas K. Noise-induced macroscopic oscillations in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons // *Physical Review E*. APS, 2019. Vol. 100, № 5. P. 52211.
298. Ratas I., Pyragas K. Macroscopic self-oscillations and aging transition in a network of synaptically coupled quadratic integrate-and-fire neurons // *Physical Review E*. APS, 2016. Vol. 94, № 3. P. 32215.
299. Renart A., De La Rocha, J., Bartho, P., Hollender, L., Parga, N., Reyes, A., Harris, K. D. The asynchronous state in cortical circuits // *Science*. American Association for the Advancement of Science, 2010. Vol. 327, № 5965. P. 587-590.
300. Robinson P.A., Rennie, C. J., Wright, J. J., Bahiumuli, H., Gordon, E., Rowe, D. L. Prediction of electroencephalographic spectra from neurophysiology // *Physical Review E*. APS, 2001. Vol. 63, № 2 I. P. 0219031-02190318.
301. Rockland K.S., Ichinohe N. Some thoughts on cortical minicolumns // *Experimental Brain Research*. Springer, 2004. Vol. 158, № 3. P. 265-277.
302. Rodrigues F.A., Peron, T. K. D. M., Ji, P., Kurths, J. The Kuramoto model in complex networks // *Physics Reports*. Elsevier, 2016. Vol. 610. P. 1-98.
303. Rohden M., Sorge, A., Timme, M., Witthaut, D. Self-organized synchronization in decentralized power grids // *Physical Review Letters*. APS, 2012. Vol. 109, № 6. P. 64101.
304. Rosin D.P., Rontani, D., Gauthier, D. J., Schöll, E. Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks // *Physical Review Letters*. American Physical Society, 2013. Vol. 110, № 10. P. 104102.
305. Roy R., Thornburg K.S. Experimental synchronization of chaotic lasers // *Physical Review Letters*. 1994. Vol. 72, № 13. P. 2009-2012.

306. Rybalko S., Zhuchkova E. A generalized model of active media with a set of interacting pacemakers: Application to the heart beat analysis // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2009. Vol. 19, № 1. P. 263-279.
307. Sakaguchi H., Shinomoto S., Kuramoto Y. Phase Transitions and Their Bifurcation Analysis in a Large Population of Active Rotators with Mean-Field Coupling // Progress of Theoretical Physics. Oxford University Press, 1988. Vol. 79, № 3. P. 600-607.
308. Sànchez E., Matias M.A. Experimental observation of a periodic rotating wave in rings of unidirectionally coupled analog Lorenz oscillators // Physical Review E. American Physical Society, 1998. Vol. 57, № 5. P. 6184-6186.
309. Sardi S., Goldental, A., Amir, H., Vardi, R., Kanter, I. Vitality of neural networks under reoccurring catastrophic failures // Scientific reports. Nature Publishing Group, 2016. Vol. 6. P. 31674.
310. Sarnthein J., Petsche, H., Rappelsberger, P., Shaw, G. L., Von Stein, A. Synchronization between prefrontal and posterior association cortex during human working memory // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. National Acad Sciences, 1998. Vol. 95, № 12. P. 7092-7096.
311. Sauseng P., Klimesch, W., Gruber, W. R., Birbaumer, N. Cross-frequency phase synchronization: A brain mechanism of memory matching and attention // NeuroImage. Elsevier, 2008. Vol. 40, № 1. P. 308-317.
312. Sauseng P., Klimesch, W., Gruber, W., Doppelmayr, M., Stadler, W., Schabus, M. The interplay between theta and alpha oscillations in the human electroencephalogram reflects the transfer of information between memory systems // Neuroscience Letters. Elsevier, 2002. Vol. 324, № 2. P. 121-124.

313. Schultheiss N.W., Prinz A.A., Butera R.J. Phase response curves in neuroscience: Theory, experiment, and analysis // Phase Response Curves in Neuroscience. Springer, 2012. 1-518 p.
314. Schuster H.G., Wagner P. Mutual Entrainment of Two Limit Cycle Oscillators with Time Delayed Coupling // Progress of Theoretical Physics. Progress of Theoretical Physics, 1989. Vol. 81, № 5. P. 939-945.
315. Schwartz I.B., Shaw L.B. Isochronal synchronization of delay-coupled systems // Physical Review E. 2007/05/16. 2007. Vol. 75, № 4. P. 46207.
316. Scott B.H., Mishkin M., Yin P. Monkeys have a limited form of short-term memory in audition // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. National Acad Sciences, 2012. Vol. 109, № 30. P. 12237-12241.
317. Shampine L.F., Thompson S. Solving DDEs in MATLAB // Applied Numerical Mathematics. Elsevier, 2001. Vol. 37, № 4. P. 441-458.
318. Shchapin D.S. Dynamics of two neuronlike elements with inhibitory feedback // Journal of Communications Technology and Electronics. Springer, 2009. Vol. 54, № 2. P. 175-184.
319. Shilnikov L.P., Shilnikov, A. L., Turaev, D. V., Chua, L. O. Shilnikov, A. L., Turaev, D. V., Chua, L. O. Methods of Quantitative Theory in Nonlinear Dynamics Part II. World Sci., 2001. 589 p.
320. Shriki O., Hansel D., Sompolinsky H. Rate models for conductance-based cortical neuronal networks // Neural Computation. MIT Press, 2003. Vol. 15, № 8. P. 1809-1841.

321. Sieber J., Wolfrum, M., Lichtner, M., Yanchuk, S. On the stability of periodic orbits in delay equations with large delay // *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*. 2013. Vol. 33, № 7. P. 3109-3134.
322. Singer W. Synchronization of cortical activity and its putative role in information processing and learning // *Annual Review of Physiology*. Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, 1993. Vol. 55, № 1. P. 349-374.
323. Sjöström P.J., Turrigiano G.G., Nelson S.B. Rate, timing, and cooperativity jointly determine cortical synaptic plasticity // *Neuron*. Elsevier, 2001. Vol. 32, № 6. P.1149-1164.
324. Slavcheva G., Gorbach, A.V., Pimenov, A., Skryabin, D. V. Multi-stability and polariton solitons in microcavity polaritonic wires // *Nonlinear Photonics*. 2014.
325. Softky W.R., Koch C. The highly irregular firing of cortical cells is inconsistent with temporal integration of random EPSPs // *Journal of Neuroscience*. Soc Neuroscience, 1993. Vol. 13, № 1. P. 334-350.
326. Song S., Sjöström, P. J., Reigl, M., Nelson, S., Chklovskii, D. B. Highly nonrandom features of synaptic connectivity in local cortical circuits // *PLoS biology*. Public Library of Science, 2005. Vol. 3, № 3. P. e68.
327. Sonnenschein B., Zaks, M. A., Neiman, A. B., Schimansky-Geier, L. Excitable elements controlled by noise and network structure // *The European Physical Journal Special Topics*. Springer, 2013. Vol. 222, № 10. P. 2517-2529.
328. Soriano M.C., Garcia-Ojalvo, J., Mirasso, C. R., Fischer, I. Complex photonics: Dynamics and applications of delay-coupled semiconductor lasers // *Reviews of Modern Physics*. American Physical Society, 2013. Vol. 85, № 1. P. 421-470.

329. Sporns O. The non-random brain: Efficiency, economy, and complex dynamics // *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2011. Vol. 5, № February. P. 1-13.
330. Sporns O., Kötter R. Motifs in Brain Networks // *PLoS Biology*. Public Library of Science, 2004. Vol. 2, № 11. P. e369.
331. Sterzer P., Kleinschmidt A., Rees G. The neural bases of multistable perception // *Trends in Cognitive Sciences*. Elsevier, 2009. Vol. 13, № 7. P. 310-318.
332. Strogatz S.H. From Kuramoto to Crawford: Exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2000. Vol. 143, № 1-4. P. 1-20.
333. Strogatz S.H., Abrams, D. M., McRobie, A., Eckhardt, B., Ott, E. Theoretical mechanics: Crowd synchrony on the Millennium Bridge // *Nature*. 2005. Vol. 438, № 7064. P. 43-44.
334. Strongin R.G., Sergeyev Y.D. Global optimization with non-convex constraints: Sequential and parallel algorithms. Springer Science & Business Media, 2013. Vol. 3. 704 p.
335. Sysoev I. V., Ponomarenko, V. I., Kulminskiy, D. D., Prokhorov, M. D. Recovery of couplings and parameters of elements in networks of time-delay systems from time series // *Physical Review E*. APS, 2016. Vol. 94, № 5. P. 52207.
336. Sysoev I. V., Prokhorov, M. D., Ponomarenko, V. I., Bezruchko, B. P. Determination of parameters of elements and coupling architecture in ensembles of coupled time-delay systems from their time series // *Technical Physics*. Springer, 2014. Vol. 59, № 10. P. 1434-1444.
337. Szentàgothai J. "Specificity versus (quasi-) randomness" revisited. // *Acta morphologica Hungarica*. 1990. Vol. 38, № 3-4. P. 159-167.

338. Taylor A.F., Tinsley, M. R., Wang, F., Showalter, K. Phase clusters in large populations of chemical oscillators // *Angewandte Chemie*. 2011. Vol. 50, № 43. P. 10161-10164.
339. Teramae J.N., Tsubo Y., Fukai T. Optimal spike-based communication in excitable networks with strong-sparse and weak-dense links // *Scientific Reports*. Nature Publishing Group, 2012. Vol. 2. P. 485.
340. Tessone C.J., Scirè, A., Toral, R., Colet, P. Theory of collective firing induced by noise or diversity in excitable media // *Physical Review E*. 2007. Vol. 75, № 1. P. 16203.
341. Thiel M., Zhou C., Kurths J. *Lectures in Supercomputational Neurosciences: Dynamics in Complex Brain Networks*. Springer, 2008.
342. Thomson A.M., Bannister A.P. Interlaminar connections in the neocortex // *Cerebral Cortex*. Oxford Univ Press, 2003. Vol. 13, № 1. P. 5-14.
343. Thomson A.M., West, D. C., Wang, Y., Bannister, A. P. Synaptic connections and small circuits involving excitatory and inhibitory neurons in layers 2-5 of adult rat and cat neocortex: Triple intracellular recordings and biocytin labelling in vitro // *Cerebral Cortex*. 2002. Vol. 12, № 9. P. 936-953.
344. Timme M., Wolf F. The simplest problem in the collective dynamics of neural networks: Is synchrony stable? // *Nonlinearity*. IOP Publishing, 2008. Vol. 21, № 7. P. 1579-1599.
345. Timme M., Wolf F., Geisel T. Coexistence of Regular and Irregular Dynamics in Complex Networks of Pulse-Coupled Oscillators // *Physical Review Letters*. 2002/12/18. 2002. Vol. 89, № 25. P. 258701.

346. Traub R.D., Wong R.K. Cellular mechanism of neuronal synchronization in epilepsy // *Science*. American Association for the Advancement of Science, 1982. Vol. 216, № 4547. P. 745-747.
347. Tsodyks M., Mitkov I., Sompolinsky H. Pattern of synchrony in inhomogeneous networks of oscillators with pulse interactions // *Physical Review Letters*. American Physical Society, 1993. Vol. 71, № 8. P. 1280-1283.
348. Tsubo Y., Takada, M., Reyes, A.D., Fukai, T. Layer and frequency dependencies of phase response properties of pyramidal neurons in rat motor cortex // *European Journal of Neuroscience*. Wiley Online Library, 2007. Vol. 25, № 11. P. 3429-3441.
349. Tuckwell H.C. *Introduction to theoretical neurobiology*. Cambridge University Press, 1998.
350. Turukina L. V., Pikovsky A. Hyperbolic chaos in a system of resonantly coupled weakly nonlinear oscillators // *Physics Letters A*. Elsevier, 2011. Vol. 375, № 11. P. 1407-1411.
351. Uhlhaas P.J., Singer W. Abnormal neural oscillations and synchrony in schizophrenia // *Nature Reviews Neuroscience*. Nature Publishing Group, 2010. Vol. 11, № 2. P. 100-113.
352. Ullner E., Politi A. Self-sustained irregular activity in an ensemble of neural oscillators // *Physical Review X*. 2016. Vol. 6, № 1. P. 11015.
353. Ullner E., Politi A., Torcini A. Ubiquity of collective irregular dynamics in balanced networks of spiking neurons // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. AIP Publishing LLC, 2018. Vol. 28, № 8. P. 81106.

354. Usacheva S.A., Ryskin N.M. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. American Institute of Physics, 2014. Vol. 24, № 2. P. 23123.
355. van der Pol B. LXXXV. On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. Taylor & Francis, 1922. Vol. 43, № 256. P. 700-719.
356. Van Der Sande G. et al. Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators // *Physical Review E*. 2008/07/23. APS, 2008. Vol. 77, № 5. P. 55202.
357. van Vreeswijk C. Partial synchronization in populations of pulse-coupled oscillators // *Physical Review E*. American Physical Society, 1996. Vol. 54, № 5. P. 5522-5537.
358. Van Vreeswijk C., Sompolinsky H. Chaotic Balanced State in a Model of Cortical Circuits // *Neural Computation*. MIT Press, 1998. Vol. 10, № 6. P. 1321-1371.
359. Van Vreeswijk C., Sompolinsky H. Chaos in neuronal networks with balanced excitatory and inhibitory activity // *Science*. American Association for the Advancement of Science, 1996. Vol. 274, № 5293. P. 1724-1726.
360. Vanag V.K. Hierarchical network of pulse coupled chemical oscillators with adaptive behavior: Chemical neurocomputer// *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2019. Vol. 29. P. 083104.
361. Vardi R., Goldental, A., Marmari, H., Brama, H., Stem, E. A., Sardi, S., Sabo, P., Kanter, I., Neuronal response impedance mechanism implementing cooperative

- networks with low firing rates and  $\mu s$  precision // *Frontiers in Neural Circuits*.  
*Frontiers*, 2015. Vol. 9, № June. P. 29.
362. Vicente R., Gollo, L. L., Mirasso, Cl. R., Fischer, I., Pipa, G. Dynamical relaying can yield zero time lag neuronal synchrony despite long conduction delays // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2008/10/30. 2008. Vol. 105, № 44. P. 17157-17162.
363. Vladimirov A.G., Turaev D. Model for passive mode locking in semiconductor lasers // *Physical Review A*. 2005. Vol. 72, № 3. P. 33808.
364. Vogels T.P., Abbott L.F. Signal propagation and logic gating in networks of integrate-and-fire neurons // *Journal of Neuroscience*. 2005. Vol. 25, № 46. P. 10786-10795.
365. Wang L., Li, X., Hsiao, S. S., Bodner, M., Lenz, F., Zhou, Y.-D. Persistent neuronal firing in primary somatosensory cortex in the absence of working memory of trial-specific features of the sample stimuli in a haptic working memory task // *Journal of Cognitive Neuroscience*. MIT Press, 2012. Vol. 24, № 3. P. 664-676.
366. Wang S.J., Hilgetag C.C., Zhou C. Sustained activity in hierarchical modular neural networks: Self-organized criticality and oscillations // *Frontiers in Computational Neuroscience*. *Frontiers*, 2011. Vol. 5. P. 30.
367. Wang X.J. Synaptic basis of cortical persistent activity: The importance of NMDA receptors to working memory // *Journal of Neuroscience*. 1999. Vol. 19, № 21. P. 9587-9603.
368. Wang X.J., Buzsàki G. Gamma oscillation by synaptic inhibition in a hippocampal interneuronal network model // *Journal of Neuroscience*. *Soc Neuroscience*, 1996. Vol. 16, № 20. P. 6402-6413.

369. Wang X., Lu, T., Snider, R. K., Liang, L. Sustained firing in auditory cortex evoked by preferred stimuli // Nature. Nature Publishing Group, 2005. Vol. 435, № 7040. P. 341-346.
370. Wang X.J. Synaptic reverberations underlying mnemonic persistent activity // Trends in Neurosciences. 2001. Vol. 24, № 8. P. 455-463.
371. Watts D.J., Strogatz S.H. Collective dynamics of “small-world” networks // Nature. 1998. Vol. 393, № 6684. P. 440-442.
372. Wedgwood K.C.A., Lin, K. K., Thul, R., Coombes, S. Phase-amplitude descriptions of neural oscillator models // Journal of Mathematical Neuroscience. Springer, 2013. Vol. 3, № 1. P. 1-22.
373. Weigandt T.C., Kim B., Gray P.R. Analysis of timing jitter in CMOS ring oscillators // Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems. 1994. Vol. 4. P. 191-194.
374. Wickramasinghe M., Kiss I.Z. Spatially organized dynamical states in chemical oscillator networks: Synchronization, dynamical differentiation, and chimera patterns // PLoS ONE. Public Library of Science, 2013. Vol. 8, № 11. P. e80586.
375. Wiley D.A., Strogatz S.H., Girvan M. The size of the sync basin // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. American Institute of Physics, 2006. Vol. 16, № 1. P. 15103.
376. Williams C.R.S., Sorrentino, F., Murphy, T.E., Roy, R. Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2013. Vol. 23, № 4. P. 43117.
377. Wilson D., Moehlis J. Isostable reduction of periodic orbits // Physical Review E. 2016. Vol. 94, № 5. P. 1-7.

378. Wilson H.R., Cowan J.D. Excitatory and Inhibitory Interactions in Localized Populations of Model Neurons // *Biophysical Journal*. 1972. Vol. 12, № 1. P. 1-24.
379. Wimmer K., Nykamp, D. Q., Constantinidis, C., Compte, A. Bump attractor dynamics in prefrontal cortex explains behavioral precision in spatial working memory // *Nature Neuroscience*. Nature Publishing Group, 2014. Vol. 17, № 3. P. 431-439.
380. Winfree A.. T. *The geometry of biological time*. Springer, 2001.
381. Wolfrum M., Yanchuk S. Eckhaus instability in systems with large delay // *Physical Review Letters*. 2006. Vol. 96, № 22. P. 220201.
382. Woodman M.M., Canavier C.C. Effects of conduction delays on the existence and stability of one to one phase locking between two pulse-coupled oscillators // *Journal of Computational Neuroscience*. Springer Netherlands, 2011. Vol. 31, № 2. P. 401-418.
383. Wünsche H.J., Bauer, S., Kreissl, J., Ushakov, O., Korneyev, N., Henneberger, F., Wille, E., Erzgräber, H., Peil, M., Elsässer, W., Fischer, I. Synchronization of delay-coupled oscillators: A study of semiconductor lasers // *Physical Review Letters*. 2005/05/21. 2005. Vol. 94, № 16. P. 163901.
384. Xia G.-Q., Chan S.-C., Liu J.-M. Multistability in a semiconductor laser with optoelectronic feedback // *Optics Express*. 2007. Vol. 15, № 2. P. 572.
385. Yanchuk S., Perlikowski P. Delay and periodicity // *Physical Review E*. APS, 2009. Vol. 79, № 4. P. 1-9.
386. Yanchuk S., Perlikowski, P., Popovych, O. V., Tass, P. A. Variability of spatio-temporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011. Vol. 21, № 4. P. 47511.

387. Yanchuk S., Wolfrum M. Instabilities of stationary states in lasers with long-delay optical feedback // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2012. Vol. 9, № 2. P. 519-535.
388. Yassin L., Benedetti, B. L., Jouhanneau, J. S., Wen, J. A., Poulet, J. F.A., Barth, A. L. An Embedded Subnetwork of Highly Active Neurons in the Neocortex // *Neuron*. 2010. Vol. 68, № 6. P. 1043-1050.
389. Yeung M.K.S., Strogatz S.H. Time delay in the kuramoto model of coupled oscillators // *Physical Review Letters*. American Physical Society, 1999. Vol. 82, № 3. P. 648-651.
390. Yoshimura Y., Dantzker J.L.M., Callaway E.M. Excitatory cortical neurons form fine-scale functional networks // *Nature*. 2005. Vol. 433, № 7028. P. 868-873.
391. Zaks M.A., Sailer, X., Schimansky-Geier, L., Neiman, A. B. Noise induced complexity: From subthreshold oscillations to spiking in coupled excitable systems // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. American Institute of Physics, 2005. Vol. 15, № 2. P. 26117.
392. Zaks M.A., Tomov P. Onset of time dependence in ensembles of excitable elements with global repulsive coupling // *Physical Review E*. APS, 2016. Vol. 93, № 2. P. 020201(R).
393. Zeitler M., Daffertshofer A., Gielen C.C.A.M. Asymmetry in pulse-coupled oscillators with delay // *Physical Review E*. 2009. Vol. 79, № 6. P. 65203.
394. Zhang Y., Hu G., Cerdeira H.A. How does a periodic rotating wave emerge from high-dimensional chaos in a ring of coupled chaotic oscillators? // *Physical Review E*. American Physical Society, 2001. Vol. 64, № 3. P. 4.

395. Zhao L., Beverlin, B., Netoff, T., Nykamp, D. Q. Synchronization from second order network connectivity statistics // *Frontiers in Computational Neuroscience*. 2011. Vol. 5, № July. P. 28.
396. Zillmer R., Livi, R., Politi, A., Torcini, A. Stability of the splay state in pulse-coupled networks // *Physical Review E. APS*, 2007. Vol. 76, № 4. P. 46102.
397. Zillmer R., Livi, R., Politi, A., Torcini, A. Desynchronization in diluted neural networks // *Physical Review E*. 2006. Vol. 74, № 3. P. 36203.
398. Адилова А.Б., Герасимова С.А., Рыскин Н.М. Бифуркационный анализ взаимной синхронизации двух генераторов с запаздыванием в цепи связи // *Нелинейная динамика. Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук*, 2017. Vol. 13, № 1. С. 3-12.
399. Адилова А.Б., Рыскин Н.М. Исследование синхронизации в системе двух гиротронов с запаздыванием в канале связи на основе модифицированной квазилинейной модели // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. 2018. Vol. 26, № 6. С. 68-81.
400. Кузнецов С.П., Пономаренко В.И. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла-Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием // *Письма в ЖТФ*. 2008, V.34, №18. С.1-8.
401. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: Гостехтеориздат, 1956.