

Ю. И. Троицкая, И. А. Соустова,
О. С. Ермакова, Д. А. Сергеев

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

— Часть 2 —

**ДИНАМИКА
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ.
ВОЛНЫ И ТЕЧЕНИЯ**

Нижний Новгород — 2019

Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики
Российской академии наук

Ю. И. Троицкая, И. А. Соустова,
О. С. Ермакова, Д. А. Сергеев

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Часть 2

ДИНАМИКА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. ВОЛНЫ И ТЕЧЕНИЯ

*Методическое пособие
для студентов физических специальностей
очной формы обучения*

Нижний Новгород
ИПФ РАН
2019

Издано по решению редакционно-издательского совета
ФИЦ Институт прикладной физики РАН

Рецензент

доктор физико-математических наук В. П. Реутов

Механика сплошных сред : Методическое пособие для студентов физических специальностей очной формы обучения. Ч. 2 : Динамика несжимаемой жидкости. Волны и течения / Ю. И. Троицкая, И. А. Соустова, О. С. Ермакова, Д. А. Сергеев; Федер. исслед. центр Ин-т прикладной физики Рос. академии наук. — Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2019. — 148 с.

В основе методического пособия лежит курс лекций, читаемых авторами в течение многих лет на факультете «Высшая школа общей и прикладной физики» в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского и на кафедре прикладной математики в Нижегородском техническом университете им. Р.Е. Алексеева. Пособие предназначено помочь студентам, специализирующимся в различных областях физики и математики, понять общие законы механики сплошной среды, проявляющиеся в гидродинамике, газодинамике, теории упругости и других областях, и уметь применять их. Пособие состоит из двух частей. В первой части (Механика сплошных сред. Часть 1. Течение идеального сжимаемого газа и жидкости. Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2018) излагаются основные аксиоматические положения — законы сохранения массы, импульса, энергии в сжимаемых газах и жидкостях, а также первый и второй законы термодинамики. Вторая часть посвящена динамике несжимаемой среды и служит прямым продолжением первой части, поэтому и начинается с 7-й главы. В приложениях в краткой форме изложены необходимые сведения об основных типах волновых движений в упругих твердых телах.

Материал методического пособия излагается в сжатом, справочном виде и рассчитан на студентов физических специальностей.

7. ГИДРОДИНАМИКА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Гидродинамика несжимаемой жидкости является отдельной самостоятельной областью механики сплошных сред с характерной физической спецификой, практическими приложениями и математическим аппаратом.

7.1. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

При описании нестационарного течения идеальной жидкости или газа зачастую возникают существенные трудности, связанные с невозможностью (по крайней мере, на современном этапе) построения общих решений соответствующих уравнений, и, как следствие, необходимость их редукции, основанной и на наблюдениях, и на физических представлениях. Так, основное математическое допущение, играющее важную роль при описании практически важных задач, включает предположение о несжимаемости жидкости и предположение об отсутствии в движущейся идеальной несжимаемой жидкости завихренности, т. е. $\Omega = \text{rot} \vec{v} = 0$. Обсудим каждое из них.

Начнем с идеализированной невязкой и нетеплопроводной жидкости и определим понятие несжимаемости. По определению жидкость называется несжимаемой, если при движении жидкой частицы сохраняется индивидуальный объем:

$$\frac{d}{dt} \int_V dV = 0. \quad (7.1)$$

Применим первую вспомогательную формулу

$$\frac{d}{dt} \int_V A dV = \int_V \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \text{div} A \vec{v} \right) dV$$

к выражению (7.1). В нашем случае $A = 1$, т. е.

$$\int_V \text{div} \vec{v} dV = 0$$

Тогда условие несжимаемости примет следующий вид:

$$\text{div} \vec{v} = 0 \quad (7.2)$$

Чтобы понять смысл условия (7.2), обратимся к уравнению сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \text{grad } \rho) = 0, \quad (7.3)$$

откуда с учетом (7.2) получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \text{grad } \rho) = 0, \quad (7.4)$$

т. е. плотность жидкой частицы при выполнении условия (7.2) сохраняется.

Запишем систему уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \text{grad } \vec{v}) - \rho \text{grad } p = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \text{grad } \rho) = 0 \\ \text{div } \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

Можно показать, что условие несжимаемости (7.2) играет роль уравнения состояния. Действительно, как только что было показано, следствием условия $\text{div } \vec{v} = 0$ является сохранение плотности индивидуальной частицы в процессе ее движения. А это означает, что в несжимаемой жидкости рассматриваются процессы, имеющие характерные пространственные L и временные T масштабы, такие, что $L/T \ll c$, где c — скорость звука ($c = dp/d\rho = \infty$).

Иными словами, в приближении несжимаемой жидкости скорость звука предполагается бесконечно большой.

Если иметь в виду практические приложения сформулированных выше уравнений и их решений, то важно учитывать дополнительные ограничения, накладываемые на решения этих уравнений. Такими ограничениями могут быть начальные и граничные условия; причем для установившихся процессов это только граничные условия.

Рассмотрим два типа граничных условий, имея в виду задачи о движении твердых тел в жидкости и задачи, связанные с волновым движением в ограниченных объемах жидкости при наличии скачков плотности; последнее обстоятельство требует выполнения граничных условий на разрыве между двумя несжимаемыми жидкостями, а также граничных условий на поверхности твердого тела.

1. *Граничные условия на разрыве двух слоев жидкости разной плотности.* Как было показано ранее (см. часть 1 настоящего издания [1]), в несжимаемой жидкости может существовать только тангенциальный разрыв, поскольку разрывы типа ударных волн невозможны. Действительно, скорость ударной волны больше скорости звука, а в приближении несжимаемой жидкости она бесконечно велика. Следовательно, ударные волны в несжимаемой жидкости невозможны.

Итак, пусть $S(\vec{r}, t)$ — граница раздела двух жидкостей с разными плотностями, которая, вообще говоря, неизвестна и движется со скоростью \vec{U} . Указанные выше граничные условия включают в себя:

а) кинематическое граничное условие, или граничное условие непротекания:

$$v_{1n}|_S = U_n|_S, \quad (7.6)$$

где $S(\vec{r}, t)$ — неизвестная функция, для которой с другой стороны от разрыва выполняется аналогичное соотношение:

$$v_{2n}|_S = U_n|_S, \quad (7.7)$$

где U_n — это нормальная компонента скорости движения границы раздела $S(\vec{r}, t)$; v_{1n}, v_{2n} — нормальные компоненты скорости жидкости по обе стороны от границы;

б) динамическое граничное условие:

$$p_1|_S = p_2|_S. \quad (7.8)$$

2. *Граничные условия на поверхности твердого тела.* Предположим теперь, что граница известна — это поверхность твердого тела S , т. е.

$$v_n|_S = U_n|_S, \quad (7.9)$$

где U_n — нормальная проекция скорости движения твердого тела. Больше граничных условий не требуется, ибо поверхность S задана.

Следующим упрощающим предположением в приближении несжимаемой жидкости будет предположение о *потенциальности*, необходимым и достаточным условием которого является отсутствие завихренности, т. е. $\text{rot} \vec{v} = 0$.

Покажем теперь, что для несжимаемой жидкости условие потенциальности может быть выполнено только в случае однородной жидкости ($\rho = \text{const}$). Запишем уравнение Эйлера в поле силы тяжести:

$$\vec{v} = \vec{v}(r, t) = \vec{v}(r) = \vec{v}(r, t) \quad (7.10)$$

Тогда с учетом предположения о потенциальности из уравнения Эйлера можно получить следующее выражение:

$$[\nabla p, \nabla \rho] = 0. \quad (7.11)$$

Полученное выражение (7.11) означает, что $\rho = \rho(p)$, т. е. процесс баротропный. Но для каждой жидкой частицы $\rho(r, t) = \text{const}$, поскольку жидкость несжимаема, т. е. $\frac{d\rho}{dp} = 0$, следовательно, $\rho = \text{const}$

везде и жидкость однородна.

С учетом того, что для потенциального течения можно ввести потенциал скорости φ , связанный со скоростью соотношением $\vec{v} = \text{grad} \varphi$, уравнение Эйлера примет следующий вид:

$$\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (|\nabla \varphi|^2) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g}. \quad (7.12)$$

Отсюда получим, что $\nabla \left(\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0$, если ось z направлена вверх. Интегрируя это соотношение, получим

$$\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = F(t). \quad (7.13)$$

Функция $F(t)$ может быть положена равной нулю без ограничения общности, поскольку можно сделать замену переменных:

$$\varphi = \varphi' + \int F(t) dt, \quad (7.14)$$

которая не влияет на поле скорости $\vec{v} = \text{grad} \varphi'$. Из уравнения (7.13) сразу можно найти давление на поверхности твердого тела.

Итак, мы получили 1-й интеграл уравнения Эйлера для потенциального движения: *интеграл Коши — Лагранжа для нестационарного потенциального движения несжимаемой жидкости* (см. выражение (7.13)). При $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ из (7.13) следует *формула Бернулли*:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \quad (7.15)$$

Поскольку условие несжимаемости содержит только скорость \vec{v} , то оно дает полную кинематическую характеристику движения сплош-

ной среды в эйлеровом описании. Отсюда ясно, что условия несжимаемости часто бывает достаточно, чтобы определить, как происходит движение жидкости, т. е. чтобы найти поле скоростей. Далее из уравнения сохранения массы можно найти плотность, а из уравнения Эйлера — давление.

7.2. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Пусть движение жидкости таково, что везде выполняется условие $\text{rot } \vec{v} = 0$. Найдем решение уравнений гидродинамики для такого случая. Вопрос о реализации этого условия в любой другой момент времени обсудим позже.

Если $\Omega = \text{rot } \vec{v} = 0$, то можно ввести потенциал скорости φ так, что $\vec{v} = \text{grad } \varphi$. Но тогда уравнение несжимаемости (7.2) дает

$$\Delta \varphi = 0. \quad (7.16)$$

Таким образом, потенциал скорости есть гармоническая функция. Зададим граничные условия, необходимые для решения уравнения Лапласа (7.16). На поверхности твердого тела эти условия имеют вид

$$v_n|_S = U_n, \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = U_n. \quad (7.17)$$

Распределение давления по поверхности S может быть найдено из уравнения Эйлера. Аналогично можно задать граничные условия на границе раздела двух жидкостей, в которых движение потенциально:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_S = U_n, \quad \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right|_S = U_n, \quad p_1 = p_2, \quad (7.18)$$

где p_1 и p_2 определяются из формулы Коши — Лагранжа, а U_n выражается через уравнение поверхности S .

Рассмотрим задачу об обтекании твердого тела. Задача состоит в том, чтобы найти распределение скорости в жидкости, когда в ней движется твердое тело. Потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа (7.16) с граничным условием непротекания на границе

твердого тела $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = U_n$ и с условием спадания возмущений при удалении от тела, т. е. $\varphi = 0$ при $r \rightarrow \infty$, где \vec{r} — радиус-вектор системы координат, проходящей через центр тела.

Эта задача может быть сформулирована также и в движущейся системе отсчета, где тело покоится. В этом случае на поверхности тела должно выполняться условие непротекания:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (7.19)$$

Скорость жидкости в системе отсчета, где тело покоится, $\vec{v} = -\vec{v}_0$ при $r \rightarrow \infty$ должна быть противоположна скорости набегающего потока, т. е. $\vec{v} = -\vec{v}_0$, \vec{v} — скорость жидкости, определяемая решением (7.16). В силу линейности уравнения Лапласа (7.16) его решение, убывающее при $r \rightarrow \infty$, можно искать в виде разложения по мультиполям:

$$\varphi = \frac{a}{r} + \left(\vec{a}, \vec{v} \right) \frac{1}{r^2} + \dots = \frac{a}{r} - \frac{(\vec{a}, \vec{v}_0)}{r^2} + \dots, \quad (7.20)$$

где \vec{v}_0 — единичный вектор в направлении \vec{v} . Выражение для скорости жидкости при этом имеет вид

$$\vec{v} = -\vec{v}_0 + \frac{a \vec{v}_0}{r^2} - \nabla \frac{(\vec{a}, \vec{v}_0)}{r^2} + \dots = -\frac{\vec{v}_0}{r^2} + \frac{(\vec{a}, \vec{v}_0) \vec{v}_0}{r^3}, \quad (7.21)$$

1-е слагаемое в правой части выражения (7.21) соответствует монополюльному распределению, а 2-е — дипольному распределению.

Обсудим смысл первого слагаемого в (7.21). Скорость течения, определяемого формулой (7.21), направлена по радиусу. Проведем большую сферу радиусом R и вычислим поток массы через нее:

$$\iint_S \rho v_n dS = 4\pi R^2 \left(-\frac{a}{R^2} \right) = -4\pi a. \quad (7.22)$$

Таким образом, монополюльный член в (7.20) соответствует нахождению источника массы в начале координат. В обычных условиях потенциального обтекания твердого тела источник массы отсутствует, т. е. $a = 0$. Следовательно, поле скорости на больших расстояниях от тела описывается дипольным источником:

$$\vec{v} = \frac{\vec{a} \times \vec{v}_0}{r^3}, \quad (7.23)$$

где \vec{a} — дипольный момент, определяемый из граничных условий (как и коэффициенты при высших мультиполях). Таким образом, в

системе отсчета, где тело покоится, выражение для скорости потенциального обтекания имеет вид

$$\vec{v} = \frac{\vec{U}}{r^3} \quad (7.24)$$

Определим теперь силу, действующую на тело при потенциальном обтекании. Будем рассматривать движение жидкости в системе отсчета, в которой тело покоится. Окружим тело сферической поверхностью радиусом R , расположенной достаточно далеко от него. Применим метод контрольных поверхностей к двусвязной области, ограниченной с одной стороны поверхностью тела S , имеющей площадь Σ_m , а с другой — поверхностью Σ_R . Закон сохранения импульса в этой системе отсчета при выполнении условия непротекания на поверхности неподвижного тела ($u_n|_S = 0$) имеет вид

$$\iint_{\Sigma_R} (p \vec{v} \cdot \vec{n} + \rho \vec{v} \otimes \vec{v} \cdot \vec{n}) d\Sigma - \iint_{\Sigma_m} p \vec{v} \cdot \vec{n} d\Sigma = 0 \quad (7.25)$$

Сила, действующая на жидкость со стороны тела на поверхности S , равна $\vec{F}_{m \rightarrow жс} = - \iint_{\Sigma_m} p \vec{v} \cdot \vec{n} d\Sigma$. И по 3-му закону Ньютона эта сила равна (с противоположным знаком) силе, приложенной к твердому телу, т. е. $-\vec{F}_{жс \rightarrow m}$. Таким образом, сила, действующая на тело со стороны жидкости, определяется соотношением

$$\vec{F}_{жс \rightarrow m} = \iint_{\Sigma_R} (p \vec{v} \cdot \vec{n} + \rho \vec{v} \otimes \vec{v} \cdot \vec{n}) d\Sigma \quad (7.26)$$

Достаточно далеко поле обтекания — это поле диполя, поэтому входящая в (7.26) скорость \vec{v} определяется следующей формулой:

$$\vec{v} = \frac{\vec{U}}{r^3} - \vec{U} \quad (7.27)$$

Давление при этом можно найти по формуле Бернулли, справедливой при стационарном обтекании:

$$p + \frac{\rho(\vec{v} \cdot \vec{v})}{2} = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \quad (7.28)$$

Тогда из (7.26) получим

$$\vec{F}_{жс \rightarrow m} = \oint_{\Sigma_R} \left(p \vec{n} + \rho \vec{v} \otimes \vec{v} \cdot \vec{n} \right) d\Sigma \quad (7.29)$$

Не проводя точных вычислений, покажем, что интегралы, пропорциональные \vec{v}_0 с постоянными скалярными или векторными коэффициентами в (7.29), равны нулю, тогда

$$\circ \quad , \quad \circ \quad . \quad (7.30)$$

Оставшиеся ненулевые слагаемые в (7.29) имеют следующий вид:

$$\vec{F}_{ж \rightarrow т} = \circ \quad \left(\vec{r} \cdot \vec{v} + r \left(v_r \vec{r} - r \vec{v} - r \vec{v} \right) \right) \int_{\Sigma_R} . \quad (7.31)$$

Для дипольного обтекания $v \sim \frac{1}{R^3}$, а $dS \sim R^2$. Поскольку поверхность Σ_R выбрана произвольно, то можно R устремить к ∞ . Но тогда

$$\vec{F}_{ж \rightarrow т} = \vec{v} . \quad (7.32)$$

Таким образом, при стационарном потенциальном обтекании на тело в идеальной несжимаемой жидкости сила не действует (эту силу часто называют силой лобового сопротивления). Это так называемый парадокс Даламбера. Он имеет ясный физический смысл. В идеальной жидкости должна сохраняться энергия. Если бы на тело со стороны жидкости действовала сила, то над телом бы совершалась работа. В этом случае очевидно, что закон сохранения энергии нарушается. Парадокс Даламбера является следствием принятой нами идеализации: несжимаемая, идеальная, безграничная жидкость при потенциальном обтекании.

Рассмотрим теперь случай, когда тело в жидкости движется с ускорением. Тогда парадокс Даламбера не работает, тело увлекает за собой жидкость, она ускоряется, и на тело со стороны жидкости действует сила.

7.3. ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА

Итак, пусть на тело массы m действует сила \vec{J} . Тело погружено в идеальную безграничную несжимаемую жидкость. Найдём ускорение тела. Согласно 2-му закону Ньютона:

$$m \vec{a} = \vec{J} + \vec{J}_{ж \rightarrow т} . \quad (7.33)$$

На жидкость со стороны тела действует сила, равная по величине $|\vec{J}_{ж \rightarrow т}|$ и противоположная ей по направлению:

$$\vec{J}_{т \rightarrow ж} = -\vec{J}_{ж \rightarrow т} . \quad (7.34)$$

Сила, действующая на жидкость $\vec{J}_{m \rightarrow ж} = -\frac{d\vec{r}_n}{dt}$, равна изменению импульса жидкости. Казалось бы, дальше задача решается просто. Находим поле скорости в жидкости, для этого решаем уравнение Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \varphi_n|_S = U_n(t) \end{cases} \quad (7.35)$$

где $U_n(t)$ — нормальная проекция скорости на поверхности тела. Решение будет точно таким же, как в случае равномерного прямолинейного движения. Далее находим импульс жидкости: $\vec{r}_n = \int_{V_\infty} \vec{r} \cdot \rho \cdot \varphi dV$. Но так как $\nabla\varphi \sim \frac{1}{r^3}$, а $dV \sim r^2 \cdot dr$, такой интеграл

расходится, а значит, вычислить импульс жидкости таким способом не удастся.

Будем рассуждать несколько иначе. Импульс жидкости — это количество движения, которое нужно сообщить жидкости, чтобы вывести ее из состояния покоя и создать рассматриваемое движение. Предположим, что это движение мы создаем за счет движения того же самого тела, которое действует на жидкость силой $G(t)$:

$$\frac{d\vec{r}_n}{dt} = \vec{G}(t), \quad \vec{r}_n = \int_0^t \vec{G}(\tau) d\tau. \quad (7.36)$$

При этом тело совершает над жидкостью работу:

$$A = \int_0^t \vec{U}(\tau) \cdot \vec{G}(\tau) d\tau, \quad (7.37)$$

где $\vec{U}(\tau)$ — скорость тела. Поскольку в начальный момент времени жидкость покоилась, то ее кинетическая энергия была равна нулю, и, следовательно, кинетическая энергия жидкости в момент времени t будет определяться работой $A(t)$, т. е.

$$E = \int_0^t \vec{U}(\tau) \cdot \vec{G}(\tau) d\tau,$$

или

$$\frac{dE}{dt} = \vec{U}(t) \cdot \vec{G}(t) = \vec{U}(t) \cdot \frac{d\vec{r}_n}{dt}. \quad (7.38)$$

Таким образом, изменение импульса жидкости выражается через изменение ее кинетической энергии. При этом кинетическую энергию жидкости можно вычислить, зная поле скорости, поскольку интеграл в (7.39) является сходящимся:

$$E = \int_{V_{\infty}} \frac{\rho v^2}{2} dV. \quad (7.39)$$

Заметим, что поле скорости получается из решения линейного уравнения $\Delta\phi = 0$, при этом значение скорости тела входит в граничные условия, а значит, поле скорости жидкости — линейная функция скорости тела. Но кинетическая энергия жидкости будет представлять собой квадратичную форму от скорости тела, т. е.

$$E = \frac{m_{ij} U_i U_j}{2}. \quad (7.40)$$

Из симметрии ясно, что $m_{ij} = m_{ji}$. Тогда

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m_{ij}}{2} \left(\frac{dU_i}{dt} U_j + \frac{dU_j}{dt} U_i \right) = U_i m_{ij} \frac{dU_j}{dt} = U_i \frac{dp_{ni}}{dt}. \quad (7.41)$$

Таким образом,

$$\frac{dp_{ni}}{dt} = m_{ij} \frac{dU_j}{dt}, \quad \text{а} \quad p_{ni} = U_j m_{ij}. \quad (7.42)$$

Вернемся к задаче, сформулированной вначале. Найдем ускорение погруженного тела, на которое действует сила \vec{j} . Проекция на ось i :

$$m \frac{dv_i}{dt} = F_i + m_{ij} \frac{dv_j}{dt}, \quad (7.43)$$

или

$$\left(m\delta_{ij} + m_{ij} \right) \frac{dv_j}{dt} = f_i. \quad (7.44)$$

В силу того что *тело ускоряет увлекаемую за ним жидкость, этот процесс эквивалентен увеличению массы и возникновению других составляющих ускорения, отличных от направления действия силы*. Эти эффекты и описываются величиной m_{ij} , которая называется *тензором присоединенной массы*.

Рассмотрим далее пример потенциального обтекания шара идеальной несжимаемой жидкостью.

7.4. ДВИЖЕНИЕ ШАРА В ЖИДКОСТИ. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ

Пусть шар радиуса a движется в идеальной несжимаемой жидкости со скоростью U . Определим поле скорости, распределение давления по поверхности шара и присоединенную массу. Система уравнений, описывающая движение шара, включает в себя уравнение Лапласа и граничные условия на поверхности шара и на бесконечности:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = U \cos\theta \\ \varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (7.45)$$

Будем решать задачу в сферических переменных, тогда для уравнения Лапласа

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) = 0. \quad (7.46)$$

Решение уравнения Лапласа будем искать методом разделения переменных:

$$\varphi = Q(\theta)R(r). \quad (7.47)$$

Тогда уравнение Лапласа примет вид

$$\frac{\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right)}{R} + \frac{\frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dQ}{d\theta} \right)}{\sin\theta Q} = 0. \quad (7.48)$$

Для функций Q и R получим систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - 2R = 0 \\ \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dQ}{d\theta} \right) + 2Q \sin\theta = 0 \end{cases} \quad (7.49)$$

Решение второго уравнения системы (7.49) будет следующим:

$$Q = \cos\theta. \quad (7.50)$$

Функцию $R(r)$ будем искать в степенном виде:

$$R = r^m. \quad (7.51)$$

Подставляя предложенную степенную функцию в первое уравнение системы (7.49), получим

$$m(m+1)-2=0 \Rightarrow m_1=-2, \quad m_2=1. \quad (7.52)$$

Граничному условию при $r \rightarrow \infty$ соответствует $m_1 = -2$, т. е.

$$\varphi = \frac{A \cos \theta}{r^2}. \quad (7.53)$$

Из граничного условия на поверхности сферы получим

$$A = -\frac{Ua^3}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{Ua^3 \cos \theta}{2r^2}. \quad (7.54)$$

Тогда для проекций поля скорости можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Ua^3 \cos \theta}{r^3}, \\ v_\psi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0, \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{Ua^3}{2r^3} \sin \theta. \end{aligned} \quad (7.55)$$

7.4.1. Распределение давления по поверхности шара

Перейдем в систему отсчета, в которой тело покоится. Тогда поле скорости в жидкости:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\psi \vec{e}_\psi, \quad v_r = U \cos \theta, \quad v_\theta = -U \sin \theta, \\ v_r &= \left(\frac{Ua^3}{r^3} - U \right) \cos \theta, \quad v_\theta = \left(\frac{Ua^3}{2r^3} + U \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Распределение давления на поверхности шара найдем по теореме Бернулли:

$$p|_{r=a} + \frac{\rho(v_r^2 + v_\theta^2)}{2} \Big|_{r=a} = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2}. \quad (7.57)$$

Подставляя сюда выражения для скорости (7.56), получим

$$p = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right). \quad (7.58)$$

7.4.2. Присоединенная масса шара, движущегося в идеальной несжимаемой жидкости

Определим величину присоединенной массы в случае шара, движущегося в идеальной несжимаемой жидкости. Для этого сначала найдем кинетическую энергию движения жидкости:

$$E = \int \frac{\rho(v_r^2 + v_\theta^2)}{2} dV = 2\pi \int_a^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[\frac{\rho U^2 a^6}{2 r^6} \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{4} \right) \right] =$$

$$= \frac{\rho U^2 a^3 \pi}{3} \quad (7.59)$$

По определению присоединенной массы:

$$E = \frac{m_{ij} U_i U_j}{2} \quad (7.60)$$

Сравнивая эти два выражения, получим

$$m_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\pi}{3} \rho a^3 \quad (7.61)$$

Можно сделать вывод, что при движении шара в жидкости, присоединенная масса равна 1/2 массы жидкости в объеме тела.

ЗАДАЧИ к разделу 7

Задача 1

Найти распределение давления на поверхности цилиндра, обтекаемого потоком несжимаемой жидкости, имеющей на бесконечности скорость U . Радиус цилиндра равен a .

Решение. Для решения задачи используем уравнение Лапласа и два граничных условия — граничное условие непротекания на поверхности цилиндра и граничное условие на бесконечности, состоящее в том, что скорость жидкости на бесконечности стремится к скорости невозмущенного потока U :

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \\ \varphi \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow U \cos \theta \end{cases}$$

Решение уравнения Лапласа будем искать в виде суммы диполя и невозмущенного потока:

$$\varphi = \frac{\alpha}{r} \cos \theta + Ur \cos \theta.$$

Используя граничное условие непротекания, получим для константы α следующее соотношение: $\alpha = Ua^2$. Тогда потенциал течения жидкости, возникающего при движении цилиндра, запишем как

$$\varphi = \frac{Ua^2}{r} \cos \theta + Ur \cos \theta.$$

Поскольку течение стационарно, для него применима формула Бернулли:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} = \text{const.}$$

На поверхности цилиндра

$$v_r \Big|_{r=a} = 0, v_\theta \Big|_{r=a} = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \Big|_{r=a} = - \left(\frac{U}{r^2} a^2 + U \right) \sin \theta = -2U \sin \theta.$$

Учитывая, что $v_\infty = U$, получим

$$\frac{p \Big|_{r=a}}{\rho} + 2U^2 \sin^2 \theta = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2}.$$

Тогда давление на поверхности цилиндра будет

$$p \Big|_{r=a} = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta).$$

8. ПЛОСКОЕ БЕЗВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

8.1. ФУНКЦИЯ ТОКА И КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Будем рассматривать плоское течение жидкости. Очевидно, что в этом случае движение жидкости описывается с помощью двух компонент скорости $\vec{v} = (v_x, v_y)$, которые зависят от двух координат: x и y . Условие несжимаемости жидкости имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (8.1)$$

Отсюда ясно, что можно ввести такую функцию Ψ , что $v_x = \partial\Psi / \partial y$; $v_y = -\partial\Psi / \partial x$, тогда $\text{div}\vec{v} = 0$ удовлетворяется тождественно.

Функция Ψ называется функцией тока. Чтобы выяснить почему, найдем уравнение линий тока по определению линий тока и функции тока:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \rightarrow \frac{dx}{\frac{\partial\Psi}{\partial y}} = \frac{dy}{-\frac{\partial\Psi}{\partial x}}, \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y} dy = 0 \rightarrow d\Psi = 0.$$

Отсюда ясно, что на линии тока функция $\Psi = \text{const}$. На разных линиях тока значение функции Ψ разное. Уравнение линии тока можно записать в виде

$$\Psi(x, y) = c. \quad (8.3)$$

Функция тока может быть найдена с точностью до произвольной постоянной и определена в любом двумерном течении.

Предположим теперь, что течение потенциально, т. е.

$$\vec{v} = \text{grad}\varphi, \quad v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \quad (8.4)$$

С использованием выражений для компонент скорости через функцию тока получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (8.5)$$

Найдем теперь уравнение для функции тока потенциального течения:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (8.6)$$

отсюда $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0$, т. е. функция тока удовлетворяет уравнению

Лапласа и также является гармонической функцией.

Если ввести комплексную функцию $W = \varphi + i\Psi = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y)$, то условия (8.5), (8.6) представляют собой известные условия того, что W есть аналитическая функция от одной переменной $Z = x + iy$ (условия Коши — Римана), т. е.:

$$W = W(Z) = \varphi + i\Psi. \quad (8.7)$$

Итак, если мы возьмем любую аналитическую функцию $W(Z)$, то она будет являться комплексным потенциалом, будет определять течение, потенциал которого $\varphi = \operatorname{Re} W(Z)$, а функция тока $\Psi = \operatorname{Im} W(Z)$. При этом линии тока $\operatorname{Im} W(Z) = c_1$, линии равного потенциала $\operatorname{Re} W(Z) = c_2$. Обсудим некоторые свойства введенных функций.

1) Линии тока и линии равного потенциала взаимно перпендикулярны. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что $\nabla \varphi$ и $\nabla \Psi$ взаимно ортогональны:

$$\nabla \varphi \nabla \Psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -v_x v_y + v_y v_x = 0. \quad (8.8)$$

2) Пусть имеется потенциальное течение с потенциалом φ и функцией тока Ψ . Тогда течение с функцией тока φ потенциально и будет иметь потенциал $-\Psi$. Действительно, 1-е течение имеет комплексный потенциал $W = \varphi + i\Psi$. Рассмотрим аналитическую функцию $-iW = \Psi - i\varphi$. Очевидно, что потенциал в данном случае равен Ψ , а функция тока равна $-\varphi$. В этом случае линии тока 1-го течения совпадают с линиями равного потенциала 2-го, и наоборот. Такие течения называются *сопряженными*. Свойство сопряженности часто применяется при построении плоских потенциальных течений.

Зная комплексный потенциал $W(Z)$, можно определить проекции вектора скорости v_x и v_y :

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\Psi}{\partial x} = v_x - iv_y. \quad (8.9)$$

Ясно, что производная от аналитической функции W по Z равна $dW/dZ = v_x - iv_y$.

3) Пусть имеется кривая в плоскости (x, y) , соединяющая две точки (1 и 2). Найдем объемный расход жидкости через эту кривую Q (a) и циркуляцию поля скорости по этой кривой Γ (b).

$$\begin{aligned} \text{а) } Q &= \int_1^2 v_n dl = \int_1^2 (v_x n_x + v_y n_y) dl = \\ &= \int_1^2 \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} n_x - \frac{\partial\Psi}{\partial x} n_y \right) dl = \int_1^2 \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} \tau_y + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \tau_x \right) dl = \int_1^2 \frac{\partial\Psi}{\partial l} dl = \Psi_2 - \Psi_1. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{n} = (n_x, n_y)$ — вектор нормали, $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ — касательный вектор.

$$\text{б) } \Gamma = \int_1^2 v_t dl = \int_1^2 (v_x \tau_x + v_y \tau_y) dl = \int_1^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tau_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \tau_y \right) dl = \int_1^2 \frac{\partial\varphi}{\partial l} dl =$$

$= \varphi_2 - \varphi_1$. Поскольку $W = \varphi + i\Psi$, то $W_2 - W_1 = \Gamma + iQ$.

8.2. ПРИМЕРЫ КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И СООТВЕТСТВУЮЩИХ ИМ ПЛОСКИХ БЕЗВИХРЕВЫХ ПОТОКОВ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

1. Пусть комплексный потенциал является линейной функцией комплексной переменной Z : $W(Z) = aZ$, где a — комплексная постоянная. Определим величины компонент скорости:

$$dW/dZ = a = v_x - iv_y; \quad v_x = \text{Re } a; \quad v_y = -\text{Im } a. \quad (8.10)$$

Анализируя получившиеся выражения для скорости, можно видеть, что компоненты скорости постоянны, а вектор скорости имеет наклон:

$$\text{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\text{Im } a}{\text{Re } a}, \quad (8.11)$$

если $a = |a|^{i\theta_a}$, то $\theta = -\theta_a$.

Потенциал определяется как действительная часть W :

$$\varphi = \operatorname{Re}W = x \operatorname{Re} a - y \operatorname{Im} a = v_x x + v_y y, \quad (8.12)$$

а функция тока равна его мнимой части:

$$\Psi = \operatorname{Im}W = x \operatorname{Im} a + y \operatorname{Re} a = -xv_y + yv_x. \quad (8.13)$$

Из (8.13) следует, что линии тока будут определяться следующим выражением: $yv_x - xv_y = \text{const}$, $y = x(v_y / v_x) + c$. То есть они представляют собой прямые с углом наклона θ к оси x , и значит, линии тока параллельны вектору скорости. Линии равного потенциала определяются как $y = -(v_y / v_x)x + c_1$. Видно, что они ортогональны линиям тока. Таким образом, можно сделать вывод, что комплексный потенциал $W(Z) = aZ$, где a — комплексная постоянная, описывает плоскопараллельное течение (рис. 1).

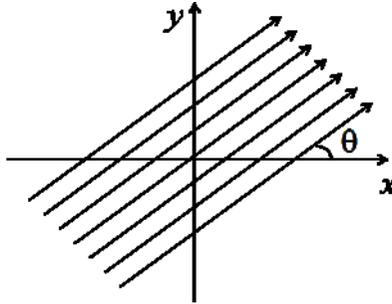


Рис. 1. Картина линий тока для плоскопараллельного течения, задаваемого комплексным потенциалом $W(Z) = aZ$, где a — комплексная постоянная (расположение линий тока соответствует случаю: $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Im} a < 0$)

Так же легко определить потенциал и функцию тока для сопряженного течения:

$$\varphi = -xv_y + yv_x; \quad \Psi = -v_x x - v_y y. \quad (8.14)$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда комплексный потенциал является логарифмической функцией комплексной переменной Z : $W = A \ln Z$, где A — постоянная величина.

1) Предположим, что A — действительная постоянная. Перейдем к цилиндрическим координатам: $Z = r e^{i\theta}$, тогда $W = A (\ln r + i\theta)$. В этом случае потенциал будет определяться выражением

$$\varphi = A \ln r, \quad (8.15)$$

а функция тока выражением

$$\Psi = A\theta. \quad (8.16)$$

Линии тока в данном случае представляют собой прямые линии, проходящие через начало координат $\theta = \text{const}$, а линии равного потенциала $r = \text{const}$ есть окружности. Очевидно, что подобное течение представляет собой источник или сток (в зависимости от знака A) (рис. 2).

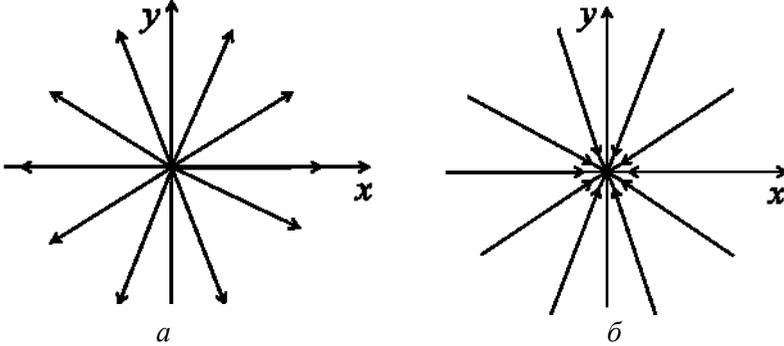


Рис. 2. Картина линий тока для течения, задаваемого комплексным потенциалом $W = A \ln Z$, где A — постоянная действительная величина (на рисунке *a* изображен случай, соответствующий источнику, а на рисунке *б* — стоку)

Вычислим количество жидкости, выходящей из источника (расход):

$$Q = \int_0^{2\pi} v_n r d\varphi; \quad v_n = v = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r}. \quad (8.17)$$

В результате интегрирования выражения (8.17) получим, что расход пропорционален величине действительного коэффициента A :

$Q = 2\pi A$, $A = \frac{Q}{2\pi}$. Таким образом, комплексный потенциал, описывающий источник или сток с расходом Q , имеет следующий вид:

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln Z. \quad (8.18)$$

2) Пусть A — чисто мнимая величина, $A = iB$. Тогда комплексный потенциал может быть записан в следующем виде: $W = iB \ln Z = -B\theta + iB \ln r$. В этом случае потенциал течения будет определяться следующим выражением:

$$\varphi = -B\theta, \quad (8.19)$$

а функция тока:

$$\Psi = B \ln r. \quad (8.20)$$

Анализируя выражения (8.19) и (8.20), можно сделать вывод, что линии тока для такого течения — это окружности с $r = \text{const}$, а линии равного потенциала — прямые, проходящие через начало координат $\theta = \text{const}$. Очевидно, что данное течение является сопряженным течению, описанному в предыдущем подпункте.

Величины проекций скорости для данного течения будут определяться как $v_r = 0$; $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{B}{r}$. Соответственно, можно сделать вывод, что описанное течение представляет собой круговое (циркуляционное) движение вокруг начала координат (рис. 3).

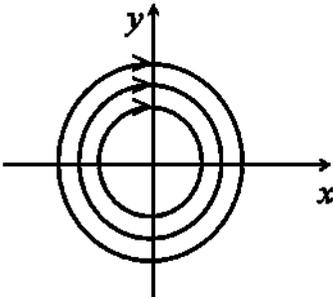


Рис. 3. Картина линий тока для течения, задаваемого комплексным потенциалом $W = A \ln Z$, где A — постоянная мнимая величина

Найдем циркуляцию поля скорости Γ в таком течении:

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = -B \cdot 2\pi; \rightarrow B = -\frac{\Gamma}{2\pi}, \quad (8.21)$$

т. е. константа B пропорциональна величине циркуляции.

Таким образом, комплексный потенциал циркуляционного течения задается следующим выражением:

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z. \quad (8.22)$$

3) Пусть A является комплексной величиной. В силу линейности уравнений, которым удовлетворяют комплексные потенциалы, можно воспользоваться принципом суперпозиции. Комплексный потенциал для данного случая будет выглядеть следующим образом:

$$W = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln Z. \quad (8.23)$$

Данное течение представляет собой суперпозицию источника и циркуляционного течения. Потенциал имеет следующий вид:

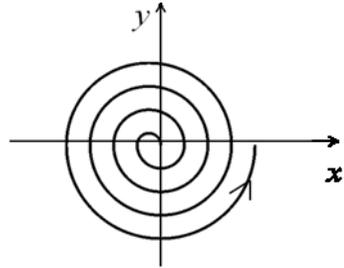
$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma\theta}{2\pi}, \quad (8.24)$$

при этом функция тока:

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma \ln r}{2\pi}. \quad (8.25)$$

Легко видеть, что линии тока в данном случае будут описываться как $\theta = \frac{\Gamma}{Q} \ln r$ и представлять собой спираль. Соответственно комплексный потенциал, заданный выражением (8.23), описывает спиральное течение (рис. 4).

Рис. 4. Линии тока спирального течения, с комплексным потенциалом $W = A \ln Z$, где A — комплексная величина



3. Рассмотрим теперь случай, когда комплексный потенциал задан в виде

$$W = \frac{1}{Z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}. \quad (8.26)$$

Определим вид течения, описываемого таким комплексным потенциалом, и его характеристики (потенциал, функцию тока, линии тока и т. д.). Потенциал течения будет иметь следующий вид:

$$\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad (8.27)$$

Функция тока для данного течения определяется следующим выражением:

$$\Psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (8.28)$$

На основании выражения (8.28) можно получить, что линии тока имеют вид

$$-\frac{y}{x^2 + y^2} = c, \quad x^2 + y^2 = -\frac{y}{c}, \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2} \quad (8.29)$$

и представляют собой окружности с центром, смещенным относительно оси y .

Из (8.27) можно получить линии равного потенциала:

$$x^2 + y^2 = \frac{x}{c_1}, \quad y^2 + \left(-\frac{x}{2c_1}\right)^2 = \frac{1}{4c_1^2}. \quad (8.30)$$

Чтобы определить вид такого течения, рассмотрим сумму комплексных потенциалов источников, один из которых расположен левее оси y на расстоянии h от начала координат, а второй — правее, также на расстоянии h от начала координат. Знаки расходов Q будем считать различными. Тогда суммарный комплексный потенциал равен

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln(Z - h) - \frac{Q}{2\pi} \ln(Z + h). \quad (8.31)$$

Теперь устремим h к нулю, изменяя величину Q так, что $Qh = \text{const} = -m/2$, т. е. $Q = -\frac{m}{2h}$, где m — новая константа, введенная для удобства вычисления. При этом

$$W = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-m}{2\pi} \frac{[\ln(Z - h) - \ln(Z + h)]}{2h} = \frac{m}{2\pi} \frac{\partial}{\partial Z} \ln Z = \frac{m}{2\pi Z}. \quad (8.32)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что выражение (8.32) описывает комплексный потенциал диполя. Если $m < 0$, источник расположен правее оси y , а сток — левее оси y , если $m > 0$ — наоборот.

4. Теперь рассмотрим пример комплексного потенциала течения, представляющего собой сумму полей диполя и однородного потока.

Воспользуемся принципом суперпозиции и рассмотрим, какое получится поле. Комплексный потенциал

$$W = VZ + \frac{m}{2\pi Z}, \quad (8.33)$$

где V и m — действительные константы.

Функция тока:

$$\Psi = \text{Im} W = Vy - \frac{my}{2\pi(y^2 + x^2)}. \quad (8.34)$$

Линии тока:

$$y \left(V - \frac{m}{2\pi(y^2 + x^2)} \right) = \text{const}. \quad (8.35)$$

Линии тока при $\text{const} = 0$: $y = 0$; $y^2 + x^2 = \frac{m}{2\pi V}$ — ось x и окружность

радиусом $a = \sqrt{\frac{m}{2\pi V}}$.

Поля скорости:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = V - \frac{m}{2\pi(y^2 + x^2)} + \frac{my^2}{\pi(y^2 + x^2)^2}, \\ v_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{mxy}{2\pi(y^2 + x^2)^2}. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Точки, в которых скорость равна 0, называются критическими:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0 \quad \text{при } x = \pm a, \quad \text{где } a = \sqrt{\frac{m}{2\pi V}} \quad (\text{точки } A \text{ и } B).$$

Чтобы качественно изобразить картину линий тока, надо определить эту картину на окружности, а затем продолжить внутри и вне окружности непрерывно.

На окружности $y^2 + x^2 = \frac{m}{2\pi V} = a^2$ нормальная составляющая скорости равна 0. Это означает, что поле скорости вне окружности эквивалентно обтеканию цилиндра радиуса a потоком, скорость которого на бесконечности равна V . Тогда дипольный момент m должен быть выбран равным $a^2 \cdot 2\pi V$, т. е. поле обтекания кругового цилиндра имеет комплексный потенциал:

$$W = VZ + \frac{Va^2}{Z} \quad \text{при } |Z| \geq a. \quad (8.37)$$

Внутри круга радиуса a имеем поле диполя внутри цилиндра. Оно соответствует полю обтекания очень малого цилиндра, движущегося внутри цилиндра много большего радиуса в момент, когда малый цилиндр находится в центре большого (рис. 5).

5. В качестве последнего примера рассмотрим комплексный потенциал, представляющий собой суперпозицию поля обтекания кругового цилиндра и кругового движения вокруг начала координат:

$$W = W_1 + W_2, \quad W_1 = VZ + \frac{Va^2}{Z}, \quad W_2 = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z, \quad W = VZ + \frac{Va^2}{Z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z. \quad (8.38)$$

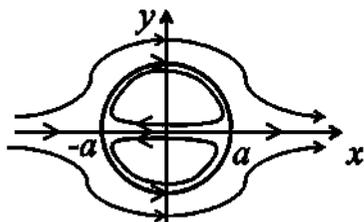


Рис. 5. Качественная картина линий тока течения с комплексным потенциа-

$$\text{лом } W = VZ + \frac{m}{2\pi Z}$$

Качественная картина обтекания изображена на рис. 6.

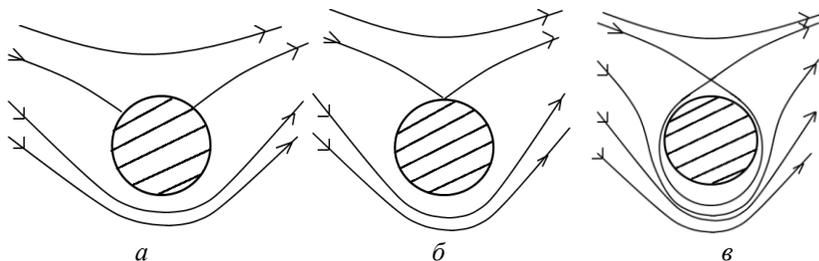


Рис. 6. Качественная картина обтекания цилиндра с циркуляцией

Определим положение критических точек, в которых скорость равна нулю. Если равна нулю скорость, значит, равна нулю и сопряженная скорость, и $\frac{dW}{dZ} = 0$:

$$\begin{aligned} V - \frac{Va^2}{Z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi Z} &= 0, \\ Z^2 - \frac{i\Gamma Z}{2\pi V} - a^2 &= 0, \end{aligned} \quad (8.39)$$

$$Z = \frac{i\Gamma}{4\pi V} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}}.$$

1) Если $a^2 > \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}$, то $x_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}}$; $y = \frac{i\Gamma}{4\pi V}$. В этом

случае имеется 2 критические точки. Поскольку $x^2 + y^2 = a^2$, то они лежат на поверхности цилиндра (рис. 6, а).

2) Если $a^2 = \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}$, то критические точки сливаются (рис. 6, б).

3) Если $\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2} > a^2$, то $x = 0$; $y = \frac{i\Gamma}{4\pi V} \pm i\sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2} - a^2}$. Одна

из точек лежит внутри цилиндра (вне физического пространства), другая — вне цилиндра (рис. 6, в).

Вычислим теперь силу со стороны потока, действующую на цилиндр:

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} p \vec{v} \dots \quad (8.40)$$

Давление можно определить по формуле Бернулли:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{|\vec{v}_\infty|^2}{2}, \quad (8.41)$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_\infty|^2, \quad |\vec{v}_\infty|^2 = v_\infty^2, \quad v = \frac{dW}{dZ} = V - \frac{Va^2}{Z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi Z}. \quad (8.42)$$

При $Z \rightarrow \infty$ $v_\infty = V$. Найдем v на круге $Z = re^{i\theta}$, $r = a$, тогда из (8.42) следует выражение

$$v = e^{-i\theta} V (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\theta} = ie^{2i\theta} \left[2V \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right], \quad (8.43)$$

$$|v|^2 = \left(2V \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 = 4V^2 \sin^2 \theta - \frac{2V\Gamma}{\pi a} \sin \theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2}.$$

Отсюда

$$p = p_\infty + \frac{\rho V^2}{2} - 2V^2 \rho \sin^2 \theta + \frac{\rho V \Gamma}{\pi a} \sin \theta - \frac{\rho \Gamma^2}{32\pi^2 a^2}. \quad (8.44)$$

Найдем проекции силы:

$$F_x = - \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta = 0, \quad (8.45)$$

$$F_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta = \rho \frac{V\Gamma}{\pi a} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta a d\theta = -\rho V \Gamma.$$

Эта сила действует в направлении, перпендикулярном направлению скорости. Она работы не совершает, поэтому может быть

отлична от нуля. Ее появление очевидно из физических соображений (рис. 7).

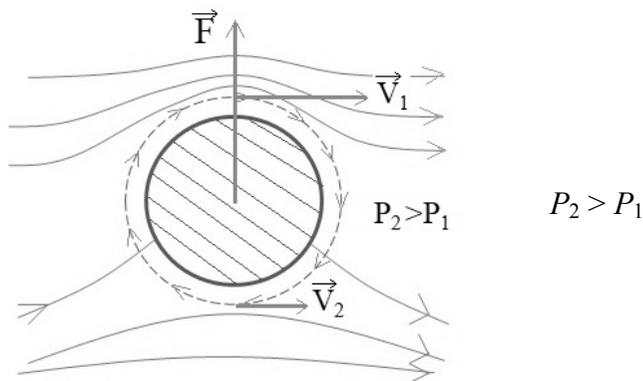


Рис. 7. Иллюстрация эффекта Магнуса

Скорость потока над цилиндром оказывается выше, чем под ним. Следовательно, в соответствии с уравнением Бернулли давление над цилиндром будет ниже, чем под ним, и, как следствие, это приведет к появлению подъемной силы (см. рис. 7). Такое физическое явление при обтекании вращающегося тела потоком жидкости или газа, при котором образуется сила, воздействующая на тело, направленная перпендикулярно направлению потока, носит название эффекта Магнуса.

ЗАДАЧИ к разделу 8

Задача 1

Найти потенциал скорости и функцию тока, а также построить линии тока, исследовать поле скорости для течения, задаваемого комплексным потенциалом $W = Z^n$.

Решение. Для решения задачи используем цилиндрические координаты: $Z = re^{i\theta}$. Тогда комплексный потенциал примет вид

$$W(Z) = r^n \cos n\theta + ir^n \sin n\theta.$$

Отсюда легко получить выражения для потенциала и функции тока:

$$\varphi = \operatorname{Re}W = r^n \cos n\theta,$$

$$\Psi = \operatorname{Im}W = r^n \sin n\theta.$$

Компоненты скорости:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = nr^{n-1} \cos n\theta,$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -nr^{n-1} \sin n\theta.$$

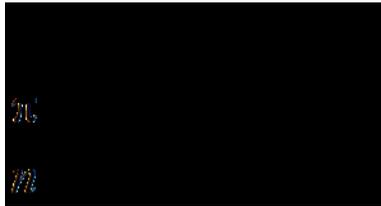
Определим линии тока:

$$r^n \sin n\theta = \text{const.}$$

Чтобы определить вид течения, рассмотрим линии тока, соответствующие значению константы, равному нулю:

$$\sin n\theta = 0, \quad n\theta = \pi m, \quad \theta = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots, 2\pi.$$

Такое течение, очевидно, представляет собой течение в угле $\theta = \frac{\pi}{n}$ (см. рисунок).



Течение в угле

9. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

9.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом разделе рассмотрим важный с точки зрения различных приложений случай движения жидкости, называемый волнами. При этом остановимся на так называемых гравитационных поверхностных волнах, для которых принципиальным является действие сил тяжести и наличие свободной поверхности, например поверхности океана. Примем следующую постановку задачи. Пусть имеется слой жидкости глубины H (рис. 8). На поверхности распространяется волна, т. е. свободная поверхность искривлена. Определим, как будет происходить течение жидкости в слое толщины H , и как при этом будет меняться во времени свободная поверхность. Движение жидкости будем считать потенциальным, т. е. $\vec{v} = \nabla \varphi$. При этом потенциал φ удовлетворяет линейному уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (9.1)$$

В отличие от рассматриваемых ранее задач о потенциальном обтекании различных тел здесь принципиально наличие поверхности. При этом силы, возникающие на поверхности при ее возмущении, должны входить в граничные условия, определяющие свойства распространяющихся по поверхности гравитационных волн. Получим эти граничные условия в предположении, что в состоянии равновесия свободная поверхность является плоской.

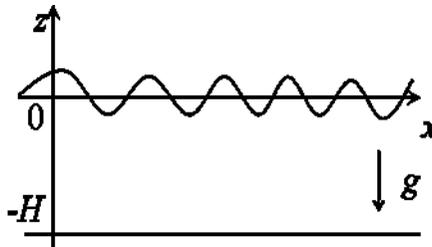


Рис. 8. Волна на поверхности тяжелой жидкости

Свободная поверхность — это тангенциальный разрыв. На тангенциальном разрыве выполняются соответствующие *кинематические условия*:

$$[v_n - U_n]_S = 0, \quad (9.2)$$

где U_n — нормальная компонента скорости разрыва, и *динамические условия*:

$$p_1|_S = p_2|_S. \quad (9.3)$$

Выразим кинематическое условие (9.2) на разрыве через форму поверхности разрыва. Пусть форма поверхности задается уравнением $f(x, z, t) = 0$. Кинематическое условие (9.2) означает, что нормальная компонента скорости частицы среды относительно поверхности разрыва равна нулю, т. е. если частица находилась на поверхности разрыва в какой-то момент времени, то она на ней и остается. Иными словами, если частицы с координатами (ζ, η) в начальный момент времени находились на поверхности $f_\Lambda(\zeta, \eta) = 0$, то они на ней и остаются. Это означает, что в лагранжевых переменных функция f не зависит от времени, т. е. $\left. \frac{\partial f_\Lambda}{\partial t} \right|_{\zeta, \eta} = 0$. Выразим эйлеровы переменные

x и z через лагранжевы переменные ζ, η , тогда уравнение поверхности примет следующий вид:

$$f_\Lambda(\zeta, \eta) \equiv f[x(\zeta, \eta, t); z(\zeta, \eta, t); t]. \quad (9.4)$$

При этом кинематическое граничное условие $\left. \frac{\partial f_\Lambda}{\partial t} \right|_{\zeta, \eta} = 0$ примет вид

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{\zeta, \eta} + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{\zeta, \eta} = 0. \quad (9.5)$$

Учитывая, что $\frac{\partial x}{\partial t} = v_x$, $\frac{\partial z}{\partial t} = v_z$, кинематическое граничное условие принимает вид

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial z} v_z \right|_{f(x, z, t) = 0} = 0. \quad (9.6)$$

Допустим, что функция f задана в явном виде:

$$z - \zeta(x, t) = 0, \quad (9.7)$$

тогда граничное условие (9.2) примет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} = v_z \Big|_{z=\zeta(x,t)}. \quad (9.8)$$

Кроме того, следует поставить кинематическое граничное условие на дне — это условие непротекания, т. е. равенство нулю вертикальной компоненты скорости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0. \text{ В принципе, кинематическая}$$

задача поставлена полностью, и система уравнений для нее выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta(x,t)} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \end{cases} \quad (9.9)$$

Если известна форма свободной поверхности $z = \zeta(x, t)$, то системе уравнений (9.9) можно решить. Однако необходимо отметить, что форма свободной поверхности заранее неизвестна и ее также надо определить. Для этого используем динамическое условие (9.3) на свободной поверхности $z = \zeta(x, t)$:

$$p_1 \Big|_{z=\zeta(x,t)} = p_2 \Big|_{z=\zeta(x,t)}, \quad (9.10)$$

$p_2 = p_a$ — это обычно давление атмосферного воздуха; p_1 — давление жидкости. Оно может быть найдено из обобщения интеграла Бернулли для потенциальных течений (интеграл Коши — Лагранжа):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p_1}{\rho} + gz = 0. \quad (9.11)$$

При $z = \zeta(x, t)$ имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{z=\zeta(x,t)} + \frac{p_a}{\rho} \Big|_{z=\zeta(x,t)} + g\zeta = 0. \quad (9.12)$$

Если пренебречь вариациями атмосферного давления и считать $p_a = \text{const}$, то без ограничения общности эту константу можно опус-

титель, тогда динамическое граничное условие (9.12) примет следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{z=\zeta(x,t)} + g\zeta = 0. \quad (9.13)$$

Теперь задача полностью поставлена для определения ζ и φ . Однако она является весьма сложной, поскольку система уравнений, описывающая ее, нелинейная. До настоящего времени ее точного аналитического решения не существует. Мы будем рассматривать более простую задачу. Предположим, что мала «крутизна» волны, т. е. величина $\frac{\partial \zeta}{\partial x} \ll 1$. В этом случае можно искать решение урав-

нений (9.9) для возмущений на поверхности воды в виде разложения в ряд по этому малому параметру. Упростим вначале кинематическое граничное условие. Предварительно сделаем оценки: из уравнения Лапласа для потенциала следует, что масштабы изменения потенциала по x и z сравнимы, так что $L_x \sim L_z \sim L$. При этом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} + \frac{\partial \varphi}{\partial t \partial z} \Big|_{z=0} \zeta + \dots, \quad (9.14)$$

($\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ пренебрежимо мало). Далее:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\partial \varphi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \zeta + \dots, \quad (9.15)$$

Таким образом, кинематическое граничное условие при малой крутизне волны принимает вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (9.16)$$

Динамическое граничное условие (9.13) в этом приближении примет следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} + g\zeta = 0. \quad (9.17)$$

Итак, в предположении малой крутизны получаем следующую линейную задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} + g\zeta = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \end{array} \right. \quad (9.18)$$

Решение линейной задачи будем искать в виде так называемых прогрессивных гармонических волн, распространяющихся вдоль x и имеющих частоту и волновое число:

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{Re}[\varphi_1(z) \exp(-i(\omega t - kx))], \\ \zeta &= \operatorname{Re}[\zeta_1(z) \exp(-i(\omega t - kx))], \end{aligned} \quad (9.19)$$

где $\varphi_1(z)$, $\zeta_1(z)$ — комплексные амплитуды потенциала, характеризующего поле скорости в жидкости, и возмущений свободной поверхности. При этом система уравнений (9.18) для комплексных амплитуд примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} - k^2 \varphi_1 = 0 \\ -i\omega \zeta_1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \\ -i\omega \varphi_1 \Big|_{z=0} + g\zeta_1 = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \end{array} \right. \quad (9.20)$$

Решение уравнения Лапласа в системе (9.20) будем искать в виде

$$\varphi = Ae^{kz} + Be^{-kz}. \quad (9.21)$$

Исключая ζ_1 , из системы (9.20) получим

$$\omega^2 \varphi_1 - g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (9.22)$$

С учетом граничного условия на дне определим связь между коэффициентами A и B решения уравнения Лапласа. При этом $B = Ae^{-2kH}$

и распределение комплексной амплитуды потенциала по глубине имеет вид

$$\varphi = 2Ae^{-kH} (\operatorname{ch}k(z + H)). \quad (9.23)$$

Тогда из (9.22) получим, что частота и волновое число гармонической волны связаны следующим, так называемым дисперсионным соотношением:

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kH). \quad (9.24)$$

Это соотношение получено в предположении, что возмущение давления на поверхности равно нулю. Однако такое предположение не всегда справедливо. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, отметим лишь, с чем может быть связано непостоянство давления воздуха и как может при этом изменяться дисперсионное соотношение (9.24).

Ветер над водной поверхностью. При учете движения воздуха над поверхностью атмосферное давление p_a будет зависеть от возмущения свободной поверхности ζ и динамическое граничное условие примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{z=\zeta} + g\zeta = -\frac{p_a}{\rho}, \quad (9.25)$$

и тогда в линейном приближении для гармонической функции

$$\frac{p_a}{\rho} = (\alpha + i\beta)\zeta, \quad \text{где } \alpha \text{ и } \beta \text{ — составляющие колебаний давления}$$

воздуха над взволнованной поверхностью, находящиеся в фазе и в квадратуре со смещением поверхности (в общем случае α и β являются функциями ω). В силу того что давление воздуха p_a над свободной поверхностью жидкости имеет порядок $\rho_a v^2$, где v^2 — скорость в воздухе, нетрудно оценить порядок этих коэффициентов; таким образом, α и β порядка $S = \frac{\rho_a}{\rho_w} \sim 10^{-3}$. Тогда с учетом коле-

баний давления воздуха дисперсионное соотношение (9.24) примет вид

$$\omega^2 = [g + S(\alpha + i\beta)]k \operatorname{th}kH. \quad (9.26)$$

Величины α и β , как правило, дают малые поправки по причине малости параметра S , но если величиной α можно легко пренебречь, то величина β дает новый эффект. В ее присутствии частота волны становится комплексной, что соответствует нарастанию или затуха-

нию волн $e^{-i\omega t}$. Отметим, что $\text{Im } \omega > 0$, соответствующее нарастанию волны на воде получается при $\beta > 0$.

9.2. ЛИНИИ ТОКА И ТРАЕКТОРИИ

Чтобы определить линии тока и траектории для гравитационных волн в жидкости, определим поле скоростей. Запишем потенциал в виде $\varphi = \Phi_0 k \text{ch}k(z+H) \cos(kx - \omega t)$. Тогда компоненты горизонтальной и вертикальной скорости, определяющие движение жидкости в слое, будут определяться как

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\Phi_0 k \text{ch}k(z+H) \sin(kx - \omega t) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \\ v_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Phi_0 k \text{sh}k(z+H) \cos(kx - \omega t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (9.27)$$

где функция тока $\Psi = -\Phi_0 \text{sh}k(z+H) \sin(kx - \omega t)$, так что уравнение для линий тока примет вид

$$\Phi_0 \text{sh}k(z+H) \sin(kx - \omega t) = \text{const}. \quad (9.28)$$

Ясно, что линии тока для потенциальных гравитационных волн незамкнуты. Определим теперь траектории, по которым движутся лагранжевы частицы. Траектории определяются системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x \quad x|_{t=0} = x_0, \\ \frac{dz}{dt} &= v_z \quad z|_{t=0} = z_0, \end{aligned} \quad (9.29)$$

с учетом соответствующих выражений для скоростей эти уравнения примут вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\Phi_0 k \text{ch}k(z+H) \sin(kx - \omega t) \\ \frac{dz}{dt} = \Phi_0 k \text{sh}k(z+H) \cos(kx - \omega t) \end{cases} \quad (9.30)$$

Уравнения (9.30) нелинейные и для получения их решений рассмотрим волны малой крутизны. В этом случае $ka \ll 1$, где a — амплитуда возвышения взволнованной поверхности. Из кинематического граничного условия (9.16) нетрудно получить оценку $\omega_a \sim \Phi_0 k \text{ch}kH$, т. е. амплитуда потенциала имеет порядок:

$$\Phi_0 \sim \frac{\omega a}{kchkH}, \quad (9.31)$$

Будем искать решение системы (9.30) в виде разложения по малому параметру a :

$$a^0 : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 & x = x_0 \\ \frac{dz}{dt} = 0 & z = z_0 \end{cases} \quad (9.32)$$

$$a^{(1)} : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\Phi_0 kchk(z_0 + H) \sin(kx_0 - \omega t) \\ \frac{dz}{dt} = \Phi_0 kshk(z_0 + H) \cos(kx_0 - \omega t) \end{cases} \quad (9.33)$$

$$x = x_0 + \frac{\Phi_0 k}{\omega} chk(z_0 + H) \cos(kx_0 - \omega t), \quad (9.34)$$

$$z = z_0 - \frac{\Phi_0 k}{\omega} shk(z_0 + H) \sin(kx_0 - \omega t).$$

Отсюда нетрудно получить выражение для замкнутых траекторий в виде эллипсов:

$$\frac{(x - x_0)^2}{ch^2 k(z_0 + H)} + \frac{(z - z_0)^2}{sh^2 k(z_0 + H)} = \frac{a^2}{ch^2 kH}. \quad (9.35)$$

Кратко обсудим основные особенности траекторий при изменении глубины. Вблизи дна (если $z_0 \approx H$) эллипсы вытянуты. На глубокой воде при $kH \gg 1$ траектории имеют вид окружностей с радиусом, убывающим с глубиной:

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 e^{2kz_0}. \quad (9.36)$$

Учтем эффект поверхностного натяжения на поверхности воды. На свободной поверхности жидкости действуют дополнительные силы, связанные с неравноправностью положения молекул. Силы межмолекулярного притяжения приводят к «втягиванию» молекул на поверхности вглубь жидкости. Этот эффект эквивалентен тому, что поверхность жидкости оказывается как бы натянутой, как растянутая резиновая пленка. Если ее искривить, у нее возникнет дополнительная сила, действующая на поверхности, которая называется силой поверхностного натяжения. Это приведет к изменению гра-

ничных условий на поверхности. Вычислим силу, действующую на поверхности жидкости. Пусть поверхность задана уравнением $z = \zeta(x, y, t)$. Выберем элемент поверхности от $(x, x + \Delta x)(y, y + \Delta y)$. Пусть на единицу длины элемента поверхности действует сила натяжения ε , направленная по касательной к поверхности. По причине изотропии сила натяжения ε должна быть по всем направлениям одинакова. Результирующая сила будет действовать по нормали и будет равна

$$\Delta F = \varepsilon \Delta l_2 \alpha + \varepsilon \Delta l_1 \beta, \quad (9.37)$$

где $\Delta l_1, \Delta l_2$ — длины элементов дуги в направлениях x и y , ограничивающих выбранный элемент поверхности. Но $\alpha = \frac{\Delta l_1}{R_1}, \beta = \frac{\Delta l_2}{R_2}$, где

R_1, R_2 — радиусы кривизны поверхности в двух выбранных направлениях. Тогда

$$\Delta F = \varepsilon \Delta l_1 \Delta l_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (9.38)$$

Но $\Delta l_1 \Delta l_2 = \Delta S$ — площадь выбранного элемента поверхности. Таким образом, на поверхности будет действовать дополнительное поверхностное напряжение, направленное по нормали к поверхности:

$$\varepsilon_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \varepsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (9.39)$$

В этом случае давление на поверхности воды будет равно p , так что $p - p_a = \frac{\varepsilon}{R}$, где R — радиус кривизны поверхности, а ε — коэффициент поверхностного натяжения. Динамическое граничное условие примет следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{z=\zeta} + g\zeta + \frac{p}{\rho} = 0, \quad (9.40)$$

$$p = p_a + \frac{\varepsilon}{R}.$$

Если не будем учитывать вариации давления воздуха на поверхности воды, то получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{z=\zeta} + g\zeta + \frac{\varepsilon}{\rho R} = 0. \quad (9.41)$$

Радиус кривизны поверхности $z = \zeta(x, t)$ выражается следующим образом:

$$\frac{1}{R} = \frac{-\zeta_{xx}}{\sqrt{(1 + \zeta_x^2)^3}}. \quad (9.42)$$

Тогда получим динамическое граничное условие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{z=\zeta} + g\zeta - \frac{\varepsilon \zeta_{xx}}{\rho \sqrt{(1 + \zeta_x^2)^3}} = 0. \quad (9.43)$$

Линеаризованная система уравнений выглядит как

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} + g\zeta = \frac{\varepsilon}{\rho} \zeta_{xx} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \end{cases} \quad (9.44)$$

Решая аналогично, получим дисперсионное уравнение в виде

$$\omega^2 = \left(kg + k^3 \frac{\varepsilon}{\rho} \right) thkH. \quad (9.45)$$

Рассмотрим разные предельные случаи.

1. Приближение глубокой воды: $kH \gg 1$. В этом случае $thkH \Rightarrow 1$ и дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2 = kg + k^3 \frac{\varepsilon}{\rho}. \quad (9.46)$$

Решение уравнения Лапласа: $\varphi = Ae^{kz}$ (при $z \rightarrow -\infty$, $\varphi \rightarrow 0$).

1.1. Рассмотрим случай, когда вторым слагаемым в (9.46) можно пренебречь, тогда

$$\omega^2 = kg \quad (9.47)$$

— это волны, для которых несуществен капиллярный эффект, так называемые гравитационные волны. Для воды это волны с длиной

более нескольких сантиметров. При этом важными характеристиками распространения волн являются фазовая и групповая скорости. Фазовая скорость определяет скорость распространения каждой гармоники возмущения и вычисляется как отношение ω/k . При этом, поскольку $\omega(k)$ — линейная функция, то все гармоники возмущения распространяются с одинаковой скоростью, так что вид возмущения не изменяется с течением времени. Это так называемый случай распространения волн без дисперсии.

Но в теории волн важную роль играют узкополосные возмущения, пространственный спектр которых отличен от нуля лишь в малой окрестности некоторых значений волнового числа. При этом энергия этого возмущения сосредоточена в некоторой области пространства и переносится с так называемой групповой скоростью, равной $c_{гр} = \partial\omega/\partial k$. Для бездисперсионных волн фазовая и групповая скорости равны. В противном случае волны обладают дисперсией, и форма возмущения искажается по мере распространения. Для гравитационных волн в этом пределе реализуется именно такой случай. Фазовая скорость гравитационных волн:

$$c_{\phi} = \sqrt{\frac{g}{k}}. \quad (9.48)$$

Групповая скорость гравитационных волн

$$c_{гр} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} c_{\phi} \quad (9.49)$$

в два раза меньше фазовой.

1.2. Если $k \ll \sqrt{\frac{\rho g}{\varepsilon}}$, то

$$\omega^2 = k^3 \frac{\varepsilon}{\rho}. \quad (9.50)$$

Такие короткие волны носят название *капиллярных*. Фазовая скорость таких волн

$$c_{\phi} = \sqrt{\frac{k\varepsilon}{\rho}}, \quad (9.51)$$

а их групповая скорость:

$$c_{гр} = \frac{3}{2} c_{\phi}. \quad (9.52)$$

2. Рассмотрим далее так называемое приближение мелкой воды, когда $kH \ll 1$. В этом случае капиллярность, как правило, можно не учитывать, тогда $\text{th } kH \cong kH$, $\omega = k\sqrt{gH}$ — дисперсионное уравнение волн на мелкой воде; видно, что для таких волн отсутствует дисперсия. Групповая и фазовая скорости для волн на мелкой воде будут задаваться следующими выражениями (рис. 9):

$$c_{\text{гр}} = \sqrt{gH}, \quad c_{\text{гр}} = \sqrt{gH} = c_{\text{ф}}. \quad (9.53)$$

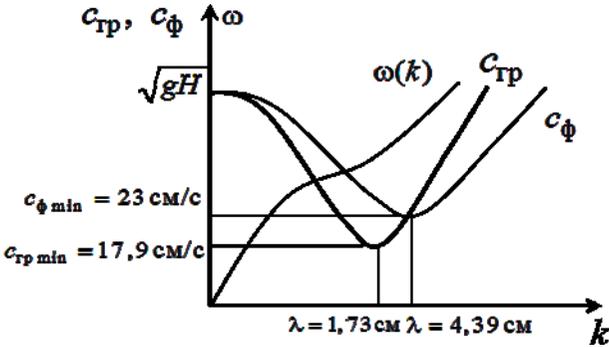


Рис. 9. Фазовая и групповая скорости и дисперсионное соотношение для волн на поверхности жидкости

9.3. ПРИБЛИЖЕНИЕ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Это приближение занимает особое место в гидродинамике, поэтому исследуем его отдельно, а не как предельный случай для потенциальных волн. Рассмотрим течение жидкости средней глубины H . Пусть на ее поверхности распространяется волна длиной $L \gg H$.

Запишем уравнения Эйлера и уравнение неразрывности в проекции на горизонтальную и вертикальную координаты (считаем, что ось z направлена вертикально вверх, начало отсчета выберем на дне водоема):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (9.54)$$

Здесь u и w — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости. Сделаем оценки для соответствующих слагаемых системы уравнений (9.54). Пусть характерные величины горизонтальной и вертикальной скоростей $w \sim W$, $u \sim U$. Тогда из уравнения неразрывности (последнее уравнение системы (9.54)) следует

$$\frac{U}{L} \sim \frac{W}{H}; \quad W \sim U \frac{H}{L}. \quad (9.55)$$

Если масштаб по времени T , то из первого соотношения (9.55)

$$\frac{U}{T} \sim \frac{1}{\rho} \frac{p}{L}, \Rightarrow p \sim \frac{\rho UL}{T}. \quad (9.56)$$

Сравним слагаемые во 2-м уравнении (9.54):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0, \\ \frac{W}{T}; \quad \frac{UW}{L}; \quad \frac{W^2}{H}; \quad \frac{p}{\rho H}; \quad g, \\ \frac{U}{T} \frac{H}{L}; \quad \frac{U^2}{L} \frac{H}{L}; \quad \frac{U^2}{L} \frac{H}{L}; \quad \frac{UL}{TH}; \quad g. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Отсюда видно, что член $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ много больше всех остальных слагаемых и ими можно пренебречь. В этом случае из (9.57) получим гидростатическое приближение:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0. \quad (9.58)$$

Если плотность постоянна, то

$$p = p_0(x, t) - \rho g z. \quad (9.59)$$

На поверхности $z = h(x, t)$ давление $p = p_a$, т. е.:

$$p_0 = p_a + \rho g h(x, t) \Rightarrow p = p_a + \rho g (h(x, t) - z). \quad (9.60)$$

Горизонтальное лагранжево ускорение определяется соотношением

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{du}{dt} = g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (9.61)$$

Отсюда видно, что если в начальный момент времени горизонтальная скорость не зависела от вертикальной координаты z , то она не

будет зависеть от z и в последующие моменты времени. Горизонтальная проекция уравнения Эйлера примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (9.62)$$

Чтобы найти уравнение для h , проинтегрируем по z от дна до поверхности уравнение неразрывности:

$$\int_0^{h(x,t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0. \quad (9.63)$$

Поскольку горизонтальная скорость u не зависит от z , а вертикальная скорость обращается в ноль на невозмущенной поверхности $w(0) = 0$, то из (9.63) получим

$$h \frac{\partial u}{\partial x} + w(h) = 0. \quad (9.64)$$

Учтем кинематические граничные условия на свободной поверхности $z = h(x, t)$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u(h) \frac{\partial h}{\partial x} = w(h). \quad (9.65)$$

Тогда из (9.64) с учетом (9.65) получаем

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0. \quad (9.66)$$

Получили систему уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (9.67)$$

Эта система гиперболического типа. В ней возможны решения простых волн. Будем искать решение (9.67) в виде $u = u(h)$:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) + h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{du}{dh} = 0 \\ \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{du}{dh} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (9.68)$$

Чтобы система имела нетривиальное решение, ее определитель должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & h \frac{du}{dh} \\ \frac{du}{dh} & g \end{vmatrix} = 0. \quad (9.69)$$

Отсюда получим уравнение для du/dh :

$$h \left(\frac{du}{dh} \right)^2 = g \Rightarrow u = u_0 \pm 2\sqrt{gh}. \quad (9.70)$$

Константа u_0 определяется из граничных условий: $u = 0$ при $h = H$, тогда $u_0 = \mp$, а скорость u выразится как

$$u = \pm 2 \left(\sqrt{gh} - \sqrt{gH} \right). \quad (9.71)$$

Из (9.70) нетрудно получить

$$h \frac{du}{dh} = \pm \sqrt{gh}. \quad (9.72)$$

И первое уравнение системы (9.68) тогда примет следующий вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \pm 2 \left(\sqrt{gh} - \sqrt{gH} \right) \frac{\partial h}{\partial x} \pm \sqrt{gh} \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (9.73)$$

Или:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \pm \left(u \pm \sqrt{gh} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (9.74)$$

Рассмотрим волну, бегущую вправо:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \left(3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gH} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (9.75)$$

Видно, что скорость волны — растущая функция h .

Уравнение (9.75) — это известное нелинейное уравнение простой волны, играющее важную роль при изучении нелинейных эффектов. Его решение определяется методом характеристик: линий на плоскости x, t , при движении вдоль которых значение искомой неизвестной функции остается постоянной. Уравнение этих линий имеет следующий вид:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_h = 3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gH}, \quad (9.76)$$

$$x = x_0(h) + (3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gH})t.$$

Его решение выражается через неявную функцию $h(x, t) = h(x - (3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gH})t)$, откуда видно, что скорость распространения волны будет зависеть от уровня воды; и профиль волны по мере распространения будет искажаться вплоть до образования так называемой градиентной катастрофы — опрокидывания волны.

Теперь попытаемся из уравнения (9.75) получить дисперсионное соотношение. Для этого сделаем несколько предположений. Пусть $h = H + \eta$, где отклонение глубины η от среднего значения H мало ($|\eta| \ll H$), т. е. рассматриваются длинные волны малой амплитуды, тогда линеаризация уравнения (9.75) для бегущей вправо волны дает

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (9.77)$$

Для линейной гармонической волны $\eta = \eta_0 e^{-i(\omega t - kx)}$ из (9.77) получим дисперсионное соотношение:

$$\omega = \sqrt{gH}k. \quad (9.78)$$

Это дисперсионное соотношение характерно для волн без дисперсии, поскольку $v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \text{const}$. Это означает, что все гармоники бегут с одной скоростью и начальный импульс малой амплитуды сохраняет свою форму.

Для малой, но конечной амплитуды из уравнения для h (9.75) с помощью разложения в ряд по малому параметру η/H можно получить нелинейное уравнение со степенной нелинейностью:

$$\sqrt{g(H + \eta)} \approx \sqrt{gH} \left(1 + \frac{\eta}{2H} \right) + \dots, \quad (9.79)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gH} \left(1 + \frac{3}{2} \eta / H \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

Дополнительное нелинейное слагаемое описывает эффект укручения начального импульса при распространении. Из уравнения (9.79) сразу видно, что чем больше η , тем больше характеристическая скорость, т. е. гребень волны догоняет ложбину. На больших временах

гребень обгонит подножье, и волна опрокинется. Но ввиду малости параметра нелинейности процесс нелинейного искажения профиля волны прослеживается на протяжении многих длин волн.

Посмотрим на дисперсионное соотношение для волн на мелкой воде с другой стороны. Это волны без дисперсии. Учтем теперь слабую дисперсию, т. е. конечность глубины жидкости. Дисперсионное уравнение для гравитационных волн на воде конечной глубины, бегущих в одну сторону, имеет вид

$$\omega = \sqrt{gk \operatorname{th} kH}. \quad (9.80)$$

Пусть $kH \ll 1$, тогда

$$\operatorname{th} kH \cong kH - \frac{1}{3}(kH)^3 + \dots, \quad (9.81)$$

т. е. частота может быть записана в следующем виде:

$$\omega = \left[gk^2 H \left(1 - \frac{1}{3}(kH)^2 \right) \right]^{1/2} \cong \sqrt{gH} k \left(1 - \frac{1}{6}(kH)^2 \right). \quad (9.82)$$

Зная разложение в ряд дисперсионного соотношения, легко найти соответствующее ему дифференциальное уравнение. Для этого необходимо принять во внимание, что для гармонических волн $\eta = \eta_0 e^{-i(\omega t - kx)}$,

$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -i\omega \eta$, а $\frac{\partial \eta}{\partial x} = ik\eta$, тогда из дисперсионного соотношения

$$-i\omega = -ik \left(1 - \frac{1}{6}(kH)^2 \right) \sqrt{gH} \quad (9.83)$$

следует, что η удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \sqrt{gH} = 0 \quad (9.84)$$

или

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{gH} \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0. \quad (9.85)$$

Учет дисперсии приведет к тому, что разные гармоники будут иметь разные фазовые скорости и тогда начальный импульс будет расплываться.

Итак, для волн малой амплитуды на мелкой воде импульс сохраняет форму. Если учесть конечность амплитуды (малая нелинейность), то импульс укрупняется. Если учесть конечность глубины

(слабую дисперсию), то импульс расплывается, т. е. дисперсия препятствует укручению профиля волны. В этом случае говорят о конкуренции нелинейности и дисперсии и возможности существования установившихся волн на поверхности неглубокой жидкости.

Существует эвристический подход получения уравнений, описывающих эволюцию слабонелинейных слабодиспергирующих волн. Он состоит в предположении, что слабая нелинейность и дисперсия независимо влияют на поведение волн. При этом в уравнение для η включают нелинейные и дисперсионные добавки аддитивно. В результате получается следующее уравнение:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{gH} \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \sqrt{gH} \frac{3}{2} \frac{\eta}{H} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (9.86)$$

Введем безразмерную переменную $\zeta = \eta / H$, тогда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + C_0 \left(1 + \frac{3}{2} \zeta \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + C_0 \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (9.87)$$

Это уравнение называется *уравнением Кортевега-де-Вриза* (КдВ).

Поиск установившегося решения будем вести в классе стационарных волн, т. е. волн, у которых форма не меняется в некоторой системе отсчета. Такое может получиться, поскольку в системе действуют два конкурирующих эффекта — нелинейность, укручающая фронт волны, и дисперсия, приводящая к расплыванию импульсов. Будем искать решение уравнения (9.87) в виде $\zeta = \zeta(x - Ut)$, где $U = \text{const}$ — неизвестная функция, т. е. $\zeta = \zeta(X)$, тогда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial X}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -U \frac{\partial \zeta}{\partial X}. \quad (9.88)$$

Уравнение КдВ сводится к уравнению в обыкновенных производных:

$$\frac{H^2}{6} \frac{d^3 \zeta}{dX^3} + \left(1 - \frac{U}{C_0} + \frac{3}{2} \zeta \right) \frac{d\zeta}{dX} = 0, \quad (9.89)$$

которое можно проинтегрировать:

$$\frac{H^2}{6} \frac{d^2 \zeta}{dX^2} + \zeta \left(1 - \frac{U}{C_0} \right) + \frac{3}{4} \zeta^2 = \text{const}. \quad (9.90)$$

Будем искать локализованные решения (9.90). Поле решения так называемого солитона должно убывать при $X \rightarrow \infty$. В этом случае константа в правой части (9.90) должна равняться нулю. Полученное

уравнение можно проинтегрировать еще раз. Для этого домножим его на $d\zeta/dX$:

$$\frac{H^2}{6} \frac{d\zeta}{dX} \frac{d^2\zeta}{dX^2} + \zeta \frac{d\zeta}{dX} \left(1 - \frac{U}{C_0}\right) + \frac{3}{4} \zeta^2 \frac{d\zeta}{dX} = 0, \quad (9.91)$$

$$\frac{H^2}{12} \frac{d}{dX} \left(\frac{d\zeta}{dX}\right)^2 + \frac{d}{dX} \frac{\zeta^2}{2} \left(1 - \frac{U}{C_0}\right) + \frac{d}{dX} \frac{\zeta^3}{4} = 0. \quad (9.92)$$

С учетом нулевых граничных условий на бесконечности интегрирование дает

$$\frac{H^2}{12} \left(\frac{d\zeta}{dX}\right)^2 + \frac{\zeta^2}{2} \left(1 - \frac{U}{C_0}\right) + \frac{\zeta^3}{4} = 0, \quad (9.93)$$

$$\frac{H^2}{3} \left(\frac{d\zeta}{dX}\right)^2 = \zeta^2 \left(2 \left(\frac{U}{C_0} - 1\right) - \zeta\right).$$

Обозначив максимальное значение уровня воды через η_0 , из (9.93) получим

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{\operatorname{ch}^2 \left(\sqrt{\frac{3\zeta_0}{4}} \frac{X}{H} \right)}, \quad (9.94)$$

при этом амплитуда волны и скорость связаны соотношением

$$\zeta_0 = \frac{\eta_0}{H} = 2 \left(\frac{U}{C_0} - 1 \right). \quad (9.95)$$

Отсюда можно получить выражение для скорости волны:

$$U = C_0 \left(1 + \frac{\eta_0}{2H} \right). \quad (9.96)$$

Полученное решение носит название *солитон*, или уединенная волна (рис. 10). Ясно, что скорость уединенной волны больше, чем скорость линейных волн на поверхности воды. Параметром в солитонном решении является амплитуда уединенной волны η_0 . Размер солитона (его эффективная длина) зависит от уровня, на котором он измеряется. Так, по уровню $0,5$ длина солитона равна $\delta = H \sqrt{4/3\eta_0}$. Чем больше амплитуда солитона, тем солитон уже, и тем быстрее распространяется.

Важно подчеркнуть, что зависимость скорости распространения волны от ее амплитуды указывает на нелинейно-дисперсионные свойства волны.

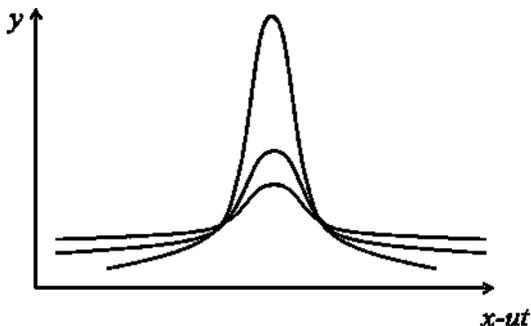


Рис. 10. Общий вид солитонов различной ширины

Следует также отметить, что на основе уравнений КДВ могут быть изучены и неустановившиеся нелинейные волны. Изложение точной теории интегрирования уравнения КДВ выходит за рамки данного курса.

ЗАДАЧИ к разделу 9

Задача 1

Найти средние за период волны значения кинетической и потенциальной энергии колебательного движения в гравитационных волнах на поверхности тяжелой жидкости глубины H .

Решение. Будем предполагать, что на поверхности жидкости распространяется гармоническая волна и возвышение поверхности описывается следующим выражением:

$$\zeta = \text{Re}(ae^{-i(\omega t - kx)}).$$

Тогда потенциал

$$\varphi = \text{Re}(\varphi_0 \text{ch}k(z + H)e^{-i(\omega t - kx)}).$$

Из граничного условия $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}$ получим

$$\varphi_0 = -\frac{i\omega}{k} a \frac{1}{\operatorname{sh}kH}.$$

В результате в действительных переменных выражения для возвышения и потенциала выглядят как

$$\zeta = a \cos(\omega t - kx),$$

$$\varphi = \frac{a\omega}{k\operatorname{sh}kH} \operatorname{ch}k(z+H) \sin(\omega t - kx).$$

Найдем компоненты скорости:

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -a\omega \frac{\operatorname{ch}k(z+H)}{\operatorname{sh}kH} \cos(\omega t - kx),$$

$$u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = a\omega \frac{\operatorname{sh}k(z+H)}{\operatorname{sh}kH} \sin(\omega t - kx).$$

Кинетическая энергия:

$$K = \left\langle \int_{-H}^0 \rho \frac{u_x^2 + u_z^2}{2} dz \right\rangle = \left\langle \int_{-H}^0 \rho \frac{a^2 \omega^2}{2\operatorname{sh}kH} (\operatorname{ch}^2 k(z+H) \cos^2(\omega t - kx) + \operatorname{sh}^2 k(z+H) \sin^2(\omega t - kx)) dz \right\rangle = \frac{\rho a^2 \omega^2}{4k} \operatorname{cth}kH.$$

Здесь треугольные скобки означают осреднение по периоду волны. Потенциальная энергия:

$$\begin{aligned} \Pi &= \left\langle \int_{-H}^{\zeta} \rho g z dz \right\rangle = \frac{\rho g z^2}{2} \Big|_{-H}^{\zeta} = \left\langle \frac{\rho g \zeta^2}{2} - \frac{\rho g H^2}{2} \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\rho g a^2 \cos^2(\omega t - kx)}{2} - \frac{\rho g H^2}{2} \right\rangle = \frac{\rho g a^2}{4} + \Pi_0. \end{aligned}$$

Поскольку из закона сохранения энергии следует, что средняя за период волны потенциальная энергия волны должна быть равна средней за период потенциальной энергии $\Pi = K$, получим

$$\frac{\rho g a^2}{4} = \frac{\rho a^2 \omega^2}{4k} \operatorname{cth}kH.$$

И действительно, данное равенство выполняется тождественно, поскольку в результате его преобразования можно получить дисперсионное соотношение для гравитационных волн:

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}kH.$$

Задача 2

В потоке жидкости, движущейся с постоянной скоростью V , имеется неподвижное препятствие (ступенька дна или неподвижное тело). Если V превышает некоторое значение V^* , то в системе отсчета, связанной с препятствием, наблюдается стационарная система волн, причем выше по потоку находятся короткие волны (рябь), а ниже по потоку — длинные волны. Найти V^* и объяснить причину наблюдаемого явления.

Решение: Перейдем в систему отсчета, в которой вода покоится, а тело движется со скоростью $-V$. В этой системе отсчета волны описываются дисперсионным уравнением:

$$\omega^2 = gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3.$$

Фазовая скорость

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}}$$

имеет минимум $c_{\min} = \left(\frac{g\sigma}{\rho}\right)^{1/4}$ при $k = \sqrt{\frac{g\rho}{\sigma}}$.

Таким образом, минимальное значение скорости препятствия, при котором излучаются волны, будет $V^* = \left(\frac{g\sigma}{\rho}\right)^{1/4}$. Впереди препятствия окажутся волны с большими фазовыми скоростями, а позади, соответственно, с меньшими. Поскольку групповая скорость длинных гравитационных волн меньше фазовой, а групповая скорость капиллярных волн больше фазовой, капиллярные волны будут опережать препятствие, а гравитационные волны будут отставать от него.

10. ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ

10.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1) Вихрем, или завихренностью, называется вектор $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$. Очевидно, $\vec{\omega}$ — соленоидальный вектор, так как $\text{div } \vec{\omega} = \text{div } \text{rot } \vec{v} = 0$.

2) Вихревой линией называется линия, касательная к которой в каждой точке параллельна вектору $\vec{\omega}$.

3) Вихревой трубкой называется поверхность, которая получается следующим образом: проводим в жидкости произвольный контур, через него проводим вихревые линии, в результате получаем трубку тока.

4) Циркуляция вектора скорости по контуру C определяется выражением $\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$, которое получается по теореме Стокса; S — поверхность, опирающаяся на контур. Докажем вспомогательную теорему. Рассмотрим жидкую поверхность Σ , т. е. поверхность, составленную из одних и тех же частиц, ограниченную жидким контуром C (который так же, как и поверхность, составлен из одних и тех же частиц). Будем считать, что поверхность и ограничивающий ее контур в момент $t + \Delta t$ приняли значения Σ_1 и C_1 соответственно. Найдем производную по времени от потока соленоидального вектора $\vec{\omega}$ через жидкую поверхность Σ :

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Sigma_1} \vec{\omega}(t + \Delta t) \cdot \vec{n} - \iint_{\Sigma} \vec{\omega}(t) \cdot \vec{n}}{\Delta t}. \quad (10.1)$$

Найдем интеграл от $\vec{\omega}$ по замкнутой поверхности $\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_\delta$ (здесь Σ_δ — боковая поверхность):

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_\delta} \vec{\omega} \cdot \vec{n} &= \iint_{\Sigma_1} \vec{\omega}(t + \Delta t) \cdot \vec{n} - \iint_{\Sigma} \vec{\omega}(t) \cdot \vec{n} + \iint_{\Sigma_\delta} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \\ &= \iiint_V \text{div } \vec{\omega}(t) \cdot \vec{r} = 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Тогда

$$-\iint_{\Sigma} \vec{A}(\nu) \omega \vec{\nu} - \iint_{\Sigma_1} \vec{A}(\nu) \omega \vec{\nu} - \iint_{\Sigma_6} \vec{A}(\nu) \omega \vec{\nu}. \quad (10.3)$$

И с учетом (10.3) получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{A}(\nu) \omega \vec{\nu} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Sigma_1} (\vec{A}(\nu + \Delta \nu) \omega \vec{\nu}) - \iint_{\Sigma_6} \vec{A}(\nu) \omega \vec{\nu}}{\Delta t} = \\ = \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \omega \vec{\nu} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Sigma_6} \vec{A}(\nu) \omega \vec{\nu}}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Рассмотрим элемент боковой поверхности $\vec{l}_0 \Delta l$ (рис. 11).

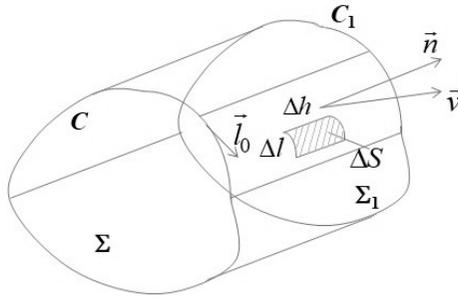


Рис. 11. Иллюстрация элемента боковой поверхности $\vec{l}_0 \Delta l$.

Величина $\Delta h = v_1 \Delta t$, где v_1 — проекция вектора скорости на нормаль к контуру C , т. е. $\vec{l}_0 \Delta l = \vec{l}_0 \Delta t$, здесь \vec{l}_0 — единичный вектор, направленный по касательной к контуру C . Таким образом, $\vec{l}_0 \Delta l = \vec{l}_0 \Delta t$, т. е. с учетом теоремы Стокса

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Sigma_6} \vec{A}(\nu) \omega \vec{\nu}}{\Delta t} = 0 \\ = \iint_{\Sigma} \text{rot} [\vec{A}(\nu) \omega \vec{\nu}]. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Анализируя полученные выражения (10.4) и (10.5), получаем

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{A}(\nu) \omega \vec{\nu} - \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - \text{rot} [\vec{A}(\nu) \omega \vec{\nu}] \right\} \omega \vec{\nu}. \quad (10.6)$$

Применим данную вспомогательную теорему для определения изменения во времени потока вектора завихренности через жидкую поверхность. Выражение (10.6) применять можно, поскольку $\vec{\omega}$ — соленоидальный вектор. Запишем уравнение Эйлера в форме Громки — Лэмба:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) - \rho \vec{\omega} = 0. \quad (10.7)$$

Возьмем от этого выражения rot:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{\omega} - \text{rot} \left(\frac{1}{2} \nabla (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \right) - \rho^2 \vec{\omega} = 0. \quad (10.8)$$

Найдем поток вектора, стоящего в левой части через жидкую поверхность Σ :

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{\omega} - \text{rot} \left(\frac{1}{2} \nabla (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \right) - \rho^2 \vec{\omega} \right) \cdot \vec{n} \, dS. \quad (10.9)$$

Используя вспомогательную теорему, получим

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS - \iint_{\Sigma} \frac{1}{\rho^2} \text{rot} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS. \quad (10.10)$$

Если жидкость баротропна, т. е. $\rho = \rho(p)$, либо $\rho = \text{const}$, то для произвольного жидкого контура

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\Sigma} \frac{1}{\rho^2} \text{rot} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS. \quad (10.11)$$

Или по теореме Стокса

$$\frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} \vec{\omega} \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} \frac{1}{\rho^2} \text{rot} \vec{\omega} \cdot d\vec{r}. \quad (10.12)$$

Выражения (10.11) и (10.12) представляют собой теорему Томсона, суть которой состоит в том, что циркуляция скорости по замкнутому контуру сохраняется. Заметим, что тогда

$$\iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = \text{const}$$

для любой поверхности Σ , опирающейся на жидкий контур.

10.2. ТЕОРЕМЫ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрим ниже так называемые теоремы Гельмгольца, которые являются следствием теоремы Томсона.

Теорема 1. В идеальной баротропной жидкости завихренность не появляется и не исчезает.

Доказательство. Очевидно, что если завихренность равна 0, то

$$\iint_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (10.13)$$

для любой Σ , сколь угодно малой. Завихренность возникнуть не может. Значит, если течение идеальной баротропной жидкости было вначале потенциально ($\text{rot} \vec{v} = 0$), то оно всегда остается потенциальным.

Теорема 2. Вихревые трубки являются жидкими поверхностями, а вихревые линии — жидкими линиями.

Доказательство. Рассмотрим вихревую трубку. Выберем на ее поверхности контур C , который состоит из жидких частиц. Будем за ним следить. Циркуляция поля скорости по этому контуру $\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$, S — поверхность, на которую опирается контур

C . Можно в качестве такой поверхности выбрать кусок поверхности вихревой трубки S . Тогда по определению $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}$ и $\iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \Gamma$, где

\vec{n} — вектор нормали к вихревой трубке. То есть циркуляция вектора скорости по этому контуру равна 0. Тогда по теореме Томсона эта циркуляция равна 0 в любой момент времени. Но это, в свою очередь, означает, что всегда можно выбрать поверхность, опирающуюся на контур C , на которой вектор нормали \vec{n} перпендикулярен вектору $\vec{\omega}$, а это, в свою очередь, означает, что такая поверхность представляет собой кусок поверхности вихревой трубки. Но тогда контур C всегда остается на поверхности вихревой трубки.

Можно выбрать любой контур, в том числе и бесконечно малый. Стягивая контур C в точку, мы получим жидкую частицу. И из рассуждений следует, что эта жидкая частица все время находится на поверхности вихревой трубки, или что вихревые трубки состоят из жидких частиц. Если толщину вихревой трубки устремить к нулю, то получится вихревая нить. И вихревые нити, как частный случай вихревых трубок, также будут состоять из жидких частиц. Это свой-

ство называется вмороженностью вихревых линий. То есть вихревые линии переносятся жидкими частицами. Это, однако, не означает, что завихренность жидкой частицы сохраняется. Напротив, она может меняться.

Теорема 3. Поток завихренности через сечение вихревой трубки сохраняется вдоль вихревой трубки.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую поверхность, состоящую из боковой поверхности вихревой трубки Σ_δ и двух сечений:



поскольку по теореме Остроградского — Гаусса



Но $\iint_{\Sigma_\delta} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = 0$, и тогда

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_{\Sigma_2} \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Следствие этого: вихревые трубки не могут начинаться или кончаться в жидкости. Они могут быть:

- замкнуты,
- начинаться и кончаться на мелях,
- начинаться и кончаться на ∞ .

10.3. ПЛОСКИЕ ВИХРЕВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Пусть имеются две компоненты скорости u и v , которые зависят от x и y . Тогда вектор $\text{rot} \vec{v}$ имеет одну компоненту:

$$\text{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \vec{k} \omega. \quad (10.14)$$

Как мы видели ранее, в двумерном течении можно ввести функцию тока ψ , так что $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$; $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$. Тогда

$$\Delta \psi = -\omega. \quad (10.15)$$

Рассмотрим уравнение Эйлера в форме Громеки — Лэмба (см. (10.7)). Если $\rho = \text{const}$, то, вычисляя rot от обеих частей, получим

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{v} \times \vec{v}] = 0 \quad (10.16)$$

В двумерном случае $\text{rot}[\vec{v} \times \vec{v}] = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v})$, тогда

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} - \nabla(\vec{v} \cdot \vec{\omega}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0. \quad (10.17)$$

Отсюда ясно, что завихренность сохраняется на жидкой частице.

Этот результат можно получить также и из теоремы Томпсона. Выберем жидкий контур в плоскости, а значит и поверхность, опирающаяся на контур, тоже будет плоской. Тогда из условия несжимаемости жидкости следует, что площадь контура сохраняется. Пусть контур очень мал, тогда циркуляция скорости по этому контуру будет

$$C = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \omega \Delta S = \text{const},$$

но $\iint_{\Delta S} \omega dS \cong \omega \Delta S$, т. е. $\omega \Delta S = \text{const}$. Стянем контур в точку, но при

движении $\Delta S = \text{const}$, т. е. $\omega = \text{const}$, получим жидкую частицу, завихренность в которой сохраняется. Такой результат получается только в плоском случае, в объемном случае площадь сечения контура меняется, поэтому завихренность ω не сохраняется (меняется вдоль вихревой трубки).

Рассмотрим ниже некоторые примеры плоских вихревых течений. Пусть $\omega = \text{const}$. Очевидно, что это является решением уравнения (10.17). Найдем поле скорости по завихренности. Данная задача является кинематической. Будем использовать уравнение для функции тока в виде (10.15). Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть ψ зависит только от y , тогда

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} = -\omega. \quad (10.18)$$

Интегрируя выражение (10.18), получим

$$\psi = -\frac{\omega^2 y^2}{2}, \quad (10.19)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\omega y + v_0.$$

Выражения (10.19) описывают плоскопараллельное сдвиговое течение с линейным профилем скорости.

2) Пусть ψ зависит только от r :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr} = -\omega. \quad (10.20)$$

Интегрируя выражение (10.20), получим

$$\psi = -\frac{\omega r^2}{4} + A \ln r + B. \quad (10.21)$$

Дифференцируя выражение (10.21), можно получить компоненты скорости:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0, \quad (10.22)$$

$$v_\varphi = -\frac{d\psi}{dr} = \frac{\omega r}{2} + \frac{A}{r}.$$

Константу A необходимо положить равной нулю, чтобы избежать особенности поля скорости:

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{\omega r^2}{4} + B, \\ v_\varphi &= \frac{\omega r}{2}, \\ v_r &= 0. \end{aligned} \quad (10.23)$$

3) Пусть $\omega \neq \text{const}$. Рассмотрим произвольное стационарное завихренное течение:

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{\omega}, \dots) & \text{ ... } \\ u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (10.24)$$

Вводя функцию тока, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \\ \Psi_{xx} + \Psi_{yy} = -\omega, \end{cases} \quad (10.25)$$

или, если мы используем произвольные координаты:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} = 0 \\ \Delta \psi = -\omega \end{cases} \quad (10.26)$$

Отсюда следует, что общее решение будет $\omega = \omega(\psi)$. Это выражение иллюстрирует условие сохранения завихренности на жидких частицах. Отсюда видно, что в общем случае уравнение для функции тока принимает следующий вид:

$$\Delta\psi = -\omega(\psi). \quad (10.27)$$

3а) Если ψ — функция от y , то ω тоже функция от y . Тогда уравнение (10.27) можно записать в виде

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = -\omega(y). \quad (10.28)$$

Интегрируя данное выражение, получим

$$v_x = \frac{d\psi}{dy} = v_{x0} - \int_{y_0}^y \omega(y') dy'. \quad (10.29)$$

Анализируя формулу (10.29), можно сделать вывод, что плоскопараллельное сдвиговое течение может иметь любой профиль. Особое место среди плоскопараллельных течений занимает тангенциальный разрыв скорости:

$$v_x(y) = \begin{cases} U_1, & y < 0 \\ U_2, & y > 0 \end{cases} \quad (10.30)$$

В этом случае $\omega = (U_1 - U_2)\delta(y)$.

3б) Если ψ — функция r , то ω также будет являться функцией r . Тогда уравнение (10.27) можно записать в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) = -\omega(r). \quad (10.31)$$

Рассмотрим специальное цилиндрически симметричное распределение завихренности:

$$\omega(r) = \begin{cases} \Omega, & r < r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases} \quad (10.32)$$

Найдем распределение скорости в течении с такой завихренностью, пользуясь определением $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}$. Воспользуемся теоремой о циркуляции:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int \vec{\omega} \cdot d\vec{V}. \quad (10.33)$$

Выберем контур в виде окружности радиусом r . Поскольку $\text{rot} \vec{v}$ зависит только от r , то $v_\varphi \neq 0$; $v_r = 0$. Распишем подробнее правую и левую части выражения (10.33):

○

$$\iint_S \omega dS = \begin{cases} \Omega \pi r^2, & r < r_0 \\ \Omega \pi r_0^2, & r > r_0 \end{cases} \quad (10.34)$$

Приравнивая полученные выражения, получим

$$v_\varphi = \begin{cases} \frac{\Omega}{2} r, & r < r_0 \\ \frac{\Omega r_0^2}{2r}, & r > r_0 \end{cases} \quad (10.35)$$

Если обозначить циркуляцию Γ от v_φ по контуру C , то из (10.34) получим выражение для нее:

$$\Gamma = 2\pi r v_\varphi. \quad (10.36)$$

При $r > r_0$, $\Gamma = \pi \Omega r_0^2$ циркуляция по контуру вне цилиндра не зависит от контура и равна произведению завихренности на площадь сечения цилиндра.

Эта задача очень похожа на задачу о магнитном поле цилиндра с током. Однако в данном случае имеется важное отличие.

В электродинамике: имеем поле тока — находим магнитное поле.

В гидродинамике: имеем поле завихренности — находим поле скорости, но оно должно с этим полем завихренности согласоваться, т. е. должно выполняться уравнение Эйлера, или его следствие

$$\frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} = 0. \text{ То есть возможно не любое распределение завихренности, а только такое, при котором } \omega = \omega(\psi), \text{ где } \Delta\psi = -\omega(\psi).$$

Если при сохранении циркуляции Γ мы уменьшаем площадь сечения цилиндра, то получаем так называемую *вихревую нить*. Рассмотрим динамику вихревых нитей отдельно.

10.4. ДИНАМИКА ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ

При изучении динамики вихревых нитей пользуются двумя обстоятельствами:

- 1) в плоской задаче завихренность сохраняется в жидкой частице;
- 2) вне вихревой нити течение потенциально, а потенциальное течение удовлетворяет линейному уравнению Лапласа.

Это означает, что если вихревая нить находится в поле внешних потенциальных течений, то частица, в которой она находится, будет переноситься тем потенциальным полем, которое имеется в этой точке. В частности, это поле может создаваться другой вихревой нитью или несколькими вихревыми нитями. Если их несколько, то будет происходить сложение полей, создаваемых вихревыми нитями по принципу суперпозиции.

Пусть имеется N вихревых нитей. Тогда уравнение движения i -й нити имеет вид

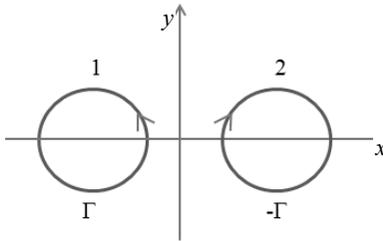
$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k \neq i} \vec{v}_k(\vec{r}_i), \quad (10.37)$$

где $\vec{v}_k(\vec{r}_i)$ — скорость, создаваемая k -й нитью в месте расположения i -й нити.

ЗАДАЧИ к разделу 10

Задача 1

Две вихревые нити с циркуляциями Γ и $-\Gamma$ находятся на расстоянии a друг от друга. Найти скорость перемещения вихревой пары.



Решение. Для решения задачи используем уравнение движения нитей в виде (10.37):

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_2(\vec{r}_1), \\ \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_1(\vec{r}_2), \end{cases}$$

Согласно (10.36) имеем для циркуляции и скорости в вихрях:

$$\Gamma = 2\pi a v_\phi, \quad v_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi a}.$$

И тогда для скоростей движения центров каждого вихря получим

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{z} \wedge \vec{v}_1, \quad 2\pi a \vec{\omega},$$

$$\frac{d\vec{z}_1}{dt} = \vec{z}_1 \wedge \vec{v}_2, \quad 2\pi a \vec{\omega}.$$

Это означает, что вихревая пара движется как целое вертикально вверх. Положение центра вихревой пары определяется как

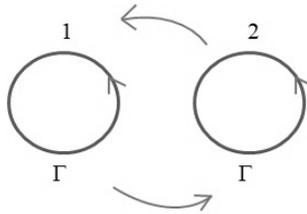
$$\vec{z} = (\vec{z}_1 + \vec{z}_2) / 2.$$

Скорость движения вихревой пары равна

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = 2\pi a \vec{\omega}.$$

Задача 2

Две вихревые нити с циркуляциями Γ и Γ находятся на расстоянии a друг от друга. Найти угловую скорость вращения вихрей.



Решение. Для решения задачи снова используем уравнение движения нитей в виде (10.37):

$$\begin{cases} \frac{d\vec{z}_1}{dt} = \vec{z}_2 \wedge \vec{v}_1, \\ \frac{d\vec{z}_2}{dt} = \vec{z}_1 \wedge \vec{v}_2. \end{cases}$$

Поскольку завихренности имеют одинаковый знак, вихри окажутся вовлеченными в движение по окружности, центр которой расположен на расстоянии $a/2$ от центра каждого их вихрей:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{z} \wedge \vec{v}_1, \quad 2\pi a \vec{\omega},$$

$$\frac{d\vec{z}_1}{dt} = \vec{z}_1 \wedge \vec{v}_2, \quad 2\pi a \vec{\omega}.$$

Для угловой скорости вращения вихрей получим выражение

$$v_{\phi} = \frac{\omega a}{2}.$$

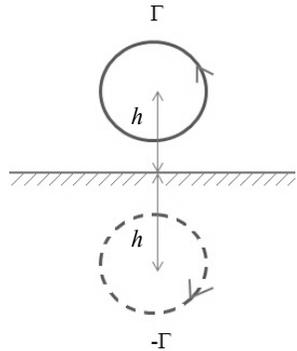
Тогда угловая скорость вращения вихрей будет

$$\omega = \frac{2v_{\phi}}{a} = \frac{\Gamma}{\pi a^2}.$$

Задача 3

Найти скорость вихря у твердой стенки, если его циркуляция Γ , а расстояние от стенки h .

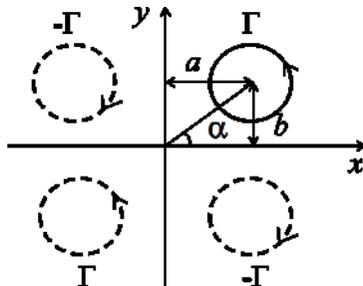
Решение. Будем решать задачу методом отражений, для этого заменим стенку вихрем так, чтобы в месте расположения стенки было выполнено граничное условие непротекания. Этого можно добиться, если выбрать вихрь с циркуляцией $-\Gamma$, расположенный на расстоянии h от стенки, как показано на иллюстрации. Таким образом, мы приходим к задаче 1 о движении вихревой пары, расположенной на расстоянии $a = 2h$. В этом случае скорость движения вихревой пары (вихря у твердой стенки):



$$v = \frac{\Gamma}{2\pi a} = \frac{\Gamma}{4\pi h}.$$

Задача 4

Найти траекторию движения вихря с циркуляцией Γ в прямом угле, если в начальный момент времени вихрь находился в точке с координатами (a, b) .



Решение. Для решения задачи, так же как и в задаче 3, воспользуемся методом отражений. В этом случае угол необходимо заменить системой из трех вихрей (см. рисунок). Тогда скорость вихря, может быть получена как суперпозиция скоростей, создаваемых в месте расположения вихря тремя другими вихрями. В результате для проекций скорости центра вихря получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} v_y = -\frac{\Gamma}{4\pi x} + \frac{\Gamma \cos \alpha}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2}}, & \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ v_x = \frac{\Gamma}{4\pi y} - \frac{\Gamma \sin \alpha}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2}}, & \sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Преобразуя данные выражения, получим

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{\Gamma}{4\pi x} + \frac{\Gamma x}{4\pi(x^2 + y^2)} = -\frac{\Gamma y^2}{4\pi x(x^2 + y^2)} \\ \frac{dx}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi y} - \frac{\Gamma y}{4\pi(x^2 + y^2)} = \frac{\Gamma x^2}{4\pi y(x^2 + y^2)} \end{cases}$$

Разделим верхнее уравнение на нижнее, тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3}{x^3}.$$

Интегрируя полученное выражение, запишем для траектории следующее уравнение:

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

11. ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

11.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Рассмотрим пример волновых движений в идеальной несжимаемой жидкости, для которых отлична от нуля завихренность; причем порождение завихренности связано с отличием рассматриваемого движения от баротропного. Для описания такого движения будем использовать уравнение для завихренности в виде

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \text{rot} \left[\vec{v}, \frac{[\rho]}{\rho^2} \right]. \quad (11.1)$$

Предположим, что $\rho \neq \text{const}$. Если движение жидкости не баротропно, т. е. ρ не является функцией p , то из уравнения (11.1) следует, что в жидкости может порождаться завихренность. Рассмотрим стратифицированную по вертикали жидкость $\rho = \rho_0(z)$ конечной глубины H . Запишем систему уравнений гидродинамики в этом случае:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \rho \cdot \nabla \vec{v} = \vec{\omega} \\ \text{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \rho = 0 \end{cases} \quad (11.2)$$

Найдем состояние равновесия в системе (11.2):

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 0, \\ \rho &= \rho_0(z), \\ \frac{dp_0}{dz} &= -\rho_0(z)g. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Отсюда получим

$$p_0(z) = P_0 - \int \rho_0(z) g dz. \quad (11.4)$$

Рассмотрим малое возмущение относительно этого состояния равновесия:

$$u = u_1, \quad w = w_1, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \quad p = p_0(z) + p_1. \quad (11.5)$$

Здесь u и w — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости, p_1, ρ_1 — возмущения давления. Линеаризуем систему (11.2) относительно этого состояния равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left(p_{0z} + p_{1z} - \frac{\rho_1}{\rho_0} p_{0z} \right) = -g \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + w_1 \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \end{cases} \quad (11.6)$$

С учетом того, что $p_{0z} = -\rho_0 g$, получим уравнение для w_1 :

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} p_{1z} + \frac{\rho_1 g}{\rho_0} = 0. \quad (11.7)$$

Введем функцию тока ψ . Тогда $\Delta\psi = -\omega$, $u_1 = \psi_{1z}$, $w_1 = -\psi_{1x}$. Вычитая первое уравнение системы (11.6), продифференцированное по z , из второго, предварительно подифференцированного по x , получим в терминах функции тока:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z \partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial t} \right) - g \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{d\rho_0}{dz} = 0 \end{cases} \quad (11.8)$$

Отсюда ясно, что завихренность удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{\rho_{0z}}{\rho_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial t \partial z}. \quad (11.9)$$

Исключая плотность, для первого уравнения системы (11.8) получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \right] \right) - g \frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = 0. \quad (11.10)$$

Или:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta\psi_1 + \frac{\rho_{0z}}{\rho_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = 0. \quad (11.11)$$

Сформулируем граничные условия для ψ_1 . На дне граничное условие представляет собой условие непротекания:

$$w_1|_{z=H} = 0; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{z=H} = 0. \quad (11.12)$$

Принимая во внимание периодичность ψ_1 , получим

$$\psi_1|_{z=H} = 0. \quad (11.13)$$

Граничное условие на поверхности воды более сложное. Запишем его в терминах функции тока, исходя из условия непротекания и динамических граничных условий. В первом приближении условие непротекания выразится следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = w_1|_{z=0}, \quad w_1 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{z=0} = 0. \quad (11.14)$$

Динамическое граничное условие запишем как

$$p|_{z=\zeta} = p_a. \quad (11.15)$$

Разложим уравнение (11.15) в ряд по малому ζ с точностью до первого порядка:

$$p_0 + p_1|_{z=0} + \frac{dp_0}{dz} \Big|_{z=0} \zeta = p_a. \quad (11.16)$$

Из уравнения Эйлера (z -компоненты) получим

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 g. \quad (11.17)$$

Дифференцируя выражение (11.16) по x , с учетом (11.17) получим

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} \Big|_{z=0} - \rho_0 g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (11.18)$$

Из x -проекции уравнения Эйлера в первом приближении:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t}. \quad (11.19)$$

Или в терминах функции тока:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial z}. \quad (11.20)$$

В результате граничное условие примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial z} \Big|_{z=0} + g \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = 0. \quad (11.21)$$

Исключая из кинематического и динамического граничных условий ζ_1 , получим следующее выражение:

$$\left. \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial t^2 \partial z} \right|_{z=0} - g \left. \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \right|_{z=0} = 0. \quad (11.22)$$

Тогда уравнение для ψ_1 с граничным условием на дне и на поверхности примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta \psi_1 + \frac{\rho_{0z}}{\rho_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) + N^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = 0 \\ \left. \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial t^2 \partial z} - g \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} \right|_{z=0} = 0 \\ \psi_1|_{z=H} = 0 \end{cases} \quad (11.23)$$

Здесь $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}$ — квадрат частоты плавучести, которая представляет собой частоту осцилляций смещенного из состояния равновесия жидкого элемента. При устойчивой стратификации $\frac{d\rho_0}{dz} < 0$ и частота плавучести является действительной величиной. Будем искать решение системы (11.23) в виде неоднородной плоской гармонической волны:

$$\psi_1 = \Psi_0(z) e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (11.24)$$

Рассмотрим граничное условие на свободной поверхности:

$$\left(\omega^2 \frac{d\Psi_0}{dz} - gk^2 \Psi_0 \right) \Big|_{z=0} = 0. \quad (11.25)$$

Если $\omega \gg N$, то уравнение для Ψ_0 запишем как

$$\Delta \Psi_0 = 0. \quad (11.26)$$

Для гармонической волны уравнение (11.26) примет следующий вид:

$$\frac{d^2 \Psi_0}{dz^2} - k^2 \Psi_0 = 0. \quad (11.27)$$

Из физических соображений необходимо отобрать решение, убывающее при $z \rightarrow \infty$, т. е. $\Psi_0 = e^{kz}$. Из граничного условия на свободной поверхности (11.25) получим, что $\omega^2 = gk$ — дисперсионное уравнение для поверхностных гравитационных волн на глубокой воде. Если предположить, что масштабы волн по z имеют порядок L_z , то оценка отношения членов, входящих в (11.25), дает

$$\frac{\omega^2 \frac{d\Psi_0}{dz}}{gk^2\Psi_0} \sim \frac{\omega^2}{kL_z(gk)}. \quad (11.28)$$

Если теперь считать, что $\frac{\omega^2}{(gk)L_zk} \ll 1$, т. е. частота волн мала по сравнению с частотой волн на поверхности воды, то первый член мал по сравнению со вторым и граничное условие на свободной поверхности примет вид

$$\Psi_0|_{z=0} = 0. \quad (11.29)$$

Далее мы увидим, что волны с такими частотами существуют. Условие $\Psi_0|_{z=0} = 0$ эквивалентно условию $\zeta_0|_{z=0} = 0$, т. е. в таких волнах почти не происходит смещение поверхности воды, условие (11.29) носит название приближения «твердой крышки». Все движения при этом происходят в толще, поэтому такие волны называются *внутренними гравитационными волнами*. Найдем дисперсионное уравнение для таких волн.

Будем искать решение системы (11.23) в виде $\psi_1 = \text{Re} \tilde{\gamma} e^{-i\omega t}$.

В устойчиво стратифицированной жидкости $\frac{d\rho_0}{dz} < 0$. Тогда частота плавучести является действительной величиной, из (11.23) получим

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2\tilde{\gamma}}{dz^2} + \rho_0 \tilde{\gamma} - (\omega^2 + k^2)\tilde{\gamma} \\ \tilde{\gamma} = 0 \end{pmatrix} \quad (11.30)$$

В результате мы получили задачу Штурма — Лиувилля на нахождение собственных чисел и собственных функций (мод). Решая это дифференциальное уравнение с граничными условиями, получим выражение, связывающее для каждой моды ω и k , т. е. дисперсионное соотношение. Предположим, что $N^2 = \text{const}$. Тогда $\frac{d\rho_0}{dz} = -\frac{\rho_0 N^2}{g}$,

$\rho_0 = \rho_{00} \exp(-\frac{N^2}{g}z)$, т. е. данное условие реализуется в жидкости с экспоненциальной стратификацией.

Тогда первое уравнение из системы (11.30) примет вид

$$\frac{d^2 \tilde{v}}{dz^2} + g \tilde{v} - \left(\omega^2 - \frac{N^2}{g} \right) k^2 \tilde{v} = 0 \quad (11.31)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $\tilde{v} = e^{\lambda z}$, тогда

$$\lambda^2 - \frac{N^2}{g} \lambda + \frac{N^2 k^2}{\omega^2} - k^2 = 0. \quad (11.32)$$

Решая данное квадратное уравнение, получим

$$\lambda = \frac{N^2}{2g} \pm \sqrt{4g^2 - \left(\frac{N^2 k^2}{\omega^2} - k^2 \right)} = \frac{N^2}{2g} \pm i\kappa, \quad (11.33)$$

где $\kappa = \sqrt{\left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) k^2 - \frac{N^4}{4g^2}}$. Тогда

$$\psi_1 = A \exp\left(\frac{N^2}{2g} z\right) \cos \kappa z + B \exp\left(\frac{N^2}{2g} z\right) \sin \kappa z.$$

Из граничного условия на поверхности следует, что $A = 0$; из граничного условия на дне получим $\sin \kappa H = 0$, это условие выполняется при $\kappa H = \pi n$ или $\left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) k^2 - \frac{N^4}{4g^2} = \left(\frac{\pi n}{H} \right)^2$, откуда можно получить дисперсионное соотношение в виде

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + \left(\frac{\pi n}{H} \right)^2 + \frac{N^4}{4g^2}}. \quad (11.34)$$

Сделаем оценку $\frac{N^4}{4g^2} \sim \left(\frac{\rho_{0z}}{\rho_0} \right)^2 \sim \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)^2 \frac{1}{H^2}$, для воды $\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \sim 10^{-3}$,

т. е. это очень малое слагаемое по сравнению с $\left(\frac{\pi n}{H} \right)^2$. Дисперсионное соотношение и собственная функция тогда примут следующий вид (рис. 12—14):

$$\omega = \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi n}{H} \right)^2}}; \quad \psi_1 = B \exp\left(\frac{N^2}{2g} z\right) \sin \frac{\pi n z}{H}. \quad (11.35)$$

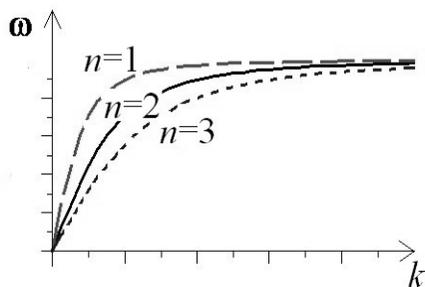


Рис. 12. Дисперсионное соотношение для внутренних волн

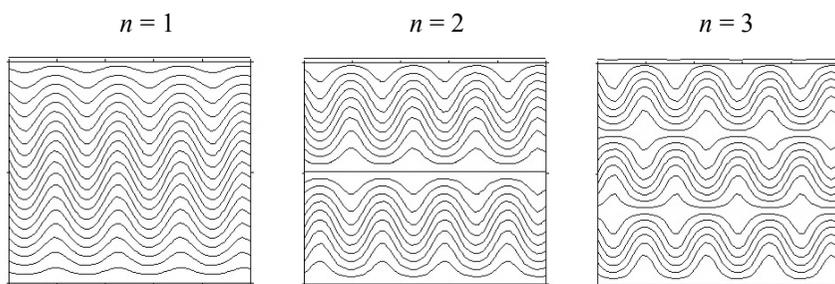


Рис. 13. Смещение линий равной плотности в разных модах внутренних волн

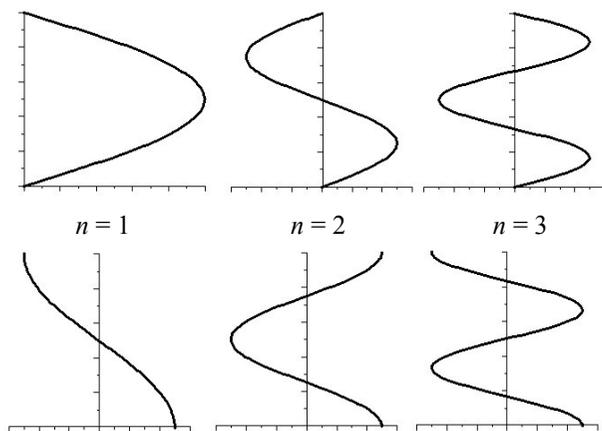


Рис. 14. Распределение вертикальной и горизонтальной скорости во внутренних волнах для разных мод

Если волны достаточно длинные, так что $k \ll \left(\frac{\pi n}{H}\right)^2$, то дисперсионное соотношение примет вид

$$\omega = \frac{NH}{\pi n} k. \quad (11.36)$$

Отсюда можно сделать вывод, что фазовая скорость падает с ростом номера моды внутренних гравитационных волн. Примечательно, что такие волны распространяются без дисперсии.

Сделаем оценку применимости приближения «твердой крышки» на поверхности воды (11.29). Максимальное $\omega = N$, $L_z \sim H/n$, т. е. условие (11.29) принимает вид

$$\frac{N^2 n}{k^2 g H} \ll 1, \quad N^2 = \frac{g}{\rho} \frac{\Delta \rho}{H}, \quad \frac{\Delta \rho n}{\rho k^2 H^2} \ll 1. \quad (11.37)$$

В океане $\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right) \sim 10^{-3}$, т. е. эффективно возбуждены только низшие моды с малыми $n = 1, 2, 3$. При этом $kH \leq 1$, т. е. условие «твердой крышки» выполняется с хорошим запасом.

11.2. БЕГУЩИЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим теперь немного другую постановку задачи. Пусть при $z = 0$ имеется источник гармонических внутренних гравитационных волн. Волны излучаются на ∞ , т. е. при $z \rightarrow \infty$ выполняется условие излучения, и вектор групповой скорости направлен от поверхности. Запишем основные уравнения для такой постановки задачи:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} - \frac{N^2}{g} \frac{d\psi_1}{dz} + \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right) k^2 \psi_1 = 0 \\ \psi_1|_{z=0} = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ \psi_1|_{z \rightarrow \infty} = 0 \end{cases} \quad (11.38)$$

где $\psi_1 = \text{Re} \psi_0 \exp[i(kx + kz - \omega t)] \exp\left(\frac{N^2}{g} z\right)$. Дисперсионное соотношение в этом случае выглядит как

$$\omega^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + \kappa^2} \Rightarrow \omega = N \cos \Theta, \quad (11.39)$$

где Θ — это угол между горизонталью и волновым вектором.

Из соотношения (11.39) видно, что частота всегда меньше частоты Брента — Вайсяля, а также она не зависит от модуля волнового вектора, а зависит лишь от его направления. Найдем групповую скорость внутренних волн $c_{гр}$:

$$c_{грx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{N^2}{|\vec{k}|} \frac{\partial}{\partial k} \frac{1}{(k^2 + \kappa^2)^{3/2}}, \quad (11.40)$$

$$c_{грz} = -\frac{\kappa k N}{(k^2 + \kappa^2)^{3/2}}. \quad (11.41)$$

Если $\vec{k} = (k, \kappa)$, то $\vec{c}_{гр} = \frac{N^2}{(k^2 + \kappa^2)^{3/2}} (\kappa, -k)$, т. е. $\vec{c}_{гр} \perp \vec{K}$.

Таким образом, мы видим, что групповая скорость $c_{гр}$ направлена перпендикулярно вектору \vec{K} и фазовой скорости (параллельно волновому фронту) (рис. 15).

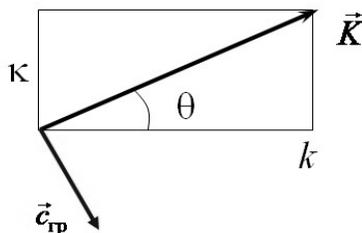


Рис. 15. Расположение вектора групповой скорости относительно волнового вектора для бегущих внутренних волн

Амплитуда внутренних гравитационных волн растет при удалении от поверхности как $\exp\left(\frac{N^2}{g} z\right)$. Это хорошо известное в физике атмосферы явление укрупнения внутренних гравитационных волн с высотой. В процессе распространения внутренние волны перестают быть линейными и обрушаются.

ЗАДАЧИ к разделу 11

Задача 1

В несжимаемой жидкости с линейной зависимостью плотности от вертикальной координаты распространяется внутренняя волна с частотой ω и волновым вектром \vec{k} . Найти частоту и волновой вектор волны, отраженной от дна с углом наклона α к горизонту.

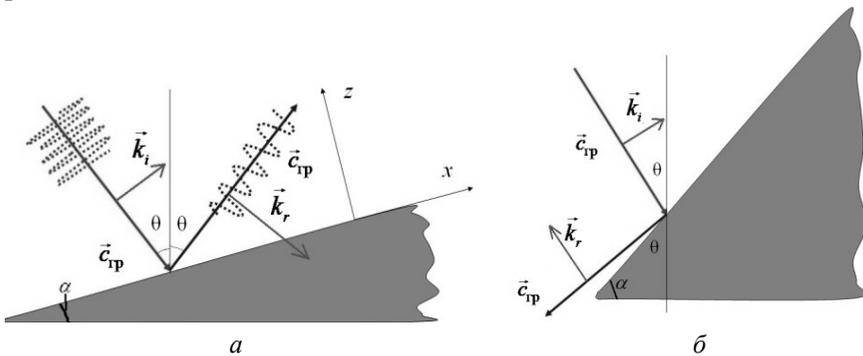
Решение. Поскольку рассматриваемый процесс является стационарным, частоты падающей и отраженной волн должны быть равны: $\omega_i = \omega_r$. Отсюда следует, что угол между вертикалью и вектором групповой скорости отраженной волны равен углу между вертикалью и вектором групповой скорости для падающей волны. Из закона Снеллиуса можно получить, что проекции волновых векторов на ось x должны быть равны: $k_{ix} = k_{rx}$. Тогда

$$|\vec{k}_r| - |\vec{k}_i| \frac{\alpha}{\cos(\theta + \alpha)}.$$

Данная конфигурация векторов групповой скорости волновых векторов справедлива для случая, когда (см. рисунок *a*)

$$\theta + \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \theta < \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Или для частоты получим, что $\omega > N \sin \theta$. При $\omega < N \sin \theta$ конфигурация изменится (см. рисунок *б*). Соотношение для волновых векторов останется тем же.



Падение внутренней волны на наклонную плоскость:
a — $\omega > N \sin \theta$; *б* — $\omega < N \sin \theta$

12. ВЯЗКАЯ НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ

12.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

При рассмотрении идеальной жидкости мы неоднократно сталкивались с различного рода эффектами, которые противоречили опыту: так, тела при потенциальном обтекании не испытывали сопротивления, вихри существовали бесконечно долго и было не ясно, как они появляются, и т. д. Для построения более реальной картины движения жидкости и газа необходимо учесть влияние вязкости, т. е. трение слоев жидкости при их относительном, сдвиговом движении. В настоящем разделе будет исследовано влияние вязкости на движение несжимаемой жидкости с постоянной плотностью. Прежде всего рассмотрим, как изменятся уравнения несжимаемой жидкости при учете вязкости. Уравнение движения сплошной среды имеет вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad (12.1)$$

где ε_{ij} — тензор поверхностных напряжений. В идеальной жидкости $\varepsilon_{ij} = -p\delta_{ij}$, т. е. поверхностная сила действует только по нормали. Выясним, откуда берется давление, например, на водной поверхности. Очевидно, что молекулы газа (жидкости) ударяют об эту поверхность и передают ей импульс. Когда мы принимаем модель вязкой жидкости, то должны учесть еще одно явление, принципиально связанное с движением жидкости. Пусть имеется два слоя жидкости, один из которых движется со скоростью u_1 , а другой — со скоростью $u_2 < u_1$. Это значит, что в среднем молекулы из слоя 1 имеют большие скорости (или импульс), чем из слоя 2, так что эти слои могут обмениваться молекулами. При этом более «быстрые» молекулы из слоя 1, переходя в слой 2, будут его в среднем ускорять, а молекулы из слоя 2, переходя в слой 1, будут его в среднем замедлять. Иными словами, происходит перенос количества движения (или импульса) из слоя 1 в слой 2 и наоборот (заметим, что явление переноса вообще универсально, т. е. молекулы могут переносить что угодно). Такой

перенос импульса эквивалентен тому, при котором на слои жидкости действует сила. Причем она действует в направлении движения жидкости (в данном случае вдоль x), а обусловлена она градиентом скорости в направлении y . Эта сила действует на границе слоев, т. е. это поверхностная сила. Для нее можно ввести поверхностное напряжение ε_{12} , где индексы указывают, что эта сила действует в направлении 1 на площадку, ориентированную перпендикулярно направлению 2. Ясно, что наиболее простое выражение для этой силы может быть принято следующим:

$$\varepsilon_{12} = \mu \frac{du_1}{dx_2}, \quad (12.2)$$

где коэффициент пропорциональности μ называется *коэффициентом вязкости*.

Эти качественные соображения могут быть обобщены. Примем гипотезу, которая основана на предыдущих качественных соображениях и подкреплена опытом, а также может быть получена теоретически из молекулярно-кинетической теории. Эта гипотеза состоит в следующем. Тензор поверхностных напряжений, который описывает эффект переноса импульса, в общем виде можно записать следующим образом:

$$\varepsilon'_{ij} = A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (12.3)$$

где A_{ijkl} — тензор 4-го порядка, зависящий от состояния жидкости.

Будем рассматривать жидкости и газы, свойства которых не зависят от направления, тогда тензор A_{ijkl} должен быть изотропным. Кроме того, как мы видели, для жидкости, в которой нет внутренних моментов, закон сохранения момента импульса дает $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, т. е. $A_{ijkl} = A_{jikl}$. Таким образом, общий вид изотропного тензора 4-го порядка следующий:

$$A_{ijkl} = \mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu' \delta_{il} \delta_{jk} + \mu'' \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (12.4)$$

Поскольку A_{ijkl} удовлетворяет условию симметрии, то

$$A_{ijkl} = \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + \mu'' \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (12.5)$$

Отсюда ясно, что $A_{ijkl} = A_{jikl}$ (тензор \hat{A} симметричен по индексам i и j). Тогда

$$\varepsilon'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mu'' \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}. \quad (12.6)$$

Полный тензор напряжений (с учетом действующих по нормали поверхностных сил давления) в вязкой жидкости имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mu'' \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (12.7)$$

Найдем выражение для производной от тензора напряжений, входящей в правую часть уравнения движения сплошной среды (12.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mu'' \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{v}), \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \vec{v} \end{aligned} \quad (12.8)$$

где $\mu'' = \rho \left(\zeta + \frac{v}{3} \right)$. С учетом этого уравнения движения (12.1) принимают вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \rho^{-1} \nabla p - \mu \nabla^2 \vec{v} = \vec{f}. \quad (12.9)$$

В несжимаемой жидкости последнее слагаемое равно нулю, так как $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Таким образом, уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \mu \nabla^2 \vec{v} = \vec{f} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) p = 0 \end{cases} \quad (12.10)$$

При этом первое уравнение системы (12.10) называется уравнением Навье — Стокса. Величина $\nu = \mu / \rho$ называется кинематической вязкостью. Для воздуха, обладающего меньшей плотностью, чем вода, кинематическая вязкость больше ($\nu = 0,15 \text{ см}^2/\text{с}$ для воздуха, и $\nu = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$ для воды), что означает, что на единицу массы воздуха действует большая вязкая сила, чем на единицу массы воды.

Следует отметить, что уравнения (12.10) более высокого порядка, чем в идеальной жидкости. Поэтому для постановки и решения задач, описывающих сложные явления в вязкой жидкости, требуются дополнительные граничные условия.

В идеальной жидкости мы пользовались условиями непротекания, при этом нормальная компонента скорости жидкости на поверхности твердого тела должна была обращаться в нуль. Теперь же из-за трения молекулы жидкости, прилегающие к телу, прилипают к нему, и поэтому полная скорость жидкости относительно тела равна нулю. Это означает, что в вязкой жидкости может быть разрыв — это граница с твердым телом или граница несмешивающихся жидкостей. На этих границах действуют те же граничные условия на разрыве, которые были получены ранее из уравнений сохранения потоков массы и импульса.

Как следует из уравнений (5.7) и (5.15) из первой части настоящего пособия ([1], «Часть 1. Течение идеального сжимаемого газа и жидкости»), в системе отсчета, связанной с разрывом, эти граничные условия имеют следующий вид:

$$1) \rho u_n|_1 = \rho u_n|_2 \text{ — кинематическое граничное условие;}$$

$$2) [-\varepsilon_{ix} + \rho u_x u_i]|_1 = [-\varepsilon_{ix} + \rho u_x u_i]|_2 \text{ — динамическое граничное условие.}$$

Обсудим эти условия. Как известно, первое (кинематическое) условие в несжимаемой жидкости сводится к граничному условию типа тангенциального разрыва, т. е.:

$$u_n|_1^2 = 0. \quad (12.11)$$

Тангенциальные компоненты скорости при этом были произвольными. В вязкой жидкости тангенциальные компоненты скорости также должны быть равны по разные стороны от разрыва:

$$u_{1\tau} = u_{2\tau}. \quad (12.12)$$

Это так называемое условие прилипания. Если это граница с твердым телом, то $u_\tau = U_\tau$, где U_τ — тангенциальная компонента скорости твердого тела. В системе отсчета, где твердое тело покоится, обе компоненты скорости жидкости на поверхности твердого тела равны нулю:

$$u_n = 0, \quad u_\tau = 0. \quad (12.13)$$

Обсудим теперь второе динамическое граничное условие. С учетом равенства скоростей из закона сохранения импульса следует

$$\varepsilon_{ix}|_1 = \varepsilon_{ix}|_2. \quad (12.14)$$

Здесь x — направление нормали. Если учесть, что $\varepsilon_{ix} = \varepsilon_{xi}$, становится ясно, что равны все компоненты тензора напряжений.

Рассмотрим проекции вектора поверхностных напряжений:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{ij} n_j \vec{x}_{0i},$$

где \vec{x}_{0i} — единичный вектор произвольной системы координат;

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_{01} & \dots & n_j \\ \vec{x}_{01} \tau_{1,2} & \dots & n_j \tau_{1,2i} \end{bmatrix}$$

— нормальная и тангенциальная проекции вектора напряжений.

Запишем выражение для тензора напряжений в вязкой несжимаемой жидкости:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

При этом нормальная компонента вектора напряжений с учетом соотношений

$$n_i n_j \delta_{ij} = n_i n_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = |\vec{n}|^2, \quad \tau_i n_j \delta_{ij} = \tau_i n_i = (\vec{\tau}, \vec{n}) \quad (\vec{\tau} \perp \vec{n})$$

примет вид

$$\sigma_{ij} n_i n_j = -p + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j, \quad (12.15)$$

а тангенциальная компонента:

$$\sigma_{ij} n_j \tau_{1,2i} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \tau_{1,2i}. \quad (12.16)$$

Таким образом, динамические граничные условия на границе раздела двух вязких жидкостей примут вид

$$\left[p - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \right]_{||}^2 = 0, \quad (12.17)$$

$$\left[-\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \right] n_j \tau_{1,2i} \Big|_{||}^2 = 0. \quad (12.18)$$

В частности, на свободной поверхности тангенциальные напряжения равны нулю.

Остановимся теперь на особенностях завихренного движения в вязкой жидкости.

12.2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЗАВИХРЕННОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Будем исходить из уравнений Навье — Стокса (закон сохранения импульса в вязкой жидкости) и соответствующих условий несжимаемости для жидкости с постоянной плотностью:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nu \Delta \vec{u} - \nabla \pi \\ \text{div} \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (12.19)$$

Возьмем rot от обеих частей уравнения Навье — Стокса. Примем в учет, что $\text{rot} \nabla \pi = 0$, тогда из первого уравнения (12.19) получаем уравнение для завихренности:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \text{rot} [(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}] = \nu \Delta \vec{\omega} \quad (12.20)$$

Проинтегрируем это уравнение по некоторой жидкой поверхности Σ :

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot \vec{n} = \nu \iint_{\Sigma} \Delta \vec{\omega} \cdot \vec{n} \quad (12.21)$$

Учтем, что в идеальной жидкости

$$\Delta \vec{u} = -\text{rot} \text{rot} \vec{u} + \nabla \text{div} \vec{u} - \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$$

Преобразуем с учетом соотношений $\text{rot} \nabla \pi = 0$, $\Delta \vec{u} = -\text{rot} \text{rot} \vec{u} + \nabla \text{div} \vec{u} - \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$ соотношение (12.21):

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot \vec{n} = \nu \iint_{\Sigma} \text{rot} \text{rot} \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (12.22)$$

Видно, что за счет вязкости в жидкости может возникать завихренность (ср. теорему Томсона для идеальной несжимаемой жидкости). Как это происходит, увидим ниже.

12.3. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Решить уравнения Навье — Стокса в общем случае не удастся, однако некоторые модельные точные решения получить несложно.

1. Рассмотрим жидкость между двумя плоскопараллельными пластинками, расположенными на расстоянии $y = a$, верхняя пластинка имеет скорость U_0 , а нижняя покоится. Градиент давления вдоль пластин отсутствует. Можно предположить, что в этом течении существует одна компонента скорости, направленная по x :

$\vec{v} = (v, 0, 0)$. Тогда система (12.19) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \nu \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \\ u_x|_0 = 0 \\ u_x|_a = U_0 \end{cases} \quad (12.23)$$

То есть $u = Ay + B$ с учетом граничных условий, $A = \frac{U_0}{a}$, $B = 0$, тогда для продольной скорости в слое получим распределение вида

$$u = U_0 \frac{y}{a}. \quad (12.24)$$

Это решение называется плоским течением Куэтта. Следует отметить: несмотря на то что в это решение не входит вязкость, оно все же испытывает на себе ее влияние, поскольку все другие профили, кроме линейной зависимости скорости от вертикальной координаты, исключаются. Именно благодаря условиям прилипания на пластинах ясно, что для существования такого «плоского вихря», следует двигать одну из пластин с постоянной скоростью. В случае, когда вдоль потока создается некоторый постоянный градиент давления (напор), профиль течения становится параболическим, с максимумом посередине слоя. При этом величина максимума определяется вязкостью. Это так называемое течение Пуазейля.

Рассмотрим течение такого типа.

2. Пусть имеются 2 пластинки, находящиеся на расстоянии $y = d$ друг от друга. При этом верхняя движется со скоростью U , а нижняя покоится. Между пластинками создан продольный градиент давления dp/dx .

Найдем поле скорости из уравнения Навье — Стокса:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \nu \frac{d^2 u}{dy^2}. \quad (12.25)$$

С учетом граничных условий прилипания $u|_{y=0} = 0$, $u|_{y=d} = U$ из (12.25) получим

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - yd) + \frac{Uy}{d}. \quad (12.26)$$

Нужно заметить, что для цилиндрической трубки при заданном градиенте давления также получается параболический профиль.

Полученные выше решения послужили основой для так называемой *теории смазки*. Известно, что два твердых тела могут легко скользить друг по другу, если между ними имеется тонкий слой вязкой жидкости. Эта жидкость может выдерживать большие нагрузки, потому что действие вязких сил порождает в ней большое давление, а сила трения значительно меньше давления. Рассмотрим простейшую модель, помогающую понять теорию смазки.

Предположим, что верхняя пластинка имеет малый наклон, т. е. d зависит от x . Найдем dp/dx из условия сохранения потока массы между пластинками:

$$Q = \int_0^d u dy = -\frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} d^3 + \frac{Ud}{2}, \quad (12.27)$$

откуда

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6Ud - 12Q}{d^3} \mu. \quad (12.28)$$

Если известно распределение $d(x)$, то можно найти распределение давления между пластинками. Пусть $d = d_1 - \alpha x$, тогда из (12.28) получим

$$\begin{aligned} p &= \int_0^x \mu \left(\frac{6U(d_1 - \alpha x)}{(d_1 - \alpha x)^3} - \frac{12Q}{(d_1 - \alpha x)^3} \right) dx = \\ &= p_0 + \frac{6\mu}{\alpha} \left(U \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d_1} \right) - Q \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d_1^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (12.29)$$

Если при $x = l$ $p = p_0$ и $d = d_2$ (погруженное тело имеет конечный размер), то можно найти неизвестный параметр Q :

$$U \frac{d_1 - d_2}{d_1 d_2} = Q \frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1^2 d_2^2}, \quad (12.30)$$

$$Q = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} U. \quad (12.31)$$

В этом случае распределение давления (12.29) примет вид

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{6\mu}{\alpha} U \left(\frac{d_1 - d}{d_1 d} - \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \frac{d_1^2 - d^2}{d_1^2 d^2} \right) = \\ &= p_0 + \frac{6\mu U (d_1 - d)(d - d_2)}{\alpha d^2 (d_1 + d_2)}. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Отсюда ясно, что внутри канала давление выше, чем по краям, т. е. слой смазки создает внутри себя высокое давление, которое поддерживает нормальное напряжение, а следовательно, и нормальную силу, действующую на верхнюю пластинку. Нормальная сила, действующая на пластинку, определится соотношением

$$F_n = \int_0^l (p - p_0) dx = \frac{6\mu U}{\alpha^2} \left(\ln \frac{d_1}{d_2} - 2 \left(\frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2} \right) \right). \quad (12.33)$$

Касательная сила, действующая на тело (верхнюю пластинку), при этом равна

$$\begin{aligned} F_\tau &= - \int_0^l \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=d} dx = - \int_0^l \left(\frac{dp}{dx} \left(y - \frac{d}{2} \right) + \frac{2\mu U}{d} \right) \Big|_{y=d} dx = \\ &= \frac{\mu U}{\alpha} \left[6 \left(\frac{d_2 - d_1}{d_1 + d_2} \right) + 5 \ln \frac{d_1}{d_2} \right]. \end{aligned} \quad (12.34)$$

Таким образом, отношение тангенциальной силы к нормальной будет равно

$$\frac{F_\tau}{F_n} = \alpha f \left(\frac{d_1}{d_2} \right), \quad (12.35)$$

т. е. тангенциальная сила много меньше нормальной, так как $\alpha = \frac{d_1 - d_2}{l} \ll 1$ в отличие от коэффициента сухого трения, для которого это отношение порядка единицы.

12.4. ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА

12.4.1. Общие понятия

Задачи об обтекании твердых тел, наиболее важные с точки зрения практических приложений, не имеют точных аналитических решений. Поэтому рассматривают различные приближенные решения, а также проводят экспериментальное изучение различных физических процессов в жидкости путем их масштабного моделирования, т. е. воспроизведение течений в меньших масштабах, но той же геометрии. В этих случаях важно установить принцип подобия течений разных масштабов.

Пусть масштаб поля скорости U , его характерный пространственный масштаб L , а характерный временной масштаб $T = L/U$. Из уравнения Навье — Стокса тогда следует, что масштаб по давлению $P = \rho U^2 L$. Введем безразмерные переменные скорости, координаты, времени и давления:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}'}{L}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{v}'}{U}, \quad t = \frac{t'}{T}, \quad p = \frac{p'}{\rho U^2 L}. \quad (12.36)$$

В этих переменных уравнение Навье — Стокса примет вид

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \nabla') \vec{v}' = \text{Re}^{-1} \nabla'^2 \vec{v}'. \quad (12.37)$$

Здесь $\text{Re} = LU/\nu$ — так называемое *число Рейнольдса*. В безразмерных переменных уравнение несжимаемости примет вид

$$\text{div} \vec{v}' = 0. \quad (12.38)$$

Из приведенных выше рассуждений ясно, что уравнения гидродинамики зависят от единственного параметра — числа Рейнольдса. Это означает, что если взять 2 течения, имеющие разные масштабы скорости и длины, но одинаковую конфигурацию и одинаковые числа Re , то эти течения будут подобны. Это создает возможности для масштабного моделирования. При моделировании возникает проблема, связанная с желанием уменьшить размер модели. В этом случае, чтобы получить Re таким же, как для большой модели, надо брать очень большие скорости течений. И тогда начинает играть роль сжимаемость (может нарушаться моделирование по другому числу — числу Маха). Однако в последнее время созданы специальные материалы (полимерные добавки), которые позволяют снижать коэффициент вязкости и легко проводить моделирование по числу Re для не слишком малых моделей. Следует, однако, иметь в виду,

что одним числом Рейнольдса при моделировании можно обойтись только в случае, когда течение полностью определяется указанными выше параметрами: характерными скоростью, размером, вязкостью и плотностью. Если же в задаче появляется еще один независимый параметр, например время, то в задаче возникает безразмерный параметр — число Струхала $S = UT / L$. Кроме того, при учете стратификации возникает еще один независимый параметр — число Фруда $Fr = U^2/gL$. В последующем изложении ограничимся задачами, в которых принцип подобия устанавливается только по числу Рейнольдса, которое характеризует отношение инерционных (нелинейных) членов в уравнении Навье — Стокса к вязким:

$$\frac{(\vec{u}, \dots)}{\nu \Delta \vec{u}} \sim \frac{UL}{\nu} = Re.$$

Поэтому часто говорят, что число Re характеризует отношение нелинейности к диссипации.

12.4.2. Течение при малых числах Рейнольдса

Рассмотрим вначале случай малых чисел Рейнольдса, т. е. малых скоростей обтекания, или размеров тела, или большой вязкости, когда нелинейными слагаемыми в уравнении Навье — Стокса можно пренебречь.

Рассмотрим обтекание сферы радиуса a потоком, набегающим из бесконечности со скоростью U . Будем искать решение задачи при условии (\vec{u}, \dots) . Как сказано выше, такое условие может выполняться при малых Re . Но это только необходимое условие. Точное условие применимости полученного решения можно сформулировать, только найдя это решение и проведя после этого соответствующие оценки.

Обсудим, как решать такую задачу. Математическая постановка задачи включает в себя следующие уравнения:

– уравнение Навье — Стокса

$$\mu \Delta \vec{u} = \rho \vec{f}, \quad (12.39)$$

– условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (12.40)$$

– условие непротекания

$$u_r|_{r=a} = 0; \quad (12.41)$$

– условия прилипания

$$\begin{cases} u_\theta|_{r=a} = 0, \\ u_\varphi|_{r=a} = 0; \end{cases} \quad (12.42)$$

– условие равенства скорости на бесконечности скорости набегающего потока

$$\vec{v}|_{r \rightarrow \infty} = \vec{v}^{\infty} \quad (12.43)$$

Задача состоит в том, чтобы найти силу, действующую на сферу, обтекаемую потоком несжимаемой вязкой жидкости, т. е.:

$$\vec{F} = \oint \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \quad (12.44)$$

где \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности, $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$.

Из (12.44) ясно, что для вычисления силы надо найти поле скорости и давления. Здесь будет изложен лишь основной ход этого вывода, а далее вид решения будет получен из соображения размерностей.

Взяв div от обеих частей 1-го уравнения (12.39), и учитывая, что $\text{div} \vec{v} = 0$, нетрудно получить, что давление (а не потенциал, как в идеальной жидкости) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta p = 0$, т. е. давление — гармоническая функция. Очевидно, что возмущение давления должно убывать при удалении от сферы, тогда решение уравнения Лапласа представимо в виде разложения по мультиполям. Из симметрии задачи и соответствующих условий на бесконечности ясно, что нужно взять решение в виде диполя, т. е.

$$p = \frac{A \cos \theta}{r^2}, \quad (12.45)$$

где A — неизвестная функция, которую надо найти из граничных условий на поверхности сферы для скорости. Поле скорости найдем из первого уравнения системы (12.39)—(12.43):

$$\Delta \vec{v} = \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} p \quad (12.46)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} \vec{v}|_{r=a} = 0, \\ \vec{v}|_{r \rightarrow \infty} = \vec{v}^{\infty}. \end{cases} \quad (12.47)$$

Известно, что любой вектор может быть представлен в виде потенциальной и соленоидальной компонент, так что поле скорости может быть записано в виде

$$\vec{v} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{A}, \quad (12.48)$$

где φ — скалярный, а \vec{A} — векторный потенциалы. При этом в силу условия несжимаемости $\text{div}\vec{v} = 0$ потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta\varphi = 0$. При этом

$$\Delta\vec{A} = -\vec{v} + \text{grad}\text{div}\vec{A} - \text{rot}\text{rot}\vec{A}.$$

Таким образом, вихревой потенциал \vec{A} удовлетворяет уравнению

$$\text{rot}\Delta\vec{A} = -\vec{v}. \quad (12.49)$$

Решение уравнения Лапласа (12.49), удовлетворяющее условиям симметрии задачи, представляет собой поле диполя плюс невозмущенное течение $U_0\vec{e}_x$:

$$\vec{v}_{\text{пот}} = \left(\frac{B}{r^2} \right) \vec{e}_x + U_0\vec{e}_x, \quad (12.50)$$

т. е. по порядку величины потенциальная часть скорости равна $(0) \frac{B}{r^3 + U_0 r}$. Выражение для вихревой части скорости находить не

будем, укажем вид выражения. Поскольку $p \sim A/r^2$, то $\vec{v}_{\text{вихр}} \sim \frac{A}{\mu r}$.

Константы A и B находятся из граничных условий прилипания, причем $B \sim U_0 a^3$, $\frac{A}{\mu} \sim U_0 a$, т. е. поле скорости представимо схематично:

$$\vec{v} = U_0\vec{e}_x + \left(\frac{r^3}{r^3} \right) + 0 \left(\frac{U_0 a}{r} \right). \quad (12.51)$$

Если известно поле скорости, можно найти давление, вязкие напряжения и силу, действующую на сферу. Найдем все эти величины из соображений размерности:

$$p = \frac{A}{r^2} \cos\Theta \sim \frac{U_0 a \mu}{r^2}, \quad (12.52)$$

$$\varepsilon_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \sim \frac{U_0 a \mu}{r^2} + \mu \left(0 \left(\frac{U_0 a^3}{r^4} \right) + \left(0 \left(\frac{U_0 a}{r^2} \right) \right) \right). \quad (12.53)$$

В соответствии с (12.53) и с учетом соображений симметрии сила, действующая на поверхности сферы, имеет вид

$$F_x \sim \frac{U_0 a \mu}{a^2} a^2 \sim \mu U_0 a. \quad (12.54)$$

Если бы мы произвели аккуратно все вычисления, то могли бы найти коэффициент пропорциональности. Так, для сферы выражение для силы примет вид

$$F_x = 6\pi\mu U_0 a. \quad (12.55)$$

Эта сила называется *силой Стокса*. Напомним, что это выражение для силы, действующей со стороны потока на сферу, было получено в предположении, что инерционные слагаемые малы по сравнению с вязкими, т. е. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}) \ll \nu \Delta \vec{u}$. Теперь, когда вид решения нам известен, сделаем соответствующие оценки. Достаточно далеко от сферы имеем

$$\vec{u} \sim v \vec{e}_x + \left(-v \frac{a}{r} \right). \quad (12.56)$$

Тогда $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}) \sim \left(-v \frac{U_0 a}{r^2} \right)$, а $\nu \Delta \vec{u} \sim \left(-v \frac{U_0 a}{r^3} \right)$. В этом случае отношение нелинейных и вязких слагаемых равно

$$\frac{|\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}|}{|\nu \Delta \vec{u}|} \sim \frac{U_0 a / r^2}{U_0 a / r^3} \sim \frac{U_0 r}{\nu}. \quad (12.57)$$

Таким образом, условие применимости полученного решения сводится к неравенству

$$\frac{U_0 r}{\nu} \ll 1. \quad (12.58)$$

Изначально мы предполагали, что $\text{Re} = \frac{U_0 a}{\nu} \ll 1$, тогда условие

$$\frac{U_0 r}{\nu} \ll 1 \text{ можно переписать как } \frac{U_0 a}{\nu} \frac{r}{a} \ll 1, \text{ т. е.}$$

$$\frac{r}{a} \ll \frac{1}{\text{Re}}. \quad (12.59)$$

Полученное решение и соответствующее выражение для силы Стокса справедливо на не слишком больших расстояниях от сферы, при больших r условие применимости (12.59) нарушается. Чтобы найти силу, действующую на сферу, надо знать поле скорости на ее поверхности, а вблизи поверхности условие $\frac{U_0 r}{\nu} \ll 1$ выполняется. Следовательно, сила Стокса вычислена верно. Оценки показывают, что приближение Стокса справедливо чаще всего для очень малых тел (малые дождевые капли, пыль в атмосфере, пузырьки газа в жидкости и т. д.).

ЗАДАЧИ к разделу 12

Задача 1

Бесконечный слой вязкой жидкости толщиной h ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу неподвижной плоскостью, наклоненной под углом α . Под действием силы тяжести в слое происходит стационарное течение. Найти распределение скорости в слое. Задача двумерная.

Решение. Для решения задачи введем ось x , направленную вдоль наклонной поверхности в сторону течения жидкости, ось y , направленную перпендикулярно наклонной поверхности вверх. Используем уравнение Навье — Стокса и граничные условия: условие прилипания на плоскости и граничное условие на поверхности жидкости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -g \cos \alpha \\ u|_{y=0} = 0 \\ \sigma_{11}|_{y=H} = p_a \\ \sigma_{12}|_{y=H} = 0 \end{array} \right.$$

Интегрируя второе соотношение, получим для давления: $p = p_a - \rho g y \cos \alpha$. В силу пространственной однородности по оси x

можно считать, что $(\partial p / \partial x) = 0$, тогда из первого уравнения системы получим $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g \sin \alpha$. Интегрируя данное соотношение, получим

$$u = -\frac{g \sin \alpha}{\nu} \left(\frac{y^2}{2} \right) + Ay + B.$$

Из граничного условия прилипания при $y = 0$ получим $B = 0$, а из граничных условий для напряжений на свободной поверхности:

$$A = \frac{g \sin \alpha}{\nu} H.$$

Тогда можно записать выражение для скорости:

$$u = -\frac{g \sin \alpha}{2\nu} y(2H - y).$$

13. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Пусть $Re \gg 1$. Тогда, если течение имеет достаточно большой масштаб, можно пренебрегать вязкостью, т. е. использовать приближение идеальной жидкости. Очевидно, что это приближение нарушается вблизи твердых границ, поскольку в идеальной жидкости действует только граничное условие непротекания, а тангенциальная составляющая скорости может быть любой, и она отлична от тангенциальной составляющей скорости движения тела. В вязкой жидкости выполняется граничное условие прилипания. Как согласовать выполнение граничных условий и пренебрежение вязкостью? Для этого Прандтлем была выдвинута гипотеза пограничного слоя. Она состоит в следующем: для достаточно широкого диапазона условий вязкость необходимо учитывать лишь в узких слоях, прилегающих к твердым границам (и в некоторых других слоях). При $Re \rightarrow \infty$ толщина этих слоев стремится к нулю. Эти слои называются *пограничными слоями*. Внутри пограничного слоя происходит переход от условий прилипания на поверхности к невозмущенному течению.

Найти такое решение — это большая удача. Практически может оказаться, что оно реализуется не при любых условиях. Применимость данного решения ограничена. Построим решение в виде пограничного слоя и исследуем условия его применимости.

13.1. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ТОНКОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКЕ

Рассмотрим тонкую пластинку в потоке. Пусть вначале пластинки не было, тогда

$$\vec{v} = v_0 \vec{e}_x + v_0 \vec{e}_y \quad (13.1)$$

Причем предположим, что $v \ll U_p$, где U — масштаб скорости u . Будем считать, что масштаб изменения потока L таков, что $Re = (UL/\nu) \gg 1$. Поместим в этот поток пластинку (это сразу дает привязку к системе отсчета). В соответствии с гипотезой Прандтля далеко от пластинки влиянием вязкости можно пренебрегать, т. е.

поле скорости удовлетворяет уравнению Эйлера. Будем считать, что поле скорости далеко от пластинки потенциально. Тогда по теореме Бернулли во всем потоке

$$\frac{U^2(x)}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{p(x)}{\rho} = \text{const.} \quad (13.2)$$

И при $u \ll U$ получим

$$\frac{U^2(x)}{2} = \frac{P_0}{\rho} - \frac{p(x)}{\rho}. \quad (13.3)$$

Если задан градиент давления ∇p вдоль пластинки, то известно $U(x)$. Если бы вязкости не было, то бесконечно тонкая пластинка не вносила бы возмущений в поток. Но на ней выполняется условие прилипания.

Найдем течение, которое получается в результате. Вблизи пластинки необходимо учитывать вязкость. Течение описывается системой уравнений Навье — Стокса и условием прилипания:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u|_{y=0} = 0 \\ v|_{y=0} = 0 \\ u|_{y \rightarrow \pm \infty} = U(x) \end{cases} \quad (13.4)$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} (u, v) &= (u', v') U_0, \\ (x, y) &= (x', y') L, \\ p &= \rho p' U^2. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Система уравнений в таких переменных примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \\ u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial p'}{\partial y'} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \\ u'|_{y'=0} = 0 \\ v'|_{y'=0} = 0 \\ u'|_{y' \rightarrow \infty} = \frac{U(x)}{U_0} \end{array} \right. \quad (13.6)$$

$\text{Re} = \frac{U_0 \nu}{L}$ — число Рейнольдса течения на пластинке. Введем функ-

цию тока ψ' , так что $u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'}$, $v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'}$. Уравнения в терминах

функции тока имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial p'}{\partial x'} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x'^2 \partial y'} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y'^3} \right), \\ -\frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial p'}{\partial y'} &= -\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x'^3} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial x' \partial y'^2} \right). \end{aligned} \quad (13.7)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \Big|_{y'=0} &= 0, \\ \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \Big|_{y'=0} &= 0, \\ \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \Big|_{y' \rightarrow \infty} &= \frac{U(x)}{U_0}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Поскольку рассматриваем движение в пограничном слое, где масштаб по y' (δ') много меньше масштаба по x' (1), т. е. $\delta' \ll 1$,

нужно ввести другую нормировку переменной y : переменную $\eta = y'/\delta'$. Определим δ' из условия, при котором слагаемые, входящие в уравнение Навье — Стокса и описывающие движение с масштабом $\delta' \ll 1$, должны быть одного порядка. Сделаем оценки: $u' \sim 1$ (так как $v' \big|_{y=0} = 0$ и $u' \big|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow U/U_0 \sim 1$):

$$\psi' = \int u' dy'. \quad (13.9)$$

Поскольку масштаб u' по y порядка δ' (такое ищем решение), то $\psi' \sim \delta'$. Масштабы по $x' \sim 1$. Итак, первое уравнение дает

$$\frac{\delta' \delta'}{\delta' \delta'} \sim \frac{1}{\text{Re}} \frac{\delta'}{\delta'^3}, \quad (13.10)$$

отсюда ясно, что $\delta' \sim \text{Re}^{-1/2} \ll 1$. Другими словами, решение типа погранслоя можно искать. Введем новые переменные:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{y'}{\delta'} = y' \sqrt{\text{Re}}, \\ \varphi &= \frac{\psi'}{\delta'} = \psi' \sqrt{\text{Re}}. \end{aligned} \quad (13.11)$$

Тогда в переменных η , φ система для функции тока примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial p'}{\partial x'} &= \\ = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\text{Re}^{3/2}}{\text{Re}^{1/2}} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta \partial x'^2} \right), \end{aligned} \quad (13.12)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\text{Re}^{1/2}}{\text{Re}} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial \eta} + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial x'} + \sqrt{\text{Re}} \frac{\partial p'}{\partial \eta} &= \\ = -\frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x'^3} + \sqrt{\text{Re}} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x' \partial \eta^2} \right], \end{aligned} \quad (13.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial \eta} \right) &= \\ = -\frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x'^3} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x' \partial \eta^2} \right]. \end{aligned} \quad (13.14)$$

Отсюда ясно, что $\frac{\partial p'}{\partial \eta}$ (вертикальный градиент давления) имеет порядок $Re^{-1} \ll 1$, т. е. можно предполагать, что $p = p(x)$, причем $p(x)$ определяется полем скорости далеко от поверхности, где справедлива формула Бернулли, т. е. $\frac{\partial p'}{\partial x'} = -\frac{UU_{x'}}{U_0^2}$. Пренебрегая в первом уравнении слагаемыми $\sim Re^{-1}$, учитывая граничные условия, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial p'}{\partial x'} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right|_{\eta=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right|_{\eta \rightarrow \infty} = \frac{U(x)}{U_0} \end{cases} \quad (13.15)$$

Это так называемые уравнения пограничного слоя. Найдем решение этих уравнений при условии, что $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, тогда $U(x)$ постоянно:

$U(x) = U_0$, а $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right|_{\eta \rightarrow \infty} = 1$. Найдем в этом случае сначала качественный вид решения. Горизонтальная скорость $u(\eta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$. При $\eta \rightarrow \infty$

$u(\eta) \rightarrow 1$; при $\eta = 0$ $u(\eta) = 0$. Характерный вид профиля скорости показан на рис. 16.

Из общих соображений ясно, что толщина погранслоя δ может, вообще говоря, зависеть от x' . Найдем эту зависимость сначала из качественных физических соображений. Как мы видели, граница является источником завихренности. Она от границы диффундирует по причине вязкости. За время t завихренность диффундирует на расстояние \sqrt{vt} .

В то же время она сносится потоком (снос начинается от края пластинки). За время t частица сносится на расстояние $X \sim U_0 t$, откуда $t \sim X / U_0$, т. е. расстояние, на которое проникает завихренность, можно оценить как

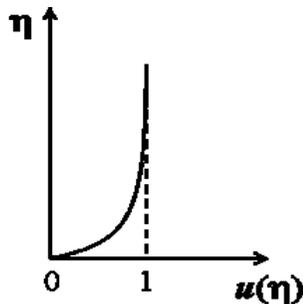


Рис. 16. Профиль скорости

$\delta = \sqrt{\frac{\nu X}{U_0}}$. Если перейти к безразмерным координатам $x' = x/L$; $y' = y/L$, тогда

$$\eta|_{y=\delta} = y' \sqrt{\text{Re}} = \frac{y}{L} \sqrt{\frac{U_0 L}{\nu}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{U_0 L \nu X}{U_0}} = \sqrt{x'}. \quad (13.16)$$

Итак, согласно (13.16) масштаб в безразмерных переменных $\eta = \sqrt{x'}$. Будем искать так называемое автомодельное решение уравнений пограничного слоя — это такие решения, форма которых не меняется от сечения к сечению, меняется лишь масштаб, т. е.

$$\varphi = x'^m f\left(\frac{\eta}{\sqrt{x'}}\right). \quad (13.17)$$

Такое решение, в принципе, может и не существовать, но можно попробовать его поискать.

Из граничных условий $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 1$ имеем $x'^{m-1/2} \Big|_{\eta \rightarrow \infty}$. От-

сюда $m = 1/2$. Тогда $\varphi = (x')^{1/2} f\left(\frac{\eta}{\sqrt{x'}}\right) = x'^{1/2} f(h)$, где $h = \frac{\eta}{\sqrt{x'}}$. Для

производных получим следующие выражения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \dots, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = (x')^{-1/2} \dots, \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} = (x')^{-1} \dots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{1}{2(x')^{1/2}} (f - h f'),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial \eta} = \frac{1}{2x'} \left[\dots \right].$$

Следуя (13.15), систему уравнений для f приведем к виду

$$\begin{cases} \dots & \dots \\ f|_{h=0} = 0 \end{cases} \quad (13.18)$$

Эта система уравнений может быть решена численно. Профиль скорости при этом будет иметь следующий вид:

$$U = U_0 f \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{x}{U_0} \nu}} \right). \quad (13.19)$$

Таким образом, далеко от пластинки $U = U_0$. Форма кривой $U(y)$ сохраняется, толщина переходной области (пограничного слоя) растет пропорционально \sqrt{x} , как показано на рис. 17.

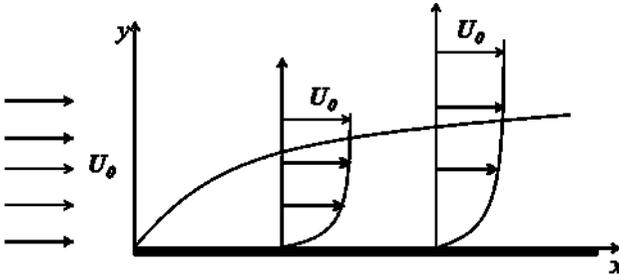


Рис. 17. Зависимость скорости от вертикальной координаты в пограничном слое

13.2. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ТЕЛАХ, ОБТЕКАЕМЫХ НЕОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ

Если $p(x)$ падает, то $U(x)$ растет. Это значит, что снос частиц происходит быстрее, чем в однородном потоке, а диффузия завихренности от твердой поверхности происходит с прежней скоростью. Это значит, что толщина пограничного слоя растет медленнее, чем в случае $U = \text{const}$ (погранслои тоньше).

Если $p(x)$ растет, то $U(x)$ падает. В результате снос частиц замедляется, а диффузия происходит с прежней скоростью. Это значит, что толщина пограничного слоя растет быстрее, чем при $U = \text{const}$.

В этих случаях, казалось бы, можно найти решение уравнений пограничного слоя, где U зависит от x . При ускоряющемся течении это действительно можно сделать, но при замедляющемся течении, когда падение $U(x)$ происходит достаточно быстро, решение в виде погранслоя перестает существовать (т. е. в решении уравнений погранслоя возникают особенности). Иными словами, перестает существовать решение, соответствующее невязкому потенциальному течению далеко от твердой поверхности с узким переходным слоем

вблизи поверхности. Сильно изменяется течение и вне области, прилегающей к поверхности твердого тела. Линии тока, прилегающие к границе, отклоняются от поверхности. Это явление называется явлением *отрыва пограничного слоя*. К настоящему времени полного теоретического описания этого явления не существует, потому что имеются сложности при нахождении точки отрыва погранслоя.

Рассмотрим пример обтекания сферы при $Re \gg 1$. Казалось бы, при $Re \gg 1$ далеко от сферы течение должно являться потенциальным, а вблизи сферы должен образовываться погранслоем. Однако, как мы видели ранее, до точки 0 давление на поверхности сферы падает, а скорость растет, т. е. решение вида погранслоя существует. После точки 0 давление на поверхности сферы растет, а скорость падает. Причем падение скорости происходит так быстро, что возникает явление отрыва погранслоя. Вопрос: в какой точке происходит отрыв? Это задача сложная и не имеет решения до сих пор.

13.3. ЛАМИНАРНЫЙ СЛЕД

Рассмотрим обтекание тела цилиндрической формы однородным потоком. На границе тела с потоком происходит генерация завихренности (образуется погранслоем, он может отрываться и т. д.). Далее эта завихренность сносится потоком и диффундирует за счет вязкости. Какое течение будет далеко за телом? Выберем координату x вдоль оси движения жидкости, а координату y — поперек. Течение формируется путем переноса завихренности и ее диффузии. За время t потоком завихренность переносится на расстояние $L_k = Ut$, а из-за диффузии — на расстояние $L_g = \sqrt{\nu t}$, L_k — масштаб по x , а L_g — по

$$y; L_g = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}; L_k = x; \frac{L_g}{L_k} = \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}$$

при достаточно большом x $L_g \ll L_k$,

т. е. у течения малый масштаб по y . Такое течение называется *ламинарным следом*. Для его описания можно применять уравнение погранслоя, поскольку $L_y \ll L_x$. Запишем их в размерных переменных:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \rightarrow p = p(x) \end{cases} \quad (13.20)$$

Здесь p определяется свойствами течения при больших y . Поскольку рассматривается обтекание тела однородным потоком, то $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

(из уравнения Бернулли). Из-за диффузии течение «расплывается», в результате возмущения скорости малы по сравнению со скоростью основного потока, т. е.

$$u = U + u'(x, y), \quad v = v'(x, y), \quad U \gg u', v'. \quad (13.21)$$

Тогда уравнение погранслоя можно линеаризовать, и в результате получим уравнение диффузии в виде

$$U \frac{\partial u'}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}. \quad (13.22)$$

с граничным условием $u'|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0$. Решение уравнения диффузии, убывающее при $y \rightarrow \pm\infty$, имеет вид

$$u' = Q \left(\frac{U}{2\nu x} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{y^2 U}{2\nu x} \right\}. \quad (13.23)$$

Область возмущенного течения расширяется пропорционально $x^{1/2}$, т. е. ширина ламинарного следа растет пропорционально $x^{1/2}$. Обсудим смысл постоянной Q . Построим качественный график профиля скорости $u(x, y)$ (рис. 18).

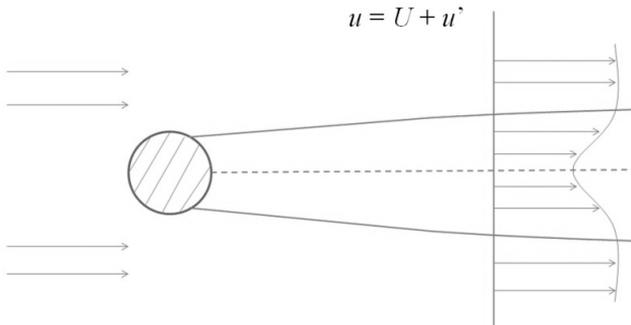


Рис. 18. Качественный вид профиля скорости $u(x, y)$ в ламинарном следе при обтекании тела цилиндрической формы однородным потоком

Ясно, что скорость внутри следа должна быть меньше U , так как тело экранирует поток. Если перейти в систему отсчета, в которой тело движется, то профиль скорости в следе будет таким, как на рис. 19.

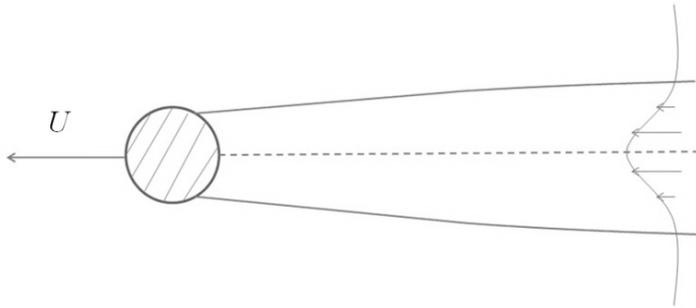


Рис. 19. Качественный вид профиля скорости $u(x, y)$ в ламинарном следе в системе отсчета, в которой тело движется

Тело увлекает за собой жидкость, т. е. есть поток массы к телу внутри следа. Поскольку есть поток массы к телу, то должен быть и поток массы от тела, чтобы полный поток был равен нулю. Это значит, что на большом расстоянии от тела картина течения будет представлять собой суперпозицию источника массы и течения в следе. Вычислим поток массы в следе:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho a' dy = \rho Q, \quad (13.24)$$

т. е. константа Q имеет смысл объемного потока в следе жидкости к телу.

14. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОСТИ

14.1. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА

Рассмотрим примеры течений с образованием так называемого тангенциального разрыва. Такой разрыв образуется, в частности, при отрыве пограничного слоя (например, в потоке, стекающем с обрыва или при отрыве пограничного слоя на цилиндре при его обтекании). Поскольку жидкость вязкая, то происходит размывание переходной области. Определим масштабы, которые имеются в данной задаче, а именно направление, вдоль которого осуществляется обтекание, x , скорость потока U и вязкость жидкости ν . Из них можно составить

единственную комбинацию длины: $\delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$. Сделаем оценку для δ

при $U = 1$ м/с, $x = 0,1$ м, $\nu = 0,01$ см²/с: $\delta = 0,03$ см. Пусть на такое течение наложено возмущение, имеющее масштаб много больше, чем δ . В таких условиях невозмущенное течение моделируют тангенциальным разрывом и пренебрегают вязкостью.

Предложенная идеализация позволяет качественно понять поведение течения, она применима, потому что в тех возмущениях, где узкая переходная область смещается как целое, слабо меняется давление. Рассмотрим невозмущенное течение, имеющее следующий вид:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= U \vec{e}_x, \\ \vec{v}_{z0} &= 0, \quad x < 0. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Возмущение при этом определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= U \vec{e}_x + \delta \vec{v}_1, \\ \vec{v}_z &= \delta \vec{v}_2, \quad \dots \end{aligned} \quad (14.2)$$

Поскольку мы пренебрегаем вязкостью, то течение жидкости описывается уравнением Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial t} + (\vec{v}_{1,2} \cdot \nabla) u_{1,2} - \rho = 0 \\ \operatorname{div} \vec{v}_{1,2} = 0 \end{cases} \quad (14.3)$$

Здесь $p_{1,2}$ — модифицированные значения давления.

Сформулируем далее граничные условия.

1. Условие непротекания:

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_{1,2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{y=\xi} = v_{1,2}, \quad (14.4)$$

здесь $u_{1,2}$ и $v_{1,2}$ — горизонтальные и вертикальные проекции скорости, ξ — форма границы тангенциального разрыва.

2. Динамическое граничное условие:

$$p_1 = p_2 \Big|_{y=\xi}. \quad (14.5)$$

Рассмотрим малые возмущения, когда $|\vec{v}'| \ll 1$, а $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \ll 1$. Тогда

для возмущений будут справедливы линеаризованные уравнения. Рассмотрим двумерные возмущения.

$$\text{В области 1:} \quad \begin{cases} \frac{\partial u'_1}{\partial t} + U \frac{\partial u'_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v'_1}{\partial t} + U \frac{\partial v'_1}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_1}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u'_1}{\partial x} + \frac{\partial v'_1}{\partial y} = 0 \\ \left. \frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{y=0} = v'_1 \Big|_{y=0} \end{cases} \quad (14.6)$$

Возмущения убывают при $y \rightarrow \infty$.

$$\text{В области 2:} \quad \begin{cases} \frac{\partial u'_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v'_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_2}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u'_2}{\partial x} + \frac{\partial v'_2}{\partial y} = 0 \\ \left. \frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{y=0} = v'_2 \Big|_{y=0} \end{cases} \quad (14.7)$$

Возмущения убывают при $y \rightarrow \infty$.

На границе также выполняется условие:

$$p_1|_{y=0} = p_2|_{y=0}. \quad (14.8)$$

Введем возмущения функции тока $\Psi'_{1,2}$. Тогда они будут удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\Delta \Psi'_{1,2} = 0. \quad (14.9)$$

При этом из уравнений (14.6)—(14.7) следует, что

$$\frac{\partial p'_1}{\partial x} = -\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi'_1}{\partial t \partial y} + U \frac{\partial^2 \Psi'_1}{\partial x \partial y} \right), \quad \frac{\partial p'_2}{\partial x} = -\rho \left(\frac{\partial^2 \Psi'_2}{\partial t \partial y} \right). \quad (14.10)$$

Кинематические граничные условия на границе раздела в терминах функции тока будут иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x} = - \frac{\partial \Psi'_1}{\partial x} \Big|_{y=0}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = - \frac{\partial \Psi'_2}{\partial x} \Big|_{y=0}. \quad (14.11)$$

Решение уравнений (14.10) ищем в виде $\Psi'_{1,2} = \hat{\Psi}_{1,2}(y) e^{i(kx - \omega t)}$, тогда для комплексных амплитуд функции тока получим следующее выражение:

$$\frac{d^2 \hat{\Psi}_{1,2}}{dy^2} - k^2 \hat{\Psi}_{1,2} = 0. \quad (14.12)$$

Будем искать решение уравнения (14.12) в области 1, убывающее при $y \rightarrow \infty$:

$$\hat{\Psi}'_1 = A e^{-ky}. \quad (14.13)$$

Аналогично для области 2 будем искать решение, убывающее при $y \rightarrow -\infty$:

$$\hat{\Psi}'_2 = B e^{ky}. \quad (14.14)$$

С учетом выражений для $\hat{\Psi}'_1$ и $\hat{\Psi}'_2$ найдем, что

$$p'_1 = -\rho A (\omega - kU) e^{ky}, \quad p'_2 = \rho B \omega e^{ky}, \quad \omega \xi = Bk. \quad (14.15)$$

С учетом динамического граничного условия получим

$$\begin{cases} -A(\omega - kU) = B\omega \\ \frac{Ak}{\omega - kU} = \frac{B}{\omega} \end{cases} \quad (14.16)$$

Отсюда можно получить дисперсионное соотношение для волновых возмущений на тангенциальном разрыве:

$$(\omega - kU)^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \omega = kU(1 \pm i). \quad (14.17)$$

Одно из решений, очевидно, является экспоненциально растущим, т. е. любое возмущение на тангенциальном разрыве растет. Это означает, что такое течение неустойчиво. Неустойчивость в данном случае носит название неустойчивости Кельвина — Гельмгольца. Развитие этой неустойчивости приводит к возникновению сложного трехмерного хаотического течения, которое называется *турбулентным*.

14.2. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ С ПЛАВНЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ

Примером течения с плавным профилем скорости является течение в пограничном слое. Рассмотрим погранслоем на плоской пластинке. Профиль течения в нем:

$$U = U \left(\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} y \right). \quad (14.18)$$

Далеко от края пластинки зависимость толщины пограничного слоя от координаты x очень медленная и поток можно считать плоскопараллельным. Таким образом, мы пришли к задаче об устойчивости плоскопараллельного потока с плавным полем скорости. При решении таких задач на фоне основного течения (плоскопараллельного) рассматривают малое возмущение, а далее систему уравнений гидродинамики линеаризуют относительно этого малого возмущения. Далее необходимо найти дисперсионное уравнение для этого возмущения и определить, будут ли среди собственных частот комплексные, определяющие растущее во времени возмущение. Аналогичный подход уже был применен в предыдущем пункте.

Проделаем описанную процедуру для возмущений плоскопараллельного потока типа пограничного слоя. Будем рассматривать двумерные возмущения. Как показывает теорема Сквайра, наиболее неустойчивыми являются те возмущения, в которых волновой вектор параллелен потоку. В таком течении можно выделить функцию тока:

$$\Psi_x = -v, \quad \Psi_y = u. \quad (14.19)$$

Уравнения Навье — Стокса примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} \right), \\ -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= -\nu \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (14.20)$$

Если первое уравнение системы (14.20) продифференцировать по y , а второе — по x , и далее вычесть одно из другого, то получится уравнение для завихренности:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right). \quad (14.21)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \Psi_x|_{y=0} &= 0, \quad \Psi_y|_{y=0} = 0, \\ \Psi_y|_{y \rightarrow \infty} &= U_\infty, \quad \chi|_{y \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned} \quad (14.22)$$

В невозмущенном течении:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = U_0(y), \quad \Psi_0 = \int U_0(y) dy, \quad \chi = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{dU_0(y)}{dy}. \quad (14.23)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\chi = \frac{x}{\delta}; \quad \eta = \frac{y}{\delta}; \quad \Phi = \frac{\Psi}{\delta U_\infty}, \quad \Omega = \frac{\chi \delta}{U_\infty}; \quad \tau = \frac{t \delta}{U_\infty}; \quad V(\eta) = \frac{U(\eta)}{U_\infty}, \quad (14.24)$$

где δ — масштаб течения $U(y)$. Уравнения для функции тока и завихренности в безразмерном виде запишутся как

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \right) \\ -\Omega = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \end{cases} \quad (14.25)$$

Здесь $\text{Re} = \frac{U_\infty \nu}{\delta}$ — число Рейнольдса.

Будем искать решение в виде основного течения и его малого возмущения в виде гармонической функции:

$$\Phi = \int \left[V(\eta) + \varepsilon \operatorname{Re} \left(\Phi_1(\eta) e^{i(k\xi - \omega\tau)} \right) \right] d\eta,$$

$$\chi = \frac{dV}{d\eta} + \varepsilon \operatorname{Re} \left(\chi_1(\eta) e^{i(k\xi - \omega\tau)} \right). \quad (14.26)$$

Тогда из этой системы в линейном приближении по ε получим уравнение для $\Phi_1(\eta)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(V(\eta) - \frac{\omega}{k} \right) (\Phi_{1\eta\eta} - k^2 \Phi_1) - V_{\eta\eta} \Phi_1 = \\ = \frac{1}{ik \operatorname{Re}} (\Phi_{1\eta\eta\eta\eta} - 2k^2 \Phi_{1\eta\eta} + k^4 \Phi_1) \\ \Phi_1|_{\eta=0} = 0 \\ \Phi_{1\eta}|_{\eta=0} = 0 \\ \Phi_1|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (14.27)$$

Это уравнение называется уравнением Орра — Зоммерфельда. Оно является основным при исследовании устойчивости плоскопараллельных сдвиговых течений.

Задача об устойчивости решается следующим образом. Находятся собственные числа и собственные функции краевой задачи для уравнения Орра — Зоммерфельда. Решение задачи на собственные значения дает дисперсионное соотношение для возмущений на таком потоке:

$$\omega = \omega(k, \operatorname{Re}). \quad (14.28)$$

Параметром дисперсионного соотношения является число Рейнольдса. При каждом действительном k ω , вообще говоря, комплексно, т. е. дисперсионное соотношение представляет собой две функции:

$$\begin{array}{l} \operatorname{Re} \omega = \omega_1(k, \operatorname{Re}), \\ \operatorname{Im} \omega = \omega_2(k, \operatorname{Re}). \end{array} \quad (14.29)$$

Здесь $\omega_2 > 0$ соответствует растущим возмущениям, $\omega_2 < 0$ — убывающим, $\omega_2(k, \operatorname{Re}) = 0$ — нейтральная кривая.

Разбиение плоскости (k, Re) на области устойчивости показано на рис. 20. При $\operatorname{Re} < R_*$, где R_* представляет собой некое критическое значение числа Рейнольдса, течение устойчиво; при $\operatorname{Re} > R_*$ возмущения с волновыми числами $k_1 < k < k_2$ неустойчивы. Вначале область неустойчивости узкая, затем она расширяется, затем снова сужается. Обсудим, как меняется Re на плоской пластинке с ростом x .

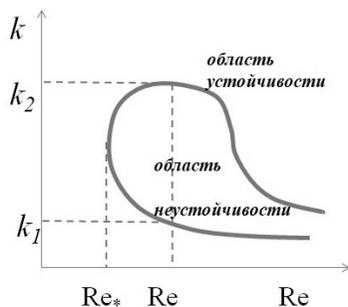


Рис. 20. Разбиение плоскости (k, Re) на области устойчивости

По определению число $Re = \frac{U_\infty v}{\delta} = \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}$, т. е. при удалении от края пластинки Re растет, это означает, что вначале возмущения не нарастают. При движении вниз по потоку на некотором расстоянии возникают нарастающие возмущения. Изначально их спектр узкий, однако далее он быстро расширяется. Возникает сложное хаотическое турбулентное течение. Это явление называется явлением перехода к турбулентности. Рассмотрим, какой вид будет иметь диаграмма устойчивости при $Re \rightarrow \infty$. Как показывает численное решение уравнения Орра — Зоммерфельда, этот вид зависит от характера течения в пограничном слое. Если это пограничный слой на плоской пластинке без градиента давления, то получается диаграмма как на рис. 21, а.

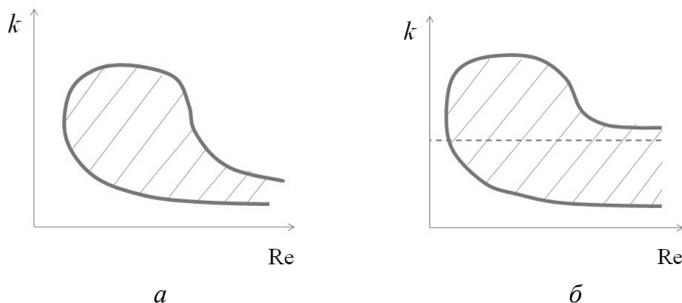


Рис. 21. Виды диаграммы устойчивости для случая (а) пограничного слоя на плоской пластинке без градиента давления и для случая (б), когда профиль скорости имеет точку перегиба

При $Re \rightarrow \infty$ область неустойчивости сужается, т. е. течение устойчиво. Вид диаграммы устойчивости меняется, если профиль ско-

рости имеет точку перегиба. Выясним, когда реализуется такой профиль. Запишем уравнения погранслоя:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u|_{y=0} = 0 \quad v|_{y=0} = 0; \quad u|_{y \rightarrow \infty} = U_{\infty}(x) \end{cases} \quad (14.30)$$

Вблизи поверхности скорости малы, поэтому

$$\frac{1}{\rho v} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (14.31)$$

Если давление растет (т. е. падает U_{∞}), то вблизи поверхности $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$.

При $y \rightarrow \infty$ $u \rightarrow U_{\infty}(x)$, т. е. стремится к константе, не зависящей от y . Это может быть только тогда, когда при большом y $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$, т. е. профиль скорости имеет вид, показанный на рис. 22. В этом случае реализуется диаграмма, показанная на рис. 21, б.

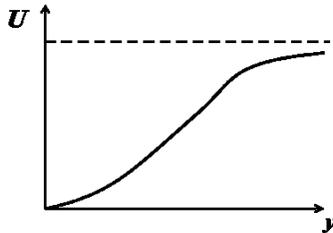


Рис. 22. Профиль скорости, для которого вблизи поверхности выполняется условие $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$, а при $y \rightarrow \infty$ $u \rightarrow U_{\infty}(x)$

14.3. ТЕОРЕМА РЭЛЕЯ

Рассмотрим невязкий предел уравнения Орра — Зоммерфельда:

$$\begin{cases} (V(\eta) - \frac{\omega}{k}) \left(\frac{d^2 \Psi_1}{d\eta^2} - k^2 \Psi_1 \right) - V_{\eta\eta} \Psi_1 = 0 \\ \text{з.у. } \Psi_1|_{y=0} = 0; \quad \Psi_1|_{y \rightarrow \infty} = 0 \end{cases} \quad (14.32)$$

Граничного условия прилипания в этом случае не будет, поскольку рассматривается невязкий предел. Пусть k действительно, а ω комплексно, т. е. $\omega = \omega_1 + i\omega_2$. Разделим обе части уравнения на $(V(\eta) - \frac{\omega}{k})$. При комплексном значении ω это делать всегда можно, тогда получим из (14.32)

$$\frac{d^2\Psi_1}{d\eta^2} - k^2\Psi_1 - \frac{V_{\eta\eta}}{V(\eta) - \frac{\omega}{k}}\Psi_1 = 0. \quad (14.33)$$

Домножим обе части уравнения на Ψ_1^* и проинтегрируем по области течения:

$$\int_0^\infty \Psi_1^* \frac{d^2\Psi_1}{d\eta^2} d\eta = \int_0^\infty \left(k^2 + \frac{V_{\eta\eta}}{V(\eta) - \frac{\omega}{k}} \right) |\Psi_1|^2 d\eta. \quad (14.34)$$

С учетом граничных условий получим

$$\int_0^\infty \left(|\Psi_{1\eta}|^2 + \left(k^2 + \frac{V_{\eta\eta}}{V(\eta) - \frac{\omega}{k}} \right) |\Psi_1|^2 \right) d\eta = 0. \quad (14.35)$$

Выделим отсюда мнимую часть:

$$\frac{\omega_2}{k} \int_0^\infty \frac{V_{\eta\eta} |\Psi_1|^2 d\eta}{\left(V(\eta) - \frac{\omega_1}{k} \right)^2 + \frac{\omega_2^2}{k^2}} = 0. \quad (14.36)$$

Если волновое возмущение нарастает, то $\omega_2 \neq 0$. Для выполнения равенства необходимо, чтобы вторая производная $V_{\eta\eta}$ меняла знак, т. е. чтобы профиль скорости имел точку перегиба. Таким образом, необходимое условие неустойчивости плоскопараллельного потока в невязком пределе — наличие точки перегиба на профиле скорости. Это мы и видим на диаграмме устойчивости потока с точкой перегиба. Обсудим далее знак мнимой части частоты. Из приведенного рассуждения не ясно, какой знак будет иметь мнимая часть частоты ω_2 . Этот знак определяется правилом обхода особенности в уравнении Рэля. Это правило обхода определяется решением уравнения Орра — Зоммерфельда при $\text{Re} \rightarrow \infty$. Оказывается, что $\omega_2 > 0$ и решение является нарастающим.

14.4. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Результатом развития гидродинамической неустойчивости является турбулентное течение. Гидродинамические поля в нем представляют собой очень сложные функции координат и времени, которые принято описывать как случайные поля, хотя они удовлетворяют детерминированным уравнениям (Навье — Стокса и несжимаемости). Такое движение называется развитой турбулентностью и, в частности, возникает в потоке, когда число Рейнольдса Re становится больше критического значения R_* (см. разд. 13.2).

Рассмотрим, что происходит, когда число Re возрастает. Пока $Re < R_*$, течение устойчиво, детерминировано и описывается достаточно просто (например, как течение в пограничном слое). Все возмущения в нем затухают.

Когда Re становится равным R_* или немного его превосходит, возникают нарастающие возмущения. Когда $Re \approx R_*$, т. е., как говорят, течение слабонадкритическое, спектр нарастающих возмущений узкий. Так, в пограничном слое нарастают возмущения с волновым числом порядка δ^{-1} , где δ — ширина погранслоя. С ростом Re спектр нарастающих возмущений расширяется (это видно из диаграммы устойчивости). Когда амплитуда возмущений становится достаточно велика, эти крупномасштабные возмущения, возникающие из-за неустойчивости основного потока, сами становятся неустойчивыми, и в результате развития этой неустойчивости также возникают нарастающие возмущения меньшего масштаба.

Если число Re существенно превосходит R_* , то возникает целая иерархия возмущений, каждое из которых порождает более мелко-масштабное из-за развития неустойчивости. Эта иерархия простирается от масштабов, определяемых всем течением (так называемый внешний масштаб), до мелких масштабов, на которых число Re соответствующего движения меньше R_* , и они устойчивы. Здесь возмущения затухают.

Это качественная картина, которая позволяет построить количественную теорию, базирующуюся на гипотезах и соображениях размерности.

Количественной характеристикой передачи энергии от одних масштабов к другим является поток энергии по спектру. Поскольку энергия передается от крупномасштабных движений к мелкомасштабным, а потом затухает за счет вязкости, то эту величину еще называют скоростью диссипации энергии турбулентности. Ее обо-

значают ε , она имеет размерность $[\varepsilon] = \left[\frac{v^2}{T} \right] = \left[\frac{L^2}{T^3} \right]$, здесь v — скорость потока, L — его характерный пространственный масштаб, вязкость же не может определять ε , так как $Re \gg 1$.

Чем определяются статистические свойства мелкомасштабных движений в соответствии с нарисованной картиной? Во-первых, скоростью диссипации турбулентной энергии, которая характеризует их порождение крупномасштабными движениями. Во-вторых, вязкостью. В этом состоит суть *1-й гипотезы Колмогорова*.

Сформулируем ее более строго.

Пусть поле скорости в турбулентном потоке $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Рассмотрим поле относительных скоростей: $v(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}(\vec{r}, t) - \langle \vec{v} \rangle}{v}$. В случае турбулентности с достаточно большим числом Re статистические свойства поля относительных скоростей $v(\vec{r}, t)$ зависят только от ε и v . Из величин ε и v можно составить единственную

комбинацию, имеющую размерность длины $\eta = \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}$; единственную

комбинацию, имеющую размерность скорости $v_\eta = (\varepsilon v)^{1/4}$, и

$\tau_\eta = \left(\frac{v}{\varepsilon} \right)^{1/2}$ — единственную комбинацию, имеющую размерность времени. Гипотеза Колмогорова может быть математически сформулирована так, что статистические свойства поля $v(\vec{r}, t)$ описываются универсальными функциями $\frac{\vec{r}}{\eta}$ и $\frac{\tau}{\tau_\eta}$.

Например, структурная функция:

$D_{ij} = \langle v_i(\vec{r}, t) v_j(\vec{r} + \vec{r}', t + \tau) \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle$

$$= \left\langle \left[\frac{v_i(\vec{r}, t) - \langle v_i \rangle}{v} \right] \left[\frac{v_j(\vec{r} + \vec{r}', t + \tau) - \langle v_j \rangle}{v} \right] \right\rangle \quad (14.37)$$

$$= v_\eta^2 F_{ij} \left(\frac{\vec{r}}{\eta} \right) = (\varepsilon v)^{1/2} F_{ij} \left[\frac{\vec{r}}{\left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}} \right]$$

Здесь D_{ij} характеризует масштаб скорости пульсационного движения. Так, при $R \sim \left(\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \right)^{1/4}$

$$D_{ij} \sim \dots, \quad (14.38)$$

т. е. движения, имеющие масштаб η , имеют масштаб скорости v_η . Определим для них число Рейнольдса:

$$Re = \frac{v_\eta \eta}{\nu} = \frac{\varepsilon^{0.25} \cdot v^{0.25} \cdot \left(\frac{v^{0.75}}{\varepsilon^{0.25}} \right)}{\nu} = 1.$$

То есть у таких движений уравновешены эффекты вязкости и нелинейности. Масштаб таких движений η называется внутренним масштабом турбулентности. Если внешний масштаб течения L , а скорость U , то, как мы видели, $\varepsilon = \frac{U^3}{L}$, тогда $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} = \left(\frac{\nu^3 L}{U^3} \right)^{1/4}$. От-

сюда ясно, что $\frac{\eta}{L} \sim \dots \ll \text{при } Re \gg \dots$

Таким образом, существует целая область масштабов $\eta \ll \dots$. Относительно статистических характеристик течения в этой области существует 2-я гипотеза Колмогорова: статистические характеристики поля относительной скорости в интервале масштабов $\eta \ll \dots$ не зависят от вязкости, а определяются единственным параметром ε . Такой интервал называется инерционным в противоположность вязкому. Это следует из того факта, что если масштаб течения $\lambda \gg \dots$, то эти течения вязкость не чувствуют, поскольку для них $Re_\lambda \gg \dots$. А значит, в соответствии с 1-й гипотезой Колмогорова статистические характеристики течения зависят только от δ . Рассмотрим, какие свойства будет иметь структурная функция в этом случае. Выражение (14.38) не должно зависеть от ν , т. е. F_{ij} должна быть степенной функцией:

$$F_{ij} = (\varepsilon \nu)^{1/2} \cdot \left(\frac{|R| \varepsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}} \right)^\beta, \quad \beta = \frac{2}{3}. \quad (14.39)$$

Таким образом, получим

$$D_{ij} \sim \dots \quad (14.40)$$

Или соответственно:

$$\langle [\dots] \rangle \sim C \delta_{ij}. \quad (14.41)$$

Итак, мы получили, что масштаб возмущений скорости, имеющих масштаб λ , будет $\varepsilon^{2/3} \cdot \lambda^{2/3}$, т. е. масштаб возмущений скорости убывает пропорционально $\lambda^{2/3}$ при уменьшении λ . Таким образом, в инерционном интервале масштабов турбулентности $v_\lambda^2 \sim \dots$. В процессе вывода были использованы качественные соображения, а также соображения размерности. Такие теории и гипотезы, как правило, проверяют экспериментально. Оказывается, что действительно экспериментальные исследования подтверждают закон двух третей для кинетической энергии пульсаций мелкомасштабной турбулентности.

14.5. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Выше рассмотрены турбулентные пульсации, однако фактически большой интерес представляют движения, осредненные по мелкомасштабным пульсациям. Турбулентные движения описываются системой уравнений Навье — Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (14.42)$$

Это, однако, очень сложное движение. При описании такого движения пользуются статистическим осреднением. Поле скорости представляют в виде суммы средней и пульсационной компонент:

$$u_i = \langle u_i \rangle + u'_i, \quad (14.43)$$

где $\langle u_i \rangle$ — среднее по ансамблю (а практически по времени или по пространству), по определению $\langle u'_i \rangle = 0$. Найдем среднее от уравнения Навье — Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle = \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (14.44)$$

Эта система незамкнута. В нее входит неизвестная величина $\langle u'_i u'_j \rangle$, которая носит название *турбулентного напряжения*. Она имеет характерный вид напряжения и показывает плотность поверхностной силы, которая действует в турбулентном потоке путем турбулентного переноса импульса.

Для турбулентного напряжения можно получить уравнение из системы уравнений Навье — Стокса. Для этого из полного уравнения надо вычесть осредненное, в итоге можно получить уравнение для пульсаций скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_i}{\partial t} + u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \langle u_j \rangle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle + \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (14.45)$$

Далее это уравнение домножается на u'_k и усредняется. Получается уравнение для $\langle u'_i u'_k \rangle$, в которое, однако, входят неизвестные корреляторы $\langle u'_i u'_j u'_k \rangle$, $\left\langle u'_k \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right\rangle$, $\left\langle u'_k \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle$. При усреднении соответствующей системы уравнений будут получаться выражения, содержащие неизвестные. Эту систему необходимо оборвать. Для этого используют так называемые *гипотезы замыкания*. Простейшая гипотеза замыкания — градиентная. Такая гипотеза основана на физической аналогии между турбулентным и ламинарным переносом. В обоих этих случаях имеет место хаотическое движение, а также в обоих случаях происходит перенос импульса этим движением. В связи с этим предполагается, что турбулентное напряжение должно быть пропорционально градиенту средней скорости:

$$\langle u'_i u'_j \rangle = -\nu_T \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \langle u_i'^2 \rangle. \quad (14.46)$$

Здесь ν_T — коэффициент турбулентной (или вихревой) вязкости. Эта величина считается функцией координат и может быть определена опытным путем, из соображений размерности и т. п.

Рассмотрим ниже решение системы уравнений Рейнольдса для очень важного примера турбулентного пограничного слоя.

14.6. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

Для определения параметров турбулентного пограничного слоя на плоской пластинке будем рассматривать двумерную задачу, при этом x — горизонтальная координата, отсчитываемая вдоль пластинки, y — вертикальная координата. Горизонтальная проекция уравнения Навье — Стокса:

$$\frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle = \nu \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial y^2}. \quad (14.47)$$

Используем градиентную гипотезу для турбулентного напряжения в виде

$$\langle u'v' \rangle = -\nu_T(y) \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}. \quad (14.48)$$

Подставляя выражение (14.48) в (14.47), получим

$$(\nu + \nu_T) \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial y^2} = u_*^2 = \text{const}. \quad (14.49)$$

Постоянная величина u_* имеет размерность скорости и носит название *скорости трения* (динамической скорости) в пограничном слое.

Определим далее вид $\nu_T(y)$ из соображений размерности. Если пластинка гладкая, то имеются следующие величины, которые могут определять течение над ней, а значит и коэффициент турбулентной вязкости: u_* , y , ν . Из них может быть составлена единственная безразмерная комбинация $\frac{yu_*}{\nu}$. Тогда можно предположить, что коэффициент турбулентной вязкости может быть задан в следующем виде:

$$\nu_T = \nu f\left(\frac{yu_*}{\nu}\right). \quad (14.50)$$

В этом случае профиль скорости:

$$\langle u \rangle(y) = \int_0^y \frac{u_*^2}{v_T + v} dy_1 = \frac{u_*^2}{v} \int_0^y \frac{dy_1}{f\left(\frac{y_1 u_*}{v}\right) + 1}. \quad (14.51)$$

Можно предположить, что далеко от стенки форма профиля не будет зависеть от вязкости. Тогда из соображений размерности ясно, что

$$v_T = \kappa u_* y \quad \text{при } y \gg \frac{u_*}{\nu}, \quad \text{здесь величина } \kappa \text{ носит название постоянной Кармана, ее числовое значение определяется из эксперимента. Таким образом, для вихревой вязкости}$$

$$v_T = \kappa u_* y + \nu \left[f\left(\frac{y u_*}{\nu}\right) - \frac{\kappa u_* y}{\nu} \right]. \quad (14.52)$$

Очевидно, что $v_T \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$. При $y \gg \frac{u_*}{\nu}$ для профиля скорости получим

$$\langle u \rangle(y) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}, \quad (14.53)$$

где y_0 определяется из условия

$$\frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} = \frac{u_*^2}{v} \int_0^y \frac{dy_1}{f\left(\frac{y_1 u_*}{v}\right) + 1} \quad (14.54)$$

при $y \rightarrow \infty$. Если ввести безразмерную координату $y^+ = \frac{y u_*}{\nu}$, из (14.54) получим

$$\ln y_0^+ = \lim_{y^+ \rightarrow \infty} \left[\ln y^+ - \int_0^{y^+} \frac{dy'}{f(y') + 1} \right] \quad (14.55)$$

при $y \rightarrow \infty$. Величина y_0 называется параметром шероховатости. Эксперименты показывают, что на гидродинамически гладкой пластинке $y_0^+ = 0,11$, $y_0 = 0,11 \frac{\nu}{u_*}$.

Таким образом, далеко от плоской поверхности для профиля средней скорости получим следующее выражение:

$$\langle u \rangle(y) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{yu_*}{0,1\nu}. \quad (14.56)$$

Полученный профиль скорости носит название *логарифмического пограничного слоя*. Рассмотрим ниже, что представляет собой турбулентный пограничный слой. Выше рассматривали ту его часть, которая включает в себя турбулентные пульсации. Полностью же турбулентный погранслоем включает в себя ламинарную область, в которой $u \approx U_\infty$, и турбулентную область (которую рассматривали

выше), где $\langle u \rangle = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0}$. Данная область имеет толщину δ , завися-

щую от горизонтальной координаты, отсчитываемой вдоль пластинки. Рассмотрим, как происходит расширение пограничного слоя.

Аналогично ламинарному погранслою $\delta \sim \sqrt{\nu x}$, однако выше мы

видели, что $\nu_T = \kappa u_* y$, где $y \sim \delta$. Таким образом, $\delta \sim \sqrt{\kappa u_* x}$ т. е.

δ растет пропорционально x , а не \sqrt{x} , как в ламинарном пограничном слое.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Рассмотрим в данном приложении твердое тело. Твердое тело отличается от жидкости и газа тем, что в нем могут действовать касательные напряжения даже в состоянии покоя. (В жидкости и газе в состоянии покоя действуют только нормальные напряжения — силы давления.)

П.1.1. Кинематика деформируемого твердого тела

Исторически сложилось так, что для описания деформации твердого тела пользуются лагранжевым описанием. Напомним, что при лагранжевом описании каждой точке сплошной среды ставится в соответствие три ее координаты в начальный момент времени. Задать движение сплошной среды в лагранжевых координатах означает задать координаты всех точек в любой момент времени.

Итак, пусть в начальный момент времени (до деформации) радиус-вектор некоторой точки твердого тела был \vec{r} . После деформации точка сместится, и ее радиус-вектор станет \vec{r}' . Вектор $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$ называется вектором смещения, \vec{u} является функцией \vec{r} . Функция $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$, задает движение деформируемого тела в лагранжевых координатах. Если \vec{u} не зависит от \vec{r} , т. е. все точки смещаются одинаково, то деформации тела не происходит.

П.1.2. Тензор деформаций

Предположим, что \vec{u} зависит от \vec{r} . Рассмотрим две точки с лагранжевыми координатами \vec{r} и \vec{r}' . Расстояние между этими двумя точками:

$$|\vec{r}' - \vec{r}| = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2}.$$

После деформирования обе точки сместятся: их координаты будут \vec{r}' и \vec{r}'' , причем

$$|\vec{r}'' - \vec{r}'| = \sqrt{(dx_1')^2 + (dx_2')^2 + (dx_3')^2},$$
$$dx_i' = dx_i + du_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \left| d\vec{r}_1 \dots \left(\dots + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_l \right) \right| = \\
 & = dx_i dx_i + 2 dx_i dx_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l = \\
 & = \left| d\vec{r}_1 \dots \dots \dots \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx_i dx_k = \quad (П1.1) \\
 & = \left| d\vec{r}_1 \dots \dots \dots \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k.
 \end{aligned}$$

Тензор $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)$ называется тензором деформаций.

П.1.3. Некоторые свойства тензора деформаций

Рассмотрим тензор деформаций в некоторой точке произвольной системы координат. Тогда можно найти такую систему координат, в которой тензор деформаций будет диагональным. Рассмотрим две точки на оси x_i : x_i и $x_i + dx_i$. После деформации эти точки примут координаты x'_i и $x'_i + dx'_i$. Эти точки останутся на оси x_i , так как вектор смещений имеет единственную компоненту:

$$du_i = dx'_i - dx_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx_i.$$

При этом

$$dx_i'^2 = dx_i^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right) = dx_i^2 (1 + 2u_{ii}). \quad (П1.2)$$

Длина произвольного отрезка:

$$\left| d\vec{r}_1 \dots \dots \dots \sum_{i=1}^3 dx_i^2 = \sum_{i=1}^3 (dx_i)^2 (1 + 2u_{ii}). \quad (П1.3)$$

Видно, что сумма распадается на три независимых слагаемых, показывающих уравнение отрезка относительно осей, $2u_{ij}$ показывает относительное удлинение.

Во всех практических случаях деформации малы, т. е. малы относительные удлинения отрезков: $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1$. Это приводит к тому, что практически во всех случаях в выражении для тензора деформации можно пренеб-

речь квадратичным членом, т. е. $u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. При этом относительные удлинения элементов длины вдоль главных осей будут

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} = u_{ii}. \quad (\text{П1.4})$$

П.1.4. Изменение объема

Пусть объем до деформации был dV , после деформации dV' . Деформация эквивалентна преобразованию координат от x_1, x_2, x_3 к x'_1, x'_2, x'_3 . При этом

$$dV' = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} dV, \quad (\text{П1.5})$$

где $J = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$ — якобиан преобразования координат. Поскольку $x'_i = u_i + x_i$, то с точностью до членов порядка u_1 :

$$J = \begin{vmatrix} 1+u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & 1+u_{33} \end{vmatrix} = 1 + u_{11} + u_{22} + u_{33} + 0(u_{ij}u_{kl}). \quad (\text{П1.6})$$

Таким образом, относительное изменение объема равно сумме диагональных членов тензора деформаций:

$$\frac{dV' - dV}{dV} = u_{11} + u_{22} + u_{33}. \quad (\text{П1.7})$$

Движение твердого тела описывается уравнениями механики сплошной среды, причем, как показано выше, при описании деформаций твердого тела использовались лагранжевы координаты. Однако в случае твердых тел смещения частиц очень малы, поэтому лагранжевы и эйлеровы координаты практически совпадают. Это видно, когда записываются уравнения движения, а в них входят производные по эйлеровым координатам.

Пусть x, y, z — лагранжевы координаты, отмечающие поведение точек твердого тела до деформации, а x', y', z' — эйлеровы координаты, которые при $t=0$ совпадают с лагранжевыми. В уравнения движения в эйлеровой форме входят производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial(f, y', z')}{\partial(x', y', z')} = \frac{\partial(f, y', z')}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')}. \quad (\text{П1.8})$$

Но, как было показано выше, $x'_i = x_i + u_i$, где u_i — компонента вектора смещения.

Выпишем якобианы преобразования с точностью до линейных (по смещениям) членов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f, y', z')}{\partial(x, y, z)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} &= 1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (\text{П1.9})$$

Отсюда получим, что:

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (\text{П1.10})$$

Как увидим ниже, все входящие в уравнение движения производные берутся от величин, пропорциональных компонентам вектора смещения.

Значит, в принятом приближении надо заменить производные $\frac{\partial}{\partial x'_i}$ на $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Запишем уравнения движения.

1) Уравнение непрерывности в лагранжевых переменных:

$$\rho = \frac{\rho_0}{J}, \quad (\text{П1.11})$$

где $J = 1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, т. е.

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right). \quad (\text{П1.12})$$

2) Уравнение движения:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (\text{П1.13})$$

Заметим, что $v_i = \frac{du_i}{dt}$, значит, $\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho_0 \frac{d^2 u_i}{dt^2} + 0(u_i^2)$. В принятом приближении изменениями плотности при деформации надо пренебрегать.

Производную $\frac{d^2}{dt^2}$ заменим на частную $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, так как мы работаем в ла-

гранжевых координатах. Получим $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x'_j} \approx \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, поскольку, как мы увидим

ниже, $\sigma_{ij} \sim \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Итак, уравнение движения:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (\text{П1.14})$$

3) Уравнение теплопередачи (следствие закона сохранения энергии):

$$\rho \frac{dE}{dt} = q + \text{div} \vec{Q} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x'_j} + q^{**}, \quad (\text{П1.15})$$

где q^{**} — нетепловые источники энергии, связанные с электризацией, намагниченностью и т. д. В дальнейшем q^{**} полагаем равным нулю.

Учтем, что ρ не зависит от времени, а $v_i = \frac{du_i}{dt}$, и, значит, производную

$\frac{\partial}{\partial x'_j}$ надо заменить на $\frac{\partial}{\partial x_j}$, тогда

$$\frac{\partial (E\rho)}{\partial t} = q + \text{div} \vec{Q} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (\text{П1.16})$$

Заметим, что $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Тогда это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d(E\rho)}{dt} = q + \text{div} \vec{Q} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (\text{П1.17})$$

4) В уравнении энтропии можно также ρ внести под знак $\frac{d}{dt}$, тогда

$$\frac{d(S\rho)}{dt} = \frac{q + \text{div} \vec{Q} + q}{T}. \quad (\text{П1.18})$$

Если мы рассматриваем обратимые процессы, в которых $q' = 0$, то получим основное термодинамическое тождество в виде

$$d(E\rho) = Td(S\rho) + \sigma_{ij} d(u_{ij}). \quad (\text{П1.19})$$

В случае $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ оно приобретает следующий вид:

$$dE = TdS - \frac{p}{\rho} d(u_{ii}). \quad (\text{П1.20})$$

Но из уравнения неразрывности следует, что $\rho = \rho_0(1 - u_{ii})$, т. е.

$$d\rho = -\rho_0 du_{ii} \approx \dots$$

$$du_{ii} = -\frac{d\rho}{\rho}, \quad dE = TdS - \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

или $dE = TdS - pdV$ — основное термодинамическое тождество для двух-параметрической системы.

Таким образом, можно рассматривать твердое тело как термодинамическую систему, которая характеризуется не двумя параметрами (как идеальный газ или жидкость), а десятью: например, температура и 9 компонент тензора деформаций или температура и 9 компонент тензора напряжений.

Если вместо внутренней энергии E_p ввести свободную энергию $F = E_p - \rho TS$, то

$$dF = -\rho SdT + \sigma_{ij}d(u_{ij}). \quad (\text{П1.21})$$

Отсюда ясно, что

$$\sigma_{ij} = \left. \frac{\partial(pE)}{\partial u_{ij}} \right|_S = \left. \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \right|_T. \quad (\text{П1.22})$$

П1.5. Термодинамика упругих деформаций. Закон Гука

Получим выражение для свободной энергии F через тензор деформаций для изотропного твердого тела, исходя из общих соображений.

Предположим вначале, что температура тела постоянна. Тогда из общих соображений ясно, что если тело не деформировано ($u_{ij} = 0$), то отсут-

ствует внутреннее напряжение, $\sigma_{ij} = 0$. Но поскольку $\sigma_{ij} = \left. \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \right|_T$, то, знач-

ит, в выражении для F отсутствуют линейные члены. Свободная энергия должна быть скалярной величиной. Можно составить два независимых скаляра из компонент тензора u_{ij} : квадрат суммы диагональных компонент $(u_{ii})^2$ и сумма квадратов всех компонент тензора u_{ij}^2 .

Разлагая F в ряд по u_{ij} , получим в низшем порядке

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}(u_{ii})^2 + \mu u_{ij}^2. \quad (\text{П1.23})$$

Параметры λ и μ называют коэффициентами Лямэ. Найдем отсюда тензор напряжений:

$$\sigma_{ij} = \left. \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \right|_T = \lambda u_{ii} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}. \quad (\text{П1.24})$$

Видно, что если тензор деформаций приведен к главным осям, то отличны от нуля только диагональные его компоненты и они показывают удлинение по осям:

$$dx'_i = dx_i \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right) = (1 + u_{ii}) dx_i. \quad (\text{П1.25})$$

Если по всем осям деформации одинаковы (т. е. u_{ij} все равны), то при этом не изменяется форма тела, а только его размер. Поэтому такая деформация называется *чистым сжатием*.

Если сумма диагональных элементов тензора напряжений равна нулю, то объем твердого тела не меняется. Такая деформация называется *чистым сдвигом*.

Любую деформацию можно представить в виде суммы деформаций чистого сжатия и чистого сдвига. Действительно, можно записать тождество:

$$u_{ij} = \left(u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ll}. \quad (\text{П1.26})$$

Тогда, если в первом слагаемом сумма диагональных членов равна нулю — это чистый сдвиг, а во втором слагаемом u_{ll} все одинаковы — это чистое сжатие. С учетом выражения (П.26):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \left[\left(u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ll} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ll} \right], \\ \sigma_{ij} &= \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ll} \right), \\ \sigma_{ij} &= K u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ll} \right). \end{aligned} \quad (\text{П1.27})$$

Здесь $K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ называют модулем всестороннего сжатия, а μ — модулем сдвига. Исходя из этой формулы, можно найти обратную связь: выразить тензор деформаций через тензор напряжений.

Сначала найдем сумму всех диагональных компонент тензора напряжений $\sigma_{ll} = 3K u_{ll}$, т. е. $u_{ll} = \frac{\sigma_{ll}}{3K}$. Тогда

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ll} \delta_{ij} \right). \quad (\text{П1.28})$$

Отсюда получим

$$u_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ij} \right) - \frac{1}{9K} \sigma_{ll} \delta_{ij}. \quad (\text{П1.29})$$

То есть тензор упругих деформаций есть линейная комбинация тензора напряжений. Это *закон Гука* в обобщенном виде. С учетом выражения для K через коэффициенты Лямэ $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ получим

$$u_{ij} = \frac{1}{9\lambda + 6\mu} \sigma_{ll} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ij} \right). \quad (\text{П1.30})$$

Итак, мы имеем выражение, связывающее тензоры напряжений и деформаций при постоянной температуре. Температура, однако, может быть и непостоянна, и тогда возникают деформации из-за эффекта теплового расширения. Причем возможно, что деформации вызываются внешним изменением температуры или, наоборот, изменения температуры вызываются деформациями. Эти деформации называют термоупругими.

Рассмотрим, как изменяется свободная энергия при наличии изменений температуры.

Мы видели, что $\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}$; при постоянной температуре T_0 и при $\sigma_{ij} = 0$ $u_{ij} = 0$ (нет деформаций, нет напряжений), поэтому в разложении F_{ij} по u_{ij} отсутствовали линейные члены. Если происходило изменение температуры, то $u_{ij} \neq 0$, даже если $\sigma_{ij} = 0$, так как есть тепловое расширение тел. В связи с этим в разложении F появляется линейный член по u_{ij} . Но координаты при нем должны обращаться в нуль при $T = T_0$. Тогда разложение F в ряд по малым вариациям температуры должно иметь вид

$$F(T) = F_0(T) - \beta(T - T_0) + \frac{\lambda}{2}(u_{ll})^2 + \mu u_{ij}^2. \quad (\text{П1.31})$$

Чтобы получить скаляр, надо выбрать линейную скалярную комбинацию компонент тензора u_{ij} — это сумма его диагональных компонент.

Тензор напряжений:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \Big|_T = -\beta(T - T_0) \delta_{ij} + \lambda u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}. \quad (\text{П1.32})$$

При отсутствии напряжений $\sigma_{ij} = 0$, тогда $u_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $-\beta(T - T_0) + \lambda u_{ll} + 2\mu u_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Отсюда следует, что

$$u_{11} = u_{22} = u_{33} = \frac{\beta(T - T_0)}{3\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)} = \frac{\beta(T - T_0)}{3K}, \quad (\text{П1.33})$$

где K — модуль всестороннего сжатия.

Итак, линейное относительное удлинение $u_{ii} = \frac{\beta}{3K}(T - T_0)$. Изменение объема $u_{ll} = \frac{\beta}{K}(T - T_0)$, $\alpha = \frac{\beta}{K}$ — коэффициент объемного расширения.

Итак, при деформациях, сопровождающихся изменением температуры, формула для свободной энергии выглядит как

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T - T_0)u_{ll} + \frac{\lambda}{2}(u_{ll})^2 + \mu u_{ij}^2. \quad (\text{П1.34})$$

П.1.6. Адиабатические и изотермические деформации

1. Если деформации изотермические, то $T = T_0$. В этом случае приходим к формулам, которые были рассмотрены выше.

2. Адиабатические деформации.

Основное термодинамическое тождество для упругого твердого тела $F = -SdT + \sigma_{ij}du_{ij}$. Отсюда $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$. Дифференцируя выражение для F , получим $S = S_0(T) + K\alpha u_{ll}$. Если энтропия постоянна, а изменение температуры невелико, то его можно найти

$$S(T_0) = S(T_0) + \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{T_0} (T - T_0) + K\alpha u_{ll}. \quad (\text{П1.35})$$

Отсюда $(T - T_0) = -\frac{K\alpha u_{ll}}{\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{T_0}}$, т. е. при адиабатических деформациях

$(T - T_0) \sim$, и тогда

$$F(T) = F_0(T) + \frac{K^2 \alpha^2}{\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{T_0}} u_{ll}^2 + \frac{\lambda}{2} u_{ll}^2 + \mu u_{ij}^2 = F_0 + \frac{\lambda_{\text{ад}}^2}{2} u_{ll}^2 + \mu u_{ij}^2. \quad (\text{П1.36})$$

Таким образом, при адиабатических деформациях получаются такие же выражения для закона Гука, но с другими коэффициентами (адиабатическими коэффициентами).

П.1.7. Динамика упругих деформаций

Начнем со статики. Выпишем условие равновесия для упругого деформированного твердого тела. Уравнение для импульса при $\vec{v} = 0$ дает

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0. \quad (\text{П1.37})$$

а для σ_{ij} имеется обобщенный закон Гука, т. е. можно определить деформации. Часто источником деформации являются внешние силы, приложенные к поверхности тела. Если i -я компонента внешней силы, приложенная к поверхности S тела P_i , а нормаль к его поверхности \vec{n} , то граничное условие равновесия поверхности выглядит как

$$\sigma_{ij}n_j \Big|_S = P_i. \quad (\text{П1.38})$$

Уравнение равновесия вместе с граничным условием дает полную систему для определения деформаций упругого твердого тела.

П.1.8. Однородные деформации

Допустим, что σ_{ij} не зависит от координат, а силой тяжести можно пренебречь. Тогда $\sigma_{ij}n_j = P_i$. Напряжение определяется граничным условием на поверхности твердого тела.

1. Деформация растяжения тела

Пусть стержень расположен вдоль оси z и к его концам приложены силы, растягивающие его в противоположные стороны. То есть $\sigma_{33} = P$, $\sigma_{ij} = 0$ при всех остальных i и j . Деформации:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \frac{1}{9K} \delta_{ij} \sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{ll}}{3} \right), \\ u_{11} &= \frac{1}{9K} P + \frac{1}{6\mu} (-P) = \frac{P}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right), \\ u_{22} &= \frac{P}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right), \\ u_{33} &= \frac{1}{9K} P + \frac{1}{2\mu} \left(P - \frac{P}{3} \right) = \frac{P}{3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right). \end{aligned} \quad (\text{П1.39})$$

Величину E такую, что $P = Eu_{33}$, называют модулем растяжения или модулем Юнга. Он показывает связь относительного продольного растяжения и продольного напряжения. Итак, $\frac{1}{E} = \frac{1}{3} \frac{\mu + 3K}{3K\mu}$; $E = \frac{9K\mu}{\mu + 3K}$. Поскольку

ку $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, то $E = \frac{3(3\lambda + 2\mu)\mu}{\mu + 3\lambda + 2\mu} = \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu}$. Отношение $\frac{u_{11}}{u_{33}} = -\sigma$, где

σ так называемый коэффициент Пуассона, показывающий относительное сжатие вдоль поперечной координаты при продольной нагрузке, запишем следующим образом:

$$u_{11} = P \frac{2\mu - 3K}{18K\mu} = P \frac{2\mu - 3\lambda - 2\mu}{18K\mu} = -\frac{P\lambda}{6K\mu},$$

$$\sigma = -\frac{u_{11}}{u_{33}} = \frac{\frac{P\lambda}{6K\mu}}{\frac{P(\mu + 3K)}{9K\mu}} = \frac{3\lambda}{2(\mu + 3K)} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (\text{П1.40})$$

Итак, $E = \mu \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$; $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$. Отсюда можем найти выражения для коэффициентов Лямэ через модуль Юнга и коэффициент Пуассона: $\mu = \frac{E}{2(\sigma + 1)}$; $\lambda = \frac{\sigma E}{(1 - 2\sigma)(\sigma + 1)}$; тогда $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \lambda = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}$.

2. Деформация сдвига

Пусть напряжения P приложены к верхней и боковым граням прямоугольного стержня. Тогда $\sigma_{12} = P$; $\sigma_{21} = P$. Деформация $u_{12} = \frac{1}{2\mu}P$;

$u_{21} = \frac{1}{2\mu}P$. По определению $u_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$. Пусть $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$, т. е.

$u_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, $dx'_1 = dx_1 + dx_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, $dx'_2 = dx_2$. Пусть в начальный момент отрезок был вертикальный, т. е. $dx_1 = 0$, тогда $\frac{dx'_1}{dx'_2} = \text{tg}\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$. Поскольку

$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \ll 1$, то $\theta \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2u_{12} = \frac{P}{\mu}$.

3. Прямоугольный стержень в жидкости под действием гидростатического давления

На поверхностях $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = P$; $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Деформации:

$$u_{ij} = \frac{1}{9K} \delta_{ij} \sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{ll}}{3} \right),$$

$$\sigma_{ll} = 3P,$$

$$u_{ij} = \frac{P}{3K} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ij} - P\delta_{ij}), \quad (\text{П1.41})$$

$$u_{11} = u_{22} = u_{33} = \frac{P}{3K}.$$

$$u_{ij} = 0$$

П.1.9. Произвольные деформации

Общее уравнение равновесия имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0. \quad (\text{П1.42})$$

Выражение для тензора напряжений через тензор деформаций:

$$\sigma_{ij} = K u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ll} \right) = \lambda u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}. \quad (\text{П1.43})$$

Выражение через модуль Юнга:

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}; \quad \mu = \frac{E}{2(\sigma+1)}; \quad (\text{П.44})$$

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1-2\sigma)(\sigma+1)}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} u_{ll} + 2\mu \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j}. \quad (\text{П1.45})$$

С учетом того, что $u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div} \vec{u}) + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div} \vec{u}) + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ \lambda + \mu &= \frac{\sigma E}{(1-2\sigma)(\sigma+1)} + \frac{E}{2(\sigma+1)} = \\ &= \frac{2\sigma+1-2\sigma}{2(\sigma+1)(1-2\sigma)} E = \frac{E}{2(\sigma+1)(1-2\sigma)}. \end{aligned} \quad (\text{П1.46})$$

Подставляя в уравнение и записывая его в векторном виде, получим

$$\frac{E}{2(\sigma+1)(1-2\sigma)} \nabla (\text{div} \vec{u}) - \mu \nabla \text{rot} \vec{u} = \vec{r}. \quad (\text{П1.47})$$

Это уравнение равновесия твердого тела.

Заметим, что $\Delta \vec{u} = \nabla (\text{div} \vec{u}) - \nabla \text{rot} \vec{u}$, тогда

$$\begin{aligned}
 (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \vec{u}) &= \dots \\
 (\lambda + 2\mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u} &= \dots \\
 \lambda + 2\mu &= \frac{\sigma E}{(1-2\sigma)(\sigma+1)} + \frac{E}{(\sigma+1)} = \\
 &= \frac{\sigma+1-2\sigma}{(\sigma+1)(1-2\sigma)} E = \frac{E(1-\sigma)}{(\sigma+1)(1-2\sigma)}.
 \end{aligned}
 \tag{П1.48}$$

В итоге получим

$$\frac{E(1-\sigma)}{(\sigma+1)(1-2\sigma)} \nabla \operatorname{div} \vec{u} = \dots \tag{П1.49}$$

Если объемные силы отсутствуют, то уравнение равновесия имеет вид

$$\nabla (\operatorname{div} \vec{u}) = \dots \tag{П1.50}$$

с граничными условиями $P_i|_S = \sigma_{ij} n_j$, где \vec{n} — нормаль к S , а $\sigma_{ij} = \lambda \mu_{ij} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}$.

П1.10. Учет неравномерного нагрева

Если температура тела неоднородна по пространству, то $\sigma_{ij} = \lambda \mu_{ij} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij} - K\alpha(T - T_0)$, где $K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$. Но тогда условие равновесия примет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{E(1-\sigma)}{(\sigma+1)(1-2\sigma)} \nabla \operatorname{div} \vec{u} &= \dots \\
 -\frac{E}{3(1-2\sigma)} \alpha \nabla T &= -\rho \vec{g}.
 \end{aligned}
 \tag{П1.51}$$

Дополнение

Возьмем div от обеих частей уравнения равновесия, получим $\operatorname{div} \nabla (\operatorname{div} \vec{u}) = \dots$, так как $\operatorname{div} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \dots$, $\operatorname{div} \vec{g} = \dots$. Поскольку $\operatorname{div} \nabla A = \Delta A$, то $\nabla (\operatorname{div} \vec{u}) = \dots$, $\operatorname{div} \vec{u}$ — гармоническая функция.

Приложение 2. ВОЛНЫ В УПРУГОМ ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

П.2.1. Волновое уравнение

Уравнение движения твердого тела имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i. \quad (\text{П2.1})$$

Пусть $f_i = 0$, а для σ_{ij} справедлив закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{\Pi} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}. \quad (\text{П2.2})$$

Вспоминаем, что закон Гука имеет такой вид для изотермических и для адиабатических процессов. Тогда, подставляя σ_{ij} в уравнение импульса, получим после преобразований, аналогичных тем, которые проделывались при получении условий равновесия, следующее уравнение:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \nabla \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}. \quad (\text{П2.3})$$

Заметим, что $\Delta \vec{u} = \nabla \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}$, тогда получим

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}. \quad (\text{П2.4})$$

Известно, что любой вектор можно представить в виде суммы соленоидального и безвихревого векторов, т. е. $\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t$, где $\operatorname{rot} \vec{u}_l = 0$, а $\operatorname{div} \vec{u}_t = 0$. Тогда

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2\mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u}_l - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}_t. \quad (\text{П2.5})$$

В силу единственности разложения вектора \vec{u} на соленоидальную и безвихревую части для \vec{u}_l и \vec{u}_t получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u}_l \\ \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = -\mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}_t \end{cases} \quad (\text{П2.6})$$

Учитывая, что $\Delta \vec{u}_l = \nabla \operatorname{div} \vec{u}_l$, а $\Delta \vec{u}_t = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}_t$, запишем волновое уравнение для \vec{u}_l и \vec{u}_t :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \vec{u}_l \\ \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = -\mu \Delta \vec{u}_t \end{cases} \quad (\text{П2.7})$$

Рассмотрим, какие волны описываются этими волновыми уравнениями.

1-е уравнение. Будем рассматривать одномерное движение, т. е. пусть \vec{u}_t зависит от одной пространственной переменной z . Условие $\text{rot } \vec{u}_t = 0$ дает $-i \frac{\partial u_y}{\partial z} + j \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$, отсюда $\frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$, т. е. движение по u_x и u_y может носить только неволновой характер. Но тогда имеется единственная компонента вектора смещений u_z , которая может описывать волновое движение, и волновое уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}. \quad (\text{П2.8})$$

Это уравнение описывает волну, распространяющуюся в направлении $\pm z$ со скоростью $c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$; фазовая скорость не зависит от волнового числа. Это волна без дисперсии. Направление колебаний частиц в волне параллельно направлению ее распространения. Это продольная волна. Она так и называется: продольная волна в твердом теле. Она аналогична звуковой волне в жидкости и газе. Эта волна не есть волна всестороннего сжатия. У неё не одинаковы все u_{ll} и σ_{ll} :

$$\sigma_{ll} = \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

2-е уравнение:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{u}_t. \quad (\text{П2.9})$$

Пусть движение одномерное, т. е. \vec{u}_t зависит только от одной пространственной координаты z . Из условия $\text{div } \vec{u}_t = 0$ следует $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, т. е. отличны от нуля только смещения u_x и u_y , тогда $\vec{u}_t = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$. При этом \vec{u}_t удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_t}{\partial z^2}. \quad (\text{П2.10})$$

Проекция на ось x :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \quad (\text{П2.11})$$

на ось y :

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}. \quad (\text{П2.12})$$

Эти уравнения описывают волну, которая распространяется вдоль оси z со скоростью $c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Колебания частиц в этой волне происходят в направлении перпендикулярном направлению распространения, т. е. это волна поперечная. У нее могут быть две поляризации. Поскольку $\lambda > 0$ для большинства известных материалов, то всегда $c_l > c_t$.

П.2.2. Векторный и скалярный потенциалы

Поскольку $\text{rot } \vec{u}_t = -\vec{v}$, то можно ввести такую функцию φ , что $\vec{u}_t = \text{grad } \varphi$. В силу того что $\text{div } \vec{u}_t = -\vec{v}$, можно ввести такой вектор $\vec{\psi}$, что $\vec{u}_t = \text{rot } \vec{\psi}$. Тогда $\vec{u}_t = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}$, φ называют скалярным потенциалом, $\vec{\psi}$ — векторным потенциалом. При этом скалярный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi, \quad (\text{П2.13})$$

а векторный потенциал — уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = \mu \Delta \vec{\psi}. \quad (\text{П2.14})$$

Введение скалярного потенциала уменьшает количество неизвестных функций от трех (u_{ix}, u_{iy}, u_{iz}) до одной.

Введение векторного потенциала не приводит к уменьшению числа функций, описывающих поперечные волны. Однако в случае, когда задача обладает определенной симметрией, это число может быть сокращено. Пусть, например, движение двумерное:

$$\begin{aligned} \vec{u}_t &= u_{ix} \vec{e}_x + u_{iy} \vec{e}_y, \\ \text{div } \vec{u}_t &= \text{grad } \varphi, \\ u_{ix} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ u_{iy} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (\text{П2.15})$$

Тогда

$$\vec{u}_t = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix}. \quad (\text{П2.16})$$

Величина ψ удовлетворяет скалярному волновому уравнению:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \mu \Delta \psi, \quad \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \quad (\text{П2.17})$$

Выразим напряжение в волнах через векторный и скалярный потенциалы в случае плоского движения. Компоненты вектора смещения:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{ix} + u_{ix} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ u_y &= u_{iy} + u_{iy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \sigma_{ij} &= \lambda u_{ii} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}, \\ u_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (\text{П2.18})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) = \\ &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{П2.19})$$

Но $\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi$, т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), \\ \sigma_{yy} &= \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) = \\ &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{П2.20})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned}$$

Далее с учетом $\mu \Delta \psi = \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ получим

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) = \\ &= \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\lambda \rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (\text{П2.21})$$

П.2.3. Отражение упругих волн на границе раздела двух сред

1. Рассмотрим вначале падение на границу раздела поперечной волны, у которой вектор смещений перпендикулярен плоскости, в которой распространяется волна, т. е. $\vec{u} = \vec{u}_z(x, y, z, t)$. Тогда u_z удовлетворяет уравнению в средах 1 и 2:

$$\frac{\partial^2 u_z^{(1,2)}}{\partial t^2} = c_{t(1,2)}^2 \left(\frac{\partial^2 u_z^{(1,2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^{(1,2)}}{\partial y^2} \right). \quad (\text{П2.22})$$

Отличные от нуля компоненты тензора деформаций: $\sigma_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial x}$;

$\sigma_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial y}$. Условие непрерывности на границе раздела:

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^{(2)} \Big|_{y=0} &= 0, \quad \sigma_{yy}^{(2)} \Big|_{y=0} = 0, \quad \sigma_{zy}^{(2)} \Big|_{y=0} = \sigma_{zy}^{(1)}, \\ \sigma_{xx}^{(2)} \Big|_{y=0} &= 0, \quad \sigma_{yx}^{(2)} \Big|_{y=0} = 0, \quad \sigma_{zx}^{(2)} \Big|_{y=0} = \sigma_{zx}^{(1)}, \\ \sigma_{xz}^{(2)} \Big|_{y=0} &= \sigma_{xz}^{(1)}, \quad \sigma_{yz}^{(2)} \Big|_{y=0} = \sigma_{yz}^{(1)}, \quad \sigma_{zz}^{(2)} \Big|_{y=0} = 0.\end{aligned}\quad (\text{П2.23})$$

Из граничных условий ясно, что в среде 2 отлично от нуля тоже только u_z , которое зависит от x и y , в обеих средах остаются только поперечные волны без изменения поляризации. Они отражаются и проходят в соответствии с законом Снеллиуса. Поскольку частицы среды колеблются в плоскости перпендикулярной плоскости деформации, то эта поляризация сохраняется.

2. Пусть на границу раздела падают продольная волна или поперечная волна, у которых колебания частиц происходят в плоскости падения. Тогда ясно, что, в принципе, при падении волны одного типа от границы будут отражаться волны обоих типов. Этот переход одних типов волн в другие происходит на границе раздела сред.

Рассмотрим более простую задачу об отражении продольной или поперечной волн от свободной границы.

Пусть на свободную границу падает чисто продольная волна, а отражается две — продольная и поперечная. Задача двумерная.

Для описания волновых движений воспользуемся скалярным φ и векторным $\vec{\psi}$ потенциалами. Векторный потенциал $\vec{\psi}$ в двумерной задаче имеет единственную компоненту ψ . Тогда продольная волна описывается скалярным потенциалом, а поперечная — векторным. Пусть волна гармоническая, тогда скалярный потенциал имеет вид

$$\varphi = (A_I e^{i\kappa_I y} + B_I e^{-i\kappa_I y}) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (\text{П2.24})$$

а волновой потенциал:

$$\psi = B_I e^{-i\kappa_I y} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (\text{П2.25})$$

(есть только отраженная волна) κ_I и κ_t связаны с k и ω следующими соотношениями, которые вытекают из соответствующих волновых уравнений:

$$k^2 + \kappa_I^2 = \frac{\omega^2}{c_I^2}; \quad k^2 + \kappa_t^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2}. \quad (\text{П2.26})$$

На границе $y = 0$ выполняется граничное условие $\sigma_{ij} n_j = 0$, где $n_j = \delta_{iy}$, т. е. $\sigma_{xy} = 0$ и $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{ij} = \lambda \mu_{ij} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda(u_{xx} + u_{yy}) + 2\mu u_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \sigma_{xy} &= 2\mu u_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \sigma_{yy} &= \lambda(u_{xx} + u_{yy}) + 2\mu u_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}. \end{aligned} \quad (\text{П2.27})$$

Выражения для σ_{ij} через скалярный и векторный потенциалы были приведены выше:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), \\ \sigma_{yy} &= \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), \\ \sigma_{xy} &= \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (\text{П2.28})$$

Для выбранного вида φ и ψ имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}|_{y=0} = 0 &\Rightarrow -\rho\omega^2\psi + 2\mu\left(\kappa_t^2 + ik\varphi_y\right)\Big|_{y=0} = 0, \\ c_t^2 = \frac{\mu}{\rho} &\Rightarrow \rho = \frac{\mu}{c_t^2}, \\ -\mu\frac{\omega^2}{c_t^2}\psi + 2\mu\left(\kappa_t^2\psi + ik\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П2.29})$$

$$1) \quad \psi\left(2\kappa_t^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right) + 2ik\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0$$

или:

$$\psi\left(\frac{\omega^2}{c_t^2} - 2k^2\right) + 2ik\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad (\text{П2.30})$$

$$\sigma_{yy} = \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) = -\frac{\mu}{c_t^2}\omega^2\varphi + 2\mu\left(k^2\varphi + ik\frac{\partial\psi}{\partial y}\right).$$

$$2) \quad 2ik\frac{\partial\psi}{\partial y} + \varphi\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right) = 0. \quad \text{Заметим, что } \frac{\omega^2}{c_t^2} = \kappa_t^2 + k^2, \text{ тогда}$$

$2\kappa_t^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} = \kappa_t^2 - k^2$, а $2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} = k^2 - \kappa_t^2$. Подставляя φ и ψ в виде, указанном выше, получим

$$\begin{cases} B_l(\kappa_t^2 - k^2) + 2k\kappa_l B_l = A_l 2k\kappa_l \\ 2k\kappa_l B_l - (\kappa_t^2 - k^2)B_l = A_l(\kappa_t^2 - k^2) \end{cases} \quad (\text{П2.31})$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{aligned} \frac{B_l}{A_l} &= \frac{4k^2\kappa_l\kappa_t - (\kappa_t^2 - k^2)^2}{4k^2\kappa_l\kappa_t + (\kappa_t^2 - k^2)^2}, \\ \frac{B_l}{A_l} &= \frac{4\kappa_l k(\kappa_t^2 - k^2)}{4k^2\kappa_l\kappa_t + (\kappa_t^2 - k^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{П2.32})$$

Обсудим полученные зависимости. Примем θ_l — угол падения продольной волны, θ_t — угол отражения поперечной волны. Тогда

$$\kappa_t^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c_t^2}, \quad (\text{П2.33})$$

$$k = \frac{\omega}{c_t} \sin \theta_t; \quad \kappa_t = \frac{\omega}{c_l} \cos \theta_t, \quad (\text{П2.34})$$

$$\kappa_t^2 + k^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2}, \quad (\text{П2.35})$$

$$k = \frac{\omega}{c_l} \sin \theta_l; \quad \kappa_l = \frac{\omega}{c_t} \cos \theta_l. \quad (\text{П2.36})$$

Выразим все компоненты волн через θ_l :

$$\kappa_t = \frac{\omega}{c_t} \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2} - \frac{\omega^2}{c_l^2} \sin^2 \theta_l} = \frac{\omega}{c_l} \sqrt{\frac{c_l^2}{c_t^2} - \sin^2 \theta_l}, \quad (\text{П2.37})$$

где $\kappa_l = \frac{\omega}{c_l} \cos \theta_l$; обозначим $n = \frac{c_l}{c_t} > 1$. Тогда:

$$\frac{B_l}{A_l} = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \theta_l \sqrt{(n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \theta_l + n^2} - \left[(n^2 - 2) \operatorname{tg}^2 \theta_l + n^2 \right]^2}{4 \operatorname{tg}^2 \theta_l \sqrt{(n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \theta_l + n^2} + \left[(n^2 - 2) \operatorname{tg}^2 \theta_l + n^2 \right]^2}, \quad (\text{П2.38})$$

$$\frac{B_t}{A_t} = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \theta_l \left((n^2 - 2) \operatorname{tg}^2 \theta_l + n^2 \right)}{4 \operatorname{tg}^2 \theta_l \sqrt{(n^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \theta_l + n^2} + \left[(n^2 - 2) \operatorname{tg}^2 \theta_l + n^2 \right]^2}.$$

Из формул ясно, что $\frac{\sin \theta_l}{c_l} = \frac{\sin \theta_t}{c_t}$ в силу того, что $c_l > c_t$, $\theta_t < \theta_l$. Отсюда следует, что если на свободную границу падает продольная волна, то всегда будет отражаться поперечная волна, причем угол $\theta_t < \theta_l$.

Если $\theta_l = 0$ (нормальное падение), то $\frac{B_l}{A_l} = -1$, а $\frac{B_t}{A_t} = 0$, т. е. отразится только продольная волна.

Если $\theta_l \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (скользящее падение), то $\frac{B_l}{A_l} = -1$, а $\frac{B_t}{A_t} \rightarrow 0$.

Между этими углами B_t отлично от нуля. B_t может обращаться в ноль при $\theta_l = \arctg \left[\frac{n}{\sqrt{2 - n^2}} \right]$, если $n < \sqrt{2}$.

Предположим теперь, что на свободную границу падает поперечная волна под углом θ_t . Тогда будут отражаться продольная под углом θ_l и поперечная под углом θ_t .

Скалярный потенциал:

$$\varphi = B_l e^{-i\kappa_l y} e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (\text{П2.39})$$

а волновой потенциал:

$$\psi = \left(A_t e^{i\kappa_t y} + B_t e^{-i\kappa_t y} \right) e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (\text{П2.40})$$

Граничные условия дают связь B_l , A_l , B_t :

$$\begin{cases} B_l (\kappa_t^2 - k^2) + 2k\kappa_l B_l = -A_t (\kappa_t^2 - k^2) \\ 2k\kappa_l B_l - (\kappa_t^2 - k^2) B_l = 2k\kappa_t A_t \end{cases} \quad (\text{П2.41})$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \frac{B_l}{A_t} &= \frac{4k\kappa_t (\kappa_t^2 - k^2)}{4k^2 \kappa_l \kappa_t + (\kappa_t^2 - k^2)^2}, \\ \frac{B_t}{A_t} &= \frac{(\kappa_t^2 - k^2)^2 - 4k^2 \kappa_l \kappa_t}{(\kappa_t^2 - k^2)^2 + 4k^2 \kappa_l \kappa_t}. \end{aligned} \quad (\text{П2.42})$$

Выразим все компоненты волновых векторов через угол падения θ_t :

$$\kappa_t = \frac{\omega}{c_t} \cos \theta_t,$$

$$k = \frac{\omega}{c_l} \sin \theta_l = \frac{\omega}{c_l} \sin \theta_t, \quad (\text{П2.43})$$

$$\kappa_l = \frac{\omega}{c_l} \cos \theta_l = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{\omega^2}{c_t^2} \sin^2 \theta_t} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{\omega^2}{c_t^2} \sin^2 \theta_t} = \frac{\omega}{c_l} \sqrt{m^2 - \sin^2 \theta_t},$$

где $m = \frac{c_t}{c_l} < 1$, т. е. $\theta_t < \theta_l$. С учетом этого можно записать, что

$$\begin{aligned} \frac{B_l}{A_t} &= \frac{4 \operatorname{tg} \theta_t \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \theta_t}}{4 \operatorname{tg}^2 \theta_t \sqrt{(m^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \theta_t + m^2} + (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_t)^2}, \\ \frac{B_t}{A_t} &= - \frac{4 \operatorname{tg}^2 \theta_t \sqrt{(m^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \theta_t + m^2} - (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_t)^2}{4 \operatorname{tg}^2 \theta_t \sqrt{(m^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \theta_t + m^2} + (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_t)^2}. \end{aligned} \quad (\text{П2.44})$$

Поскольку $m < 1$, то при $\theta_t > \arcsin m$ отраженной продольной волны нет. При этом $\kappa_l = \frac{\omega}{c_l} \sqrt{m^2 - \sin^2 \theta_t}$ — число мнимое. Это соответствует

тому, что продольная волна становится поверхностно неоднородной. Она распространяется вдоль свободной границы.

Коэффициент отражения продольной волны равен нулю при $\theta_t = \frac{\pi}{4}$ (см. (П2.44)), т. е. при этом падает поперечная, а отражается тоже только поперечная волна.

П.2.4. Волна Рэлея

При наличии свободной границы возможным становится существование собственных волн, распространяющихся вдоль границы. Пример поверхностных волн у нас уже встречался — это волны на поверхности воды. Такого же типа волны могут быть в упругом полупространстве. Они называются волнами Рэлея.

Рассмотрим упругое полупространство. Пусть задача двумерна. Рассмотрим векторный и скалярный потенциалы $\varphi = \varphi(x, y, t)$ и $\psi = \psi(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c_t^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= c_t^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{П2.45})$$

с граничными условиями $\sigma_{xy}|_{y=0} = 0$; $\sigma_{yy}|_{y=0} = 0$; $\psi, \varphi|_{y \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$.

Будем искать решение в виде неоднородной гармонической волны:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(y) e^{-i(\omega t - kx)}, \\ \psi &= \psi(y) e^{-i(\omega t - kx)}. \end{aligned} \quad (\text{П2.46})$$

Тогда уравнения и граничные условия имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_t^2} - k^2 \right) \varphi &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_t^2} - k^2 \right) \psi &= 0 \\ \left[\left(\frac{\omega^2}{c_t^2} - 2k^2 \right) \psi + 2ik \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \Big|_{y=0} &= 0 \\ 2ik \frac{\partial \psi}{\partial y} + \varphi \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} \right) \Big|_{y=0} &= 0 \\ \psi, \varphi \Big|_{y \rightarrow -\infty} &\rightarrow 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{П2.47})$$

Если необходимо найти решение в виде поверхностной волны, т. е. $\psi, \varphi \sim e^{\kappa y}$, где $\kappa > 0$, тогда поле будет убывать при $y \rightarrow -\infty$. При

этом $\kappa_t = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}}$; а $\kappa_l = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}}$, т. е. должно выполняться условие

$k > \frac{\omega}{c_t} > \frac{\omega}{c_l}$. Тогда решения уравнений имеют следующий вид:

$$\varphi = A_l e^{\kappa_l y}, \quad \psi = A_t e^{\kappa_t y}. \quad (\text{П2.48})$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} -A_t (\kappa_t^2 + k^2) + 2ik\kappa_l A_l = 0 \\ -2ik\kappa_t A_t + A_l (\kappa_t^2 + k^2) = 0 \end{cases} \quad (\text{П2.49})$$

Дисперсионное соотношение получаем из условия равенства нулю определителя:

$$-(\kappa_t^2 + k^2)^2 + 4k^2\kappa_t\kappa_l = 0. \quad (\text{П2.50})$$

Или: $4k^2 \sqrt{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right)} = \left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^2$. Это уравнение задает связь ω

и k для волны Рэлея без дисперсии. При этом $\omega = c_r k$. Так как $k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} < 0$,

$c_r < c_t < c_l$. То есть волна Рэлея более «медленная», чем продольная и поперечная волны. Если найти уравнение для c_r :

$$4\sqrt{\left(1 - \frac{c_r^2}{c_t^2}\right)\left(1 - \frac{c_r^2}{c_l^2}\right)} = \left(2 - \frac{c_r^2}{c_t^2}\right)^2, \quad (\text{П2.51})$$

то ясно, что c_r не зависит от k , т. е. волны Рэлея — без дисперсии.

Это волны — важное понятие в сейсмоакустике, они могут распространяться от источника на большое расстояние, поскольку они поверхностные и затухают медленнее, чем объемные.

Литература

1. Механика сплошных сред. Ч. 1. Течение идеального сжимаемого газа и жидкости. Методическое пособие для студентов физических специальностей очной формы обучения / Ю. И. Троицкая, И. А. Соустова, О. С. Ермакова, Д. А. Сергеев. — Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2018. — 100 с.
2. *Ландау, Л. Д.* Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 3-е изд., перераб. — М. : Наука, 1986. — 736 с. — (Теоретическая физика : Т. VI.)
3. *Лойцянский, Л. Г.* / Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. — Изд. 5-е, перераб. — М. : Наука, 1978. — 736 с.
4. *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1 / Л. И. Седов. — М. : Наука, 1970. — 492 с.
5. *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2 / Л. И. Седов. — М. : Наука, 1970. — 568 с.
6. *Бреховских, Л. М.* Введение в механику сплошных сред / Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров. — М. : Наука, 1982. — 337 с.
7. *Зельдович, Я. Б.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. — Изд. 3-е, испр. — М. : Физматлит, 2008. — 656 с.
8. *Кочин, Н. Е.* Теоретическая гидромеханика : ч. I / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — Изд. 4-е, перераб. — М. : Физматгиз, 1963. — 584 с.
9. *Кочин, Н. Е.* Теоретическая гидромеханика : ч. II / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — Изд. 4-е, перераб. — М. : Физматгиз, 1963. — 728 с.
10. *Эглит, М. Э.* Механика сплошных сред в задачах. Т. 1. Теория и задачи / под ред. М. Э. Эглит. — М. : Московский Лицей, 1996. — 396 с.
11. *Эглит, М. Э.* Механика сплошных сред в задачах. Т. 2. Ответы и решения / под ред. М. Э. Эглит. — М. : Московский Лицей, 1996. — 394 с.

Авторы выражают благодарность Анне Николаевне Зотовой за ценные замечания в процессе подготовки методического пособия.

СОДЕРЖАНИЕ

7. Гидродинамика несжимаемой жидкости.....	3
7.1. Общие уравнения несжимаемой жидкости	3
7.2. Потенциальное течение несжимаемой жидкости	7
7.3. Присоединенная масса	10
7.4. Движение шара в жидкости. Потенциальное обтекание	13
7.4.1. Распределение давления по поверхности шара	14
7.4.2. Присоединенная масса шара, движущегося в идеальной несжимаемой жидкости	15
Задачи к разделу 7	15
8. Плоское безвихревое течение несжимаемой жидкости	17
8.1. Функция тока и комплексный потенциал	17
8.2. Примеры комплексных потенциалов и соответствующих им плоских безвихревых потоков идеальной несжимаемой жидкости	19
Задачи к разделу 8	28
9. Потенциальные волны на поверхности тяжелой жидкости.....	30
9.1. Основные уравнения.....	30
9.2. Линии тока и траектории	36
9.3. Приближение мелкой воды	41
Задачи к разделу 9	49
10. Вихревое движение	52
10.1. Основные понятия.....	52
10.2. Теоремы Гельмгольца.....	55
10.3. Плоские вихревые течения.....	56
10.4. Динамика вихревых нитей	60
Задачи к разделу 10	61

11. Внутренние гравитационные волны	65
11.1. Основные уравнения внутренних волн	65
11.2. Бегущие внутренние волны.....	72
Задачи к разделу 11	74
12. Вязкая несжимаемая жидкость	75
12.1. Основные уравнения вязкой несжимаемой жидкости	75
12.2. Уравнение для завихренности в несжимаемой вязкой жидкости	80
12.3. Простейшие примеры течения вязкой жидкости	81
12.4. Число Рейнольдса	84
12.4.1. Общие понятия	84
12.4.2. Течение при малых числах Рейнольдса.....	85
Задачи к разделу 12.....	89
13. Пограничный слой.....	91
13.1. Пограничный слой на тонкой полубесконечной пластинке.....	91
13.2. Пограничный слой на телах, обтекаемых неоднородным потоком	97
13.3. Ламинарный след	98
14. Гидродинамическая неустойчивость и переход к турбулентности	101
14.1. Неустойчивость тангенциального разрыва.....	101
14.2. Неустойчивость течений с плавным профилем скорости	104
14.3. Теорема Рэлея.....	108
14.4. Турбулентность	110
14.5. Полуэмпирические теории турбулентности	113
14.6. Турбулентный пограничный слой на плоской пластинке	115
ПРИЛОЖЕНИЯ	119
Приложение 1. Теория упругости.....	119
П.1.1 Кинематика деформируемого твердого тела	119
П.1.2. Тензор деформаций.....	119
П.1.3. Некоторые свойства тензора деформаций	120
П.1.4. Изменение объема.....	121
П.1.5. Термодинамика упругих деформаций. Закон Гука	124

П.1.6. Адиабатические и изотермические деформации.....	127
П.1.7. Динамика упругих деформаций.....	127
П.1.8. Однородные деформации	128
П.1.9. Произвольные деформации	130
П.1.10. Учет неравномерного нагрева.....	131
Приложение 2. Волны в упругом твердом теле	132
П.2.1. Волновое уравнение.....	132
П.2.2. Векторный и скалярный потенциалы	134
П.2.3. Отражение упругих волн на границе раздела двух сред	136
П.2.4. Волна Рэлея.....	141
Литература	143

Ю. И. Троицкая, И. А. Соустова,
О. С. Ермакова, Д. А. Сергеев

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

*Методическое пособие
для студентов физических специальностей
очной формы обучения*

Часть 2

ДИНАМИКА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. ВОЛНЫ И ТЕЧЕНИЯ

Редактирование и компьютерная верстка *Н. Н. Кралиной*

Подписано к печати 4.12.2019 г.
Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 9,25. Уч.-изд. л. 6,5.
Темплан 2019 г. Поз. 10. Тираж 100 экз. Заказ 86(2019).

Отпечатано в типографии ФИЦ «Институт прикладной физики РАН»,
603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46