

В. В. Железняков



ИЗЛУЧЕНИЕ  
В АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ  
ПЛАЗМЕ



ИЗДАНИЕ ОСУЩЕСТВЛЕНО ПРИ ФИНАНСОВОЙ ПОДДЕРЖКЕ  
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ  
СОГЛАСНО ПРОЕКТУ N 96-02-30104

Ж50  
УДК 523.03  
ББК В63

*В.В.Железняков. Излучение в астрофизической плазме.* — М.: «Янус-К»,  
1997. — 528 с.  
**ISBN 5-88929-032-0**

В монографии последовательно, с единой точки зрения изложены общие принципы генерации и переноса излучения в астрофизической плазме. Она отвечает потребностям как радио-, так и рентгеновской астрономии, а также оптической астрономии — в той мере, в какой она связана с процессами взаимодействия излучения с астрофизической плазмой. В книге приведен тот минимум, который необходим для понимания этих процессов и без которого невозможна серьезная интерпретация результатов многих астрономических наблюдений. Книгу могут использовать в своей работе астрофизики, радиоастрономы и специалисты в области физики плазмы; вместе с тем, она будет полезна для аспирантов и начинающих научных работников.

---

Сдано в набор 15.10.96. Подписано в печать 31.03.97.  
Формат 60x88/16. Бумага офсетная N 1. Печать офсетная.  
Уч.-изд л. 33,8. Физ.п.л. 33. Тираж 1000. Заказ N 1016

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ  
140010, Люберцы, Октябрьский пр-кт, 403

«Янус-К».

**Лицензия на издательскую деятельность N ЛР 064784 от 02.10.96.**

Оригинал-макет изготовил А.В.Сербер  
с использованием издательского пакета **Л<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X**

---

Ж  $\frac{1605040000-03}{22Н(03)-96}$  Без объявл.

© В.В.Железняков, 1997

ISBN 5-88929-032-0

# Оглавление

Предисловие .....	8
<b>Глава 1. Введение</b>	<b>11</b>
§1. Параметры астрофизической плазмы .....	11
1.1 Основные свойства плазмы и характерные частоты .....	12
1.2 Конкретные значения параметров плазмы и магнитных полей в космических условиях .....	15
1.3 Астрофизическая плазма в экстремальных условиях .....	26
§2. Электромагнитное излучение и его основные характеристики .....	30
2.1 Плотность энергии и интенсивность излучения .	30
2.2 Поляризация излучения. Тензор поляризации и параметры Стокса .....	36
§3. Источники и механизмы излучения. Определения и общие свойства .....	43
3.1 Спектральная мощность и плотность потока излучения от неподвижного и движущегося источников .....	43
3.2 Механизмы генерации излучения .....	53
<b>Глава 2. Электромагнитные волны в однородной плазме</b>	<b>57</b>
§4. Диэлектрическая проницаемость плазмы. Дисперсионные уравнения .....	58
4.1 Уравнения электромагнитного поля в среде . . .	58
4.2 Дисперсионные уравнения для нормальных волн	63
4.3 Тензор диэлектрической проницаемости плазмы	68
§5. Электромагнитные волны в однородной равновесной плазме .....	82
5.1 Волны в изотропной плазме .....	82
5.2 Обыкновенные и необыкновенные волны в магнитоактивной плазме .....	87
5.3 Плазменные волны .....	98
5.4 Моды Бернштейна .....	101
5.5 Волны в релятивистской плазме .....	106

5.6	Электромагнитные волны в системе “намагниченный вакуум + разреженная плазма” . . . . .	109
<b>Глава 3. Электромагнитные волны в регулярно неоднородной астрофизической плазме</b> . . . . . <b>113</b>		
§6.	Приближение геометрической оптики в неоднородной среде . . . . .	113
6.1	Характер геометрико-оптического решения . . .	113
6.2	Приближение геометрической оптики в изотропной и магнитоактивной плазме . . . . .	115
6.3	Лучевая трактовка . . . . .	121
6.4	Эффект группового запаздывания сигналов . . .	128
§7.	Линейное взаимодействие волн в магнитоактивной плазме . . . . .	131
7.1	Уравнения квазиизотропного приближения и основные параметры линейного взаимодействия .	133
7.2	Линейное взаимодействие в неоднородном магнитном поле . . . . .	141
7.3	Переходные слои и “предельная поляризация” излучения . . . . .	143
7.4	Прохождение волн через области с поперечным и нулевым магнитным полем . . . . .	147
7.5	Распространение волн через область с нулевым магнитным полем . . . . .	161
7.6	О роли линейного взаимодействия в космической плазме с неоднородным магнитным полем . . . .	167
7.7	Взаимодействие электромагнитных волн и проблема выхода радиоизлучения из плотной плазмы . . . . .	172
7.8	Линейное взаимодействие в системе “плазма + намагниченный вакуум”. . . . .	178
<b>Глава 4. Перенос излучения в астрофизической плазме</b> . . . . . <b>182</b>		
§8.	Перенос интенсивности излучения . . . . .	183
8.1	Уравнение переноса в изотропной плазме . . . .	183
8.2	Уравнение переноса в магнитоактивной плазме	192
8.3	Решение уравнений переноса излучения . . . . .	195
§9.	Перенос поляризации излучения . . . . .	206
9.1	Эффекты Фарадея и Коттона–Мутона в плазме	206

9.2	Уравнения переноса поляризации в магнитоактивной плазме . . . . .	215
9.3	Решение уравнений переноса поляризации . . . . .	225
<b>Глава 5. Собственное излучение астрофизической плазмы</b>		<b>233</b>
§10.	Излучение волн отдельными заряженными частицами . . . . .	234
10.1	Тормозное излучение . . . . .	234
10.2	Черенковское излучение . . . . .	239
10.3	Магнитотормозное излучение . . . . .	243
10.4	Циклотронное излучение . . . . .	252
10.5	Синхротронное излучение . . . . .	258
10.6	Магнитодрейфовое (изгибное) излучение . . . . .	270
§11.	Излучательная способность плазмы . . . . .	272
11.1	Тормозная излучательная способность . . . . .	273
11.2	Черенковская излучательная способность . . . . .	276
11.3	Циклотронная излучательная способность . . . . .	277
11.4	Гиротронная излучательная способность . . . . .	283
11.5	Синхротронная излучательная способность. Синхротронный механизм космического радиоизлучения . . . . .	291
<b>Глава 6. Поглощение излучения в равновесной астрофизической плазме</b>		<b>300</b>
§12.	Поглощение в изотропной плазме . . . . .	302
12.1	Поглощение из-за соударений. Тормозной механизм излучения . . . . .	302
12.2	Черенковское поглощение плазменных волн. Затухание Ландау . . . . .	313
§13.	Поглощение в магнитоактивной плазме . . . . .	314
13.1	Поглощение электромагнитных волн из-за столкновений между частицами . . . . .	315
13.2	Циклотронное поглощение. Механизм теплового циклотронного излучения . . . . .	319
<b>Глава 7. Реабсорбция и усиление излучения в неравновесной плазме</b>		<b>335</b>
§14.	Метод кинетического уравнения и метод коэффициентов Эйнштейна . . . . .	336

14.1	Метод кинетического уравнения. Усиление и кон- вективная неустойчивость . . . . .	336
14.2	Метод коэффициентов Эйнштейна . . . . .	341
14.3	Уравнение баланса населенностей . . . . .	347
§15.	Черенковская неустойчивость . . . . .	359
15.1	Неустойчивость и усиление в системе “поток – плазма” . . . . .	359
15.2	Бунемановская неустойчивость . . . . .	365
15.3	Конусная неустойчивость . . . . .	368
15.4	Квазилинейная теория пучковой неустойчивости	370
15.5	Плазменный механизм генерации радиоизлуче- ния . . . . .	377
§16.	Циклотронная неустойчивость . . . . .	380
16.1	Циклотронная неустойчивость продольных волн	380
16.2	Кинетическая неустойчивость на модах Берн- штейна . . . . .	382
16.3	Кинетическая неустойчивость в гибридной поло- се . . . . .	388
16.4	Гидродинамическая неустойчивость при двойном плазменном резонансе . . . . .	392
§17.	Синхротронная реабсорбция и неустойчивость . . . . .	397
17.1	Реоабсорбция синхротронного излучения . . . . .	398
17.2	Коэффициент реабсорбции для степенного энер- гетического спектра . . . . .	400
17.3	Синхротронная неустойчивость . . . . .	403
17.4	Отрицательная реабсорбция в системах с “моно- энергетическим” и степенным распределениями релятивистских электронов . . . . .	407
17.5	Заключительные замечания . . . . .	411
<b>Глава 8. Рассеяние излучения в астрофизической плаз-</b>		
	<b>ме</b>	<b>416</b>
§18.	Рассеяние волн на частицах в изотропной плазме . . . . .	417
18.1	Спонтанное и индуцированное рассеяние . . . . .	417
18.2	Интегральное кинетическое уравнение для фото- нов и уравнение переноса излучения . . . . .	419
18.3	Рассеяние излучения с одномерным спектром. Дифференциальная и интегральная перекачка . . . . .	423
18.4	Стабилизация пучковой неустойчивости . . . . .	427
18.5	Рэлеевское рассеяние в нерелятивистской плазме	432

18.6	Рассеяние на свободных частицах. Обратный эффект Комптона . . . . .	439
18.7	Дифференциальное уравнение Компанейца и комптонизация излучения . . . . .	447
§19.	Перенос излучения на циклотронных частотах . . . . .	457
19.1	Резонансное циклотронное рассеяние . . . . .	457
19.2	Уравнение переноса излучения на циклотронных частотах в бесстолкновительной плазме . . . . .	460
19.3	Решения уравнения переноса излучения в однородном и неоднородном магнитном поле . . . . .	464
19.4	Перенос излучения на циклотронных частотах с учетом столкновений в плазме . . . . .	472
19.5	Циклотронные особенности в спектрах магнитных вырожденных звезд . . . . .	480
§20.	Сила радиационного давления в плазме . . . . .	488
20.1	Радиационное давление при томсоновском рассеянии . . . . .	489
20.2	Сила давления излучения на циклотронных частотах . . . . .	491
20.3	Эффекты радиационного давления на магнитных вырожденных звездах . . . . .	497
§21.	Комбинационное рассеяние в плазме . . . . .	502
21.1	Законы сохранения при элементарных актах рассеяния . . . . .	503
21.2	Кинетическое уравнение для фотонов и уравнение переноса излучения . . . . .	507
21.3	Слияния и распады в изотропной плазме . . . . .	513
Список литературы . . . . .		518

# Предисловие

Интерес к проблеме взаимодействия излучения с астрофизической плазмой возник давно, в тесной связи с открытием радиоизлучения Солнца и Галактики, которое поставили перед теоретической радиоастрономией задачу о происхождении внеземного радиоизлучения. В семидесятые годы этот интерес резко возрос благодаря выдающимся успехам наблюдательной радиоастрономии — обнаружению новых типов источников внеземного излучения: пульсаров, квазаров и пр. Проблема происхождения их излучения заняла одно из центральных мест в астрофизике, формируя наши представления о природе излучающих объектов.

Исследования показали, что механизмы радиоизлучения, приходящего к нам на Землю из космического пространства, действуют главным образом в сильно ионизованном газе — плазме. Поэтому теория генерации и распространения электромагнитных волн в космической плазме послужила основой всех заключений о происхождении наблюдаемого космического радиоизлучения, с одной стороны, и о физических условиях и электромагнитных процессах в астрофизической плазме, — с другой.

В настоящее время область применения теории генерации и распространения электромагнитных волн в космических условиях уже вышла за рамки теоретической радиоастрономии и играет важную роль в астрофизике, включая астрофизику высоких энергий. Это связано с тем обстоятельством, что происхождение рентгеновского и гамма-излучения целого ряда астрофизических объектов (рентгеновских пульсаров и других источников рентгеновского излучения, космических гамма-всплесков и т.п.) невозможно понять без представлений, развитых в теории взаимодействия электромагнитного излучения с плазмой. Общие результаты исследований генерации и распространения волн в области плазменной астрофизики непосредственно могут быть перенесены и в земные условия, позволяя более полно понять сложные явления, с которыми имеет дело физика лабораторной плазмы. Вместе с тем, исследование излучения в плазме, находящейся в экстремальных астрофизических условиях (в сильных магнитных полях белых карликов и нейтронных звезд или сильных гравитационных полях в окрестности черных дыр) служит важным стимулом в развитии физики плазмы в целом. Фактически, физика космической плазмы в экстремальных условиях представляет собой новую область физики плазмы как части фундаментальной науки. Сказанное делает



очевидным первостепенное значение, которое приобрели исследования высокочастотных процессов в астрофизической плазме как для физики, так и для астрофизики.

Вопросы, относящиеся к электромагнитному излучению в астрофизической плазме, рассеяны по сотням статей. Они рассматривались в монографиях [1–9] и др., обычно лишь в той мере, в какой это необходимо для интерпретации явлений в конкретных объектах — межзвездной среде, солнечной короне и хромосфере и т.п., а также излагались в многочисленных книгах по физике плазмы — как часть общей теории излучения электромагнитных волн. Однако разнообразие и сложность механизмов излучения и процессов распространения электромагнитных волн в космических условиях и их значение оправдывает попытку написать монографию, в которой последовательно, с единой точки зрения были бы изложены общие принципы генерации и переноса излучения в астрофизической плазме; проблема интерпретации излучения конкретных объектов затрагивалась бы лишь для иллюстрации общих положений теории, а не рассматривалась в качестве основной цели. Именно такой характер изложения был принят в давно изданных книгах [10–12]. В последней монографии [12], опубликованной автором двадцать лет назад, изложение было ограничено кругом проблем, представляющих интерес для теоретической радиоастрономии — в соответствии с потребностями науки того времени. Однако, за прошедшие годы исключительное развитие получила рентгеновская астрономия: ее успехи, как уже говорилось, послужили импульсом для развития физики астрофизической плазмы в экстремальных условиях. В соответствии с этим, содержание книги, предлагаемой вниманию читателя, существенно отличается от старой версии: оно заметно расширено по сравнению с [12]; ее текст радикально переработан, особенно в частях, посвященных переносу излучения, линейному взаимодействию волн в плазме, гиротронному излучению и т.д.; введены также новые разделы, касающиеся эффектов комптонизации излучения, резонансного циклотронного рассеяния и давления излучения в плазме, свойств излучения в сверхсильных магнитных полях. Теперь эта книга, описывающая физические процессы взаимодействия излучения с астрофизической плазмой, отвечает потребностям как радио-, так и рентгеновской астрономии, а также оптической астрономии — в той мере, в какой она связана с этими процессами. В ней, как нам кажется, приведен тот минимум, который необходим для понимания процессов излучения и распространения электромагнитных волн в астрофизической плазме и без которого невозможна се-

рзкая интерпретация результатов многих астрономических наблюдений. Из сказанного, конечно, не следует, что сведений, приведенных в этой книге, вполне достаточно для работы в области теоретической астрофизики; то же самое, впрочем, можно сказать и о любом другом издании.

Библиография в книге не претендует на полноту. В ней преимущественно отражены работы, имеющие принципиальное значение, или работы, в которых тот или иной вопрос изложен полнее или в методически более удобной форме. На выборе последних работ неизбежно отразились привычки и вкусы автора. В предметный указатель не включались термины, упоминаемые в оглавлении.

Можно надеяться, что книга будет полезна для студентов, аспирантов и начинающих научных работников в качестве учебного пособия при изучении плазменной астрофизики и тех аспектов физики плазмы, которые связаны с излучением. Вместе с тем, эту книгу могут использовать в своей работе астрофизики, радиоастрономы и специалисты в области физики плазмы.

Автор благодарен Российскому фонду фундаментальных исследований, при финансовой поддержке которого (издательский проект 96-02-30104) стало возможным издание этой книги.

*В. В. Железняков*

# Глава 1

## Введение

Источниками внеземного радиоизлучения, как правило, служат области, занимаемые астрофизической плазмой. Это вполне естественно, так как в состоянии плазмы находится большая часть вещества во Вселенной, в том числе атмосферы звезд, межзвездная и межпланетная среда, ионосферы и магнитосферы планет и т.д. К немногим исключениям относятся лишь такие источники излучения, как поверхности и нижние атмосферы планет, которые мы здесь рассматривать не будем. При этом совсем неудивительным оказывается разнообразие характера и масштабов явлений в астрофизической плазме. Среди этих явлений основную роль играют электромагнитные процессы, определяющие динамику плазмы, условия движения и ускорения заряженных частиц в плазме, генерацию и перенос излучения. Ограничиваясь в дальнейшем рассмотрением лишь таких проблем, которые связаны с генерацией и распространением электромагнитных волн в плазме, а также воздействия излучения на плазму, мы остановимся во введении на тех характеристиках космической плазмы, которые в конечном счете определяют условия генерации и распространения электромагнитного излучения (§1), напомним основные характеристики электромагнитного излучения (§2), укажем на те свойства источников излучения астрономических объектов, которые связаны с их движением в пространстве, и введем основные определения, позволяющие дать общую классификацию механизмов излучения (§3).

### §1. Параметры астрофизической плазмы

Этот параграф мы начнем с определения понятия плазмы и указания условий, при которых наиболее отчетливо проявляются свойства плазмы, отличающие ее от других сред. Мы введем основные пара-

метры, характеризующие плазму и процесс ее взаимодействия с излучением. Затем мы кратко остановимся на свойствах астрофизической плазмы и приведем конкретные значения параметров для межзвездной и корональной плазмы, плазмы на магнитных звездах, в магнитосферах нейтронных звезд и т.д.

### 1.1. Основные свойства плазмы и характерные частоты

Плазмой обычно называют ионизованный газ, т.е. газ, содержащий свободные заряженные частицы. Чтобы пояснить это определение, заметим следующее. Если  $N_{\text{tot}}$  — концентрация всех атомов (или молекул) в среде, а  $N_a$  — концентрация нейтральных частиц, то отношение

$$\delta_i = \frac{N_{\text{tot}} - N_a}{N_{\text{tot}}} = \frac{N_+}{N_{\text{tot}}}, \quad (1.1)$$

есть степень ионизации среды ( $N_+$  — концентрация положительных ионов, т.е. число ионов в единице объема; наличие отрицательных ионов не учитываем для простоты). Значение  $\delta_i = 0$  соответствует обычному нейтральному газу;  $\delta_i = 1$  — полностью ионизованной плазме. Эта среда будет представлять собой идеальный газ, если средняя кинетическая энергия ее частиц много больше энергии взаимодействия между ближайшими частицами. Для полностью ионизованной плазмы  $N_+ = N_{\text{tot}}$  и  $N_a = 0$ , нагретой до температуры  $T$ , средняя кинетическая энергия частиц  $\mathcal{E}_{\text{kin}} \sim \kappa T$  ( $\kappa$  — постоянная Больцмана), а среднее межчастичное расстояние  $r_0 \sim n_+^{-1/3}$ . Для двух ближайших частиц с зарядом  $e$  энергия кулоновского взаимодействия  $\mathcal{E}_{\text{Coul}} \sim e^2/r_0$ , и, следовательно, условием газообразного состояния  $\mathcal{E}_{\text{kin}} \gg \mathcal{E}_{\text{Coul}}$  служит неравенство

$$\kappa T \gg e^2 N_+^{1/3}. \quad (1.2)$$

В космических условиях плазма, как правило, квазинейтральна, т.е. в ней (в среднем по большому объему) выполнено условие

$$\rho_+ + \rho_e \simeq 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho_+ = ZeN_+$  — плотность электрического заряда, связанная с положительными ионами,  $\rho_e = -eN$  — плотность заряда, связанная с электронами,  $e$  — величина заряда электрона,  $Ze$  — заряд иона,  $N$  — концентрация электронов). Если в состав плазмы входят лишь однократно ионизованные атомы ( $Z = 1$ ), условие квазинейтральности (1.3) означает, что  $N_+ \simeq N$ . Возможным исключением являются

магнитосферы вращающихся нейтронных звезд (пульсаров): для некоторых моделей магнитосфер характерно наличие резкого пространственного разделения частиц с зарядами противоположного знака, т.е. нарушение условия квазинейтральности (1.3).

Данное выше определение плазмы как квазинейтрального ионизованного газа не вполне удовлетворительно. Дело в том, что в реальных условиях газ всегда содержит некоторое количество ионизованных частиц и остается не ясным, при каких условиях он приобретает свойства, отличающие плазму от нейтрального газа. К таким свойствам плазмы относятся прежде всего (1) дебаевское экранирование, (2) плазменные колебания и (3) затухание Ландау. Как мы убедимся, условие, при котором ярко проявляются плазменные свойства и которое дополняет данное определение плазмы, сводится к требованию достаточно больших линейных размеров  $L$  для области, занимаемой ионизованным газом [13]:

$$L \gg D = \left( \frac{\kappa T}{8\pi e^2 N} \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Неравенство (1.4) при заданных  $L$  и  $T$  определяет те значения  $N$ , при которых ионизованный газ приобретает качества, характерные для плазмы. В конкретных астрофизических условиях благодаря колоссальным размерам  $L$  неравенство (1.4) обычно хорошо выполняется.

Введенная выше величина  $D$  называется дебаевским радиусом. Если в среде выполнено условие (1.3), то электрический потенциал от неподвижного заряда, внесенного в плазму, будет иметь вид

$$\varphi = q \frac{e^{-r/D}}{r}. \quad (1.5)$$

Из этой формулы следует, что заряд  $q$  экранируется возникающим вокруг него пространственным зарядом плазмы так, что на расстояниях  $r \gg D$  от него электрическое поле становится экспоненциально малым. Нетрудно убедиться, что неравенство (1.2) эквивалентно требованию большого числа частиц в сфере дебаевского радиуса. Указанный эффект дебаевского экранирования, очевидно, проявляется лишь в такой среде, где выполнен критерий (1.4), который и обеспечивает квазинейтральность плазмы.

Последний критерий делает возможным также существование в ионизованном газе слабозатухающих плазменных колебаний (плаз-

менных волн) с циклической частотой  $\omega$ , близкой к

$$\omega_L = \left( \frac{4\pi e^2 N}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (1.6)$$

Здесь  $m_e$  — масса покоя электрона,  $\omega_L$  — так называемая ленгмюровская или плазменная частота (см. подробнее §5). Плазменные волны слабо затухают, если их длина волны  $\lambda \gg 2\pi D$ . В случае же, когда  $\lambda \lesssim 2\pi D$ , возникает сильное бесстолкновительное затухание (затухание Ландау), вследствие чего эти волны поглощаются за время  $t \lesssim 1/\omega$  и практически не могут распространяться в плазме (см. замечания в §5; подробное рассмотрение этого затухания дано в гл. 6).

До сих пор речь шла о плазме без постоянного магнитного поля. Если же в плазме есть магнитное поле с магнитной индукцией  $B_0$ , то оно существенно меняет траектории движения заряженных частиц; без учета столкновений между частицами они представляют собой винтовые линии с осью, параллельной вектору  $B_0$ . Частота вращения нерелятивистского электрона при движении по винтовой линии в магнитном поле (электронная гирочастота) равна

$$\omega_B = \frac{eB_0}{m_e c}. \quad (1.7)$$

Для релятивистского электрона с массой  $m = \mathcal{E}/c^2$  ( $\mathcal{E}$  — энергия частицы,  $c$  — скорость света) частота вращения определяется релятивистской гирочастотой

$$\Omega_B = eB_0/mc = \omega_B m_e c^2 / \mathcal{E}. \quad (1.8)$$

Для нерелятивистских ионов частота вращения совпадает с ионной гирочастотой

$$\omega_{Bi} = eB_0/m_i c, \quad (1.9)$$

а для релятивистских ионов — с релятивистской ионной гирочастотой

$$\Omega_{Bi} = \omega_{Bi} m_i c^2 / \mathcal{E} \quad (1.10)$$

( $m_i$  — масса покоя иона).

Учитывая необходимость частого перехода от величины магнитного поля и электронной концентрации к значениям электронной и ионной гирочастот и собственной частоты плазмы, приведем соответствующие численные формулы:

$$\omega_L \simeq 5.64 \cdot 10^4 N^{1/2}, \text{ с}^{-1}, \quad f_L = \omega_L / 2\pi \simeq 8.97 \cdot 10^3 N^{1/2} \text{ Гц}; \quad (1.11)$$

$$\omega_B \simeq 1.76 \cdot 10^7 B_0 \text{ с}^{-1}, \quad f_B = \omega_B/2\pi \simeq 2.81 \cdot 10^6 B_0 \text{ Гц}; \quad (1.12)$$

$$\omega_{B_p} \simeq 9.6 \cdot 10^3 B_0 \text{ с}^{-1}, \quad f_{B_p} = \omega_{B_p}/2\pi \simeq 1.53 \cdot 10^3 B_0 \text{ Гц}. \quad (1.13)$$

Здесь  $N$  — в  $\text{см}^{-3}$ ,  $B_0$  — в Гс; ионная гирочастота записана для протонов с массой  $m_i = m_p \simeq 1.8 \cdot 10^3 m_e$  (эту гирочастоту обозначаем через  $\omega_{B_p}$  и  $f_{B_p}$ ).

Наряду с указанными выше характерными частотами при описании плазмы существенную роль играют и другие параметры, в частности, эффективная частота столкновений между частицами  $\nu_{\text{eff}}$  (см. гл. 6), а также тепловые скорости электронов,

$$v_T = \sqrt{\kappa T/m_e} \simeq 3.89 \cdot 10^5 T^{1/2} \text{ см/с}, \quad (1.14)$$

и протонов,

$$v_{T_p} = \sqrt{\kappa T/m_p} \simeq 9.08 \cdot 10^3 T^{1/2} \text{ см/с}, \quad (1.15)$$

в нерелятивистской равновесной плазме. В формулах (1.14), (1.15) кинетическая температура плазмы  $T$  выражена в кельвинах.

## 1.2. Конкретные значения параметров плазмы и магнитных полей в космических условиях

Из предыдущего раздела ясно, что важнейшими параметрами плазмы, в значительной степени определяющими ее электромагнитные свойства, являются концентрация электронов  $N$ , величина магнитного поля  $B_0$  и кинетическая температура  $T$  (последний параметр — для плазмы с равновесным распределением по скоростям). Масштабы изменения этих параметров в космической плазме колоссальны даже в том случае, если ограничиться областями, которые являются непосредственными источниками наблюдаемого излучения. Действительно, электронная концентрация  $N$  опускается до значений  $\sim (1-5) \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-3}$  в межзвездной среде (в областях HI) и достигает  $10^{12} \text{ см}^{-3}$  в основании солнечной хромосферы и в магнитосферах нейтронных звезд — пульсаров.<sup>1</sup> Измерения и существующие в настоящее время оценки магнитного поля на поверхности нейтронных звезд  $B_0 \sim 10^{11} - 10^{13}$  Гс определяют, пожалуй, максимальные значения магнитного поля, которые могут реализоваться (или реализуются) в астрономических объектах. Противоположным примером слабых магнитных полей может служить межзвездная среда, где обычное значение  $B_0 \sim 10^{-6}$  Гс.

<sup>1</sup>Для нейтронных звезд здесь указаны возможные значения  $N$  в ближайшей окрестности звезды в соответствии с моделью магнитосферы нейтронной звезды, предложенной в [14].

Таблица 1  
 Типичные параметры астрофизической плазмы: электронная концентрация  $N$  в  $\text{см}^{-3}$ ; индукция магнитного поля  $B_0$  в Гс; кинетическая температура  $T$  в К; плазменная частота  $f_L$ , электронная и ионная гирочастоты  $f_B$  и  $f_{Bp}$  в Гц; средняя тепловая скорость электронов  $v_T$  и протонов  $v_{Tp}$  в  $\text{см с}^{-1}$ .

Объект	$N$	$B_0$	$T$	$f_L$	$f_B$	$f_{Bp}$	$v_T$	$v_{Tp}$
Межзвездная среда:								
— области H I	$10^{-2}$	$10^{-6}$ – $10^{-5}$	$10^2$	$10^3$	3–30	$2 \cdot 10^{-3}$ – $2 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^6$	$10^5$
— области H II	$10^2$	$10^{-6}$	$10^4$	$10^5$	3	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^7$	$10^6$
Межпланетная среда	10	$10^{-4}$	$10^4$	$3 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^2$	$1.5 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^7$	$10^6$
Остатки сверхновых (Крабовидная туманность)	$10^3$	$10^{-3}$	$2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^3$	2	$5 \cdot 10^7$	$10^6$
Юпитер:								
— ионосфера	$3 \cdot 10^5$	10	$5 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^7$	$1.5 \cdot 10^4$	$10^3$	$10^7$	$3 \cdot 10^5$
— магнитосфера (плазменный тор Ио)	$10^3$	$10^{-1}$	$10^4$	$3 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$1.5 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^7$	$10^6$
Солнце:								
— хромосфера	$10^9$ – $10^{11}$	$1$ – $4 \cdot 10^3$	$10^4$	$3 \cdot (10^8$ – $10^9)$	$3 \cdot 10^6$ – $10^{10}$	$2 \cdot 10^3$ – $6 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^7$	$10^6$
— внутренняя корона	$10^8$	$1$ – $10^3$	$10^6$	$10^8$	$3 \cdot (10^6$ – $10^9)$	$2 \cdot (10^3$ – $10^6)$	$4 \cdot 10^8$	$10^7$
Магнитные белые карлики	-	$10^8$	-	-	$3 \cdot 10^{14}$	$2 \cdot 10^{11}$	-	-
Магнитосферы пульсаров	$10^{12}$	$10^{12}$	-	$10^{10}$	$3 \cdot 10^{18}$	$2 \cdot 10^{15}$	-	-



В отношении кинетических температур разброс также велик — от  $10^2$  К в областях Н I межзвездной среды до  $10^6$  К в солнечной короне и  $10^8$  К в источниках излучения рентгеновских пульсаров. Мы не говорим уже о магнитосферах нейтронных звезд, где плазма, вполне вероятно, является релятивистской (т.е. энергии электронов  $\mathcal{E} \gg m_e c^2$ ). Если бы такая плазма оказалась равновесной (что сомнительно), то указанные энергии электронов соответствовали бы кинетической температуре  $T \sim \mathcal{E}/k \gg 10^{10}$  К.

При решении многих задач, связанных с генерацией и распространением электромагнитных волн в космической плазме, достаточно знать порядки величин характерных параметров. Ориентироваться в этих величинах поможет Табл. 1.1, в которой указаны значения  $N$ ,  $B_0$  и  $T$  в космической плазме, а также величины связанных с ними частот  $f_L$ ,  $f_B$ ,  $f_{B_p}$  и тепловых скоростей  $v_T$ ,  $v_{T_p}$  (см. (1.11)-(1.15)). Ясно, однако, что во многих случаях даже для предварительного анализа условий генерации и распространения волн в космических условиях необходимы исходные данные о распределении электронной концентрации, магнитного поля и температуры в источнике излучения, имеющие более детальный характер. Такие данные получают или путем непосредственных измерений на космических ракетах, или их дают астрономические наблюдения, или же построение модели излучающего источника ведется, исходя из каких-либо общих соображений о природе объекта, которые затем проверяются и изменяются в зависимости от степени соответствия выбранной модели источника и наблюдаемых характеристик его излучения.

Например, при анализе процессов генерации и распространения электромагнитных волн в Галактике исходят из того, что близ галактической плоскости межзвездная среда состоит из областей двух типов, содержащих ионизованный (Н II) и неионизованный (Н I) водород с разной электронной концентрацией  $N$  и кинетической температурой  $T$  (см. Табл. 1.1). Вдали от плоскости Галактики доля областей Н II убывает, так как эти области образуются вокруг горячих звезд, составляющих плоскую подсистему. В областях Н II степень ионизации  $\delta_i$  близка к единице. Наоборот, в областях Н I величина  $\delta_i \sim 10^{-3}$ , т.е. содержание нейтральных атомов водорода в  $10^3$  раз превышает количество ионизованных частиц.

Относительно магнитного поля в межзвездной среде раньше предполагали обычно, что его силовые линии имеют хаотическую форму с областями квазиоднородного поля линейным размером 10-100 пк. Однако такую структуру поля в галактическом диске оказалось трудно

согласовать с данными поляризационных наблюдений света звезд и космического радиоизлучения. В настоящее время считается, что в спиральных рукавах Галактики (или по крайней мере в местном рукаве, где расположено Солнце) магнитное поле преимущественно ориентировано вдоль рукавов и, возможно, обладает также винтовой компонентой с осью вдоль рукава. Соответственно, неоднородности межзвездной среды (“облака”) в галактическом диске не имеют изометрической формы (с одинаковым средним линейным размером во всех направлениях): они вытянуты вдоль силовых линий магнитного поля [15–17].

Для более подробного знакомства с физическими условиями в межзвездной среде следует обратиться к монографии [2]. О свойствах областей H I см. [18]; об условиях в центре Галактики — [19]. Мы не останавливаемся здесь также на обсуждении характеристик плазмы в расширяющихся оболочках сверхновых и в межгалактической среде. Ознакомиться с этими вопросами можно по работам [20, 21].

Межпланетная среда формируется в основном за счет солнечного ветра — плазмы, истекающей из верхней части солнечной короны. Скорость ветра на орбите Земли составляет  $3 \cdot 10^7 - 10^8$  см/с, плотность порядка  $5-20$  см<sup>-3</sup>, электронная температура 20–40 эВ. Межпланетное магнитное поле имеет спиральную структуру, форма которой обусловлена вращением Солнца. На орбите Земли величина магнитного поля меняется в пределах  $5 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-4}$  Гс и убывает с ростом расстояния от Солнца  $r$  примерно как  $1/r$ . О характере межпланетной среды см. подробнее [22].

Судя по результатам прямых измерений, проведенных на космических станциях “Пионер” и “Вояджер”, магнитное поле Юпитера имеет в целом дипольный характер, с магнитным моментом, ориентированным противоположно земному. Направление диполя составляет с осью вращения планеты угол  $\approx 10^\circ$ . Нерегулярность магнитного поля проявляется в сложной структуре распределения по поверхности планеты и сильных изменениях по величине (в пределах 3–14 Гс).

Затменные радиоизмерения на космических аппаратах (во время их захода за диск и появления из-за диска планеты) позволили измерить распределение электронной плотности и температуры в ионосфере Юпитера. Максимальные значения  $N$  достигают нескольких единиц на  $10^5$  см<sup>-3</sup>, с отчетливой экваториальной аномалией — уменьшением  $N$  на порядок по сравнению со значением электронной концентрации в высоких широтах. Максимальные значения электронной температуры несколько превышают  $10^3$  К.

В обширной магнитосфере Юпитера (с размерами около 50–100 радиусов планеты) максимальные значения плотности плазмы  $N \simeq 3 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$  локализованы в плазменном торе Ио, вытянутом вдоль орбиты спутника Ио — основного источника плазмы и энергичных частиц в магнитосфере Юпитера. Часть тора, обращенная к планете, состоит из относительно холодной плазмы (несколько эВ на частицу). Более протяженная (и более разреженная) внешняя часть тора состоит из горячей плазмы (с энергией  $\sim 80$  эВ на частицу). Магнитосфера содержит также высокоэнергичную компоненту из частиц, захваченных магнитным полем планеты и образующих ее радиационные пояса.

Отметим, что предварительные данные о магнитном поле и радиационных поясах Юпитера были получены (еще до начала прямых измерений на космических аппаратах) радиоастрономическими методами — при изучении дециметрового радиоизлучения этой планеты (см. [3, 23, 24]).

Магнитное поле Сатурна более чем на порядок слабее, чем на Юпитере: поверхностные значения располагаются в интервале от 0.2 до 0.8 Гс. Заметный наклон магнитного диполя к оси планеты отсутствует. Максимальная электронная концентрация в ионосфере Сатурна достигает  $2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$ , вероятно, с такой же экваториальной аномалией, как на Юпитере. Температура достигает значений около 750 К. Размеры магнитосферы значительно меньше, чем у Юпитера — около 16–22 радиусов планеты. В районе тора Дионы–Тетиса (от 4 до 8 радиусов Сатурна от центра планеты) плазма имеет концентрацию порядка нескольких электронов на  $\text{см}^3$  и температуру в десятки эВ. В магнитосфере Сатурна также существуют энергичные частицы. Как и в магнитосфере Юпитера, дрейф частиц в неоднородном магнитном поле приводит к появлению азимутального электрического тока, который существенно искажает геометрию магнитного поля в магнитосфере. Подробнее о магнитных полях и физических условиях в плазменных оболочках планет-гигантов см. [25–28].

Обращаясь к солнечной короне, заметим, что при расчетах и оценках электронной концентрации часто используют эмпирическую формулу Баумбаха–Аллена

$$N(R) = 10^8 \left[ 1.55 \left( \frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-6} + 2.99 \left( \frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-16} \right] \text{ см}^{-3}. \quad (1.16)$$

Определяемые (1.16) значения  $N(R)$  (где  $R$  — расстояние от центра Солнца;  $R_{\odot}$  — радиус фотосферы) занимают промежуточное положение

ние между распределениями электронной концентрации в экваториальной зоне близ максимума и минимума солнечной активности. Графики зависимостей электронной концентрации  $N(R/R_\odot)$  и плазменной частоты  $f_L(R/R_\odot)$ , соответствующие формуле Баумбаха – Аллена (1.16), приведены на Рис. 1. Здесь же указано распределение  $N$  и  $f_L$  в корональном луче, опирающемся на центр активности в фотосфере (распределение Ньюкирка [29]), а также распределения  $N$  и  $f_L$ , полученные при анализе радиоданных [30]. Отметим, что распределения Баумбаха-Аллена и Ньюкирка удовлетворительно согласуются с результатами измерений интенсивности рассеяния солнечного света электронами короны.

Наличие в спектре короны широких эмиссионных линий многократно ионизованных атомов, большая протяженность короны и высокая интенсивность ее теплового радиоизлучения свидетельствуют о высокой кинетической температуре корональной плазмы  $T \sim 10^6$  К. Она слабо меняется с высотой, оставаясь близкой к  $10^6$  К во внутренних областях короны и, по-видимому, в несколько раз повышается в слоях, расположенных над центрами активности. Высокая температура приводит к тому, что корональная материя (в основном водород) находится в состоянии почти полностью ионизованной плазмы: нейтральной остается только  $10^{-7}$  часть всех атомов водорода.

Отметим, что наблюдения других звезд в рентгеновском диапазоне указывают на более высокую температуру их корон ( $\sim 10^7$  К). Горячие короны были обнаружены у звезд главной последовательности практически всех спектральных классов [31].

В высоких гелиографических широтах, где нет центров активности, общее магнитное поле Солнца, вероятно, близко к дипольному, а его величина на уровне фотосферы не превышает 1 Гс. В низких широтах это поле маскируется более сильными полями (до  $3 \cdot 10^3$  Гс на уровне фотосферы), связанными с центрами активности.

Более высокая активность наблюдается у вспыхающих звезд типа UV Ceti, принадлежащих к красным карликам класса dMe на главной последовательности. На этих объектах звездные пятна аналогичны солнечным, но покрывают большую площадь (10–20 % поверхности звезды) и, вероятно, обладают более сильными магнитными полями (до  $10^4$  Гс). Во время звездного обзора на спутнике “Эйнштейн” было обнаружено рентгеновское излучение горячей плазмы в окрестности звезд типа UV Ceti (т.е., звездные короны).

Отыскание распределения магнитных полей в солнечной короне представляет собой трудную задачу. Косвенным образом о форме

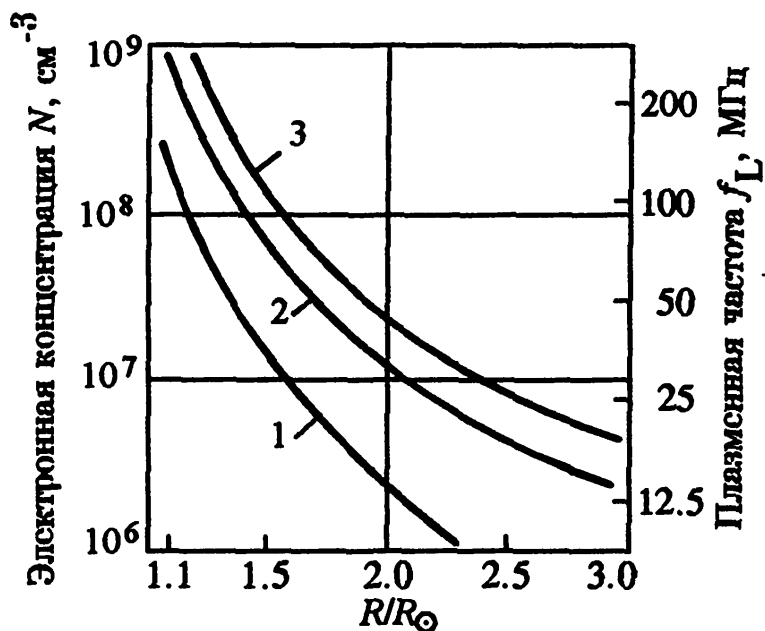


Рис. 1. Распределение электронной концентрации  $N$  и плазменной частоты  $f_L$  в спокойной короне и над центром активности: 1 — корона (Баумбах–Аллен); 2 — корональный луч (Ньюкирк); 3 — распределение над центром активности по радиоданным

магнитных полей можно судить по снимкам короны в оптике и рентгеновских лучах, а также использовать методы расчета по известным из оптических наблюдений магнитным полям на поверхности Солнца (в фотосфере) и в пренебрежении электрическими токами в корональной плазме [32]. Такое приближение становится заведомо неверным на расстояниях  $R > 2.5-3 R_{\odot}$ , где плотность энергии магнитного поля  $B_0^2/8\pi$  становится меньше плотности кинетической энергии солнечного ветра  $\rho v^2/2$ ; благодаря последнему обстоятельству магнитное поле приобретает там квазирадиальный характер. При дальнейшем удалении от Солнца корона постепенно переходит в межпланетную плазму.

Предварительный анализ условий излучения из активных областей короны и хромосферы обычно основывается на более примитивных моделях магнитного поля, связанного с солнечными пятнами. Так, например, поле одиночного (униполярного) пятна аппроксимируется полем круглого стержневого магнита диаметром  $2b$  и длиной  $l \gg b$ , один полюс которого расположен на уровне фотосферы. При этом величина магнитного поля на оси пятна (т.е. на нормали к поверхности Солнца, проходящей через центр пятна) равна

$$B_0 = B_b \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right), \quad (1.17)$$

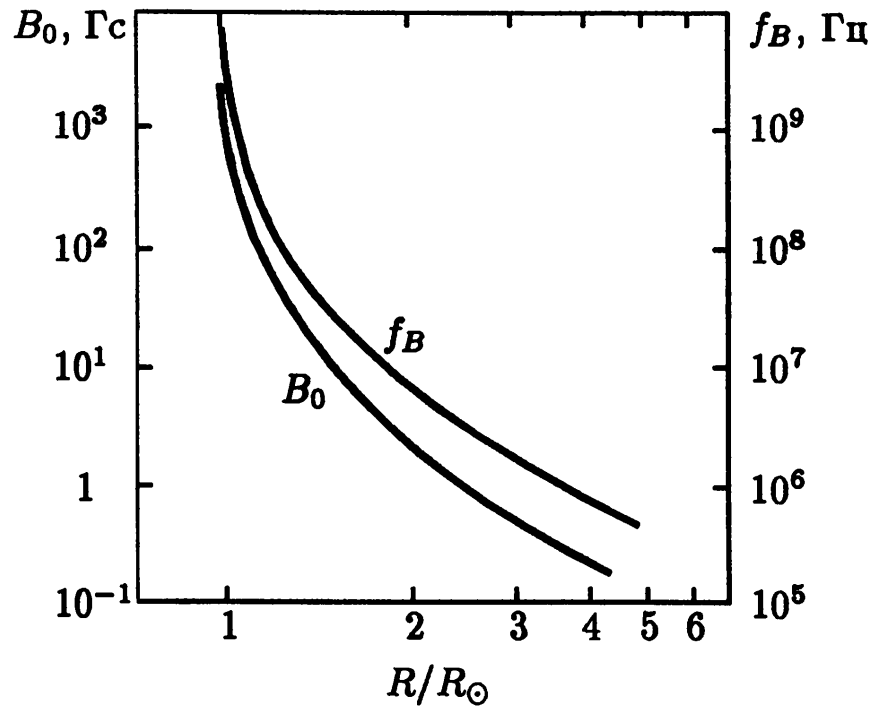


Рис. 2. Распределение магнитного поля  $B_0$  и гирочастоты  $f_B$  на оси униполярного солнечного пятна с  $B_b = 2.5 \cdot 10^3$  Гс и  $h = 10^{19}$  см

где  $B_b$  — поле в основании пятна,  $h$  — высота над фотосферой. Значения магнитного поля  $B_0$  в хромосфере и короне, определенные по формуле (1.17), вместе с величиной электронной гирочастоты  $f_B$  (1.12) приведены на Рис. 2. Для конкретных расчетов иногда удобны другие модели магнитного поля над пятнами, в которых поле создается элементарными магнитными диполями, размещенными под фотосферой.

Конфигурацию силовых линий магнитного поля над биполярными группами пятен можно представить, обратившись к Рис. 3. На рисунке учтено, что высоко в короне магнитное поле приобретает квазирадиальный характер и над активными областями. Благодаря последнему обстоятельству над биполярными группами возможно появление поверхностей с нулевым магнитным полем (так называемых нейтральных поверхностей или слоев). Поверхности  $B_0 = 0$  могут разделять также соседние биполярные группы или иметь более сложную конфигурацию, отражающую сложную структуру магнитных полей в активных областях. Если статическое равновесие корональной плазмы в окрестности нейтральных слоев обеспечивается за счет повышения ее плотности, такие слои можно заметить на снимках солнечной короны. О нескольких случаях такой регистрации сообщалось, например, в [33]. В §7 и §13 обсуждается возможность регистрации токовых слоев радиоастрономическими методами.

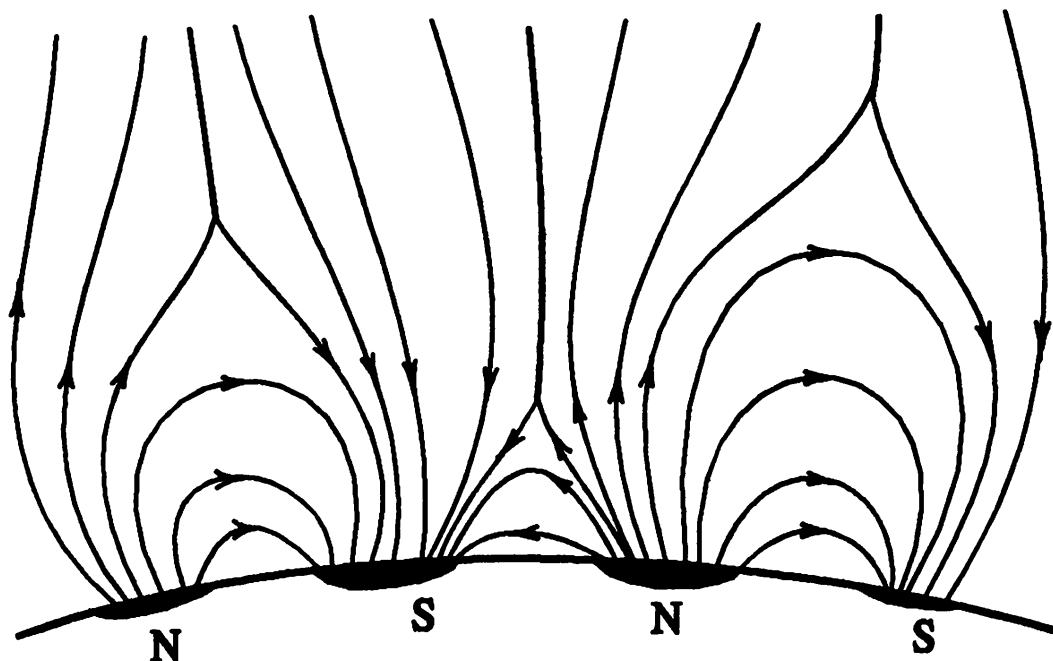


Рис. 3. Силовые линии магнитного поля над биполярными группами солнечных пятен (схематически). Жирными линиями отмечены пересечения нейтральных поверхностей с плоскостью чертежа

Общее магнитное поле Солнца ( $\sim 1$  Гс) значительно слабее полей активных областей и солнечных пятен. Более сильные магнитные поля существуют на пекулярных (Ap) звездах: у многих из них обнаружены (по зеемановскому расщеплению узких спектральных линий в оптике) поля до нескольких единиц на  $10^4$  Гс. Форма профиля линий указывает, что магнитные поля этих звезд не имеют локального характера типа полей солнечных пятен, а принадлежат звезде в целом. Наиболее адекватной моделью магнитного поля Ap-звезд служит поле магнитного диполя, помещенного в центре звезды и наклоненного к оси вращения, хотя обсуждаются и более сложные варианты [34].

Вопрос о наличии корон у магнитных Ap-звезд в настоящее время неясен. Судя по рентгеновским наблюдениям на "Эйнштейне", нормальные звезды класса A имеют короны. Рентгеновское излучение обнаружено также из двойных систем  $\alpha$  Гончих Псов и 46 Дракона, в состав которых входят магнитные Ap-звезды. К сожалению, компоненты двойной системы в рентгене не разделены, и принадлежность излучающей горячей плазмы (короны) именно к магнитной Ap-звезде, а не к ее компаньону, не установлена. Отметим, что возможен более чувствительный способ обнаружения горячих корон у магнитных Ap-звезд по их циклотронному микроволновому радиоизлучению. Однако, он тоже не привел пока к успеху [35, 36]. Отсутствие заметного теплового радиоизлучения позволяет утверждать, что кинетическая температура и электронная концентрация в коронах Ap-звезд меньше

$5 \cdot 10^6$  К и  $10^9$  см $^{-3}$ , соответственно [37].

В отношении величины поля магнитные белые карлики занимают промежуточное положение между магнитными Ар-звездами и нейтронными звездами. У большинства известных карликов (их примерно два с половиной десятка) магнитные поля расположены в интервале  $10^7$ – $5 \cdot 10^8$  Гс. О величине магнитных полей на этих объектах судят в основном или по Зееман-эффекту (для относительно слабых магнитных полей  $\sim 10^7$  Гс) или по степени линейной и циркулярной поляризации в оптическом континууме. У объектов с максимальным полем она достигает десятка процентов [38]. Дополнительные сведения о магнитных полях можно получить для тех звезд, в спектрах которых имеются полосы в поглощении, формируемые за счет циклотронного рассеяния. Например, по оценкам [39] магнитный белый карлик GD 229 с широкой полосой поглощения в ультрафиолетовом спектре обладает магнитным полем  $B_0 \sim 10^9$  Г.

Вопрос о наличии корон у магнитных белых карликов в настоящее время можно считать открытым. Благодаря сильной гравитации корона с температурой  $T \sim 10^7$  К будет прижата к поверхности звезды: характерная шкала высоты составит в этом случае всего лишь 1% от радиуса звезды. Наблюдения магнитного белого карлика GR 290 на спутнике *ROSAT* позволили установить только верхний предел возможной светимости в мягком рентгеновском диапазоне. Это позволяет утверждать, что электронная концентрация в короне меньше  $4 \cdot 10^{11}$  см $^{-3}$  [40]. Наличие циклотронных особенностей в спектрах белых карликов может служить более чувствительным средством обнаружения плазменных оболочек вокруг этих звезд. Так, в полях  $B_0 \sim 10^7$ – $10^8$  Гс заметные циклотронные особенности возникают при концентрации частиц в короне  $N \gtrsim 10^7$ – $10^8$  см $^{-3}$  [41].

Примерно такие же значения электронной концентрации объясняют формирование полос поглощения у горячих магнитных белых карликов с сильным магнитным полем и температурой фотосферы  $T_{\text{ph}} \gtrsim 2 \cdot 10^4$  К. Примерами таких карликов могут быть GD 229 and PG 1031+234 [39]. Однако, в этом случае сила радиационного давления на циклотронных частотах, создаваемая излучением фотосферы, превалирует над силой гравитации. В результате создается протяженная плазменная оболочка вокруг звезды с возможным повышением концентрации плазмы в плоскости магнитного экватора — так называемый радиационный дискон [39]. Циклотронное рассеяние излучения фотосферы в такой оболочке и приводит к появлению ультрафиолетовой депрессии в спектрах указанных объектов GD 229 и



PG 1031+234.

Что касается параметров, строения и динамики плазменных оболочек нейтронных звезд, то эта проблема еще далека от своего решения. Ясно, что она весьма важна не только в плане объяснения феноменов радио- и рентгеновских пульсаров, космических гамма-всплесков, но и с более общей точки зрения поведения релятивистской космической плазмы в сверхсильных магнитных полях. О предполагаемых условиях в магнитосферах нейтронных звезд см. монографии [9, 42]; здесь мы ограничимся лишь некоторыми замечаниями.

Прежде всего, отметим, что ожидаемая величина магнитного поля на поверхности нейтронных звезд может достигать  $10^{12} - 10^{13}$  G. Эта оценка следует из условия сохранения магнитного потока обычной звезды, обладающей высокой электропроводностью, при ее коллапсе до размеров нейтронной звезды [43]. К таким же оценкам величины магнитного поля приводят также наблюдаемые величины замедления вращения нейтронной звезды, если предположить, что оно вызвано потерями энергии за счет низкочастотного излучения звезды – вращающегося магнитного диполя в вакууме. На существование магнитного поля у нейтронных звезд – пульсаров указывает поляризованный характер их радио- и оптического излучения. Непосредственные измерения магнитного поля по частотам циклотронных линий, регистрируемых в спектрах нейтронных звезд – рентгеновских пульсаров Her X-1 и 4U 0115+69 дают значения  $4 \cdot 10^{12}$  Гс и  $10^{12}$  Гс, соответственно [44–46].

Начиная с наблюдений на межпланетных станциях *Венера* [47], в спектрах космических гамма-всплесков обнаруживались циклотронные линии в поглощении, указывающие на присутствие в источниках космических гамма-всплесков сильных магнитных полей того же порядка, что и на рентгеновских пульсарах. Затем спутником *Ginga* и станцией *Фобос-2* были обнаружены линии на кратных частотах, что послужило дополнительным аргументом в пользу интерпретации этих особенностей как циклотронных линий на первой и второй гармониках электронной гирочастоты [48, 49]. Все эти данные послужили также аргументом в пользу связи космических гамма-всплесков с нейтронными звездами, расположенными в нашей Галактике. Однако, последние измерения частотных спектров и локализация источников гамма-всплесков на борту орбитальной обсерватории *GRO* противоречат результатам предыдущих исследований. Они не дают указаний на существование циклотронных линий и, вместе с тем, указывают на высокую изотропию в расположении источников всплесков на небесной сфере. Оба эти обстоятельства заставляют обсу-

ждать (наряду с гипотезой о галактическом происхождении наблюдаемых гамма-всплесков и возможностью их генерации на одиночных нейтронных звездах с сильным магнитным полем) альтернативное представление о том, что источники гамма-всплесков располагаются вдали от нашей Галактики [50]. Сравнительное обсуждение обоих вариантов происхождения космических гамма-всплесков (галактическую и космологическую гипотезы) можно найти в [51].

Весьма мало данных имеется о концентрации плазмы вблизи нейтронных звезд. Поскольку радиус нейтронной звезды составляет всего лишь около 10 км, а ее масса — порядка массы Солнца, ускорение силы тяжести на поверхности звезды достигает значений  $g \sim 10^{14} \text{ см с}^{-2}$ . В таких условиях приведенная высота горячей атмосферы с температурой  $T \sim 10^6 \text{ К}$  всего лишь около 1 см.

Отсюда ясно, что в случае, когда плотность частиц в магнитосфере определяется силой тяжести и температурой, протяженная оболочка вокруг нейтронной звезды отсутствует. В действительности же распределение частиц вблизи звезды может определяться не силой тяжести и температурой, а электромагнитными силами. Конкретно, для вращающейся звезды с сильным магнитным полем  $B_0 \sim 10^{12} \text{ Гс}$  и магнитным моментом  $\mu$ , ориентированным вдоль оси вращения  $\Omega$ , в создании магнитосферы решающую роль играет электрическое поле униполярной индукции  $E_0 \sim 10^{10} \text{ ед. CGSE}$  [14]. Пространственный заряд может заметно скомпенсировать поле униполярной индукции  $E_0$ , когда концентрация заряженных частиц достигает значений  $N \sim 10^{12} \text{ см}^{-3}$ . Эти частицы образуют магнитосферу; появление частиц возможно за счет аккреции межзвездной плазмы на звезду или в результате рождения электрон-позитронных пар близ поверхности звезды [52, 53].

Горячая плазма на нейтронной звезде может также образовывать сравнительно тонкий плотный слой. Так, в случае, если источниками гамма-всплесков GB 870303 и GB 880205, наблюдавшихся со спутника *Ginga*, действительно являются нейтронные звезды, то параметры этих линий можно объяснить, предполагая, что линии образуются за счет циклотронного рассеяния в слое плазмы с продольной (вдоль магнитного поля) температурой 20–140 кэВ. Число частиц в этом слое вдоль луча зрения составляет  $(3 - 9) \cdot 10^{20} \text{ см}^{-2}$  [54]. Если толщина плазменного слоя порядка приведенной высоты атмосферы ( $\sim 10^3 \text{ см}$  для принятых значений температуры), то концентрация частиц будет порядка  $(3 - 9) \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ .

### 1.3. Астрофизическая плазма в экстремальных условиях

Физические условия, в которых существует астрофизическая плазма, приобретают экстремальный характер при (а) исключительно высокой плотности, (б) в сильных гравитационных полях, (в) в сильных электрических и магнитных полях. Высокая плотность (порядка ядерной) достигается в недрах нейтронных звезд, еще более высокие значения плотности реализовались в самом начале расширения Вселенной. Сильные гравитационные поля (и их градиенты) имеют место в окрестности черных дыр близ сферы Шварцшильда. И, наконец, сильные магнитные поля, как уже отмечалось, характерны для звезд, находящейся на последней стадии эволюции, а именно — для магнитных белых карликов и нейтронных звезд. Первые два условия экстремальности остались за пределами этой книги. Наше внимание будет сосредоточено на свойствах плазмы в сильных магнитных полях, которые радикальным образом меняют характер ее взаимодействия с наблюдаемым излучением.

Для астрофизических условий, как мы убедились выше, характерен гигантский диапазон изменения магнитного поля — от  $10^{-6}$  Гс в межзвездной среде (и еще меньших значений в межгалактической) до  $\gtrsim 10^{12}$  Гс на нейтронных звездах. Этот превышающий 18 порядков интервал значений напряженности магнитного поля предопределяет качественно различные свойства плазмы в различных астрономических объектах — от классической плазмы, свойства которой аналогичны плазме в лабораторных условиях на Земле, до плазмы в экстремальных условиях (в сильных магнитных полях), при которых меняется характер распространения электромагнитных волн и взаимодействия между излучением и плазмой.

К классической плазме относится плазма, входящая в состав межзвездной и межпланетной среды, хромосфер и корон Солнца и звезд главной последовательности, планетных ионосфер и магнитосфер. Эта плазма — нерелятивистская  $\kappa T \ll m_e c^2$  и неквантованная  $\kappa T \gg \hbar \omega_B$ . Ее свойства хорошо описываются в рамках физики плазмы, развитой применительно к лабораторным условиям на Земле и к условиям земной ионосферы. Плазма на нейтронных звездах в полях  $B_0 \sim 10^{12} - 10^{13}$  Гс во многих случаях релятивистская (с энергией частиц  $\mathcal{E} \gg m_e c^2$ ), квантованная (с поперечной по отношению к магнитному полю температурой  $\kappa T_{\perp} \ll \hbar \omega_B$ ) и погружена в намагниченный вакуум.

При условии  $\kappa T_{\perp} \ll \hbar \omega_B$  движение электронов, которые находятся на основном уровне Ландау, приобретает квантовый характер в плос-

кости, ортогональной магнитному полю. Квантовые эффекты при движении частиц становятся весьма существенными даже при  $\kappa T \gg \hbar\omega_B$ , в весьма плотной плазме, если длина волны де Бройля  $\bar{\lambda} = \hbar/m_e v_T$  много больше межчастичного расстояния  $r_0 \sim N^{-1/3}$ . Это условие квантовой плазмы означает, что

$$\kappa T \ll \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{2m_e} \simeq \mathcal{E}_F, \quad (1.18)$$

где  $\mathcal{E}_F$  — энергия Ферми. При этом электронный газ в плазме становится вырожденным, и его функция распределения по энергиям резко отличается от максвелловской. В конкретных астрофизических условиях критерий вырождения выполнен лишь в недрах белых карликов и нейтронных звезд, а также внутри звезд, подходящих к последним стадиям эволюции. Эти области не представляют особого интереса для теории взаимодействия наблюдаемого излучения с плазмой. Поэтому в дальнейшем мы будем считать выполненным неравенство, обратное (1.18).

Влияние намагниченного вакуума на распространение и поглощение излучения становится существенным, если

$$\frac{\omega_{Lc}^2}{\omega^2 v_T} \ll \frac{1}{45\pi} \frac{e^2 B_0^2}{\hbar c B_c^2}, \quad (1.19)$$

где  $B_c \simeq 4 \cdot 10^{13}$  Гс — критическое магнитное поле, в котором  $\hbar\omega_B = m_e c^2$  (см. подробнее §5). Отметим, что, например, в конкретном случае рентгеновского пульсара Нег X-1, связанного с вращающейся нейтронной звездой,  $B_0 \simeq 4 \cdot 10^{12}$  Гс и  $\kappa T \simeq 10$  кэВ, так что указанный выше критерий легко реализуется на частотах  $\omega \simeq \omega_B$  в рентгеновском диапазоне при концентрации электронов  $N \lesssim 10^{23}$  см<sup>-3</sup>.

Качественное изменение свойств плазмы в сильных магнитных полях  $B_0 \sim 10^{10} - 10^{13}$  Гс позволяет говорить о том, что на нейтронных звездах плазма находится в экстремальных условиях. Однако, характер взаимодействия излучения с замагниченной плазмой на циклотронных частотах  $\omega \simeq \omega_B$  меняется уже в более слабых магнитных полях белых карликов  $B_0 \sim 10^7 - 10^9$  Гс. Дело в том, что это взаимодействие зависит от отношения двух характерных времен: времени циклотронного перехода электрона с одного уровня Ландау на соседний,  $t_c$ , и времени свободного пробега частиц плазмы между двумя столкновениями,  $t_{\text{eff}} = 1/\nu_{\text{eff}}$  (здесь  $\nu_{\text{eff}}$  — эффективная частота столкновений электронов). В условиях Солнца и “обычных” звезд главной

последовательности время циклотронного перехода велико благодаря относительной малости магнитного поля  $B_0 \lesssim 10^4$  Гс. При этом реализуется так называемый “столкновительный” предел взаимодействия излучения с плазмой на циклотронных частотах:

$$t_c \nu_{\text{eff}} \gg 1. \quad (1.20)$$

На вырожденных звездах (магнитных белых карликах и нейтронных звездах) сильные магнитные поля резко уменьшают величину  $t_c \propto B_0^{-2}$ , и реализуется “бесстолкновительный” предел:<sup>2</sup>

$$t_c \nu_{\text{eff}} \ll 1. \quad (1.21)$$

Взаимодействие излучения с плазмой существенно различно в двух указанных предельных случаях. В первом случае (1.20) благодаря малой интенсивности циклотронного излучения (и, соответственно, большим  $t_c \propto B_0^{-2}$ ) оно практически не влияет на функцию распределения электронов, которая определяется главным образом столкновениями частиц, их ускорением и т.п. Во втором случае (1.21) малое время циклотронных переходов  $t_c$  ведет к эффективному воздействию излучения на электроны в плазме. При этом форма функции распределения (прежде всего, по поперечным скоростям) зависит от интенсивности этого излучения на циклотронных частотах. Роль столкновений в этом случае становится второстепенной (см. §14).

Указанные различия определяют и форму уравнений переноса излучения в обоих предельных случаях, и их качественно различные решения. В первом случае (1.20) перенос обусловлен процессами резонансного циклотронного поглощения и излучения в плазме с заданной функцией распределения электронов. Во втором случае (1.21) влияние излучения на функцию распределения частиц приводит к тому, что уравнение переноса приобретает вид, типичный для рассеивающих сред. Поскольку это радикально меняет характер взаимодействия излучения с плазмой, сказанное позволяет утверждать, что и на магнитных белых карликах с полями  $B_0 \sim 10^7 - 10^9$  Гс плазма также находится в экстремальных условиях. Дополнительные основания для этого дает то обстоятельство, что указанные высокие значения магнитных полей пока недостижимы в лабораторных условиях на Земле.

Исследования свойств космической плазмы в экстремальных условиях представляют не только чисто астрофизический интерес. Они

<sup>2</sup>Следует иметь в виду, что данные здесь определения столкновительного и бесстолкновительного пределов характеризуют взаимодействие излучения с плазмой. В физике плазмы эти термины обычно разделяют случаи  $\omega \ll \nu_{\text{eff}}$  и  $\omega \gg \nu_{\text{eff}}$ .

служат мощным стимулом для развития новых областей физики плазмы в целом.

## §2. Электромагнитное излучение и его основные характеристики

Теперь мы познакомимся с общими характеристиками электромагнитного излучения безотносительно к конкретным условиям его генерации. Такими характеристиками служат частотный и угловой спектры излучения и его поляризационные параметры. Они содержат основную информацию, содержащуюся во внеземном излучении; поэтому исследование указанных характеристик служит главным источником наших знаний о природе астрофизических объектов.

### 2.1. Плотность энергии и интенсивность излучения

Космические источники излучения создают электромагнитное поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , которое в однородной среде может быть представлено в виде разложения по плоским волнам:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d^3k, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{H}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d^3k. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — соответственно напряженности электрического и магнитного полей;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $t$  — время,  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — круговая частота и волновой вектор волны с комплексными амплитудами  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ ; и, наконец,  $d^3k$  — элемент объема в пространстве волновых векторов. Интегрирование ведется по всему пространству волновых векторов  $\mathbf{k}$ .

Частота  $\omega$  связана с  $\mathbf{k}$  соотношением  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ ; оно является решением дисперсионного уравнения, речь о котором пойдет в §4, §5.<sup>3</sup>

Если фазы волн (входящие в комплексные амплитуды  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{H}_{\mathbf{k}}$ ) случайны, то энергию электромагнитного поля в объеме  $V$  можно за-

<sup>3</sup> Дисперсионное уравнение в присутствии среды (плазмы) имеет несколько решений  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ , соответствующих нормальным волнам с разной поляризацией. Поэтому все величины, введенные в этом разделе, относятся к волнам с определенной поляризацией и взаимно-однозначной зависимостью  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . Предполагается также, что поглощение в среде отсутствует или оно достаточно слабое.

писать следующим образом:

$$W = \int W_{\mathbf{k}} d^3k dV = \int W_{\mathbf{k}} dk d\Omega dV. \quad (2.2)$$

Здесь  $W_{\mathbf{k}}$  — спектральная плотность энергии электромагнитных волн, равная энергии, заключенной в единичном объеме координатного пространства и пространства волновых векторов. Соответственно  $W_{\mathbf{k}}$  — это спектральная плотность энергии в единичном интервале волновых чисел  $k$  и единичном телесном угле  $\Omega$  в пространстве волновых векторов. Поскольку

$$d^3k = k^2 dk d\Omega, \quad (2.3)$$

где  $dk$  — интервал волновых чисел, а  $d\Omega$  — элемент телесного угла, в котором лежат волновые векторы из  $d^3k$ , из (2.2) ясно, что

$$W_{\omega} = k^2 W_{\mathbf{k}}. \quad (2.4)$$

Наряду с плотностью энергии  $W_{\mathbf{k}}$ , приходящейся на единичный интервал волновых чисел  $k$ , можно ввести спектральную плотность энергии  $W_{\omega}$ , соответствующую единичному интервалу частот. Для установления связи между  $W_{\mathbf{k}}$  и  $W_{\omega}$  достаточно потребовать:  $W_{\mathbf{k}} |dk| = W_{\omega} |d\omega|$ , откуда следует, что:

$$W_{\omega} = W_{\mathbf{k}} \left| \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|. \quad (2.5)$$

Заметим, что  $W_{\omega}$  по-прежнему характеризует плотность энергии, которая приходится на единичный телесный угол вдоль  $k$ .

В теории излучения широко используется понятие спектральной интенсивности излучения  $I_{\mathbf{k}}$ . Эту величину можно определить как количество энергии излучения с волновыми векторами  $\mathbf{k}$  из единичного объема в пространстве  $\mathbf{k}$ , проходящее в единицу времени через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно к вектору групповой скорости  $\mathbf{v}_{\text{гр}} = d\omega/d\mathbf{k}$ .

С помощью  $I_{\mathbf{k}}$  нетрудно написать выражение для потока энергии  $F$  через некоторую поверхность  $S$ , т.е. для количества энергии, проходящей через эту поверхность в единицу времени:

$$F = \int I_{\mathbf{k}} \cos \delta d^3k dS. \quad (2.6)$$

Здесь  $\delta$  — угол между  $\mathbf{v}_{\text{гр}}$  и нормалью к поверхности  $dS$ ; интегрирование ведется по всей поверхности  $S$  и по тем волновым векторам  $\mathbf{k}$ ,

которым соответствуют  $\cos \delta > 0$ . Если направления  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{v}_{gr}$  совпадают (что имеет место в вакууме и в изотропной среде; см. §5), то указанные волновые векторы  $\mathbf{k}$  сосредоточены в телесном угле  $\Omega = 2\pi$  на одной стороне поверхности  $S$ . В астрофизике поток излучения иногда определяется при помощи интеграла по полному телесному углу  $4\pi$ . Такая величина представляет собой разность двух интегралов (2.6) по телесным углам  $2\pi$ , в которых  $\cos \delta > 0$  и  $\cos \delta < 0$ .

Учитывая соотношение (2.3), можно представить поток энергии  $F$  (2.6) в виде

$$F = \int I_k \cos \delta dk dS d\Omega. \quad (2.7)$$

Введенная здесь интенсивность  $I_k$ , как ясно из сопоставления (2.7) с (2.6), связана с  $I_{\mathbf{k}}$  соотношением

$$I_k = k^2 I_{\mathbf{k}}. \quad (2.8)$$

Она может быть определена как поток энергии через ту же площадку, что и для  $I_{\mathbf{k}}$ , но отнесенный к единичному интервалу волновых чисел  $k$  и единичному телесному углу вдоль  $\mathbf{k}$ . Чаще, однако, спектральную интенсивность относят к единичному интервалу частот, обозначая ее через  $I_\omega$ :

$$I_\omega = I_k \left| \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|. \quad (2.9)$$

Как и величина  $I_k$ , интенсивность  $I_\omega$  относится к единичному телесному углу вдоль  $\mathbf{k}$  (или, что то же самое, вдоль вектора фазовой скорости  $\mathbf{v}_{ph} = (\omega/k)\mathbf{s}$ , где  $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ ).

Нередко используется также понятие спектральной плотности потока излучения  $F_\omega$ , определяемое посредством соотношения

$$F_\omega = \int I_\omega \cos \delta d\Omega. \quad (2.10)$$

С потоком энергии  $F$  величина  $F_\omega$  связана, очевидно, следующим образом:  $F = \int F_\omega d\omega dS$ .

Следует отметить, что введенное здесь определение спектральной интенсивности излучения  $I_\omega$  не вполне обычно, хотя оно применялось еще в [3]. Более традиционно другое определение спектральной интенсивности, отнесенной к единичному телесному углу по направлениям групповых скоростей  $\mathbf{v}_{gr}$ . Эта интенсивность отличается от  $I_\omega$  на величину отношения  $d\Omega/d\Omega_{gr}$ , где  $d\Omega$  и  $d\Omega_{gr}$  — элементы телесных углов вдоль направлений фазовой и групповой скоростей, соответственно. В



вакууме<sup>4</sup> и в изотропной среде, где  $\mathbf{v}_{ph} \parallel \mathbf{v}_{gr}$  и  $d\Omega/d\Omega_{gr} = 1$ , эти определения фактически совпадают, однако в магнитоактивной плазме они различны (см. §5). Основанием для использования понятия интенсивности, отнесенной к телесному углу вдоль  $\mathbf{k}$ , служит значительное упрощение формул, в которые входит  $I_\omega$  (см., например, соотношения (2.16)-(2.17)). В противном случае выражения, содержащие спектральную интенсивность, включали бы в себя величину  $d\Omega/d\Omega_{gr}$ , которая в магнитоактивной плазме сложным образом зависит от параметров плазмы и характера распространяющихся волн.

Плотность энергии и интенсивность связаны между собой соотношениями

$$I_{\mathbf{k}} = W_{\mathbf{k}} \left| \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \right|, \quad I_{\mathbf{k}} = W_{\mathbf{k}} \left| \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \right|, \quad I_\omega = W_\omega \left| \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} \right|, \quad (2.11)$$

которые отражают тот факт, что в прозрачной или слабо поглощающей среде скорость “переноса” энергии определяется величиной групповой скорости  $\mathbf{v}_{gr} = d\omega/d\mathbf{k}$ . Тогда, очевидно,  $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$  в соотношениях (2.5), (2.9) есть проекция  $\mathbf{v}_{gr}$  на направление  $\mathbf{k}$ :

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = v_{gr} \cos \vartheta, \quad (2.12)$$

где  $\vartheta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{v}_{gr}$ , а  $v_{gr} = |d\omega/d\mathbf{k}|$ . Интересно отметить, что, как следует из (2.9), (2.11) и (2.12),

$$I_\omega = W_{\mathbf{k}} |\cos \vartheta|^{-1} = W_{\mathbf{k}} k^2 |\cos \vartheta|^{-1}. \quad (2.13)$$

Поэтому в изотропной среде, где всегда  $\vartheta = 0$ , величины  $W_{\mathbf{k}}$  и  $I_\omega$  совпадают между собой.

Зависимость плотности энергии  $W_{\mathbf{k}}$  от волнового вектора  $\mathbf{k}$  характеризует спектр электромагнитного излучения. О спектре судят также по виду функции  $I_\omega$  от частоты  $\omega$  и направления волнового вектора  $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$  (т.е. фазовой скорости  $\mathbf{v}_{ph}$ ). При этом зависимость  $I_\omega(\omega, \mathbf{s})$  от частоты  $\omega$  определяет частотный спектр, а от направления  $\mathbf{s}$  — угловой спектр излучения.

Отыскание  $W_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})$  или  $I_\omega(\omega, \mathbf{s})$  в каждой точке среды по заданному характеру и распределению источников излучения представляет

<sup>4</sup>Термин “вакуум” здесь означает “пустое пространство”. В случаях, когда учитывается влияние сильного магнитного поля на свойства физического вакуума, используются термины “намагниченный вакуум” либо “двулучепреломляющий вакуум”.

собой сложную многоплановую проблему. Различные стороны этой проблемы мы будем рассматривать в данной книге. Однако вид функций  $W_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})$  и  $I_{\omega}(\omega, \mathbf{s})$  становится вполне определенным, а их отыскание существенно упрощается, если излучение и среда находятся в состоянии полного термодинамического равновесия.

При условии  $\hbar\omega \ll \kappa T$ , когда влияние квантовых эффектов на характер равновесного излучения становится несущественным, энергия, приходящаяся на одно нормальное колебание в составе этого излучения, равна  $\kappa T$  (см., например, [55]). Нетрудно убедиться, что число собственных колебаний (нормальных мод с определенной поляризацией; см. о них §4), удовлетворяющих граничным условиям на поверхности, ограничивающей некоторый достаточно большой объем  $V$ , равно

$$dN = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k = \frac{V k^2}{(2\pi)^3} dk d\Omega. \quad (2.14)$$

Это — число колебаний с волновыми векторами, лежащими в интервале волновых чисел  $dk$  и в элементе телесного угла  $d\Omega$ . Из сказанного ясно, что плотность энергии равновесного излучения

$$W_{\mathbf{k}}^{(0)} = \frac{\kappa T}{(2\pi)^3}, \quad W_k^{(0)} = \frac{k^2 \kappa T}{(2\pi)^3}, \quad (2.15)$$

а его интенсивность

$$I_{\omega}^{(0)} = \frac{n^2 \omega^2 \kappa T}{(2\pi)^3 c^2 |\cos \vartheta|}. \quad (2.16)$$

При переходе к последнему соотношению мы воспользовались формулой (2.13) и заменили  $k$  на  $\omega n/c$ . При этой замене учтено, что в прозрачной (непоглощающей) среде равенство  $k = \omega n/c$  служит определением показателя преломления плоской волны  $n = n(\omega, \mathbf{s})$  (см. §4).

В радиоастрономии спектральную интенсивность излучения  $I_{\omega}(\omega, \mathbf{s})$  принято характеризовать величиной эффективной (или яркостной) температуры  $T_b$ . Она определяется как температура такого равновесного излучения, интенсивность (2.16) которого на частоте  $\omega$  равна  $I_{\omega}(\omega, \mathbf{s})$ . Согласно данному определению,  $T_b$  является функцией частоты  $\omega$  и направления фазовой скорости  $\mathbf{s}$  и связана с  $I_{\omega}(\omega, \mathbf{s})$  соотношением

$$I_{\omega}(\omega, \mathbf{s}) = \frac{n^2 \omega^2 \kappa T_b(\omega, \mathbf{s})}{(2\pi)^3 c^2 |\cos \vartheta|}. \quad (2.17)$$

Особенно простой вид приобретает связь между интенсивностью излучения и яркостной температурой в случае вакуума ( $n = 1$ ,  $\vartheta = 0$ ),

если к тому же заменить  $\omega$  на длину волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$  и отнести интенсивность к единичному интервалу частот  $f = \omega/2\pi$ . Тогда

$$I_f(f, s) = \frac{\kappa T_b(f, s)}{\lambda^2}, \quad (2.18)$$

где  $I_f = 2\pi I_\omega$ . Яркостную температуру, разумеется, можно ввести также, опираясь на выражение для плотности энергии равновесного излучения (2.15); при этом

$$W_k = \frac{\kappa T_b}{(2\pi)^3}. \quad (2.19)$$

Неравенство  $\hbar\omega \ll \kappa T$ , определяющее в спектре равновесного излучения область применимости закона Рэлея–Джинса, хорошо выполняется на частотах, лежащих в радиодиапазоне. В самом деле, для  $\omega \leq 2 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$  (т.е., на волнах с  $\lambda \geq 1 \text{ см}$ ) это условие справедливо для температуры излучения  $T \gg 1 \text{ К}$ . Однако, в оптике типичным соотношением будет  $\hbar\omega \sim \kappa T$ , если температура  $T \sim 10^3 - 10^5 \text{ К}$  соответствует звездным атмосферам. Для звездных корон с  $10^6 - 10^7 \text{ К}$  по-прежнему справедлив предел Рэлея–Джинса. Для рентгеновской области характерен виновский предел  $\hbar\omega \gg \kappa T$ .

В случае произвольного отношения  $\hbar\omega/\kappa T$  число фотонов, приходящееся на одну моду, равно [55]

$$N_k = \left( e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1 \right)^{-1}, \quad (2.20)$$

так что плотность энергии равновесного излучения и его интенсивность определяются выражениями

$$W_k^{(0)} = \frac{\hbar\omega}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1}, \quad W_k^{(0)} = \frac{\hbar\omega^3 n^2}{(2\pi)^3 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1} \quad (2.21)$$

и

$$I_\omega^{(0)} = \frac{n^2 \hbar\omega^3}{(2\pi)^3 c^2 |\cos \vartheta|} \frac{1}{e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1}, \quad (2.22)$$

соответственно. В пределе  $\hbar\omega \ll \kappa T$  формулы (2.21), (2.22) переходят в (2.15), (2.16). В диапазоне частот  $\hbar\omega \gtrsim \kappa T$  показатель преломления  $n$  и  $\cos \vartheta$  для электромагнитных волн в астрофизической плазме обычно близки к единице, так что равновесная интенсивность (2.22) принимает вид

$$I_\omega^{(0)} = \frac{\hbar\omega^3}{(2\pi)^3 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1}. \quad (2.23)$$

Разумеется, в случае  $\hbar\omega \gtrsim \kappa T$  также можно ввести понятие яркостной, или эффективной, температуры  $T_b$ , которая связана с интенсивностью излучения соотношением, аналогичным (2.17):

$$I_\omega(\omega, s) = \frac{\hbar\omega^3}{(2\pi)^3 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/\kappa T_b} - 1}. \quad (2.24)$$

Отсюда следует, что

$$T_b(\omega, s) = \frac{\hbar\omega/\kappa}{\ln \left\{ 1 + \frac{\hbar\omega^3}{(2\pi)^3 c^2} \frac{1}{I_\omega(\omega, s)} \right\}}. \quad (2.25)$$

Специально подчеркнем, что здесь, как и в предыдущих формулах, интенсивность и плотность энергии относятся к излучению, содержащему волны только одной из ортогональных поляризаций (в среде — только нормальные волны одного типа; см. §4, §5). Поэтому, например, для неполяризованного излучения в вакууме полная интенсивность излучения равна удвоенному значению (2.18).

Целесообразность введения яркостной температуры объясняется тем, что в случае теплового излучения  $T_b$  связана с кинетической температурой источника  $T$  весьма простым соотношением, а при достаточно больших размерах излучающей области равна  $T$  (см. §8). Последнее обстоятельство раскрывает смысл применения величины  $T_b$  для характеристики интенсивности излучения из нетеплового источника: по величине  $T_b$  можно сразу же судить о той температуре, до которой следует нагреть источник, чтобы его равновесное излучение достигло на данной частоте  $\omega$  интенсивности, равной наблюдаемой.

## 2.2. Поляризация излучения. Тензор поляризации и параметры Стокса

Чтобы судить о поляризационных свойствах излучения, представим электрическое поле (2.1) в виде интеграла по частотам  $\omega$  и телесным углам  $\Omega$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\omega d\Omega. \quad (2.26)$$

Здесь, очевидно,

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_\mathbf{k} k^2 \left| \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \omega} \right|,$$

так как  $d^3k = k^2 dk d\Omega = k^2 |\partial \mathbf{k} / \partial \omega| d\omega d\Omega$ . Рассмотрим далее ту часть излучения (2.26), которая состоит из плоских волн, распространяющихся в одном и том же направлении  $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$  и имеющих частоты в

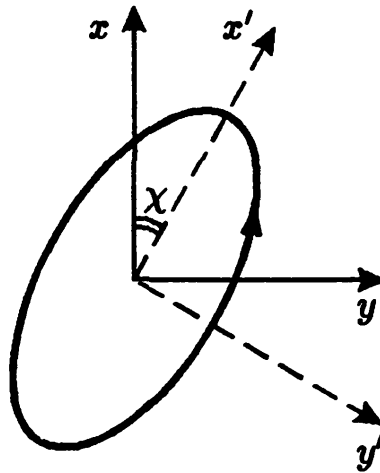


Рис. 4. Эллипс поляризации для излучения с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , направленным за чертеж

узкой полосе  $\Delta\omega \ll \omega$ . Электрическое поле этих волн в данной точке  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{E}(t) = \int_{\Delta\omega} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\omega$$

можно представить в форме

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0(t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.27)$$

где  $\mathbf{E}_0(t)$  — комплексная амплитуда электрического поля, а  $\omega_0$  — некоторая средняя частота из интервала  $\Delta\omega$ . Согласно (2.27), колебания составляющих электрического поля по двум взаимно перпендикулярным осям  $x$  и  $y$ , лежащим в плоскости волнового фронта (т.е. в плоскости, ортогональной  $\mathbf{k}$ ), запишутся в виде

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_{0x}(t) e^{-i\omega_0 t + i\psi_x(t)}, \\ E_y(t) &= E_{0y}(t) e^{-i\omega_0 t + i\psi_y(t)}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Характерное время изменения фаз  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  и амплитуд  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  (равно как и комплексной амплитуды  $\mathbf{E}_0(t)$ ) — порядка  $1/\Delta\omega$ . Благодаря условию  $\Delta\omega \ll \omega_0$  все эти величины меняются во времени медленно по сравнению с периодом колебаний  $2\pi/\omega_0$ . Из сказанного следует, что электрический вектор  $\mathbf{E}(t)$  в плоскости  $xy$  описывает за время  $2\pi/\omega_0$  эллипс, размеры и форма которого медленно флуктуируют, существенно меняясь в течение  $\Delta t \sim 1/\Delta\omega$ .

Внеземное электромагнитное излучение состоит, вообще говоря, из двух частей — поляризованной и неполяризованной. Обе компоненты имеют сплошной частотный спектр. Однако в неполяризованной компоненте (которая называется также естественно или хаотически поля-

ризованной) колебания  $E_x(t)$  и  $E_y(t)$  (2.28) некогерентны в том смысле, что при любом выборе системы координат  $(x, y)$

$$\overline{E_x(t)E_y^*(t)} = 0. \quad (2.29)$$

Здесь черта означает усреднение по времени за период  $\Delta t \gg 1/\Delta\omega$ ; звездочкой отмечена величина, комплексно сопряженная с  $E_y(t)$ . Наоборот, в поляризованной компоненте излучения составляющие  $E_x(t)$  и  $E_y(t)$  когерентны, т.е. среднее по времени от произведения  $E_x(t)$  и  $E_y^*(t)$  при произвольной ориентации системы  $(x, y)$  не равно нулю.

Отличие от нуля величины  $\overline{E_x(t)E_y^*(t)}$  в поляризованном излучении обусловлено тем, что в таком излучении отношение  $E_y/E_x$  не зависит от времени, т.е. отношение амплитуд  $E_{0y}/E_{0x}$  и разность фаз  $\psi_{xy} = \psi_x - \psi_y$  в (2.28) остаются постоянными. Отсюда следует, что в поляризованном излучении вектор  $\mathbf{E}(t)$  описывает в плоскости  $x, y$  эллипс, размеры которого флуктуируют так, что остаются неизменными ориентация эллипса и отношение его осей. Из сказанного ясно, что поляризованная часть излучения характеризуется тремя параметрами: ее интенсивностью  $I_{\text{pol}}$ , ориентацией  $\chi$  и отношением осей  $p$  эллипса поляризации (Рис. 4). Ориентация задается значением угла  $\chi$  между осью  $x$  и направлением большей оси эллипса; направление вращения вектора  $\mathbf{E}(t)$  учитывается знаком  $p$  ( $p > 0$  для направления, указанного на рисунке).

В неполяризованной части излучения хаотически меняется как ориентация, так и отношение осей эллипса поляризации. Поэтому неполяризованная компонента характеризуется лишь ее интенсивностью  $I_{\text{nat}}$ . В целом, излучение в полосе частот  $\Delta\omega$ , распространяющееся в направлении  $\mathbf{z}$ , характеризуется четырьмя параметрами: общей интенсивностью  $I = I_{\text{pol}} + I_{\text{nat}}$ , степенью поляризации  $\zeta = I_{\text{pol}}/I$ , отношением осей  $p$  и ориентацией эллипса поляризации  $\chi$ . Если  $\zeta = 0$ , излучение не поляризовано; когда  $\zeta = 1$ , излучение полностью поляризовано; в остальных случаях оно частично поляризовано.

В качестве величин, характеризующих состояние поляризации излучения, часто используют так называемые параметры Стокса  $I, Q, U, V$ , связанные с  $I, \zeta, p$  и  $\chi$  соотношениями:

$$\begin{aligned} I &= I, \\ Q &= \zeta I \cos(2\sigma) \cos(2\chi), \\ U &= \zeta I \cos(2\sigma) \sin(2\chi), \\ V &= \zeta I \sin(2\sigma). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Эти соотношения, в которых  $\sigma = \operatorname{arctg} p$ , могут рассматриваться как определение параметров Стокса. Согласно (2.30),

$$\begin{aligned}\zeta &= (Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2} I^{-1}, \\ \sin(2\sigma) &= V(Q^2 + U^2 + V^2)^{-1/2}, \\ \operatorname{tg}(2\chi) &= UQ^{-1}.\end{aligned}\quad (2.31)$$

В свою очередь, параметры Стокса весьма просто выражаются через тензор поляризации [56]:

$$I_{\alpha\beta} = \overline{E_\alpha E_\beta^*}, \quad (2.32)$$

где  $\alpha, \beta = x, y$  в системе координат, ось  $z$  которой направлена вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ , а  $E_\alpha, E_\beta$  — соответствующие компоненты электрического поля (2.28). Усреднение в (2.32) по-прежнему производится по интервалам времени  $\Delta t \gg 1/\Delta\omega$ . Выражения, связывающие  $I_{\alpha\beta}$  с параметрами Стокса, имеют вид<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}I &= I_{xx} + I_{yy}, \\ Q &= I_{xx} - I_{yy}, \\ U &= I_{xy} + I_{yx}, \\ V &= i(I_{yx} - I_{xy}).\end{aligned}\quad (2.33)$$

Следует отметить, что определение тензора поляризации в форме (2.32) обычно вводится для поперечных волн; в магнитоактивной же плазме электрическое поле имеет, наряду с  $E_x$  и  $E_y$ , продольную компоненту  $E_z$ . Поэтому для полной характеристики поляризации излучения в магнитоактивной плазме, вообще говоря, надо рассматривать также компоненты тензора поляризации  $I_{xz}, I_{yz}$  и  $I_{zz}$ . Однако, можно поступить и иначе, изменив определение тензора поляризации в магнитоактивной плазме [57]:

$$I_{\alpha\beta} = \overline{D_\alpha D_\beta^*}. \quad (2.34)$$

<sup>5</sup>Отсюда и из определения (2.32) следует, что при анализе поляризации под полной интенсивностью  $I$  понимается среднее квадратичное от напряженности поля  $E$  в плоскости  $xy$ . Ранее (см. (2.6), (2.7), (2.9)) мы ввели и будем использовать при исследовании переноса излучения (§8) другое определение интенсивности излучения как потока энергии через единичную площадку в единичном телесном угле и интервале частот. В магнитоактивной плазме это — разные величины, хотя в некоторых случаях, например, в вакууме, они практически совпадают (точнее, отличаются на постоянный множитель).

Здесь  $D_\alpha$  и  $D_\beta$  — компоненты вектора электрической индукции  $D$  в электромагнитном излучении, который и в магнитоактивной среде остается поперечным ( $(\mathbf{k}D) = 0$ ; см. §4). При таком определении  $I_{\alpha\beta}$  все соотношения (2.30), (2.31), (2.33) остаются в силе; следует только помнить, что параметры Стокса и величины  $I$ ,  $\zeta$ ,  $p$ ,  $\chi$  относятся теперь к вектору  $D$ , а не  $E$ .

Докажем теперь, пользуясь определением параметров Стокса (2.30) и определением тензора поляризации (2.32), справедливость соотношений (2.33).

Первое из соотношений (2.33) отражает тот факт, что две взаимно перпендикулярные линейные компоненты имеют ортогональные поляризации и их интенсивности складываются.<sup>6</sup>

Для доказательства остальных трех соотношений введем прямоугольную систему координат  $x', y'$ , повернутую на угол  $\chi$  относительно системы  $x, y$  (см. Рис. 4). Новые оси координат будут ориентированы по осям эллипса поляризации поляризованной части излучения. При этом компоненты  $E_{x'}$  и  $E_{y'}$  электрического поля этой части излучения, очевидно, имеют вид

$$E_{x'} = E_0(t)e^{-i\omega_0 t} \cos \sigma, \quad E_{y'} = E_0(t)e^{-i\omega_0 t - i\pi/2} \sin \sigma, \quad (2.35)$$

где  $\sigma = \text{arctg } p$  и величина  $E_0(t)$  флуктуирует с характерным временем  $1/\Delta\omega$ . Тогда колебания поля  $E(t)$  в направлениях  $x$  и  $y$  определяются выражениями:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x'} \cos \chi - E_{y'} \sin \chi = \\ &E_0(\cos \sigma \cos \chi e^{-i\omega_0 t} - \sin \sigma \sin \chi e^{-i\omega_0 t - i\pi/2}), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} E_y &= E_{x'} \sin \chi + E_{y'} \cos \chi = \\ &E_0(\cos \sigma \sin \chi e^{-i\omega_0 t} + \sin \sigma \cos \chi e^{-i\omega_0 t - i\pi/2}), \end{aligned}$$

которые совпадут с (2.28), если в (2.28) положить

$$E_{0x} = E_0(\cos^2 \sigma \cos^2 \chi + \sin^2 \sigma \sin^2 \chi)^{1/2}$$

<sup>6</sup> Две волны имеют ортогональные поляризации, если электрические векторы в этих волнах, вращаясь в противоположные стороны, описывают подобные эллипсы со взаимно перпендикулярными осями. В частности, ортогональными будут две круговые поляризации с разными знаками вращения, а также две линейные поляризации, ориентированные по двум взаимно перпендикулярным осям. Интенсивности ортогонально поляризованных волн складываются независимо от фазовых соотношений между ними.



$$\begin{aligned} E_{0y} &= E_0(\cos^2 \sigma \sin^2 \chi + \sin^2 \sigma \cos^2 \chi)^{1/2}, \\ \operatorname{tg} \psi_x &= \operatorname{tg} \sigma \operatorname{tg} \chi, \quad \operatorname{tg} \psi_y = -\operatorname{tg} \sigma \operatorname{ctg} \chi. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Из (2.37) следует, что

$$\begin{aligned} \overline{E_{0x}^2} + \overline{E_{0y}^2} &= \overline{E_0^2}, \\ \overline{E_{0x}^2} - \overline{E_{0y}^2} &= \overline{E_0^2} \cos(2\sigma) \cos(2\chi), \\ 2\overline{E_{0x}E_{0y}} \cos \psi_{xy} &= \overline{E_0^2} \cos(2\sigma) \sin(2\chi), \\ 2\overline{E_{0x}E_{0y}} \sin \psi_{xy} &= \overline{E_0^2} \sin(2\sigma). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Сумма  $\overline{E_{0x}^2} + \overline{E_{0y}^2} = I_{\text{pol}} = \zeta I$ , так что  $\overline{E_0^2} = \zeta I$ ; следовательно, правые части последних трех соотношений (2.38) совпадают с параметрами Стокса  $Q$ ,  $U$  и  $V$ . С другой стороны, левые части этих же соотношений равны соответственно  $I_{xx} - I_{yy}$ ,  $I_{xy} + I_{yx}$  и  $i(I_{yx} - I_{xy})$ . Если излучение полностью поляризовано, то последнее утверждение сразу следует из вида (2.28) и (2.32). Из сказанного становится ясной справедливость соотношений (2.33) для полностью поляризованного излучения. Если же в излучении есть неполяризованная компонента, то она, очевидно, не дает никакого вклада в величину  $I_{xx} - I_{yy}$ ,  $I_{xy} + I_{yx}$  и  $i(I_{yx} - I_{xy})$ . Поэтому равенства (2.33) можно считать доказанными и для излучения с любым характером поляризации.

Надо сказать, что применение параметров Стокса для характеристики поляризации излучения объясняется в значительной мере традицией. Наглядный физический смысл имеют параметры  $I$ ,  $\zeta$ ,  $\rho$  и  $\chi$ ; на эксперименте же непосредственно измеряются элементы тензора поляризации (2.32) (в радиодиапазоне, например, — с помощью системы двух ортогональных диполей).

При радиоастрономических наблюдениях антенны часто конструируются так, что они принимают составляющие излучения, поляризованные по правому или левому кругу.<sup>7</sup> Интенсивности этих составляющих будут соответственно

$$I_r = \overline{E_{0r}^2} + \frac{1}{2} I_{\text{nat}}, \quad I_l = \overline{E_{0l}^2} + \frac{1}{2} I_{\text{nat}}. \quad (2.39)$$

Здесь через  $E_{0r}$  и  $E_{0l}$  обозначены амплитуды электрического поля соответственно право- и левополяризованной компоненты излучения,

<sup>7</sup>Такой антенной может быть упомянутая выше система двух ортогональных диполей, выходы которых соединены вместе (через "отрезок в четверть волны", сдвигающий фазу принятого одним из диполей излучения на  $\pi/2$ ).

флуктуирующие с характерным временем  $\Delta t \sim 1/\Delta\omega$ ; постоянную разность фаз между этими компонентами мы обозначим через  $\psi_{rl}$ . При этом параметры Стокса связаны с введенными величинами следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= I_r + I_l \\ Q &= 2\overline{E_{0r}E_{0l}} \cos \psi_{rl}, \\ U &= 2\overline{E_{0r}E_{0l}} \sin \psi_{rl}, \\ V &= I_r - I_l. \end{aligned} \quad (2.40)$$

В справедливости соотношений (2.40) легко убедиться так же, как и в правильности формул (2.33); соответствующее доказательство проведено в [58].

Поляризационные наблюдения не дают полной информации о состоянии поляризации, если при этом определяются не все параметры Стокса. Так, при исследованиях солнечного радиоизлучения типичным является измерение только интенсивности двух круговых компонент  $I_r$  и  $I_l$ , в результате чего находится “степень круговой поляризации”

$$\zeta_c = \frac{I_l - I_r}{I_l + I_r} = V/I. \quad (2.41)$$

Эта величина связана с истинной степенью поляризации  $\zeta = I_{pol}/I$  соотношением

$$\zeta_c = \zeta \sin(2\sigma) \quad (2.42)$$

(см. (2.30)).

Модуль  $\zeta_c$  совпадает с  $\zeta$  только при  $\sigma = \pm\pi/4$ , т.е. при условии  $Q = U = 0$ . Поскольку  $\sigma = \text{arctg } p$ , это означает, что  $|\zeta_c| = \zeta$  только в случае, когда излучение полностью или частично поляризовано по кругу ( $p = \pm 1$ ). В общем случае эллиптически-поляризованного излучения  $|\zeta_c| < \zeta$ . Это вполне естественно, так как разность  $I_l - I_r$  характеризует только интенсивность циркулярно поляризованной компоненты, никак не отражая наличие в эллиптически-поляризованном излучении линейной составляющей.

При измерениях интенсивностей линейных компонент поля,<sup>8</sup> вводится определение степени линейной поляризации:

$$\zeta_l = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{xx} + I_{yy}} \frac{1}{\cos(2\chi)} = \frac{Q}{I \cos(2\chi)}. \quad (2.43)$$

<sup>8</sup>Случай, типичный для наблюдений синхротронного радиоизлучения галактик, остатков сверхновых и других дискретных источников радиоизлучения, а также оптического излучения звезд.

Согласно (2.30),

$$\zeta_l = \zeta \cos(2\sigma), \quad (2.44)$$

и в общем случае  $|\zeta_l| \leq \zeta$ . Знак равенства имеет место при  $2\sigma = \pi$ , т.е. когда  $p = 0, \infty$ , и излучение линейно-поляризовано (полностью или частично). Заметим, что в оптической астрономии обычным является измерение как линейной, так и круговой поляризации света. В рентгеновской астрономии измерения поляризации пока, как правило, отсутствуют.

### **§3. Источники и механизмы излучения. Определения и общие свойства**

В этом параграфе введены основные понятия и определения, непосредственно характеризующие источники электромагнитного излучения как с точки зрения общей излучаемой энергии, так и в отношении способов и процессов генерации (“механизмов”) излучения. При этом будет показано, что соотношение между потерями энергии источником на излучение и потоком энергии излучения через фиксированную поверхность существенным образом зависит от движения источника относительно этой поверхности. Что касается механизмов излучения, то данные ниже определения позволяют установить их общую классификацию в соответствии с качественными различиями условий генерации внеземного излучения.

#### **3.1. Спектральная мощность и плотность потока излучения от неподвижного и движущегося источников**

Энергию излучения, испускаемого источником за единицу времени, мы будем называть полной мощностью излучения источника  $\mathcal{P}$ . Эта величина, разумеется, совпадает с потерями энергии источником на излучение за тот же промежуток времени. Для более детальной характеристики излучения источника введем спектральную мощность  $\mathcal{P}_{\omega\Omega}$ , определив ее как количество энергии, излучаемой источником в единичном интервале частот  $\omega$  в единицу времени  $t$  и телесного угла  $\Omega$ . Спектральная мощность связана с полной мощностью излучения соотношением

$$\mathcal{P} = \int \mathcal{P}_{\omega\Omega} d\omega d\Omega. \quad (3.1)$$

Наряду с  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}_{\omega\Omega}$  в дальнейшем используется также мощность излучения (в единичном интервале частот по всем направлениям)

$$\mathcal{P}_{\omega} = \int \mathcal{P}_{\omega\Omega} d\Omega. \quad (3.2)$$

Формулы (3.1) и (3.2) относятся к источнику в целом. Если же речь пойдет об излучении отдельных частиц, то вместо  $\mathcal{P}$  будет использоваться обозначение  $P$  (а также  $P_{\omega}$ ,  $P_{\omega\Omega}$  и т.д.). Оговоримся, что здесь (как и в §2) направление  $\mathbf{s}$ , которому соответствует элемент телесного угла  $d\Omega$ , определяется волновым вектором  $\mathbf{k}$ :  $\mathbf{s} = \mathbf{k}/k$ .

Спектральная мощность излучения зависит от состояния движения источника и будет различна в разных инерциальных системах отсчета. Для установления связи между значениями спектральной мощности в разных системах отсчета предположим, что в сопровождающей системе отсчета  $A'$  (то есть в инерциальной системе, где источник покоится в данный момент  $t'$ ) энергия, излученная в телесном угле  $d\Omega'$  в интервале частот  $d\omega'$  за время  $dt'$ , равна

$$d\mathcal{E}' = \mathcal{P}_{\omega'\Omega'}(\omega', \mathbf{s}') d\Omega' d\omega' dt'. \quad (3.3)$$

В инерциальной системе отсчета  $A$ , относительно которой система  $A'$  и сам источник движутся со скоростью  $\mathbf{v}_0$ , энергии (3.3) будет соответствовать излученная энергия

$$d\mathcal{E} = \mathcal{P}_{\omega\Omega}(\omega, \mathbf{s}) d\Omega d\omega dt. \quad (3.4)$$

Здесь все величины (спектральная мощность  $\mathcal{P}_{\omega\Omega}$ , телесный угол  $\Omega$ , частота  $\omega$ , время  $t$ ) относятся к системе  $A$ .

Законы релятивистского преобразования рассматриваемых величин из системы  $A'$  в систему  $A$  имеют следующий вид [56]:

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}, \quad (3.5)$$

$$d\omega = d\omega' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}, \quad (3.6)$$

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.7)$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}, \quad \phi = \phi'. \quad (3.8)$$

Здесь  $\beta = v_0/c$ ; углы  $\theta, \phi$  и  $\theta', \phi'$  определяют направление излучения  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{s}'$  в системах  $A$  и  $A'$ , соответственно. При этом  $\theta$  — угол между направлением  $\mathbf{s}$  и скоростью  $v_0$ ;  $\phi$  — угол, задающий направление проекции  $\mathbf{s}$  на плоскость, ортогональную скорости  $v_0$ . Такой же смысл имеют углы  $\theta'$  и  $\phi'$  в системе  $A'$  — но уже применительно к направлению  $\mathbf{s}'$ .

Соотношение (3.5) отражает сохранение числа излученных фотонов  $dN'$  и  $dN$  при переходе от одной системы  $A'$  к другой системе  $A$  при изменении энергии каждого фотона  $\hbar\omega' \rightarrow \hbar\omega$  в соответствии с эффектом Доплера:

$$\omega = \frac{\omega' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}. \quad (3.9)$$

Действительно, полагая  $d\mathcal{E} = \hbar\omega dN$ ,  $d\mathcal{E}' = \hbar\omega' dN'$ , и учитывая, в соответствии со сказанным, (3.9) и равенство  $dN' = dN$ , мы приходим к закону преобразования (3.5). Далее, соотношение (3.6) прямо следует из формулы Доплера (3.9); равенство (3.7) отражает закон сокращения временных интервалов в неподвижном источнике с точки зрения системы  $A$ , в которой источник движется. Наконец, (3.8) представляет собой закон аберрации, характеризующий изменение направления фазовой скорости волны при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Используя соотношения (3.5)-(3.9), из (3.3) и (3.4) получаем связь между спектральными мощностями излучения в системах отсчета  $A'$  и  $A$  [59]:

$$\mathcal{P}_{\omega\Omega}(\omega, \theta, \phi) = \frac{(1 - \beta^2)^{3/2}}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \mathcal{P}_{\omega'\Omega'}(\omega', \theta', \phi'). \quad (3.10)$$

Эта формула справедлива при условии, что в направлении  $\theta', \phi'$  излучается непрерывный спектр частот и спектральная мощность  $\mathcal{P}_{\omega'\Omega'}$  характеризует энергию, излученную в единичном интервале частот. Если же источник — монохроматический (т.е. в направлении  $\theta', \phi'$  излучается одна частота  $\omega'$ ), то вместо  $\mathcal{P}_{\omega'\Omega'}$  следует ввести величину  $\mathcal{P}_{\Omega'}$ , определив ее как мощность излучения на частоте  $\omega'$  в единичном телесном угле  $\Omega'$ . Тогда закон преобразования  $\mathcal{P}_{\Omega'}$  к соответствующей мощности излучения  $\mathcal{P}_{\Omega}$  в системе  $A$  нетрудно получить из соотношений, аналогичных (3.3), (3.4), заменив в них  $\mathcal{P}_{\omega'\Omega'}$ ,  $\mathcal{P}_{\omega\Omega}$  на  $\mathcal{P}_{\Omega'}$ ,  $\mathcal{P}_{\Omega}$

и опустив интервалы  $d\omega'$  и  $d\omega$ . Тогда получим, что [56]<sup>9</sup>

$$\mathcal{P}_{\Omega}(\theta, \phi) = \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \mathcal{P}_{\Omega'}(\theta', \phi'). \quad (3.11)$$

Из (3.10) следует, что закон преобразования спектральной мощности оставляет неизменным частотный спектр излучения, если в системе отсчета, сопровождающей источник, он имел степенной характер. Действительно, если в системе  $A'$  изотропно излучающий источник обладает степенным частотным спектром вида

$$\mathcal{P}_{\omega'\Omega'} = \tilde{\mathcal{K}}(\omega')^{-\alpha}, \quad (3.12)$$

то в системе  $A$  характер спектра сохранится прежним (он останется степенным с тем же индексом  $\alpha$ ):

$$\mathcal{P}_{\omega\Omega} = \frac{(1 - \beta^2)^{(3+\alpha)/2}}{(1 - \beta \cos \theta)^{(2+\alpha)}} \tilde{\mathcal{K}}\omega^{-\alpha}. \quad (3.13)$$

Для изотропного источника со степенным спектром ширина диаграммы направленности в системе  $A$ , где источник движется, определяется, согласно (3.13), фактором  $(1 - \beta \cos \theta)^{2+\alpha}$ . Эту ширину  $\Delta\theta = 2\theta_{1/2}$  на уровне половинной мощности излучения можно найти из соотношения

$$(1 - \beta \cos \theta_{1/2})^{2+\alpha} = 2(1 - \beta)^{2+\alpha},$$

которое при  $1 - \beta \ll 1$  сводится к следующему:

$$\Delta\theta = 2\theta_{1/2} \simeq 2a\sqrt{1 - \beta^2}: \quad a^2 = {}^{2+\alpha}\sqrt{2} - 1. \quad (3.14)$$

Преобразование спектральной мощности от одной системы отсчета к другой играет важную роль для источников, движущихся с релятивистскими скоростями относительно наблюдателя. Такие источники в астрофизических условиях вполне возможны. Среди них прежде всего надо упомянуть оболочки и струи плазмы, выбрасываемые при взрывах в галактических ядрах и ведущие к образованию радиогалактик, выбросы из квазизвездных объектов и пр.

---

<sup>9</sup>Формулы (3.10), (3.11) получены для случая, когда источник излучения движется в вакууме. Влияние среды на законы преобразования мощности излучения учтено в [60].

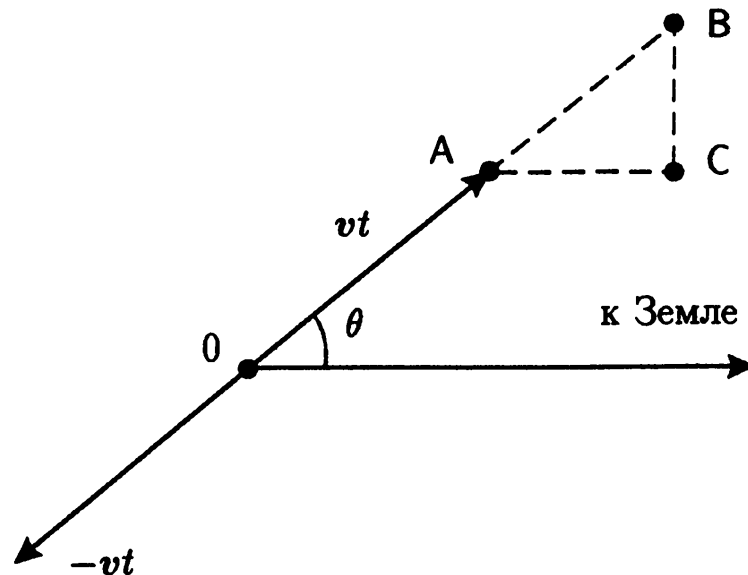


Рис. 5. Схема разлета двух джетов из центрального объекта в точке  $O$

В этой связи следует отметить случаи, когда видимое относительное движение радиоизлучающих компонент квазаров и активных галактических ядер по небесной сфере (то есть, в картинной плоскости, перпендикулярной лучу зрения) происходит со сверхсветовыми скоростями. Судя по радионаблюдениям на интерферометрах со сверхдлинной базой, скорость разлета отдельных выбросов в ядрах квазаров достигает 4–20  $c$ . Так, например, в квазаре 3C 345 две компоненты, составляющие компактный околоядерный источник, расширяются с угловой скоростью около  $0''.00017$  в год. Учитывая расстояние до источника  $\simeq 1800$  Мпк, это соответствует относительной скорости разлета  $\sim 6c$ . Недавно у рентгеновского источника GRS 1915+105, расположенного уже в пределах нашей Галактики, также обнаружены радиоджеты, разлетающиеся с видимой сверхсветовой скоростью  $\simeq 1.25c$  [61].

Причина сверхсветовых скоростей ясна из следующих соображений [62]. Представим себе два джета, испущенные из точки  $O$  в двух противоположных направлениях с одинаковыми скоростями (см. Рис. 5). За время  $\Delta t$  джет проходит расстояние  $AB = v\Delta t$  вдоль скорости  $v$ ; соответствующее расстояние по направлению к Земле будет равно  $AC = v\Delta t \cos \theta$ . Свет затратит на прохождение отрезка  $AC$  время  $\Delta t' = (v/c)\Delta t \cos \theta$ . В результате при наблюдении с Земли путь джета от точки  $A$  до  $B$  займет интервал времени  $\Delta t - \Delta t'$ , меньший  $\Delta t$ . Соответственно, наблюдаемая скорость перемещения джета по небесной сфере будет равна

$$v_{\text{obs}} = \frac{BC}{(\Delta t - \Delta t')} = \frac{v \sin \theta}{1 - (v/c) \cos \theta}. \quad (3.15)$$

Для джета, движущегося в противоположном направлении, скорость

$$v_{\text{obs}} = \frac{v \sin \theta}{1 + (v/c) \cos \theta} \quad (3.16)$$

и направлена в противоположную сторону. Скорость взаимного удаления (разлета) двух джетов равна сумме скоростей (3.15) и (3.16):

$$v_{\text{exp}} = \frac{2v \sin \theta}{1 - (v/c)^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.17)$$

При релятивистской скорости джетов, когда  $1 - (v/c)^2 \ll \sin^2 \theta$ , скорость разлета может стать сверхсветовой:

$$v_{\text{exp}} = \frac{2c}{\sin \theta}. \quad (3.18)$$

Особую роль релятивистское движение источника играет в теории излучения пульсаров. Представляется весьма вероятным [59, 63, 64], что источники оптического и рентгеновского излучения пульсаров (и, прежде всего, пульсара в Крабе), принимая участие во вращении нейтронной звезды, движутся вокруг нее со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Благодаря последнему обстоятельству даже источник, изотропно излучающий в сопровождающей системе отсчета, будет давать направленное излучение в системе отсчета, связанной с наблюдателем на Земле (см. (3.10)). Этот эффект “релятивистского сжатия” диаграммы направленности объясняет импульсный характер излучения пульсаров, связывая направленность непосредственно с вращением нейтронной звезды и локализацией излучающей области на достаточном удалении от поверхности звезды (в районе светового цилиндра<sup>10</sup>). Привлекательной стороной этой гипотезы является то, что здесь направленность и импульсный характер излучения пульсаров возникают как следствие эффектов, не зависящих от конкретных механизмов излучения.

Посмотрим теперь, какой поток через фиксированную поверхность  $S$  создается излучающим источником. Как мы убедимся, он существенно зависит от состояния движения последнего.

Прежде всего заметим, что спектральную мощность излучения  $\mathcal{P}_{\omega\Omega}$  стационарного неподвижного источника можно легко выразить

<sup>10</sup> Световым цилиндром называется цилиндрическая поверхность, ось которой совпадает с осью вращения звезды; все точки этой поверхности при движении с угловой скоростью вращения звезды приобретают линейную скорость, равную  $c$ .



через интенсивность излучения  $I_{\omega\Omega}$  на замкнутой поверхности  $S$ , окружающей источник. Для этого надо учесть, что полная мощность излучения такого источника  $\mathcal{P}$  равна потоку излучения  $F$  через указанную поверхность:

$$F = \int I_{\omega\Omega} \cos \delta \, d\Omega d\omega dS \quad (3.19)$$

(см. в этой связи (2.7), (2.10); напомним, что здесь  $\delta$  — угол между направлением групповой скорости  $v_{gr}$  и внешней нормалью к поверхности  $S$ ). Сопоставляя (3.19) и (3.1), убеждаемся, что

$$\mathcal{P}_{\omega\Omega} = \int I_{\omega\Omega} \cos \delta \, dS. \quad (3.20)$$

Интеграл в (3.20) берется по той части поверхности  $S$ , на которой  $\cos \delta > 0$ .

На первый взгляд кажется, что сделанная выше оговорка относительно стационарности источника излучения не нужна для справедливости равенства  $\mathcal{P} = F$ . Однако это не так, поскольку в общем случае мощность потерь энергии из источника

$$\mathcal{P} = F + \frac{dW}{dt}, \quad (3.21)$$

где  $W$  — энергия электромагнитного излучения в объеме, ограниченном поверхностью  $S$ . Для неподвижного стационарного источника распределение интенсивности  $I_{\omega\Omega}$  в пространстве не зависит от времени, благодаря чему  $W = \text{const}$ . Тогда, действительно,  $\mathcal{P} = F$ , откуда следует и справедливость соотношения (3.20). Наоборот, для нестационарного, в частности, движущегося источника величина  $W = W(t)$ , в результате чего  $\mathcal{P} \neq F$  и связь величин  $\mathcal{P}_{\omega\Omega}$  и  $I_{\omega\Omega}$  становится более сложной.

Чтобы познакомиться с характером этой связи, рассмотрим случай, когда источник, стационарный в сопровождающей системе отсчета  $A'$ , движется как целое со скоростью  $v_0$  в системе отсчета  $A$ . Найдем величину потока излучения через фиксированную поверхность  $S$ , неподвижную в системе отсчета  $A$  и достаточно удаленную от источника. Предположим для простоты, что источник излучает в вакууме. Тогда излучение, испущенное в момент  $t_{\text{rad}}$ , достигнет поверхности  $S$  (в точке  $B$ , удаленной от источника на расстояние  $r(t) \gg L$ , где  $L$  — линейный размер источника) в момент  $t = t_{\text{rad}} + r(t_{\text{rad}})/c$ . Отсюда ясно, что излучение, испущенное источником за время  $dt_{\text{rad}}$ ,

будет проходить через поверхность  $S$  в течение интервала

$$dt = dt_{\text{rad}} + \frac{1}{c} \frac{dr}{dt_{\text{rad}}} dt_{\text{rad}} = (1 - \beta \cos \theta) dt_{\text{rad}}. \quad (3.22)$$

При переходе к последнему выражению учтено, что изменение расстояния от источника до данной точки  $B$  на поверхности  $S$  связано с движением источника; поэтому  $dr/dt_{\text{rad}} = -v_0 \cos \theta$ , где  $v_0 = \beta c$  — скорость движения источника,  $\theta$  — угол между  $v_0$  и  $r$  — радиус-вектором от источника до точки  $B$  на поверхности  $S$ . Энергия, излученная в течение времени  $dt_{\text{rad}}$  в телесном угле  $d\Omega$ , равна

$$d\mathcal{E} = \mathcal{P}_{\omega\Omega} d\Omega d\omega dt_{\text{rad}}, \quad (3.23)$$

где  $\mathcal{P}_{\omega\Omega}$  — спектральная мощность излучения в системе отсчета  $A$ . Достигнув поверхности  $S$ , эта энергия создает в течение  $dt$  плотность потока излучения  $F_\omega$  (2.10) такую, что

$$d\mathcal{E} = F_\omega dS d\omega dt. \quad (3.24)$$

Здесь  $dt$  связано с  $dt_{\text{rad}}$  соотношением (3.22), а элемент площади, на который опирается телесный угол  $d\Omega$ , равен  $dS = r^2 d\Omega$  (если он ортогонален  $r$ ). Принимая это во внимание, из (3.23), (3.24) получаем, что

$$F_\omega = \frac{\mathcal{P}_{\omega\Omega}}{r^2 (1 - \beta \cos \theta)}. \quad (3.25)$$

Отсюда следует, что движение источника со скоростью  $v_0$ , сравнимой со скоростью света  $c$ , существенно меняет величину плотности потока энергии, измеряемой в фиксированной неподвижной точке  $B$ . Именно, величина  $F_\omega$  возрастает (по сравнению с соответствующей величиной  $F_\omega = \mathcal{P}_{\omega\Omega}/r^2$ , характерной для неподвижного источника, удаленного на то же расстояние  $r$ ), если источник приближается к наблюдателю в момент излучения  $dt_{\text{rad}}$  ( $\cos \theta > 0$ ). И наоборот,  $F_\omega$  убывает, если источник удаляется от наблюдателя ( $\cos \theta < 0$ ).

Вспоминая рассмотренный выше пример объекта с противоположно направленными джетами (см. Рис. 5), заметим, что этот эффект приводит к значительному различию интенсивностей излучения, испущенного веществом в разлетающихся друг от друга джетах. Джет, имеющий составляющую скорости, обращенную к наблюдателю, будет выглядеть более ярким, чем джет, удаляющийся от него. Такое различие действительно наблюдается для струй-джетов в квазарах и галактических источниках.

Следует подчеркнуть, что этот эффект, на который было обращено внимание в [65–67], не связан с релятивистским преобразованием временных интервалов типа (3.7) и вообще с переходом от одной системы отсчета к другой. Такой переход был уже сделан выше для отыскания спектральной мощности излучения движущегося источника  $P_{\omega\Omega}$  по известной мощности излучения того же источника в сопровождающей системе координат  $P_{\omega'\Omega'}$  (см. (3.10)). Эффект, который отражает формула (3.25), проявляется только в системе  $A$ , где источник движется. Результат (3.25), по существу, является следствием запаздывания, обусловленного конечной скоростью распространения электромагнитных волн.<sup>11</sup> Благодаря последнему обстоятельству оказывается, что время излучения  $dt_{\text{рад}}$  движущимся источником не совпадает по длительности со временем регистрации того же излучения  $dt$  (3.22), что и приводит к формуле (3.25).

Посмотрим теперь, какую роль играет указанный эффект при круговом (орбитальном) движении источника. Такое движение реализуется, в частности, в модели пульсара с релятивистским “сжатием” диаграммы направленности источника, о котором уже упоминалось выше.

При орбитальном движении источника угол  $\theta$  между скоростью источника и направлением на наблюдателя, фигурирующий в выражении для плотности потока наблюдаемого излучения  $F_{\omega}$  (3.25), будет равен  $\theta = (2\pi/\tau)t_{\text{рад}}$  ( $\tau$  — период орбитального движения, т.е. период пульсара). Из (3.25) ясно, что величина  $F_{\omega}$  будет периодически меняться со временем даже в том случае, если диаграмма направленности излучения изотропна в системе отсчета  $A$  ( $P_{\omega\Omega}(\theta) = \text{const}$ ). Если же излучение имеет изотропный характер в системе отсчета  $A'$ , сопровождающей источник ( $P_{\omega'\Omega'}(\theta') = \text{const}$ ), то диаграмма  $P_{\omega\Omega}(\theta)$  в системе  $A$ , где источник движется, будет вытянута вдоль скорости  $v_0$  (эффект “релятивистского сжатия” диаграммы излучения). Для источника со степенным спектром (3.12) ширина диаграммы задается соотношением (3.14), зависимость мощности излучения  $P_{\omega\Omega}$  от угла  $\theta$  при этом определяется формулой (3.13). Совместное действие эффектов “сжатия” диаграммы (3.13) и сокращения времени регистрации излучения при движении источника на наблюдателя (3.22) приводит к следующей зависимости плотности потока наблюдаемого излучения

<sup>11</sup>То же самое справедливо и для формул (3.16), (3.17), описывающих эффект “сверхсветового” движения в радиоисточниках.

(3.25) от времени:

$$F_{\omega}(t) = \frac{(1 - \beta^2)^{(3+\alpha)/2}}{r^2(1 - \beta \cos \theta)^{(3+\alpha)}} \tilde{K} \omega^{-\alpha}, \quad (3.26)$$

где  $\theta = \frac{2\pi}{\tau} t_{\text{rad}}$  и  $t_{\text{rad}}$  связано с  $t$  следующим соотношением:

$$t = t_{\text{rad}} + \frac{r(t_{\text{rad}})}{c}.$$

Длительность наблюдаемых импульсов излучения  $\Delta t$  (определенная по уровню  $1/2$  от максимального значения  $F_{\omega}(t)$ ) нетрудно отыскать, исходя из соотношения

$$(1 - \beta \cos \theta_{1/2})^{3+\alpha} = 2(1 - \beta)^{3+\alpha}.$$

Из него следует, что при  $1 - \beta \ll 1$

$$\theta_{1/2} \simeq b \sqrt{1 - \beta^2}, \quad b^2 = \sqrt[3+\alpha]{2} - 1. \quad (3.27)$$

В свою очередь

$$\Delta t_{\text{rad}} = \frac{\tau}{2\pi} \cdot 2\theta_{1/2}. \quad (3.28)$$

Величину  $\Delta t$  мы найдем, интегрируя (3.22):

$$\Delta t = \int_{-\Delta t_{\text{rad}}/2}^{+\Delta t_{\text{rad}}/2} (1 - \beta \cos \theta) dt_{\text{rad}}.$$

Производя замену переменной  $t_{\text{rad}} = (\tau/2\pi)\theta$ , получаем [59]:

$$\Delta t = \frac{\tau}{\pi} (\theta_{1/2} - \beta \sin \theta_{1/2}). \quad (3.29)$$

В релятивистском пределе (при  $1 - \beta \ll 1$ ) и с учетом выражения (3.27) эта формула примет следующий вид:

$$\Delta t = \frac{\tau}{2\pi} (1 - \beta^2)^{3/2} b \left(1 + \frac{b^2}{3}\right). \quad (3.30)$$

Таким образом, величина  $\Delta t$  (3.30) определяет продолжительность импульсов, которые регистрируются от удаленного источника, обладающего степенным частотным спектром излучения и движущегося с релятивистской скоростью по круговой орбите.

Для таких скоростей относительная длительность импульса  $\Delta t/\tau \sim (1 - \beta^2)^{3/2}$  получается малой даже при сравнительно широкой диаграмме направленности  $\Delta\theta \sim (1 - \beta^2)^{1/2}$  (ср. (3.30) и (3.14)). Последнее происходит благодаря эффекту сокращения излученного импульса при движении источника на наблюдателя. В модели пульсаров с релятивистским формированием диаграммы направленности отмеченное обстоятельство делает возможным регистрацию излучения от значительной части существующих пульсаров (до 1/3), несмотря на вытянутый (“карандашный”) характер их диаграмм [64].

Отметим, наконец, что эффект сокращения импульса никак не сказывается на среднем значении наблюдаемого потока излучения при движении источника по замкнутой траектории. Например, в случае движения источника по круговой орбите средняя по периоду движения величина плотности потока излучения

$$\bar{F}_\omega = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F_\omega(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{P_{\omega\Omega}(\omega, \theta)}{r^2(1 - \beta \cos \theta)} dt. \quad (3.31)$$

(см. (3.25)). Однако  $dt$  связано с  $dt_{\text{rad}}$  соотношением (3.22); учитывая его в интеграле (3.31) и производя в последнем замену  $t_{\text{rad}} = (\tau/2\pi)\theta$ , получаем [68]

$$\bar{F}_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P_{\omega\Omega}(\omega, \theta)}{r^2} d\theta. \quad (3.32)$$

### 3.2. Механизмы генерации излучения

Познакомимся теперь с терминологией и основными понятиями, которые используются в астрофизике (и в теоретической радиоастрономии в особенности), когда речь идет о механизмах излучения, действующих в астрофизической плазме, и о характере излучения, выходящего за пределы источника. Уточним что под “механизмом” излучения обычно понимается физический процесс или группа физических процессов, которые приводят к появлению (генерации) электромагнитного излучения.

Излучение называется тепловым, если оно генерируется частицами, имеющими равновесное распределение по скоростям (максвелловское для нерелятивистских частиц). Если же распределение частиц неравновесное, то их излучение будет нетепловым. При этом элементарный процесс излучения каждой отдельной частицы может быть самым разнообразным: циклотронное и синхротронное излучение, черенковское излучение, тормозное излучение и т. п. Деление излучения на тепловое и нетепловое от типа процесса не зависит и

определяется лишь характером распределения излучающих частиц по скоростям.

Частным случаем теплового излучения является равновесное излучение с интенсивностью (2.16), (2.22) и плотностью энергии (2.15), (2.21). Яркостная или эффективная температура равновесного излучения  $T_b$  равна  $T$  — кинетической температуре излучающих частиц. В свою очередь,  $T \simeq \bar{\mathcal{E}}/\kappa$ , где  $\bar{\mathcal{E}}$  — средняя энергия теплового движения излучающих частиц. Для теплового излучения эффективная температура никогда не поднимается выше  $T$  (см. §8):

$$T_b \leq T \simeq \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\kappa}. \quad (3.33)$$

Действующие в астрофизических условиях механизмы излучения подразделяются на когерентные и некогерентные [3, 69]. Механизм когерентный, если спектральная мощность излучения источника  $\mathcal{P}_{\omega\Omega}$  превышает суммарную мощность собственного (спонтанного)<sup>12</sup> излучения отдельных частиц источника:

$$\mathcal{P}_{\omega\Omega} > \sum_i P_{\omega\Omega}^{(i)}. \quad (3.34)$$

Здесь  $P_{\omega\Omega}^{(i)}$  — спектральная мощность излучения  $i$ -й частицы на частоте  $\omega$ ; суммирование ведется по всем частицам в источнике, излучающим в данном направлении на данной частоте.

Этим когерентный механизм, по определению, отличается от некогерентного механизма, для которого спектральная мощность излучения источника не превышает сумму мощностей спонтанного излучения отдельных частиц:

$$\mathcal{P}_{\omega\Omega} \leq \sum_i P_{\omega\Omega}^{(i)}. \quad (3.35)$$

Примером источника, в котором действует некогерентный механизм, служит объект, содержащий излучающие частицы с равновесным распределением по скоростям (т.е. объект, дающий тепловое излучение). Дело в том, что такой объект всегда обладает положительной реабсорбцией: излучение, прежде чем выйти за пределы источника, частично поглощается в нем (см. §8). Это приводит к критерию некогерентного механизма (3.35). В сущности благодаря тому же обстоятельству здесь имеет место и соотношение (3.33). Заметим, что

<sup>12</sup>О спонтанном излучении см. §14.

условие  $T_b \lesssim \bar{\mathcal{E}}/k$  можно использовать и для других некогерентных механизмов, применяя его для грубой оценки ожидаемой величины  $T_b$  по средней энергии частиц  $\bar{\mathcal{E}}$  или наоборот. Последнее допустимо, если распределение частиц в источнике не слишком сильно отличается от равновесного (в смысле удаленности от порога неустойчивости: см. гл. 7).

Из (3.33) ясно, что некогерентный механизм в состоянии обеспечить большие значения эффективной температуры только за счет высоких энергий излучающих частиц. Так, например, радиоизлучение пульсаров имеет  $T_b \sim 10^{30}$  К, что приводит (при некогерентном механизме излучения) к оценке средней энергии излучающих частиц  $\bar{\mathcal{E}} \gtrsim 10^{26}$  эВ. Поэтому при интерпретации излучения объектов с высокой эффективной температурой (в частности, радиоизлучения пульсаров) предпочтение отдается когерентным механизмам (3.34): они могут “поднять” поток излучения до наблюдаемого уровня без предположения об исключительно высокой энергии излучающих частиц.

Нельзя, разумеется, предложить универсальные рецепты для выбора между когерентным и некогерентным механизмами при объяснении излучения космических источников. Так, приведенная выше аргументация в пользу когерентного механизма радиоизлучения пульсаров представляется вполне разумной благодаря исключительно высоким значениям  $T_b$ . Однако те же аргументы в применении к солнечному радиоизлучению теряют свою убедительность вследствие значительно более низких наблюдаемых значений  $T_b$ . Здесь основанием для привлечения когерентных механизмов служит прежде всего сложность частотных спектров, крайняя нестационарность явлений и т.п. Интерпретация излучения любого объекта (включая Солнце и пульсары) на базе того или иного когерентного или некогерентного механизма зависит в конечном счете от успеха в объяснении совокупности основных характеристик излучения, а не отдельных его параметров (в частности,  $T_b$ ), как бы важны они не были.

Говоря о когерентных механизмах, отметим, что в принципе возможны два варианта таких механизмов — антенный и мазерный [63, 70]. В антенном механизме когерентность обеспечивается за счет предварительной фазировки (группировки) частиц. При этом фазы спонтанного излучения отдельных частиц не имеют случайного характера и при сложении полей мощность излучения может оказаться выше суммы мощностей спонтанного излучения. Мазерный механизм, наоборот, действует и в отсутствие предварительной фазировки частиц источника: вначале создается и затем поддерживается лишь та-

кое распределение частиц по импульсам и энергиям, которое обеспечивает инверсную населенность энергетических состояний. Реабсорбция (самопоглощение) в такой системе отрицательна. Благодаря этому происходит усиление спонтанного излучения, образующегося в источнике, при выходе за его пределы. Тогда снова реализуется когерентный механизм в том смысле, что выполняется неравенство (3.34). Последнее означает, что излучение объекта с мазерным механизмом генерации в какой-то мере тоже сфазировано, однако теперь, в отличие от антенного механизма, фазировка достигается автоматически, под действием самого усиливаемого излучения.

Конечно, на некотором этапе мазерный механизм сводится к антенному. Действительно, в установившемся режиме усиления движение электронов в источнике эквивалентно некоторой сложной системе сторонних микротоков, существенно меняющейся по величине и по фазе на расстояниях порядка длины излучаемой волны. Если искусственно, с помощью сторонних сил, создать и поддерживать подобную систему токов, то их излучение даст то же, что и мазерный механизм. Однако создать такую систему токов без мазерного эффекта практически невозможно; в мазерной же системе необходимое для получения мощного излучения распределение микротоков возникает автоматически под действием собственного излучения системы. Эти соображения [70] указывают на малую вероятность антенных механизмов излучения в космической плазме, хотя, конечно, они не могут полностью исключить такую возможность.

Сказанным оправдывается то обстоятельство, что в этой книге предпочтение перед антенными будет отдано мазерным механизмам, которые подробно рассматриваются в главе 7. Здесь мы лишь заметим, что когерентные мазерные механизмы можно разделить на две группы. В первой группе усиление имеет место непосредственно на волнах, которые беспрепятственно выходят за пределы излучающего объекта и наблюдаются на Земле. Во второй группе происходит усиление тех типов волн (в частности, плазменных), которые из плотной плазмы в разреженную межзвездную и межпланетную среду не выходят; наблюдаемое радиоизлучение при этом появляется в результате процесса конверсии (трансформации) одного типа волн в другой (например, плазменных в электромагнитные). Отсюда вполне ясно значение исследования процессов конверсии в космической плазме; результаты этих исследований изложены в §7 и в главе 8.



## Глава 2

# Электромагнитные волны в однородной плазме

В этой главе изложены основы линейной теории электромагнитных волн в однородной плазме. Предпочтение при этом отдается тем аспектам теории, которые необходимы для понимания дальнейшего. Сложность и разнообразие волновых процессов в плазме, особенно в присутствии постоянного магнитного поля, заставили нас ограничиться обсуждением только одной, хотя и весьма важной части теории, относящейся к высокочастотным волнам. Характер последних полностью определяется движением электронов, а влияние ионов оказывается несущественным. Такого рода ограничение в известной степени оправдано значением, которое имеют высокочастотные волны в проблеме генерации внеземного излучения. Из сказанного, разумеется, отнюдь не следует, что низкочастотные волны в астрофизической и космической плазме играют второстепенную роль. Примером в этом отношении служит земная магнитосфера, процессы возбуждения низкочастотных волн в которой определяют характеристики ее излучения и оказывают значительное влияние на динамику радиационных поясов. Проблема генерации и распространения низкочастотных волн в астрофизической плазме и плазме ближнего космоса вполне заслуживает рассмотрения в рамках отдельной книги. Такой книги еще нет, и читателя, интересующегося указанной проблемой, мы отсылаем к монографиям [71–73], содержащим общую теорию низкочастотных волн в плазме, и к многочисленным оригинальным работам.

Следует отметить, что в сильных магнитных полях нейтронных звезд ( $10^{12} - 10^{13}$  Гс) существенное влияние на распространение электромагнитных волн оказывает намагниченный вакуум. В некоторых случаях это влияние на величину показателя преломления и поляризацию волн становится определяющим. Поэтому в настоящую главу введен специальный раздел, посвященный электромагнитным волнам

в системе “плазма + намагниченный вакуум”.

## §4. Диэлектрическая проницаемость плазмы. Дисперсионные уравнения

### 4.1. Уравнения электромагнитного поля в среде

Анализ распространения электромагнитных волн в плазме основывается на уравнениях Максвелла, которые для гармонических процессов ( $\propto e^{-i\omega t}$ ) могут быть записаны в таком виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{D}, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_e, \quad (4.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (4.4)$$

где

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}, \quad (4.6)$$

$\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  — электрическая и магнитная индукции,  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  — векторы поляризации и намагниченности среды,  $\mathbf{j}$  — плотность тока и  $\rho_e$  — плотность электрического заряда. Из уравнений (4.1) и (4.3) следует уравнение непрерывности для токов и зарядов:

$$-i\omega \rho_e + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (4.7)$$

Чтобы получить (4.7), надо взять дивергенцию от обеих частей уравнения (4.1) и исключить из него  $\operatorname{div} \mathbf{D}$  с помощью уравнения (4.3).

Для процессов, которые зависят от времени и координат по закону  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ , система уравнений (4.1)-(4.4) с учетом (4.7) принимает следующий вид:

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{H}] = -\frac{\omega}{c} \left( \mathbf{D} + i\frac{4\pi}{\omega} \mathbf{j} \right), \quad (4.8)$$

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{k} \left( D + i \frac{4\pi}{\omega} \mathbf{j} \right) = 0, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{k} \mathbf{B} = 0. \quad (4.11)$$

Связь между  $D$ ,  $B$  и  $\mathbf{j}$ , — с одной стороны, и  $E$ ,  $H$  — с другой, задается материальными соотношениями, вид которых определяется характером среды. В изотропной неподвижной плазме, где нет выделенного направления (благодаря отсутствию постоянного магнитного поля  $H_0$ ), эта связь такова:

$$D = \epsilon(\omega, \mathbf{k})E, \quad B = \mu(\omega, \mathbf{k})H, \quad \mathbf{j} = \sigma(\omega, \mathbf{k})E. \quad (4.12)$$

Здесь  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  — магнитная проницаемость и  $\sigma$  — проводимость среды.

Зависимость  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$  от частоты  $\omega$  характеризует временную дисперсию, а зависимость этих величин от волнового вектора  $\mathbf{k}$  — пространственную дисперсию плазмы. Временная (или частотная) дисперсия отражает тот факт, что значения  $D$ ,  $B$  и  $\mathbf{j}$  в среде зависят не только от значений полей  $E$ ,  $H$  в данный момент, но определяются также характером изменения этих полей во времени. Соответственно наличие пространственной дисперсии указывает на связь значений  $D$ ,  $B$  и  $\mathbf{j}$  в данной точке с характером распределения полей  $E$ ,  $H$  в пространстве.

Материальные соотношения (4.12) позволяют представить систему уравнений (4.8)-(4.11) в форме

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{B}] = -\mu \frac{\omega}{c} \epsilon' E, \quad (4.13)$$

$$[\mathbf{k} \times E] = \frac{\omega}{c} B, \quad (4.14)$$

$$\epsilon' \mathbf{k} E = 0, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{k} B = 0, \quad (4.16)$$

где через  $\epsilon'$  обозначена комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\epsilon' = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (4.17)$$

В плазме сила, действующая на точечный заряд  $e$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  (сила Лоренца), равна

$$\mathbf{f} = eE + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times B]. \quad (4.18)$$

В (4.18) учтено, что действующее электрическое поле в плазме совпадает со средним макроскопическим (т.е. с вектором  $\mathbf{E}^{13}$ ), а среднее макроскопическое от магнитного поля в среде есть  $\mathbf{B}$ , а не  $\mathbf{H}$ . Отсюда ясно, что в плазме непосредственным физическим смыслом обладают векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , тогда как  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  имеют лишь вспомогательное значение. Последнее позволяет, в частности, по-разному определять величину электрической индукции, исходя из соображений удобства записи и решения уравнений поля. Так, исследование электромагнитных процессов в плазме (особенно в анизотропной плазме с  $\mathbf{B}_0 \neq 0$ ) часто основывают не на уравнениях (4.1)–(4.4), а на несколько иной системе, в которую благодаря “переопределению” вектора электрической индукции поле  $\mathbf{H}$  и величина  $\mu$  явно не входят:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}', \quad (4.19)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (4.20)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}' = 0, \quad (4.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (4.22)$$

Здесь вектор  $\mathbf{D}'$ , который мы тоже будем именовать электрической индукцией, связан с введенным ранее вектором  $\mathbf{D}$  соотношением:

$$-i \frac{\omega}{4\pi} \mathbf{D}' = -i \frac{\omega}{4\pi} \mathbf{D} + \mathbf{j} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad (4.23)$$

Из этого соотношения и из равенства (4.5) становится ясен смысл вектора  $\mathbf{D}'$ : величина  $-(i\omega/4\pi)\mathbf{D}'$  есть сумма тока смещения  $-(i\omega/4\pi)\mathbf{E}$  и полного тока, индуцированного электромагнитным полем в плазме  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$ . Следовательно,

$$\mathbf{D}' = \mathbf{E} + i \frac{4\pi}{\omega} \mathbf{j}_{\text{tot}}, \quad (4.24)$$

где величина  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$  включает в себя ток поляризации  $-i\omega\mathbf{P}$ , ток проводимости  $\mathbf{j}$  и ток намагничения  $c \operatorname{rot} \mathbf{M}$ .

Нетрудно видеть, что уравнение (4.19) следует из (4.1), если в последнем исключить  $\mathbf{H}$  с помощью (4.6) и воспользоваться определением  $\mathbf{D}'$  (4.23). Далее, уравнения (4.20) и (4.22) тождественны соответствующим уравнениям (4.2) и (4.4). Что касается уравнения (4.21), то для гармонических процессов оно самостоятельной роли не играет, являясь следствием уравнения (4.19) (точно так же, как (4.22) есть следствие уравнения (4.20)).

<sup>13</sup> Это обстоятельство выяснено в работах [74–76].

Для  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}' \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$  система (4.19)-(4.22) примет такой вид:

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{B}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}' \quad (4.25)$$

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (4.26)$$

$$\mathbf{k} \mathbf{D}' = 0, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{k} \mathbf{B} = 0. \quad (4.28)$$

Эти уравнения должны быть дополнены материальным соотношением, которое мы запишем в форме<sup>14</sup>

$$D'_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\beta. \quad (4.29)$$

Здесь  $D'_\alpha$  и  $E_\beta$  — компоненты соответствующих векторов по ортогональным осям координат, а  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  — тензор диэлектрической проницаемости. Этот тензор является важнейшей характеристикой, определяющей особенности электромагнитных процессов в среде.

Тензорный характер связи между  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{E}$  (4.29) представляется вполне естественным в магнитоактивной плазме (т.е. в плазме, где есть постоянное поле  $\mathbf{H}_0$ , делающее среду анизотропной). В этих условиях неудивительно, что плотность полного тока  $(4\pi)^{-1} \partial \mathbf{D}' / \partial t = -i\omega \mathbf{D}' / 4\pi$ , индуцированного электрическим полем  $\mathbf{E}$ , ориентирована под углом к направлению поля  $\mathbf{E}$ . Однако тензорная связь между  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{E}$  сохраняется, как мы сейчас убедимся, и в изотропной плазме, выступая здесь как следствие принятого определения  $\mathbf{D}'$ , включающего в себя ток намагничения  $\text{rot } \mathbf{M}$  (см. (4.23)). Чтобы установить вид тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  в изотропной среде, будем искать его в форме [77]

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \left( \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) \epsilon_\perp(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \epsilon_\parallel(\omega, \mathbf{k}), \quad (4.30)$$

учитывающей, что в такой среде, кроме тензора Кронекера  $\delta_{\alpha\beta}$ ,<sup>15</sup> можно составить также тензор  $k_\alpha k_\beta$ . Из (4.29), (4.30) следует, что мы отыскиваем связь между  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{E}$  в следующей форме:

$$\mathbf{D}' = \epsilon_\perp \mathbf{E} - (\epsilon_\perp - \epsilon_\parallel) \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E})}{k^2}. \quad (4.31)$$

<sup>14</sup>Здесь, как обычно, предполагается суммирование по одинаковым индексам, т.е. соотношение (4.29) представляет собой сокращенную запись следующего равенства:

$$D'_\alpha = \epsilon_{\alpha\alpha} E_\alpha + \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta + \epsilon_{\alpha\gamma} E_\gamma.$$

<sup>15</sup>Тензор  $\delta_{\alpha\beta}$  обладает следующими свойствами:  $\delta_{\alpha\beta} = 0$ , если  $\alpha \neq \beta$ , и  $\delta_{\alpha\beta} = 1$  при  $\alpha = \beta$ .

Величина  $\epsilon_{\perp}$  называется поперечной, а  $\epsilon_{\parallel}$  — продольной диэлектрической проницаемостью. Смысл этих названий заключается в том, что  $\epsilon_{\perp}(\omega, \mathbf{k})$  определяет характер поперечных, а  $\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k})$  — продольных волн в плазме (см. следующий раздел). Соотношение (4.31) позволит существенно упростить установление связи между  $\epsilon'$ ,  $\mu$ , с одной стороны, и  $\epsilon_{\perp}$ ,  $\epsilon_{\parallel}$  — с другой, существующей благодаря тождественности систем уравнений (4.13)-(4.16) и (4.25)-(4.28) в изотропной плазме.

Уравнения (4.25)-(4.28) с учетом выражения (4.31) приобретают следующий вид:

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{B}] = -\frac{\omega}{c} \left( \epsilon_{\perp} \mathbf{E} - (\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\parallel}) \frac{\mathbf{k}(\mathbf{kE})}{k^2} \right), \quad (4.32)$$

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (4.33)$$

$$\epsilon_{\parallel} \mathbf{kE} = 0, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{kB} = 0. \quad (4.35)$$

Из тождественности уравнений (4.15) и (4.34) следует, что

$$\epsilon' = \epsilon_{\parallel}. \quad (4.36)$$

Далее, исключив из соответственных уравнений (4.13) и (4.32) магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  с помощью уравнения  $[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = (\omega/c)\mathbf{B}$ , вычитая почленно из (4.13) уравнение (4.32) и учитывая равенство  $\epsilon' = \epsilon_{\parallel}$ , получаем

$$\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) [\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]] = \frac{\omega^2}{c^2 k^2} (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) (k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{kE})). \quad (4.37)$$

Поскольку  $[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]] = -k^2 \mathbf{E} + \mathbf{k}(\mathbf{kE})$ , приведенное равенство тождественно выполняется при любых  $\mathbf{E}$ , если [78]

$$1 - \frac{1}{\mu} = \frac{\omega^2}{c^2 k^2} (\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\parallel}). \quad (4.38)$$

Это соотношение связывает магнитную проницаемость изотропной плазмы с продольной и поперечной диэлектрической проницаемостью.

Из (4.38) ясно, что тензорный характер связи  $\mathbf{D}'$  и  $\mathbf{E}$  в изотропной плазме обусловлен отличием магнитной проницаемости  $\mu$  от единицы. Если же  $\mu = 1$ , то  $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\parallel}$ ; в этом случае, согласно (4.30), (4.36),  $\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \epsilon_{\perp} = \delta_{\alpha\beta} \epsilon'$  и материальные соотношения (4.29) сводятся к виду  $D_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \epsilon' E_{\beta}$ , т.е. к векторной форме  $\mathbf{D}' = \epsilon' \mathbf{E}$ .

Забегая вперед, отметим, что в ионизованном газе при учете пространственной дисперсии  $\epsilon_{\perp} \neq \epsilon_{\parallel}$  (см. формулы (4.88), (4.89)), поэтому магнитная проницаемость изотропной плазмы, вообще говоря, отличается от единицы. Однако в условиях, когда параметр  $Z = \omega/\sqrt{2}kv_T \rightarrow \infty$  (т.е. для достаточно длинных волн в плазме со средней тепловой скоростью электронов  $v_T \neq 0$ ), пространственная дисперсия исчезает:  $\epsilon_{\perp}$  и  $\epsilon_{\parallel}$  не зависят от  $k$ . При этом  $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\parallel} = 1 - \omega_L^2/\omega^2$  и, следовательно,  $\mu = 1$ . В статических полях  $\epsilon_{\perp} \neq \epsilon_{\parallel}$ ; тем не менее при  $\omega \rightarrow 0$  правая часть соотношения (4.38) снова обращается в нуль, что приводит к равенству  $\mu = 1$ . Последний случай соответствует известной теореме Бора – Ван-Левен об отсутствии магнитной восприимчивости классической равновесной системы частиц в постоянном магнитном поле.

#### 4.2. Дисперсионные уравнения для нормальных волн

Чтобы установить характер волн, распространяющихся в плазме, будем исходить из системы уравнений (4.25)–(4.28), дополненной материальным соотношением (4.29). Эти уравнения записаны в предположении, что векторы  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}' \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ . Исключая из уравнения (4.25) магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  с помощью (4.26), получим

$$[\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]] = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}'$$

или, что то же самое,

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}' = 0. \quad (4.39)$$

Это векторное уравнение с учетом (4.29) можно представить в виде трех линейных алгебраических уравнений относительно компонент электрического поля  $E_{\beta}$ :

$$\left( k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) \right) E_{\beta} = 0. \quad (4.40)$$

Система однородных уравнений (4.40) будет иметь нетривиальное (ненулевое) решение только при условии, что определитель этой системы обращается в нуль:

$$\det \left( k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) \right) = 0. \quad (4.41)$$

Здесь  $\det$  обозначает определитель третьего порядка, элемент которого, стоящий на пересечении  $\alpha$ -й строки и  $\beta$ -го столбца, равен выражению, заключенному в фигурные скобки.

Соотношение (4.41) называется дисперсионным уравнением. Оно задает связь между частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  плоской монохроматической волны

$$\omega = \omega_j(\mathbf{k}). \quad (4.42)$$

Решений (4.42) дисперсионного уравнения может быть несколько (“номер” решения  $j = 1, 2, \dots$ ); каждое из них определяет “нормальную” волну (моду), которая может существовать в плазме. Каждая нормальная волна отличается от других частотой  $\omega$  (при данном фиксированном  $\mathbf{k}$ ) и поляризацией, т.е. величиной отношения компонент электрического поля  $\mathbf{E}$  по координатным осям. Эти отношения могут быть найдены из системы (4.40) при значениях  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , удовлетворяющих дисперсионному уравнению (4.41).

Надо отметить, что поскольку система (4.40) линейна относительно поля  $\mathbf{E}$  (если только тензор диэлектрической проницаемости сам не зависит от величины  $\mathbf{E}$ ),<sup>16</sup> в однородной плазме каждая нормальная волна распространяется независимо от других волн. Общее решение для электромагнитного поля в плазме при этом представляет собой суперпозицию (линейную комбинацию) таких нормальных волн.

В изотропной плазме с тензором  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  в форме (4.30) система уравнений (4.40), определяющая нормальные волны, принимает следующий вид:

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{\perp}\right)E_x = 0, \quad \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{\perp}\right)E_y = 0, \quad (4.43)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{\parallel}E_z = 0. \quad (4.44)$$

При переходе от (4.40) к (4.43), (4.44) ориентация координатных осей  $x, y, z$  была выбрана так, что направление оси  $z$  совпало с направлением волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Дисперсионное уравнение для системы (4.43), (4.44)

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{\perp}\right)^2\epsilon_{\parallel} = 0, \quad (4.45)$$

распадается на два:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{\perp}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (4.46)$$

<sup>16</sup>Эта независимость существует лишь в достаточно слабых полях (см. следующий раздел).



$$\epsilon_{||}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (4.47)$$

Первое уравнение определяет поперечную электромагнитную волну, в которой поле  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ . Это ясно из формул (4.43), (4.44), согласно которым при выполнении (4.46) компоненты  $E_x, E_y \neq 0$ , тогда как  $E_z = 0$ . Из (4.43) ясно также, что отношение компонент электрического поля  $E_x/E_y$  в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{k}$ , может быть произвольным. Иными словами, поляризация электромагнитной волны в изотропной плазме может быть любой (линейной, круговой, эллиптической), однако всегда  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ . Из уравнения (4.26) ясно, что магнитное поле  $\mathbf{B}$  в такой волне ортогонально векторам  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{E}$ .

Второе уравнение (4.47) задает продольную плазменную волну, в которой поле  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ , а магнитное поле  $\mathbf{B}$  отсутствует. Продольный характер электрического поля ясен из (4.43), (4.44), поскольку при  $\epsilon_{||} = 0$  компонента  $E_z \neq 0$ , тогда как  $E_x = E_y = 0$ . Равенство  $\mathbf{B} = 0$  следует из уравнения (4.26) при  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ .

В присутствии постоянного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , плазма становится магнитоактивной, и тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в виде (4.30) перестает быть справедливым. Тогда нормальные волны в плазме определяются уравнениями (4.40), (4.41) в общей форме. Выбирая систему координат  $x, y, z$  с осью  $z$  вдоль  $\mathbf{k}$ , запишем уравнения (4.40) следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \epsilon_{xx}\right) E_x - \epsilon_{xy} E_y - \epsilon_{xz} E_z &= 0, \\ -\epsilon_{yx} E_x + \left(\frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \epsilon_{yy}\right) E_y - \epsilon_{yz} E_z &= 0, \\ -\epsilon_{zx} E_x - \epsilon_{zy} E_y - \epsilon_{zz} E_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Нормальные волны, соответствующие этой системе, очевидно, не будут чисто продольными или строго поперечными: вектор  $\mathbf{E}$  имеет, вообще говоря, все три компоненты  $E_x, E_y$ , и  $E_z$ , за некоторыми исключениями, речь о которых пойдет в §6. Здесь мы лишь остановимся на условиях, при которых и в магнитоактивной плазме нормальные волны близки к продольным.

Из (4.48) ясно, что в области больших значений  $c^2 k^2 / \omega^2$  (если при этом остаются конечными элементы тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$ ) первые два уравнения переходят в следующие:

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} E_x = 0, \quad \frac{c^2 k^2}{\omega^2} E_y = 0.$$

Из них при  $c^2 k^2 / \omega^2 \rightarrow \infty$  получаем, что  $E_x \rightarrow 0$  и  $E_y \rightarrow 0$ , т.е. нормальная волна становится продольной. Тогда, очевидно, третье уравнение системы (4.48) сводится к виду

$$\epsilon_{zz} E_z = 0. \quad (4.49)$$

Ему соответствует дисперсионное уравнение

$$\epsilon_{zz}(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (4.50)$$

обеспечивающее существование в магнитоактивной плазме продольных волн с конечной амплитудой ( $E_z \neq 0$ ). Как ясно из сказанного, достаточным условием перехода от общего дисперсионного уравнения (4.41), (4.48) к уравнению для продольных волн (4.47) служит условие  $c^2 k^2 / \omega^2 \gg |\epsilon_{ij}|$  при любых значениях  $i, j$ .<sup>17</sup> Отметим, что уравнение (4.49) напоминает уравнение (4.44) в изотропной плазме; при этом  $\epsilon_{zz}(\omega, \mathbf{k})$  играет роль  $\epsilon_{||}$ .

Считая условия существования продольных волн выполненными, найдем уравнение для электрического поля в этих волнах в случае произвольной ориентации координатных осей относительно вектора  $\mathbf{k}$ . Для этого помножим на  $k_\alpha$  уравнение (4.40) и просуммируем по одинаковым индексам  $\alpha$ . Тогда получим

$$k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) E_\beta = 0. \quad (4.51)$$

Считая электрическое поле продольным, положим  $\mathbf{E} = E_k \mathbf{k} / k$ . В результате (4.51) преобразуется к виду

$$\frac{k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta}{k^2} E_k = 0. \quad (4.52)$$

Из сопоставления (4.52) с (4.44) ясно, что теперь роль  $\epsilon_{||}$  играет множитель, стоящий перед  $E_k$ ; его тоже обозначим через  $\epsilon_{||}$ :

$$\epsilon_{||} = \frac{k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) k_\beta}{k^2}. \quad (4.53)$$

Дисперсионное уравнение для продольных волн в магнитоактивной плазме тогда по-прежнему будет иметь вид

$$\epsilon_{||}(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (4.54)$$

<sup>17</sup> Через  $\epsilon_{ij}$  мы будем здесь и в дальнейшем обозначать компоненты тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , записанные в координатной системе  $i, j, k$  с осью  $k$ , ориентированной вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ .

Легко убедиться, что в системе координат с осью  $z$ , направленной по  $\mathbf{k}$ , выражение для  $\epsilon_{||}$  (4.53) сводится к  $\epsilon_{zz}$ .

Дисперсионные уравнения, рассмотренные в настоящем разделе, связывают комплексные значения частоты  $\omega$  с комплексными значениями волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Если при действительных  $\omega$  волновой вектор  $\mathbf{k}$  тоже действительный, то среда называется прозрачной для данной частоты и данной нормальной волны. Если же при действительных  $\omega$  вектор  $\mathbf{k}$  — комплексный, то его можно представить в форме  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$ , где  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$  — действительные векторы. Волна  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t) = \exp(-\mathbf{k}''\mathbf{r} + i\mathbf{k}'\mathbf{r} - i\omega t)$  называется однородной волной — в ней плоскость постоянной фазы  $\mathbf{k}'\mathbf{r} = \text{const}$  совпадает с плоскостью постоянной амплитуды  $\mathbf{k}''\mathbf{r} = \text{const}$ .<sup>18</sup> Волны, в которых направления  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$  различны, называют неоднородными; решения в виде неоднородных волн появляются при наличии резких границ раздела между однородными средами или в плавно неоднородной среде.

Для однородных волн с  $\mathbf{k}' \parallel \mathbf{k}''$  вектор  $\mathbf{k}$  можно представить в виде  $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ , где  $\mathbf{s}$  — единичный вектор вдоль направления  $\mathbf{k}$ , а величина

$$k = k' + ik'' = \frac{\omega}{c}(n + i\eta). \quad (4.55)$$

Введенные этим соотношением величины  $n$  и  $\eta$  называются соответственно показателем преломления и показателем поглощения волны. При заданном направлении распространения  $\mathbf{s}$  величину  $k$  (и вместе с ней  $n$  и  $\eta$ ) можно определить с помощью дисперсионного уравнения как функции действительной частоты  $\omega$ .

Если, наоборот, в нормальной волне при действительных значениях волнового вектора  $\mathbf{k}$  частота  $\omega$  оказывается комплексной, то

$$\omega = \Omega - i\gamma, \quad (4.56)$$

где величина  $\gamma$  называется декрементом (коэффициентом затухания). Если  $\gamma > 0$ , то амплитуда волны убывает со временем по закону  $e^{-\gamma t}$ .

При слабом поглощении, когда  $\gamma \ll \Omega$  для действительных  $\mathbf{k}$  и  $\eta \ll n$  для действительных  $\omega$ , декремент  $\gamma$  связан с показателем поглощения  $\eta$  простым соотношением [79]

$$\gamma = \frac{\Omega}{c} \eta v_{g\mathbf{k}}. \quad (4.57)$$

Чтобы убедиться в этом, будем исходить из дисперсионного уравнения

$$\omega = \omega_j(k\mathbf{s}).$$

<sup>18</sup> Волны, в которых  $\mathbf{k}'' = 0$ , очевидно, всегда будут однородными.

Пусть значение  $k$  действительное ( $k = n\Omega/c$ ); тогда соответствующее значение  $\omega = \Omega - i\gamma$ . Добавив к величине  $k$  малое приращение  $dk$ , получим новое значение частоты

$$\omega + d\omega = \omega_j((k + dk)s).$$

Выберем приращение  $dk$  так, чтобы значение  $\omega + d\omega$  стало действительным; для этого, очевидно, следует положить  $\omega + d\omega = \Omega$ , т.е.  $d\omega = i\gamma$ , а  $dk = i\eta\Omega/c$ . Связь между  $d\omega$  и  $dk$  нетрудно установить, разлагая  $\omega_j(k)$  в ряд по степеням  $dk$  и ограничиваясь линейным членом:<sup>19</sup>

$$d\omega = \frac{d\omega_j}{dk} s dk \simeq \frac{d\Omega}{dk} s dk.$$

Учитывая выражения для  $d\omega$ ,  $dk$  и замечая, что в этой формуле величина  $(d\Omega/dk)s = v_{grk}$ , т.е. равна проекции групповой скорости на направление волнового вектора  $k$ , получим соотношение (4.57).

### 4.3. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы

Электромагнитные свойства плазмы определяются конкретной формой материальных соотношений  $D'_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k)E_\beta$ , т.е. характером тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k)$ . От того, насколько точно найдены компоненты тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , в значительной степени зависят полнота и точность описания электромагнитных процессов в плазме.

При отыскании  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k)$  надо учесть следующее обстоятельство. Согласно (4.24)

$$D' = E + i\frac{4\pi}{\omega} j_{tot}; \quad (4.58)$$

в координатной форме для процессов  $\propto e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k)E_\beta = E_\alpha + i\frac{4\pi}{\omega} j_{\alpha tot} \quad (4.59)$$

(см. (4.29)).

Из приведенных выражений ясно, что вид  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k)$  можно установить, зная выражение для плотности полного тока  $j_{tot}$ , возникающего в плазме (включая ток, индуцированный магнитным полем  $B = (c/\omega)[k \times E]$ ), при условии, что на плазму наложено электрическое поле  $E \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ .

<sup>19</sup> Допустимость такого ограничения в случае, когда приращение  $dk = i(\Omega/c)\eta$ , определяет условия, при которых применима формула (4.57).

В свою очередь величину  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$  можно получить, если обратиться к уравнениям, описывающим движение частиц плазмы в электромагнитном поле. В зависимости от требуемой полноты и строгости для нахождения  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$  и величины  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  в плазме используются три метода: элементарный, квазигидродинамический и кинетический. В элементарном методе тепловое движение частиц полностью игнорируется; при квазигидродинамическом подходе такое движение учитывается, хотя и не вполне последовательно, введением электронного давления. Последовательный учет движения частиц в плазме возможен лишь на базе кинетического уравнения, учитывающего существование в каждом элементе объема целого спектра скоростей частиц.

Прежде чем перейти к изложению указанных трех методов расчета  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в плазме, подчеркнем, что в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только высокочастотных электромагнитных процессов в космической плазме, удовлетворяющих неравенству

$$\omega \gg \omega_{Bi} \quad (4.60)$$

(напомним, что  $\omega_{Bi} = eB/m_i c$  — ионная гирочастота). При этом условии движением тяжелых ионов ( $m_i \gg m_e$ ) под действием быстропеременных полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  обычно можно пренебречь,<sup>20</sup> вычисляя  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$  и  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в предположении, что движение ионов задано и не зависит от высокочастотных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Это обстоятельство существенно упрощает рассмотрение, поскольку надобность в уравнениях для ионов тогда отпадает.

Отыскание компонент тензора диэлектрической проницаемости в плазме мы начнем с изложения элементарной теории, в рамках которой плотность полного тока в неподвижной плазме

$$\mathbf{j}_{\text{tot}} = eN_0 \mathbf{v}, \quad (4.61)$$

где  $N_0$  — невозмущенная электронная концентрация, находится в результате решения нерелятивистского уравнения движения электрона<sup>21</sup>

$$m_e \dot{\mathbf{v}} = -e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]) - \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]. \quad (4.62)$$

<sup>20</sup>Условие (4.60) не всегда достаточно для пренебрежения вкладом ионов в диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_{\alpha\beta}$ . Например, в плазме с  $\omega_L^2 \gg \omega_B^2$  для волн, распространяющихся поперек магнитного поля, это можно сделать лишь при более жестком условии  $\omega \gg \sqrt{\omega_B \omega_{Bi}} = \omega_B \sqrt{m_e/m_i}$  [71].

<sup>21</sup>Влияние столкновений на величину диэлектрической проницаемости можно учесть, вводя в правую часть (4.62) член  $-\nu_{\text{eff}} m_e \mathbf{v}$ . Он характеризует убыль количества движения электрона в единицу времени за счет его столкновений с другими частицами ( $\nu_{\text{eff}}$  — эффективное число столкновений; см. §12).

В правой части этого уравнения стоит сила Лоренца (4.18), действующая на электрон со стороны высокочастотных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , и сила  $-(e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]$ , учитывающая влияние на движение электрона постоянного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  в плазме.

Считая высокочастотное поле слабым, пренебрежем членом  $(e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$  в уравнении движения (4.62). Это пренебрежение оправдано тем, что в отсутствие такого члена из (4.62) следует пропорциональность  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{E}$ . Учитывая вместе с тем пропорциональность  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  в соответствии с уравнением Максвелла (4.26), отсюда получаем, что  $(e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \propto E^2$ . Поэтому при  $E \rightarrow 0$  член  $(e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$  стремится к нулю быстрее, чем остальные члены уравнения (4.62).

Полагая поле  $\mathbf{E} \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ , найдем [80] в сделанных предположениях решение уравнения (4.62), принявшего теперь вид

$$i\omega \mathbf{v} = \frac{e\mathbf{E}}{m_e} + [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_B], \quad (4.63)$$

где вектор  $\boldsymbol{\omega}_B = e\mathbf{B}_0/m_e c$ . Для этого умножим все члены уравнения векторно и скалярно на  $\boldsymbol{\omega}_B$ :

$$\begin{aligned} i\omega[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_B] &= \frac{e}{m_e}[\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_B] - v\omega_B^2 + \boldsymbol{\omega}_B(\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}_B) \\ i\omega(\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}_B) &= \frac{e}{m_e}(\mathbf{E} \boldsymbol{\omega}_B). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Исключим из (4.63), (4.64) величины  $[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_B]$  и  $(\mathbf{v} \boldsymbol{\omega}_B)$ ; тогда найдем

$$\mathbf{v} = \frac{i\omega}{m_e(\omega^2 - \omega_B^2)} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}_B(\mathbf{E} \boldsymbol{\omega}_B)}{\omega^2} - \mathbf{E} \right) - \frac{e}{m_e} \frac{[\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_B]}{\omega^2 - \omega_B^2}. \quad (4.65)$$

Подставив (с учетом (4.61)) скорость  $\mathbf{v}$  в выражение (4.58) для вектора электрической индукции  $\mathbf{D}'$ , получим

$$\mathbf{D}' = \left( 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \right) \mathbf{E} + \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \frac{\boldsymbol{\omega}_B(\mathbf{E} \boldsymbol{\omega}_B)}{\omega^2} + \frac{i\omega_L^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \frac{[\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_B]}{\omega}. \quad (4.66)$$

Здесь  $\omega_L = \sqrt{4\pi e^2 N/m_e}$  — собственная частота плазмы.

С помощью (4.29) и (4.66) можно написать тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ . В системе координат I, ось  $z$  которой

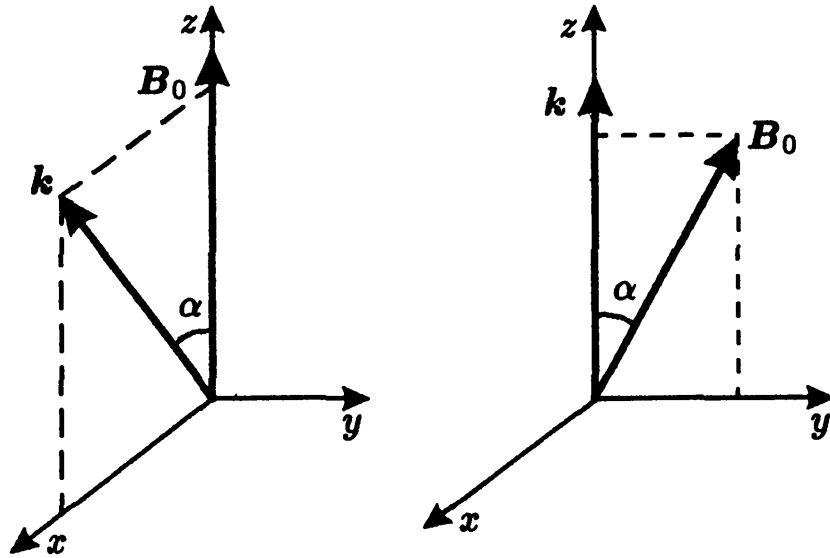


Рис. 6. Ориентация векторов  $B_0$  и  $k$  относительно координатных осей: а, система координат I; б, система координат II

ориентирована вдоль постоянного магнитного поля  $B_0$  (Рис. 6, а):<sup>22</sup>

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & ig & 0 \\ -ig & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (4.67)$$

где

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{v}{1-u}, \quad \epsilon_2 = 1 - v, \quad g = \frac{v\sqrt{u}}{1-u}. \quad (4.68)$$

В формулах (4.68) введены следующие обозначения, которые будут широко использоваться в дальнейшем:

$$v = \frac{\omega_L^2}{\omega^2}, \quad u = \frac{\omega_B^2}{\omega^2}. \quad (4.69)$$

Нам будут нужны также компоненты тензора  $\epsilon_{ij}$  в системе координат II — с осью  $z$  вдоль волнового вектора  $k$  и с магнитным полем  $B_0$  в плоскости  $yz$  (Рис. 6, б). Эти компоненты можно получить непосредственно из соотношения (4.66), записав его в координатной форме, или

<sup>22</sup>Поскольку  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (4.67) не зависит от  $k$ , поворот системы I вокруг оси  $z$  не меняет вида этого тензора. Заметим также, что гиротропия плазмы определяется фактором  $g$  в тензоре (4.67). Этот фактор зависит от знака заряда частицы. Например, в электрон-позитронной плазме с одинаковой концентрацией электронов и позитронов фактор  $g=0$  и гиротропия отсутствует.

преобразуя компоненты тензора (4.67) при повороте системы координат. Не останавливаясь подробно на этой процедуре (см. о ней [71]), сразу выпишем компоненты искомого тензора:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= 1 - \frac{v}{1-u}, & \epsilon_{yy} &= 1 - \frac{v(1-u\sin^2\alpha)}{1-u}, \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \frac{v(1-u\cos^2\alpha)}{1-u}, & \epsilon_{xy} &= -\epsilon_{yx} = i\frac{v\sqrt{u}\cos\alpha}{1-u}, \\ \epsilon_{xz} &= -\epsilon_{zx} = -i\frac{v\sqrt{u}\sin\alpha}{1-u}, & \epsilon_{yz} &= \epsilon_{zy} = \frac{uv\cos\alpha\sin\alpha}{1-u} \end{aligned} \quad (4.70)$$

( $\alpha$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ ). Из (4.67)–(4.70) ясно, что компоненты тензора диэлектрической проницаемости в рамках элементарной теории не зависят от волнового числа  $\mathbf{k}$ . Это означает, что в этой теории пространственная дисперсия отсутствует — существует лишь временная дисперсия благодаря зависимости  $\epsilon_{\alpha\beta}$  от частоты  $\omega$ . Поэтому связь  $D'_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta$  будет иметь место при любой зависимости монохроматического поля  $E_\beta$  от координат (а не только для  $E_\beta \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ ).

В отсутствие постоянного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega)$  становится диагональным, причем его компоненты не зависят от выбора системы координат:<sup>23</sup>

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega) = (1-v)\delta_{\alpha\beta}. \quad (4.71)$$

В последнем легко убедиться, полагая  $\mathbf{B}_0 = 0$ , т.е.  $u = 0$  в формулах (4.67), (4.68), (4.70). Далее, из сопоставления (4.71) с общей формой тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  (4.30) ясно, что для изотропной плазмы

$$\epsilon_{||} = \epsilon_{\perp} = 1 - v. \quad (4.72)$$

Принимая во внимание соотношения (4.36) и (4.38), отсюда получаем, что

$$\epsilon' = 1 - v = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2}, \quad \mu = 1. \quad (4.73)$$

Приведенные выше формулы для компонент тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (4.67) и следующие из них получены на основе элементарной теории, в которой учитывается лишь вынужденное движение частиц под действием

<sup>23</sup>Из (4.69), (4.70) ясно, что в рамках элементарной теории влиянием магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  на величину компонент тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (т.е. влиянием магнитного поля на распространение электромагнитных волн в плазме) обычно можно пренебречь, если  $\omega_B \ll \omega$ . Однако для некоторых эффектов в магнитоактивной плазме, например, для эффекта Фарадея, этого условия недостаточно (см. §9).



высокочастотного поля. Это означает, что развитая теория справедлива для неподвижной “холодной” плазмы, в которой не учитывается тепловое движение частиц.

Тепловое движение приближенно может быть учтено, если обратиться к квазигидродинамическому способу описания нерелятивистской плазмы. Он основан на представлении электронной и ионной компонент плазмы в виде “жидкостей”, пронизывающих одна другую и взаимодействующих через посредство электромагнитных полей. Каждая компонента в отдельности подчиняется уравнениям гидродинамики — уравнению Эйлера и уравнению непрерывности. Для электронной “жидкости” их можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{m_e N} - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]), \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla(N \mathbf{v}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость движения электронной компоненты,  $N$  — концентрация электронов,  $p$  — электронное давление. Плотность полного тока  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$  выражается через концентрации электронов и ионов  $N$ ,  $N_i$  и их скорости  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_i$ :

$$\mathbf{j}_{\text{tot}} = -eN\mathbf{v} + eN_i\mathbf{v}_i. \quad (4.75)$$

Уравнения, аналогичные (4.74), имеют место и для ионов. Мы их выписывать не будем, помня сделанные ранее замечания о несущественности вклада ионов в плотность тока, индуцированного высокочастотными полями (см. (4.60)). На процедуре вычисления диэлектрической проницаемости квазигидродинамическим методом мы также останавливаться не станем (см. об этом [3, 71]). Заметим лишь, что обсуждаемый метод учитывает тепловое движение частиц в плазме очень грубо — только через электронное давление. Поэтому квазигидродинамическое приближение может претендовать на весьма приближенное описание эффектов, связанных с тепловым движением, да и то лишь в некоторых случаях.

Последовательный учет теплового движения можно провести кинетическим методом, в основе которого лежит кинетическое уравнение Больцмана–Власова для функции распределения частиц  $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  ( $\mathbf{p}$  — импульс,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор частицы). Эта функция определяет плотность частиц в точке  $(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  фазового пространства в момент времени  $t$ , так что число частиц в элементе фазового пространства

$$dN = f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d^3 r d^3 p.$$

Здесь  $d^3r = dV$  — элемент объема в координатном пространстве,  $d^3p$  — элемент объема в импульсном пространстве. Концентрация частиц (электронов)  $N = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) d^3p$ .

Кинетическое уравнение для электронов плазмы, записанное в форме, справедливой и при релятивистских скоростях, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} - I_{st}, \quad (4.76)$$

где  $I_{st}$  — так называемый интеграл столкновений, описывающий изменение функции распределения вследствие ближних столкновений между частицами. Аналогичное уравнение имеет место и для ионов, однако по причинам, о которых уже говорилось ранее, мы будем считать движение ионов (их функцию распределения  $f_i$ ) заданным, пренебрегая воздействием на ионы высокочастотных полей.

Фигурирующая в выражении (4.24) для индукции  $\mathbf{D}'$  плотность тока  $\mathbf{j}_{tot}$  выражается через  $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  следующим образом:

$$\mathbf{j}_{tot} = -e \int \mathbf{v} (f - f_i) d^3p. \quad (4.77)$$

Уравнение (4.76) — нелинейное, что сильно затрудняет его решение. Однако для слабых электромагнитных возмущений его можно линеаризовать, представив функцию распределения  $f$  в форме  $f = f_0 + f'$ , где  $f_0(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  — стационарная невозмущенная функция распределения, подчиняющаяся уравнению

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} - e \left( \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} + I_0 = 0, \quad (4.78)$$

а  $f'$  — малая поправка к  $f_0$ , связанная с высокочастотным полем  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B}'$ . Отбросив в (4.76) члены, квадратичные по  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B}'$ , и  $f'$ , и учитывая (4.78), найдем, что линеаризованное уравнение для  $f'$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{r}} - e \left( \mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \right) \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{p}} = \\ e \left( \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}'] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} - I'. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Здесь  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{B}_0$  — стационарные поля в плазме, удовлетворяющие уравнениям Максвелла (4.19)-(4.22) с током  $\mathbf{j}_{0\,tot} = -e \int \mathbf{v} (f_0 - f_i) d^3p$  (см. (4.77)).

Во многих случаях влияние соударений на характер электромагнитных возмущений в равновесной плазме (с максвелловской функцией  $f_0$ ) достаточно точно можно учесть, представив в виде  $I' = \nu_{\text{eff}} f'$  часть интеграла столкновений, действующую на  $f'$ , и соответствующим образом подобрав величину  $\nu_{\text{eff}}$ .<sup>24</sup> При выборе последней используются явные выражения для интеграла столкновений  $I_{\text{st}}$  в плазме. После проведения такой операции анализ диссипативных процессов в плазме на базе кинетического уравнения (4.79) существенно упрощается (см. [71, 78, 81]).

Тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  однородной плазмы в отсутствие соударений ( $\nu_{\text{eff}} = 0$ ) удобно находить с помощью кинетического уравнения (4.79) следующим образом [82]. Рассмотрим изменение функции  $f'(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  во времени вдоль траектории невозмущенного движения частиц. Эта траектория определяется уравнениями

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t), \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}_0] \quad (4.80)$$

с начальными условиями  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$ .

Производная от функции  $f'(\mathbf{p}(t), \mathbf{r}(t), t)$  будет равна

$$\frac{df'}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f'}{\partial \mathbf{p}}. \quad (4.81)$$

Из (4.79) и (4.80) следует, что  $df'/dt$  можно представить в виде

$$\frac{df'}{dt} = e \left\{ \mathbf{E}'(\mathbf{r}(t), t) + \frac{1}{c}[\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}(t), t)] \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}.$$

Если  $f' \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ , то решением этого уравнения будет функция

$$f'(\mathbf{p}(t), \mathbf{r}(t), t) = e \int_{-\infty}^t \left\{ \mathbf{E}'(\mathbf{r}(\tilde{t}), \tilde{t}) + \frac{1}{c}[\mathbf{v}(\tilde{t}) \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}(\tilde{t}), \tilde{t})] \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}(\tilde{t})} d\tilde{t}. \quad (4.82)$$

Тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  мы найдем, если будет известно выражение для тока  $\mathbf{j}'_{\text{tot}} = -e \int \mathbf{v} f' d^3 p$ , возникающего в плазме под действием высоко-частотных полей  $\mathbf{E}', \mathbf{B}' \propto \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t]$ . Полагая в (4.82)  $\mathbf{E}' =$

<sup>24</sup>Это выражение характеризует изменение функции  $f'$  в единицу времени за счет выхода частиц из единичного объема фазового пространства вследствие столкновений с эффективной частотой  $\nu_{\text{eff}}$ .

<sup>25</sup>Обозначение  $\tilde{t}$  для переменной интегрирования мы ввели, чтобы отличить ее от значения на верхнем пределе, равного  $t$ .

$E_a \exp(ikr(t) - i\omega t)$  и учитывая, что  $B' = (c/\omega)[k \times E']$  (см. (4.26)), получим:

$$j'_{\alpha \text{ tot}}(\mathbf{r}(t), t) = -e^2 E_{a\beta} \exp[ikr(t) - i\omega t] \times \\ \int d^3p(t) \int_{-\infty}^t dt' v_{\alpha}(t') \exp\{ik[\mathbf{r}(t') - \mathbf{r}(t)] - i\omega(t' - t)\} \times \\ \left\{ \left(1 - \frac{k_{\gamma} v_{\gamma}(t')}{\omega}\right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\beta}(t')} + \frac{k_{\gamma} v_{\beta}(t')}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\gamma}(t')} \right\}. \quad (4.83)$$

Выполнив замену переменного  $t' \rightarrow \xi = t - t'$ , получим в (4.83) интеграл по  $\xi$  в постоянных пределах от 0 до  $\infty$ . Меняя затем порядок интегрирования, замечаем, что интеграл по  $\xi$  не должен зависеть от  $t$  как от параметра при любой стационарной функции распределения  $f_0$ , так как закон изменения тока  $j'_{\text{tot}}$  во времени, совпадающий с соответствующей зависимостью поля  $E'(t)$ , уже содержится в множителе перед интегралом. Поскольку интеграл по  $\xi$  берется в постоянных пределах, отсюда следует, что и подынтегральное выражение не должно зависеть от  $t$ . Величину  $t$  в этом выражении поэтому можно выбирать произвольно; мы положим  $\xi = t$ . Тогда из (4.83), (4.59) с учетом (4.80) получим, что тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  как в релятивистской, так и в нерелятивистской плазме имеет следующий вид:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} - i \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d^3p_0 \int_0^{\infty} dt v_{\alpha} \times \\ \exp\left(i\omega t - i \int_0^t \mathbf{k} \mathbf{v}(t') dt'\right) \left\{ \left(1 - \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}_0}{\omega}\right) \frac{\partial f_0}{\partial p_{0\beta}} + \frac{\mathbf{k} v_{0\beta}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial p_0} \right\}. \quad (4.84)$$

Здесь  $p_0$  и  $v_0$  — импульс и скорость частиц в момент  $t = 0$ ,  $v(t)$  — зависимость скорости невозмущенного движения частиц от времени, заданная уравнением (4.80).

Строго говоря, мы доказали соотношение (4.84) только вдоль данной траектории невозмущенного движения электрона, удовлетворяющего начальным условиям  $v(t_0) = v_0$ ,  $r(t_0) = r_0$  (поскольку зависимость поля от координат и времени выбиралась в форме  $\exp(ikr(t) - i\omega t)$ ). Варьируя, однако, начальные значения  $r_0$  и  $v_0$ , можно убедиться в справедливости (4.84) при любых значениях  $r$  и  $t$ . Если в плазме содержится несколько сортов частиц (электроны, ионы) или же один сорт частиц, который удобно рассматривать в виде нескольких компонент, каждая со своей собственной функцией распределения  $f_0$ , то для получения  $\epsilon_{\alpha\beta}$  следует просуммировать по всем сортам или компонентам выражение, стоящее справа от  $\delta_{\alpha\beta}$  в (4.84).

Напомним, что выражение (4.84) получено при условии, что  $f' \rightarrow 0$  at  $t \rightarrow -\infty$ . Это означает, что волна нарастает во времени, т.е. что  $\text{Im}\omega > 0$  (декремент  $\gamma = -\text{Im}\omega$  отрицателен). Для затухающих волн с  $\text{Im}\omega < 0$  тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k)$  можно рассматривать как аналитическое продолжение функции (4.84) в нижнюю полуплоскость комплексных значений  $\omega$ . Указанный способ получения  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k)$  в области  $\text{Im}\omega < 0$ , конечно, представляет собой лишь рецепт, в справедливости которого можно убедиться, решая задачу об установлении тока  $\mathbf{j}_{\text{tot}}(\mathbf{r}, t)$  в плазме при включении полей в начальный момент времени  $t = t_0$  (см. в этой связи [83]).

В изотропной плазме, где  $\mathbf{E}_0 = 0$ ,  $\mathbf{B}_0 = 0$  и функция распределения  $f_0(p)$  не зависит от направления  $p$ , тензор (4.84) упрощается. В такой плазме  $\mathbf{v}(t) = \text{const} = \mathbf{v}_0$ . Тогда

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k) = \delta_{\alpha\beta} - i \frac{4\pi e^2}{\omega} \int d^3 p_0 \int_0^\infty v_\alpha^0 \frac{\partial f_0}{\partial p_{0\beta}} \exp\left[i(\omega - k v_0)t\right] dt.$$

Здесь учтено, что

$$\frac{\partial f_0}{\partial p} = \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{p}{p}, \quad \frac{\partial f_0}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{p_\alpha}{p}.$$

Далее, при  $\text{Im}\omega > 0$

$$\int_0^\infty \exp\left[i(\omega - k v_0)t\right] dt = \frac{i}{\omega - k v_0},$$

и следовательно<sup>26</sup>

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int \frac{v_\alpha}{\omega - k v} \frac{\partial f_0}{\partial p_\beta} d^3 p. \quad (4.85)$$

Сопоставляя (4.85) с выражением (4.30), получим, что продольная и поперечная диэлектрические проницаемости в изотропной плазме имеют вид [78]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\parallel}(\omega, k) &= 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega k^2} \int \frac{(k v)^2}{\omega - k v} \frac{d f_0}{d \mathcal{E}} d^3 p, \\ \epsilon_{\perp}(\omega, k) &= 1 + \frac{2\pi e^2}{\omega k^2} \int \frac{[k \times v]^2}{\omega - k v} \frac{d f_0}{d \mathcal{E}} d^3 p. \end{aligned} \quad (4.86)$$

<sup>26</sup> Индексы "0" у скоростей и импульсов здесь опущены для упрощения записи.

В этих формулах через  $df_0/d\mathcal{E}$  обозначена производная по энергии частиц  $\mathcal{E}$ ; очевидно, что  $\partial f_0/\partial p = v df_0/d\mathcal{E}$ .

Формулы (4.86) получены при условии, что  $\text{Im}\omega > 0$  (т.е. для полей, нарастающих во времени), и интегрирование ведется по действительным значениям импульсов  $p$ . Если же  $\text{Im}\omega < 0$ , то полюс в подынтегральном выражении  $v_{\mathbf{k}} = \omega/k$ , который раньше лежал в верхней полуплоскости комплексных значений импульса  $p_{\mathbf{k}}$ , теперь переместится в нижнюю полуплоскость ( $v_{\mathbf{k}}$  и  $p_{\mathbf{k}}$  — проекции  $v$  и  $p$  на направление  $\mathbf{k}$ ). Для получения аналитического продолжения  $\epsilon_{\parallel}$ ,  $\epsilon_{\perp}$  из области  $\text{Im}\omega > 0$  в область  $\text{Im}\omega < 0$ , необходимо, чтобы контур интегрирования  $G$  в плоскости  $p_{\mathbf{k}}$  не прошел через полюс при переходе последнего в нижнюю полуплоскость  $\omega$ . Для этого достаточно, чтобы контур  $G$  всегда огибал полюс снизу (при  $k > 0$ ).

Для нерелятивистской плазмы с максвелловским распределением по скоростям

$$F_0(v) = \frac{N_0}{(2\pi\kappa T/m_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2\kappa T}\right) \quad (4.87)$$

величины  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$  примут вид <sup>27</sup>

$$\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} \left( 1 - \frac{Z}{\sqrt{\pi}} \int_G \frac{e^{-y^2}}{Z-y} dy \right), \quad (4.88)$$

$$\epsilon_{\perp}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}Z} \int_G \frac{e^{-y^2}}{Z-y} dy, \quad (4.89)$$

где  $v_T = \sqrt{\kappa T/m_e}$ ,  $y = v_{\mathbf{k}}/\sqrt{2}v_T$  ( $v_{\mathbf{k}}$  — проекция скорости электрона на направление  $\mathbf{k}$ ),  $Z = \omega/\sqrt{2}kv_T$ . При переходе от (4.86) к этим формулам учтено, что функции распределения  $f_0(p)$  и  $F_0(v)$  связаны между собой соотношением  $f_0(p)d^3p = F_0(v)d^3v$ , где  $p = m_e v$  и, следовательно,  $f_0(p) = m_e^{-3} F_0(v)$ . Фигурирующий в (4.88), (4.89) интеграл

$$\int_G \frac{e^{-y^2}}{Z-y} dy = -i\pi w(Z), \quad (4.90)$$

где

$$w(Z) = e^{-Z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^Z e^{x^2} dx \right) \quad (4.91)$$

<sup>27</sup> Нетрудно убедиться, что выражения для  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$  в пределе  $|Z| \gg 1$ ,  $|\text{Im}Z| \ll 1$  одинаковы; при этом магнитная проницаемость  $\mu \rightarrow 1$  (см. (4.38)). Однако в случае  $|Z| \lesssim 1$  величины  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$  различны; это означает, что в указанных условиях  $\mu \neq 1$ .

– интеграл вероятностей от комплексного аргумента (функция Крампа). При малых значениях  $|Z| \ll 1$

$$w(Z) = 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}}Z + \dots \quad (4.92)$$

При  $|Z| \gg 1$ ,  $|\text{Im } Z| \ll 1$  имеет место асимптотическое разложение

$$w(Z) = e^{-Z^2} + \frac{i}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{Z} + \frac{1}{2Z^3} + \frac{3}{4Z^5} + \dots \right). \quad (4.93)$$

В случае, если изотропная плазма с максвелловским распределением по скоростям движется как целое со скоростью  $v_0$ , ее распределение по скоростям будет иметь вид (4.87) с заменой в показателе экспоненты  $v^2$  на  $(v - v_0)^2$ . В этом случае для волн с волновым вектором  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{v}_0$  величина  $\epsilon_{\perp}$  сохранится прежней (см. (4.86), (4.89)), а  $\epsilon_{\parallel}$  может быть получена из (4.88) заменой  $Z = \omega / \sqrt{2}k v_T$  на  $Z = (\omega - kv_0) / \sqrt{2}k v_T$ .

В присутствии постоянного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  траектории невозмущенного движения частиц представляют собой винтовые линии с осью вдоль  $\mathbf{B}_0$ . Если учесть это обстоятельство в формуле для  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (4.84) и провести необходимые преобразования, то в системе координат I (Рис. 6, а) с осью  $z$  вдоль  $\mathbf{B}_0$  и осью  $x$  в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$  тензор диэлектрической проницаемости неравновесной магнитоактивной плазмы примет вид (см., например, [84])

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} - i^{\alpha+\beta} L_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) \quad (4.94)$$

где

$$L_{\alpha\beta} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\parallel} \frac{D_{\alpha\beta}^l(\omega, \mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp})}{\omega - \omega_l(\mathbf{k}, p_{\parallel}, p_{\perp})},$$

$$D_{\alpha\beta}^l = \frac{8\pi^2 e^2 p_{\perp}}{m_e^2 \omega^2} \times \quad (4.95)$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} Ap_{\perp} J_l^2 l^2 \xi^{-2} & -Ap_{\perp} J_l J_l' l \xi^{-1} & Cp_{\perp} J_l^2 l^2 \xi^{-2} - Bp_{\perp} J_l^2 l \xi^{-1} \\ Ap_{\perp} J_l J_l' l \xi^{-1} & -Ap_{\perp} J_l'^2 & Cp_{\perp} J_l J_l' l \xi^{-1} - Bp_{\perp} J_l J_l' \\ -Ap_{\parallel} J_l^2 l \xi^{-1} & Ap_{\parallel} J_l J_l' & -Cp_{\parallel} J_l^2 l \xi^{-1} + Bp_{\parallel} J_l^2 \end{array} \right\},$$

$$A = (m\omega - k_{\parallel} p_{\parallel}) \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} p_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}},$$

$$B = m\omega \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}}, \quad C = k_{\perp} \left( p_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} - p_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}} \right),$$

$$\omega_l = l\Omega_B + k_{\parallel} \frac{p_{\parallel}}{m}, \quad \xi = \frac{k_{\perp} p_{\perp}}{m\Omega_B}.$$

В приведенных выражениях  $J_l$  и  $J'_l$  — функция Бесселя аргумента  $\xi$  и ее производная по  $\xi$ ;  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  — проекции импульса  $p$  на направление  $B_0$  и на плоскость, ортогональную  $B_0$ , тот же смысл имеют проекции  $k_{\parallel}$  и  $k_{\perp}$  волнового вектора  $k$ . Наконец, через  $\Omega_B = eB_0/mc$  обозначена релятивистская гирочастота, где  $m = m_e/\sqrt{1-\beta^2}$  — релятивистская масса электрона и  $\beta = v/c$ . Невозмущенная функция распределения электронов по импульсам  $f_0(p) = f_0(p_{\parallel}, p_{\perp})$  имеет нормировку

$$\int f_0(p) d^3p = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} p_{\perp} f(p_{\parallel}, p_{\perp}) dp_{\perp} = N_0.$$

Продольная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{\parallel}$  (4.53) в рассматриваемой системе координат I может быть записана следующим образом:

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon_{xx} \sin^2 \alpha + \epsilon_{zz} \cos^2 \alpha + (\epsilon_{xz} + \epsilon_{zx}) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (4.96)$$

где  $\alpha$  — угол между  $k$  и  $B_0$ ; отсюда с учетом (4.94), (4.95) получаем (см., например, [85])

$$\begin{aligned} \epsilon_{\parallel} = 1 + \frac{8\pi^2 e^2 m_e}{k^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dp_{\perp} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_{\parallel} J_l^2 \left( \frac{k_{\perp} p_{\perp}}{m\Omega_B} \right) \times \\ \times \frac{k_{\parallel} p_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} + l m \Omega_B \frac{\partial f_0}{\partial p_{\perp}}}{m\omega - l m \Omega_B - k_{\parallel} p_{\parallel}}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

В случае  $\text{Im} \omega > 0$  (нарастающие поля) интегрирование в формулах (4.94) и (4.97) проводится по действительным значениям  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$ . Для получения аналитического продолжения  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k)$  и  $\epsilon_{\parallel}(\omega, k)$  в область  $\text{Im} \omega < 0$  контур интегрирования в комплексной плоскости  $p_{\parallel}$  или  $p_{\perp}$  следует деформировать таким образом, чтобы при перемещении  $\omega$  в нижнюю полуплоскость этот контур ни разу не пересек полюсов подынтегральных выражений в  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $\epsilon_{\parallel}$ . Для равновесной нерелятивистской плазмы с максвелловской функцией распределения (4.87) в тензоре  $\epsilon_{\alpha\beta}$  можно провести интегрирование по  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$ . В результате он запишется так [86]:



$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= 1 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{i\omega_L^2}{\omega k_{\parallel} v_T} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_l e^{-\chi} \frac{l^2}{\chi} I_l, \\
 \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} &= - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_L^2}{\omega k_{\parallel} v_T} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_l e^{-\chi} l (I_l - I'_l), \\
 \epsilon_{yy} &= \epsilon_{xx} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{i\omega_L^2}{\omega k_{\parallel} v_T} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_l e^{-\chi} 2\chi (I_l - I'_l), \\
 \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_L^2}{\omega \omega_B} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} (1 + i\sqrt{\pi} \omega_l Z_l) \frac{l}{\chi} e^{-\chi} I_l, \\
 \epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy} &= - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{i\omega_L^2}{\omega \omega_B} \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} (1 + i\sqrt{\pi} \omega_l Z_l) e^{-\chi} (I_l - I'_l), \\
 \epsilon_{zz} &= 1 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\omega_L^2}{\omega k_{\parallel} v_T} e^{-\chi} I_l Z_l (1 + i\sqrt{\pi} \omega_l Z_l).
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

Здесь  $\omega_l(Z_l)$  — интеграл вероятности (4.91);  $I_l(\chi)$  и  $I'_l(\chi)$  — модифицированная функция Бесселя порядка  $l$  и ее производная по аргументу  $\chi$ ,

$$Z_l = \frac{\omega - l\omega_B}{\sqrt{2}k_{\parallel}v_T}, \quad \chi = \frac{k_{\perp}^2 v_T^2}{\omega_B^2}, \quad v_T^2 = \frac{\kappa T}{m_e}. \tag{4.99}$$

При  $v_T \rightarrow 0$  этот тензор переходит в тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (4.67)-(4.69) “холодной” магнитоактивной плазмы.

Продольная диэлектрическая проницаемость (4.97) в максвелловской плазме приобретает следующий вид:

$$\epsilon_{\parallel} = 1 + \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} \left\{ 1 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} i\sqrt{\pi} Z_0 I_l(\chi) e^{-\chi} \omega(Z_l) \right\}. \tag{4.100}$$

Можно показать (см. в этой связи [87]), что эта формула, справедливая в магнитоактивной плазме, переходит в формулу (4.88) для  $\epsilon_{\parallel}$  изотропной плазмы, если выполнено любое из неравенств:

$$\frac{\text{Im}\omega}{\omega_B} \gg 1, \quad \frac{k_{\parallel} v_T}{\omega_B} \gg 1. \tag{4.101}$$

Первое неравенство означает, что за время существенного изменения амплитуды поля частица не успевает совершить ни одного оборота в магнитном поле. В этом случае приближение  $B_0 = 0$  справедливо во

всем интервале углов  $\alpha$  между  $\mathbf{B}_0$  и  $\mathbf{k}$ . Если же указанное неравенство нарушено, то влияние магнитного поля на характер продольных волн оказывается несущественным только в области углов вблизи направления поля  $\mathbf{B}_0$ , где выполнено второе неравенство (4.101). При этом условии роль теплового движения в формировании продольных волн оказывается более существенной, чем влияние постоянного магнитного поля.

Наоборот, в области углов  $\alpha$ , достаточно близких к  $\pi/2$ , учет влияния магнитного поля необходим, если  $\text{Im} \omega \lesssim \omega_B$ . При строго поперечном распространении [88]

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2\omega_L^2 l^2 I_l(\chi) e^{-\chi}}{(\omega^2 - l^2 \omega_B^2) \chi}. \quad (4.102)$$

К этому выражению можно прийти, устремив в (4.100)  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  (т.е.,  $|Z_l| \rightarrow \infty$ ) и использовав тождество  $\sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(\chi) e^{-\chi} = 1$ .

Выражения для диэлектрической проницаемости плазмы, полученные в этом параграфе, будут использованы в дальнейшем при рассмотрении характера нормальных волн, их поглощения и усиления, условий распространения волн в плазме и т.д.

## §5. Электромагнитные волны в однородной равновесной плазме

### 5.1. Волны в изотропной плазме

В разделе 4.2 было выяснено, что в изотропной плазме могут существовать лишь два типа нормальных волн: поперечные электромагнитные и продольные плазменные волны. В поперечных волнах векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  перпендикулярны к волновому вектору  $\mathbf{k}$ ; в остальном их поляризация остается произвольной, так что при разложении заданного электромагнитного поля в качестве поперечных нормальных волн можно взять любые две волны  $\mathbf{E} \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$  с ортогональными поляризациями (о волнах с ортогональными поляризациями см. §2). Однако в случае, если волны в изотропной плазме рассматриваются как предельный переход от магнитоактивной плазмы (при стремлении постоянного поля  $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$ ), поляризация поперечных волн будет вполне определенной (см. следующий раздел). Наконец, в продольных волнах электрическое поле  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ , а магнитное поле отсутствует.

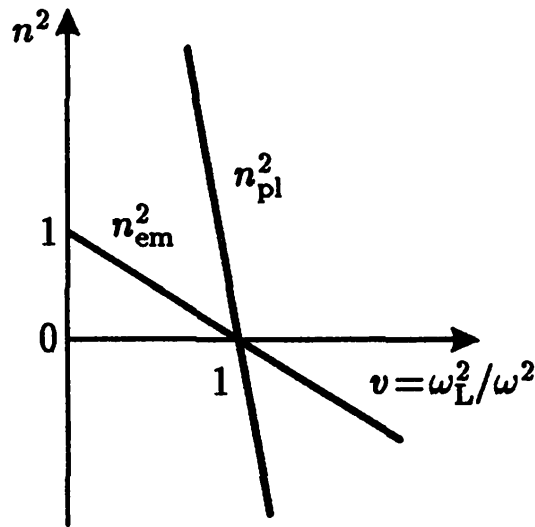


Рис. 7. Зависимость квадрата показателя преломления  $n_{em}^2$  и  $n_{pl}^2$  от параметра  $\nu$  в изотропной плазме

Связь между частотой и волновым вектором для электромагнитных волн определяется дисперсионным уравнением (4.46). Входящая в него поперечная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{\perp}$  для “холодной” плазмы задается формулой (4.72). Из нее следует, что дисперсионное уравнение для поперечных волн (4.46) имеет вид <sup>28</sup>

$$\omega^2 = \omega_L^2 + k^2 c^2. \quad (5.1)$$

Это уравнение приводит к действительным решениям  $k$  при действительных значениях  $\omega \geq \omega_L$ . При этом можно ввести показатель преломления электромагнитной волны  $n_{em}$ , определив его как  $n_{em} = ck/\omega$  (см. (4.55)). Согласно (5.1) и (4.72),

$$n_{em}^2 = \epsilon_{\perp} = \epsilon = 1 - \omega_L^2/\omega^2, \quad (5.2)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость изотропной плазмы в отсутствие теплового движения. Зависимость  $n_{em}^2$  от параметра  $\nu = \omega_L^2/\omega^2$  представлена на Рис. 7.

Длина электромагнитной волны  $\lambda_{em} = 2\pi/k = 2\pi c/\omega\sqrt{\epsilon}$ . Фазовая скорость

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} s = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} s, \quad (5.3)$$

где  $s$  — единичный вектор в направлении  $k$ . Из (5.3) следует, что

<sup>28</sup> Учет теплового движения на основе кинетического уравнения приводит к появлению в правой части (5.1) члена  $v_T^2 k^2$ , которым в нерелятивистской плазме ( $v_T^2/c^2 \ll 1$ ) вполне можно пренебречь по сравнению с членом  $c^2 k^2$  [78].

$v_{ph} \geq c$ . В свою очередь групповая скорость

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = c \frac{d\omega}{d(\omega n_{em})} s, \quad (5.4)$$

т.е. она направлена вдоль вектора фазовой скорости  $v_{ph}$ . С учетом (5.2) получаем, что  $v_{gr} = c\sqrt{\epsilon} \leq c$ , причем произведение  $v_{ph}v_{gr} = c^2$ .

Заметим, что при  $\omega < \omega_L$  величина  $n_{em}^2 < 0$ , т.е.  $n_{em}$  становится чисто мнимым. Это означает, в соответствии с определением (4.55) показателей преломления и поглощения  $n, \eta$ , что в этой области частот  $n=0, \eta^2 = 1 - \omega_L^2/\omega^2$  и  $\text{Re } k=0$ . При этом электромагнитное поле не осциллирует в пространстве, а экспоненциально затухает, причем фазы колебаний полей  $E$  и  $B$  в данной точке сдвинуты на  $\pi/2$ .<sup>29</sup> Благодаря такому сдвигу фаз средний по времени поток энергии в поперечной волне при  $\omega < \omega_L$  обращается в нуль.

Плотность энергии в поперечных волнах со случайными фазами [71, 89]

$$W_{\perp} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2)_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_{\perp}) \right)_{\omega=\omega(\mathbf{k})} d^3k. \quad (5.5)$$

Здесь  $(E^2)_{\mathbf{k}}$  определяется соотношением  $\langle E_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}'}^* \rangle = (E^2)_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , в котором  $(E^2)_{\mathbf{k}}$  — комплексная амплитуда разложения (2.1); скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по фазам плоских волн; связь  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  определяется дисперсионным уравнением (5.1).<sup>30</sup> Из (5.5) следует, что спектральная плотность энергии в поперечных волнах

$$W_{\mathbf{k}} = \frac{1}{8\pi} (E^2)_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_{\perp}) \right)_{\omega=\omega(\mathbf{k})} \quad (5.6)$$

С учетом (5.2)

$$W_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\pi} (E^2)_{\mathbf{k}}. \quad (5.7)$$

Соответственно спектральная интенсивность в этих волнах будет равна (см. (2.11))

$$I_{\mathbf{k}} = W_{\mathbf{k}} v_{gr} = \frac{c\sqrt{\epsilon}}{4\pi} (E^2)_{\mathbf{k}}, \quad (5.8)$$

поскольку  $v_{gr} = c\sqrt{\epsilon}$ .

<sup>29</sup> Это следует из уравнения (4.26) при мнимых значениях  $k$ .

<sup>30</sup> Для того чтобы в разложение (2.1) входили только поперечные волны ( $(E_{\mathbf{k}} \perp \mathbf{k})$ ), следует взять ту часть  $E(\mathbf{r}, t)$ , для которой  $\text{div } E = 0$ . Другая часть поля, в которой  $\text{rot } E = 0$ , даст при разложении продольные волны ( $E_{\mathbf{k}} \parallel \mathbf{k}$ ).

Перейдем теперь к плазменным волнам, в которых  $E_k \parallel k$ . Для таких волн в квазигидродинамическом приближении дисперсионное уравнение (4.47) запишется в форме, справедливой (в рамках этого приближения) при любых  $\omega$  и  $k$ :

$$\omega^2 = \omega_L^2 + v_T^2 k^2. \quad (5.9)$$

Несовершенство квазигидродинамического подхода сказывается и на величине коэффициентов в дисперсионном уравнении (5.9), и на границах его применимости. В самом деле, последовательный учет теплового движения в равновесной плазме на основе кинетического уравнения приводит к выражению (4.88) для  $\epsilon_{\parallel}$ . С учетом (4.90) дисперсионное уравнение для продольных волн в изотропной плазме запишется в виде

$$\epsilon_{\parallel} = 1 + \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} [1 + i\sqrt{\pi} Z w(Z)] = 0, \quad (5.10)$$

где  $Z = \omega / \sqrt{2} k v_T$ . В области

$$Z \gg 1, \quad |\text{Im } Z| \ll 1, \quad (5.11)$$

соответствующей слабому затуханию и большим фазовым скоростям  $v_{ph} \gg v_T$ , уравнение (5.10) можно представить следующим образом:

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2} - \frac{3\omega_L^2 k^2 v_T^2}{\omega^4} + \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} i\sqrt{\pi} Z e^{-Z^2} = 0. \quad (5.12)$$

При переходе от (5.10) к (5.12) было использовано асимптотическое представление (4.93) функции Крампа  $w(Z)$ .

Экспоненциально малое слагаемое с мнимой единицей в (5.10) приводит к слабому затуханию плазменных волн (появлению  $\text{Im } \omega < 0$  при действительных  $k$ ), не связанному с соударениями частиц плазмы. Это — так называемое затухание Ландау: его мы пока рассматривать не будем, отложив обсуждение его роли и физического смысла до главы 6, посвященной поглощению волн в космической плазме. Учитывая вместе с тем, что при условии (5.11) частота  $\omega$  близка к  $\omega_L$ , представим дисперсионное уравнение (5.12) в приближенной форме:

$$\omega^2 = \omega_L^2 + 3v_T^2 k^2. \quad (5.13)$$

Это уравнение задает показатель преломления плазменной волны:

$$n_{pl}^2 = \frac{1 - \omega_L^2/\omega^2}{3\beta_T^2} = \frac{n_{em}^2}{3\beta_T^2}, \quad (5.14)$$

где  $\beta_T = v_T/c$ . Зависимость квадрата показателя преломления  $n_{pl}^2$  от параметра  $v = \omega_L^2/\omega^2$  представлена на Рис. 7. Длина плазменной волны  $\lambda_{pl} = 2\pi\sqrt{3}v_T/\omega\sqrt{\epsilon}$  в  $(\sqrt{3}\beta_T)^{-1}$  раз меньше длины электромагнитной волны той же частоты; соответственно показатель преломления плазменной волны в  $(\sqrt{3}\beta_T)^{-1}$  раз больше показателя преломления электромагнитной волны. В условиях солнечной короны, где температура  $T \sim 10^6$  К,  $v_T \sim 4 \cdot 10^8$  см/с и  $\beta_T \sim 10^{-2}$ , величина  $n_{pl}$  примерно на два порядка больше, чем  $n_{em}$ . В областях, где космическая плазма имеет меньшую температуру (например, в солнечной хромосфере или в областях II межзвездной среды), это различие еще сильнее.

Как и для поперечных волн, в плазменных волнах  $v_{ph} \parallel v_{gr} \parallel \mathbf{k}$ . Фазовая и групповая скорости плазменных волн по величине равны соответственно

$$\begin{aligned} v_{ph} &= \frac{\omega}{k} = \sqrt{3} \frac{v_T}{\sqrt{\epsilon}}, \\ v_{gr} &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{cd\omega}{d(\omega n_{pl})} = \sqrt{3\epsilon}v_T, \end{aligned} \quad (5.15)$$

их произведение  $v_{ph}v_{gr} = 3v_T^2$ .

Приведем, наконец, выражения для плотности энергии и потока энергии плазменных волн. Величина спектральной плотности энергии определяется выражением, аналогичным приведенному для  $W_{\mathbf{k}}$  (5.6) [71, 89]:

$$W_{\mathbf{k}} = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega^2 \epsilon_{\parallel}) \right)_{\omega=\omega(\mathbf{k})}$$

Однако теперь величина  $(\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}}$  служит характеристикой продольного электрического поля (в котором  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ ), а функция  $\omega(\mathbf{k})$  — решением дисперсионного уравнения для плазменных волн  $\epsilon_{\parallel} = 0$  (см. (5.10)). При условии (5.11), когда  $\epsilon_{\parallel}$  имеет вид (5.12), получаем (пренебрегая экспоненциально малым членом в (5.12)):

$$W_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}} (1 + \epsilon) \approx \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}}. \quad (5.16)$$

Соответственно спектральная интенсивность плазменных волн будет иметь вид

$$I_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{3\epsilon}v_T}{4\pi} (\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}} (1 + \epsilon) \approx \frac{\sqrt{3\epsilon}v_T}{4\pi} (\mathbf{E}^2)_{\mathbf{k}}, \quad (5.17)$$

поскольку  $I_k = W_k v_{gr}$  (2.11) и  $v_{gr} = \sqrt{3\epsilon} v_T$ . При переходе к последним выражениям в (5.16), (5.17) учтено, что в плазменных волнах при  $\omega \gg \sqrt{2k} v_T$  (5.11) частота  $\omega$  близка к  $\omega_L$ , т.е.  $\epsilon \ll 1$ .

При  $\omega \sim \sqrt{2k} v_T$ , т.е. в случае, когда фазовая скорость волны  $v_{ph} = \omega/k$  сравнима с тепловой скоростью электронов  $v_T$ , формула (5.13) для частоты плазменных волн становится неверной. Вместе с тем, в этой области резко возрастает роль затухания Ландау и волна поглощается за время порядка  $1/\omega \sim 1/\omega_L$ . Указанное обстоятельство следует из простых физических соображений. Если в начальный момент в плазме задана продольная волна с длиной  $1/k \sim v_T/\omega_L \sim v_T/\omega$  (т.е. с фазовой скоростью  $v_{ph} \sim v_T$ ), то за время  $1/\omega$  электроны, участвующие в тепловом движении, переместятся на расстояние  $\sim 1/k$ . Тем самым, за время  $1/\omega$  частицы перенесут свою упорядоченную скорость, приобретенную под действием поля волны и характерную для данной фазы волны  $\omega t - kx$ , в область, где фаза существенно иная. Это приведет к резкому затуханию заданного распределения поля  $E$  в течение  $t \sim 1/\omega$ .

Следует отметить, что по причинам, которые будут указаны в §12, затухание Ландау существует только для тех волн, фазовая скорость которых меньше скорости света. Поэтому для плазменных волн затухание Ландау отсутствует на тех частотах, для которых  $n_{pl} = c/v_{ph} < 1$ . Для электромагнитных волн в изотропной плазме всегда  $n_{em} < 1$  и затухание Ландау невозможно.

## 5.2. Обыкновенные и необыкновенные волны в магнитоактивной плазме

Присутствие в плазме постоянного магнитного поля радикально меняет ее электромагнитные свойства, делая ее магнитоактивной (гиротропной и анизотропной) средой. Гиротропия плазмы проявляется в эллиптической поляризации нормальных волн, а анизотропия — в зависимости их характеристик (поляризации, показателей преломления и поглощения) от направления распространения.

В “холодной” магнитоактивной плазме с тензором диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k)$  в форме (4.67) дисперсионное уравнение (4.41) позволяет найти показатель преломления нормальных волн  $n_j$  ( $j$  — “номер” нормальной волны). Без учета соударений в такой плазме поглощение отсутствует (показатель поглощения  $\eta_j = 0$  и  $n_j = ck_j/\omega$ ). При этом дисперсионное уравнение (4.41) сводится к виду [71]

$$(1 - u - v + uv \cos^2 \alpha) n^4 - [2(1 - v)]^2,$$

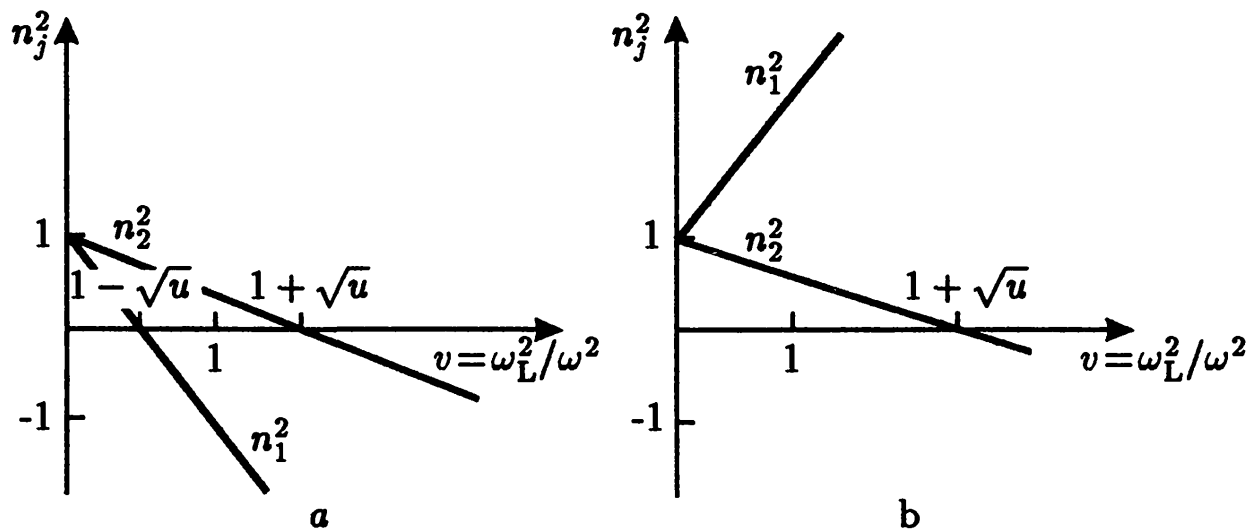


Рис. 8. Зависимость  $n_j^2(v)$  при продольном распространении в магнитном поле: (а)  $u < 1$ ; (б)  $u > 1$

$$-u(2 - v - v \cos^2 \alpha)]n^2 - (1 - v)[u - (1 - v)^2] = 0, \quad (5.18)$$

где  $\alpha$  — угол между волновым вектором  $k$  и полем  $B_0$ . Это уравнение определяет два значения квадрата показателя преломления  $n_j^2$  ( $j = 1, 2$ ), соответствующие двум нормальным волнам, которые могут распространяться в однородной магнитоактивной плазме (без учета теплового движения):

$$n_j^2 = 1 - \frac{2v(1 - v)}{2(1 - v) - u \sin^2 \alpha \mp \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1 - v)^2 \cos^2 \alpha}}. \quad (5.19)$$

Здесь знак минус и индекс  $j = 1$  отвечают необыкновенной волне, знак плюс и индекс  $j = 2$  — обыкновенной волне. При  $u = \omega_B^2/\omega^2 \ll 1$  выражение для  $n_j^2$  переходит в форму (5.2) для поперечных электромагнитных волн в изотропной плазме. Графики зависимости  $n_j^2(v)$  в случае продольного  $\alpha = 0$  и поперечного ( $\alpha = \pi/2$ ) распространения относительно магнитного поля  $B_0$  представлены на Рис. 8, 9. Зависимости  $n_j^2(v)$  при произвольном (но малом) угле  $\alpha$  даны на Рис. 10.

Показатели преломления обращаются в нуль при  $v = v_0$ , где

$$v_0 = 1, \quad v_0 = 1 \mp \sqrt{u}, \quad (5.20)$$

и становятся бесконечно большими при значениях  $u, v$ , удовлетворяющих соотношению

$$1 - u - v + uv \cos^2 \alpha = 0, \quad (5.21)$$



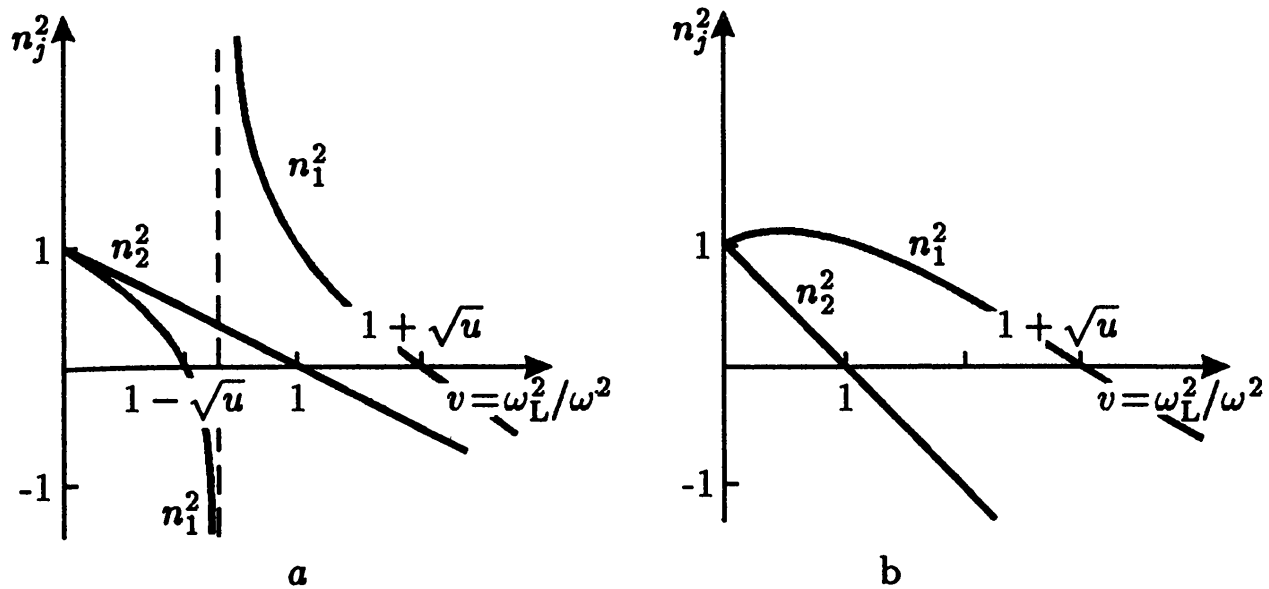


Рис. 9. Зависимость  $n_j^2(v)$  при поперечном распространении волн в магнитном поле: (а)  $u < 1$ ; (б)  $u > 1$

т.е. при

$$v = v_\infty = \frac{1 - u}{1 - u \cos^2 \alpha}. \quad (5.22)$$

Из рисунков следует, что характер дисперсионных кривых  $n_j^2(v)$  существенно меняется с переходом от  $u < 1$  к  $u > 1$ . В последнем случае также следует различать два варианта:  $u \cos^2 \alpha < 1$  и  $u \cos^2 \alpha > 1$ . Поскольку параметр  $v$  не может быть отрицательным, в области  $u > 1$ ,  $u \cos^2 \alpha < 1$  нет полюсов функции  $n_j^2(v)$  (см. (5.22)). При малых углах  $\alpha$  указанная область мало существенна, так как она реализуется лишь в весьма узком интервале значений параметра  $u$ .

В связи с приведенными графиками дисперсионных кривых надо отметить (во избежание недоразумений) следующее обстоятельство. Если рассматривать графики Рис. 8 как результат предельного перехода  $\alpha \rightarrow 0$  от графиков Рис. 10, то для сохранения соответствия между названиями волн при  $\alpha = 0$  и при  $\alpha \neq 0$  следовало бы продолжение дисперсионной прямой  $n_1^2(v)$  на Рис. 8 в область  $v > 1$  обозначать через  $n_2^2(v)$ . При этом соответствующие волны должны называться обыкновенными, несмотря на то, что в области  $v < 1$  волны, отвечающие той же дисперсионной прямой, по-прежнему именуются необыкновенными. Аналогично продолжение дисперсионной прямой  $n_2^2(v)$  (обыкновенная волна) в область  $v > 1$  на Рис. 8 следовало бы обозначать через  $n_1^2(v)$ , а соответствующую волну называть необыкновенной. Однако в теории распространения электромагнитных волн в плазме более традиционны другие обозначения, принятые на Рис. 8—

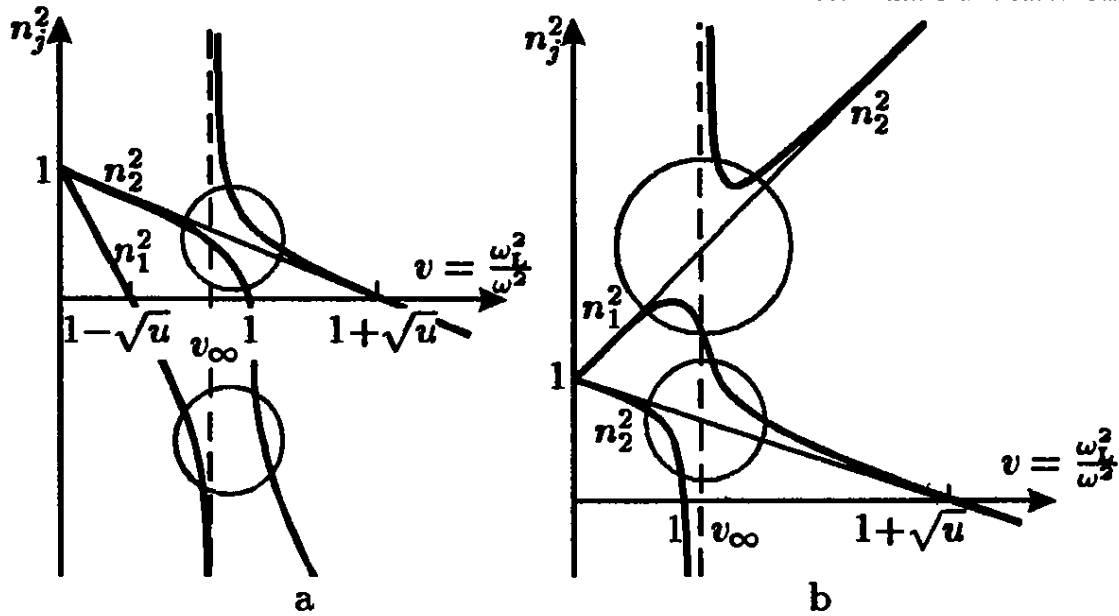


Рис. 10. Зависимость  $n_j^2(v)$  при  $\alpha \ll 1$ : (а)  $u < 1$ ; (б)  $u \cos^2 \alpha > 1$ .  
Кружками отмечены области линейного взаимодействия волн (см. §7)

10. Им мы и будем следовать в дальнейшем, помня о необходимости переобозначений дисперсионных кривых и изменения названий волн в области  $v > 1$  при переходе от продольного распространения к случаю  $\alpha \neq 0$ .

Рис. 8-10 фактически характеризуют изменение показателей преломления в зависимости от собственной частоты плазмы  $\omega_L$  при  $\omega, \omega_B = \text{const}$ . Представляет интерес также вид функций  $n_j^2(\omega)$  при постоянных  $\omega_L$  и  $\omega_B$ ; соответствующий график для одного частного случая приведен на Рис. 11. При фиксированных значениях  $\omega_L$  и  $\omega_B$  квадрат показателя преломления обращается в бесконечность на двух частотах  $\omega_\infty$ , определяемых уравнением (5.21):

$$\omega_\infty^2 = \frac{1}{2}(\omega_B^2 + \omega_L^2) \pm \left[ \frac{1}{4}(\omega_B^2 + \omega_L^2)^2 - \omega_B^2 \omega_L^2 \cos^2 \alpha \right]^{1/2}. \quad (5.23)$$

Величина  $\omega_\infty^2$  (5.23) всегда неотрицательна, т.е. две указанные особенности  $n_j^2(\omega)$  сохраняются при любых значениях параметров  $\omega_L$ ,  $\omega_B$  и  $\alpha$ . Частоты  $\omega_\infty$  называются резонансными. При  $\alpha = 0$  одно из значений  $\omega_\infty = \omega_L$  — это плазменный резонанс, другое значение  $\omega_\infty = \omega_B$  — циклотронный резонанс. Если  $\alpha = \pi/2$ , то одно из значений  $\omega_\infty = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_B^2}$  — это верхний гибридный резонанс. При учете движения ионов в области низких частот появляется нижний гибридный резонанс  $\omega_\infty = \sqrt{\omega_B \omega_{B_i}} = \omega_B \sqrt{m_e/m_i}$ .

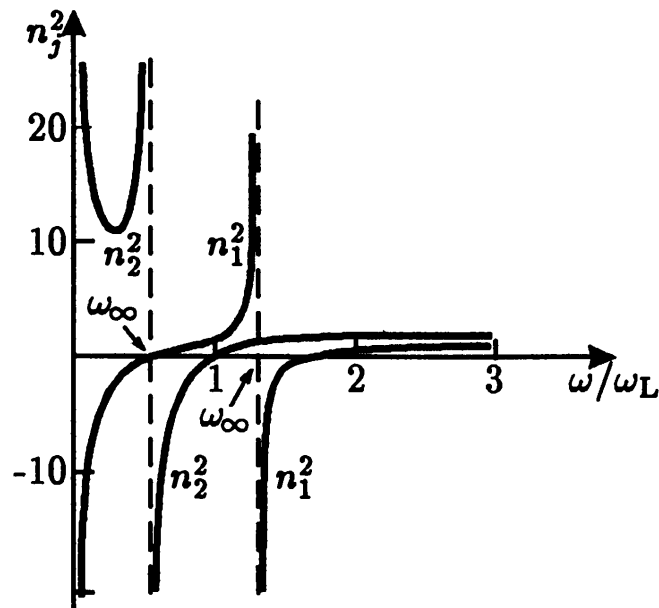


Рис. 11. Дисперсионные кривые  $n_j^2(\omega)$  при постоянных  $\omega_L$  и  $\omega_B$  (для  $\omega_B/\omega_L=1$  и  $\alpha=\pi/4$ )

Выражение для показателей преломления (5.19) довольно сложно. Однако оно существенно упрощается в двух предельных случаях — при так называемом квазипродольном и квазипоперечном распространении [71]. Квазипродольное распространение реализуется в плазме при выполнении следующих условий:<sup>31</sup>

$$\begin{aligned} \frac{u \sin^4 \alpha}{4 \cos^2 \alpha} &\ll (1-v)^2, \\ |1 \mp |\sqrt{u} \cos \alpha|| &\gg \frac{u \sin^2 \alpha}{|1-v|}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

квазипоперечное — в случае, когда

$$\begin{aligned} \frac{u \sin^4 \alpha}{4 \cos^2 \alpha} &\gg (1-v)^2, & \operatorname{tg}^2 \alpha &\gg |1-v|, \\ |1-v-u \sin^2 \alpha| &\gg (1-v)^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha. \end{aligned} \quad (5.25)$$

В квазипродольном приближении

$$n_{1,2}^2 = 1 - \frac{v}{1 \mp |\sqrt{u} \cos \alpha|}, \quad (5.26)$$

<sup>31</sup>Заметим, что первые неравенства в (5.24), (5.25) относятся к волнам обоих типов. Второе неравенство в (5.24), взятое с верхним знаком, относится к необыкновенной волне, с нижним — к обыкновенной волне. Далее, в (5.25) второе условие имеет отношение только к обыкновенной, а третье условие — только к необыкновенной волне.

в квазипоперечном —

$$n_1^2 = 1 - \frac{v(1-v)}{1-v-u\sin^2\alpha}, \quad n_2^2 = 1-v. \quad (5.27)$$

Выражение для  $n_j^2$  (5.19) существенно упрощается также в области достаточно низких частот, для которых

$$v \cos^2\alpha \gg u \cos^2\alpha \gg 1. \quad (5.28)$$

В этом случае

$$n_1^2 \approx -\frac{v}{|\sqrt{u} \cos \alpha|}, \quad n_2^2 \approx \frac{v}{|\sqrt{u} \cos \alpha|}. \quad (5.29)$$

т.е. необыкновенная волна распространяться не может ( $n_1^2 < 0$  и  $\text{Re } k = 0$ ), в отличие от волны обыкновенного типа, в которой  $n_2^2 \gg 1$ . Последнее неравенство очевидно, если учесть, что согласно (5.28)  $v \gg u \gg 1$  и, тем более,  $v \gg \sqrt{u}$ . Условия (5.28) типичны для распространения в земной магнитосфере “свистящих атмосфериков” (“вистлеров”); в соответствии с этим и обыкновенная волна с показателем преломления  $n_2^2$  (5.29) часто называется “вистлером”. На Рис. 10, b вистлерам соответствует та ветвь дисперсионной кривой для обыкновенной волны, которая расположена справа, при значениях  $v \gg 1$ .

В квазипродольном приближении при дополнительном условии  $v \gg |\sqrt{u} \cos \alpha| - 1$  квадрат показателя преломления вистлеров имеет вид<sup>32</sup>

$$n_1^2 \approx \frac{v}{|\sqrt{u} \cos \alpha| - 1}. \quad (5.30)$$

В отличие от (5.29), для справедливости (5.30) не нужно требовать, чтобы  $u \cos^2\alpha \gg 1$ .

Отметим еще один случай, когда выражения для  $n_j^2$  имеют особенно простой вид [90, 91]. Он реализуется тоже на достаточно низких частотах, но при других соотношениях между  $\omega_B$  и  $\omega_L$ , чем у вистлеров, Именно, при условиях

$$u \sin^4\alpha \gg 4v^2 \cos^2\alpha, \quad v \cos^2\alpha \gg 1 \quad (5.31)$$

формула (5.19) для обыкновенной волны переходит в

$$n_2^2 \approx \cos^{-2}\alpha. \quad (5.32)$$

<sup>32</sup>При сопоставлении (5.30) и (5.29) следует иметь в виду смену названий волн в области  $v > 1$  при переходе  $\alpha \rightarrow 0$ .

При этом показатель преломления не зависит от частоты, а фазовая скорость  $v_{ph} = c \cos \alpha$ .

Обыкновенные и необыкновенные волны в магнитоактивной плазме, вообще говоря, эллиптически поляризованы, причем отношение компонент электрического поля определяется следующими формулами. В системе координат, изображенной на Рис. 6 b в §4 (с осью  $z$  вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ ), отношение компонент электрического поля [3]:

$$\frac{E_y}{E_x} = iK_j, \quad \frac{E_z}{E_x} = i\Gamma_j, \quad (5.33)$$

где коэффициенты поляризации

$$K_j = \frac{2\sqrt{u}(1-v)\cos\alpha}{u\sin^2\alpha \pm \sqrt{u^2\sin^4\alpha + 4u(1-v)^2\cos^2\alpha}}, \quad (5.34)$$

$$\Gamma_j = -\frac{v\sqrt{u}\sin\alpha + K_j uv\sin\alpha\cos\alpha}{1-u-v+uv\cos^2\alpha}.$$

В первой формуле верхний знак относится к необыкновенной ( $j=1$ ), нижний — к обыкновенной волне ( $j=2$ ).

Из определения коэффициентов поляризации (5.33), (5.34) ясно, что величина  $K_j$  характеризует отношение осей эллипса, описываемого электрическим полем в плоскости, ортогональной направлению волнового вектора  $\mathbf{k}$ , т.е. степень эллиптичности  $p = \operatorname{tg} \sigma = K_j$  нормальных волн в плазме (см. §2). В свою очередь значение  $\Gamma_j$  определяет относительную величину продольной (по  $\mathbf{k}$ ) компоненты электрического поля нормальной волны. Поскольку  $K_1 K_2 = -1$ , эллипсы поляризации обыкновенной и необыкновенной волн подобны, их большие оси взаимно перпендикулярны и знаки вращения векторов различны. Такая поляризация двух волн называется ортогональной.

Для  $\alpha = \pi/2$  поляризация линейная, причем вектор  $\mathbf{E}$  в обыкновенной волне направлен вдоль постоянного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , а в необыкновенной он лежит в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}_0$  (и описывает в этой плоскости эллипс). При  $\alpha = 0$  волны становятся поперечными, а поляризация — круговой, с вращением до часовой стрелки в волне необыкновенного типа и против часовой стрелки — в волне обыкновенного типа (если смотреть в направлении распространения). Указанные направления вращения соответствуют распространению волн вдоль  $\mathbf{B}_0$ ; они сохраняются до тех пор, пока волновой вектор  $\mathbf{k}$  составляет острый угол с вектором  $\mathbf{B}_0$ . Если же нормальные волны идут

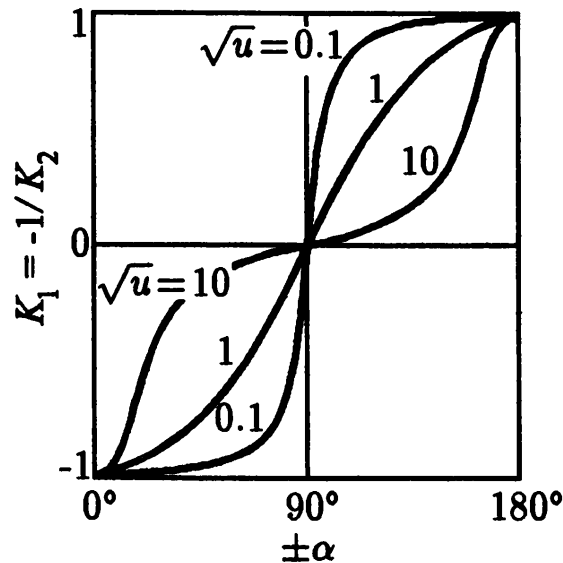


Рис. 12. Коэффициент поляризации  $K_{1,2}$  в функции угла  $\alpha$

в сторону, противоположную  $\mathbf{B}_0$ , или вектор  $\mathbf{k}$  образует тупой угол с направлением  $\mathbf{B}_0$ , то знаки вращения в необыкновенной и обыкновенной волнах (относительно направления  $\mathbf{k}$ ) меняются на обратные. Однако в любом случае при  $v < 1$  направление вращения вектора  $\mathbf{E}$  (в плоскости, ортогональной  $\mathbf{k}$ ) в необыкновенных волнах совпадает, а в обыкновенных — противоположно направлению вращения электрона в магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ .

При произвольном угле  $\alpha \neq 0, \pi/2$  поляризация становится строго линейной только для значения  $v = 1$ , оставаясь эллиптической при  $v \neq 1$ . Однако приближенно линейный характер поляризации обыкновенных и необыкновенных волн сохраняется во всем интервале углов  $\alpha$  (5.25), где имеет место квазипоперечное распространение, точно так же, как в случае квазипродольного распространения (5.24) поляризация обоих типов волн близка к круговой.

Указанная эллиптичность при  $v \neq 1$  сохраняется и в пределе  $v \rightarrow 0$ , когда  $\Gamma_j \rightarrow 0$  и

$$K_j \rightarrow \frac{2\sqrt{u} \cos \alpha}{u \sin^2 \alpha \pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u \cos^2 \alpha}}. \quad (5.35)$$

Зависимость в этом случае отношения осей эллипса поляризации  $K_{1,2}$  от угла  $\alpha$  для разных значений параметра  $u = \omega_B^2/\omega^2$  показана на Рис. 12. Оговоримся, что справедливость формулы (5.35) ограничена условием “плотной плазмы”,

$$\omega_L^2/\omega^2 \beta_T \gg 1, \quad (5.36)$$

которое при  $\beta_T \ll 1$  может быть выполнено и в области  $v \ll 1$ . Это условие типично для солнечной короны и хромосферы в радиодиапа-

зоне. В противоположном пределе “разреженной плазмы” (см. критерий (5.42)) характер поляризации электромагнитных волн изменяется (равно как и величина показателя преломления необыкновенной моды; см. ниже).

Посмотрим далее, каков характер поляризации нормальных волн на частотах  $\omega \rightarrow \omega_\infty$ , где  $\omega_\infty$  удовлетворяет уравнению (5.21) и  $n_{1,2}^2 \rightarrow \infty$ . Из вида  $\Gamma_j$  (5.34) следует, что в указанной области велико отношение компонент  $E_z/E_x$  нормальных волн, т.е. последние становятся близкими к продольным.<sup>33</sup>

Заметим, что случай продольного распространения ( $\alpha = 0$ ) на частотах, близких к  $\omega_B$ , является исключительным в том смысле, что здесь коэффициенты поляризации  $\Gamma_j = 0$ ,  $K_j = 1$ . Это свидетельствует о поперечном характере циркулярно поляризованной необыкновенной волны, несмотря на то, что при  $\omega \rightarrow \omega_B$  величина  $n_1^2 \rightarrow \infty$ . Обыкновенные волны, соответствующие вистлерам, тоже не являются продольными, хотя для них  $n_2^2 \gg 1$ . Оба указанных исключения отличаются еще и большей величиной магнитного поля по сравнению с электрическим, благодаря тому, что в этих волнах  $E_{x,y} \gg E_z$ ,  $n_j^2 \gg 1$  и, в соответствии с уравнением (4.26),  $B_{x,y} \propto n_j E_{x,y}$ .

В некоторых случаях представляет интерес отношение компонент электрического поля в нормальных волнах в другой системе координат — с осью  $z$ , ориентированной вдоль магнитного поля  $B_0$  и вектором  $k$  в плоскости  $yz$ . При такой ориентации осей отношение компонент электрического поля будет следующим:

$$\frac{E_y}{E_x} = ig_j, \quad \frac{E_z}{E_x} = ih_j, \quad (5.37)$$

где

$$g_j = K_j \cos \alpha - \Gamma_j \sin \alpha, \quad -h_j = \Gamma_j \cos \alpha + K_j \sin \alpha, \quad (5.38)$$

и  $K_j$ ,  $\Gamma_j$  по-прежнему определяются формулами (5.34).

Обратим внимание на одну интересную особенность поляризации обыкновенных и необыкновенных волн в “холодной” магнитоактивной плазме — стремление  $g_j \rightarrow -1$  при  $u \rightarrow 1$  для обоих типов волн. Это означает, что на гирочастоте, когда  $\omega \rightarrow \omega_B$ , вектор  $E$  описывает окружность в плоскости, ортогональной полю  $B_0$ , причем направление вращения одинаково для обоих типов волн. Существенно, что это

<sup>33</sup>Как мы убедимся ниже, на частотах  $\omega \approx \omega_\infty$  необходим учет теплового движения частиц в плазме, который существенно меняет поведение дисперсионных кривых  $n_j^2(\omega, \alpha)$  в этой области.

направление вращения противоположно направлению вращения электрона в магнитном поле; благодаря указанному обстоятельству резко уменьшается интенсивность циклотронного излучения электрона на частотах  $\omega \approx \omega_B$  (см. подробнее в разделе 10).

Вследствие анизотропии магнитоактивной плазмы направления векторов групповой скорости  $v_{gr} = d\omega/dk$  и фазовой скорости  $v_{ph} = (\omega/k)s$  (где  $s = k/k$ ), вообще говоря, различны. Проекция групповой скорости на направление  $k$

$$v_{gr k} = \frac{d\omega}{dk} s = \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial k}{\partial k} = c \frac{\partial \omega}{\partial(\omega n_j)}. \quad (5.39)$$

Угол  $\vartheta_j$  между  $v_{ph}$  и  $v_{gr}$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \vartheta_j = -\frac{1}{2n_j^2} \frac{\partial n_j^2}{\partial \alpha}, \quad (5.40)$$

вывод которого можно найти в [71].

Из вида  $\operatorname{tg} \vartheta_j$  ясно, что  $\vartheta_j = 0$  для углов  $\alpha$ , при которых функция  $n_j^2(\alpha)$  имеет экстремум. Такими направлениями будут продольное  $\alpha = 0$  и поперечное  $\alpha = \pi/2$  направления по отношению к  $B_0$ .

Для вистлеров с  $n_2^2$  (5.29) из формулы (5.40) следует, что  $\operatorname{tg} \vartheta_j = -(1/2) \operatorname{tg} \alpha$ . Поскольку векторы  $B_0$ ,  $k$  и  $d\omega/dk$  лежат в одной плоскости, сумма  $\vartheta_j + \alpha$  представляет собой угол между  $v_{gr}$  и  $B_0$ . Используя равенство  $\operatorname{tg} \vartheta_j = -(1/2) \operatorname{tg} \alpha$ , можно найти максимальное значение  $\vartheta_j + \alpha \approx 19.5^\circ$ ; оно имеет место при  $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$ . Таким образом, групповая скорость вистлеров при распространении в магнитном поле не может отклоняться от направления  $B_0$  больше, чем на  $19.5^\circ$  (теорема Стори [92]).

Наконец, для обыкновенной волны с показателем преломления (5.32) вектор групповой скорости направлен точно по полю  $B_0$ . В самом деле, из вида  $n_2^2 = k^2 c^2 / \omega^2$  следует, что  $\omega = \pm (k B_0) B_0^{-1} c$ , откуда сразу же получаем:<sup>34</sup>

$$\frac{d\omega}{dk} = \pm c \frac{B_0}{B_0}. \quad (5.41)$$

Поведение  $v_{gr}$  в этом случае напоминает альвеновские (магнитогидродинамические) волны. Дисперсионное уравнение для этих волн в идеально проводящей несжимаемой среде с плотностью  $\rho$  имеет вид [93]

<sup>34</sup> Выбор знака в приведенных формулах диктуется тем, что направление фазовой скорости  $v_{ph} = (\omega/k)s$  совпадает с направлением  $s = k/k$ . Для этого необходимо, чтобы знак перед формулами повторял знак скалярного произведения  $(kB_0)$ .



$\omega = \pm k B_0 / \sqrt{4\pi\rho}$ , что приводит к формуле для вектора групповой скорости  $d\omega/dk = \pm B_0 / \sqrt{4\pi\rho}$ , ориентированного точно так же, как (5.41). Впрочем, на этом аналогия и кончается, поскольку величины групповых скоростей в обоих случаях существенно разные.

Выше в этом разделе тепловое движение не учитывалось. Однако, на частотах  $\omega \approx \omega_B$  без учета теплового движения (то есть в приближении  $\beta_T = 0$ ) нельзя получить корректные выражения для показателей преломления и коэффициентов поляризации (а также для интенсивности циклотронного излучения, циклотронного поглощения и рассеяния электромагнитных волн в плазме; см. §10, §13, §18). Сказанное в особенности относится к разреженной плазме, в которой справедливо неравенство<sup>35</sup>

$$\omega_L^2 / \omega^2 \beta_T \simeq 0.8 N B_0^{-2} T^{-1/2} \ll 1. \quad (5.42)$$

На частотах, близких к гирочастоте  $\omega_B$ , этот критерий легко реализуется в сильных магнитных полях  $B_0 \sim 10^7 - 10^{13}$  Гс, характерных для магнитных белых карликов и нейтронных звезд. Так, например, в случае, если горячая плазменная оболочка ( $T \sim 10^7$  К) существует вокруг белого карлика с магнитным полем  $B_0 \sim 10^7 - 10^8$  Гс, то критерий (5.42) выполняется при  $N \ll 10^{18} - 10^{20}$  см<sup>-3</sup>.

В разреженной плазме показатели преломления обеих мод близки к единице. Поэтому волновое число  $k = \omega n / c \simeq \omega / c$ , и на частотах  $\omega \approx \omega_B$  параметр  $\chi$ , входящий в выражение (4.98) для тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , становится мал:

$$\chi = (k^2 v_T^2 / \omega^2) \sin^2 \alpha \simeq \beta_T^2 \sin^2 \alpha \ll 1.$$

Разлагая в тензоре (4.98) модифицированные функции Бесселя и их производные в ряд по степеням малого параметра  $\chi$  и ограничиваясь первыми членами разложения, получим, что на частотах  $\omega \approx \omega_B$  тензор диэлектрической проницаемости нерелятивистской разреженной плазмы в системе координат I (см. Рис. 6, а) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} &= 1 + ib, & \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} &= b, \\ \epsilon_{zz} &= 1, & \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= 0. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Здесь

$$b = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_L^2 w(Z)}{\omega^2 \beta_T |\cos \alpha|}, \quad (5.44)$$

<sup>35</sup> Более строгий критерий разреженной плазмы (и противоположный критерий плотной плазмы) приведены далее в §10 (см. формулы (10.60) и (10.61)).

и  $w(Z)$  — функция Крампа (4.91) с аргументом

$$Z = \frac{\omega - \omega_B}{\sqrt{2}\beta_T\omega|\cos\alpha|}. \quad (5.45)$$

Решение дисперсионного уравнения (4.41) с тензором (5.43) позволяет найти показатель преломления необыкновенной волны:

$$n_1 = 1 - \frac{\omega_L^2(1 + \cos^2\alpha)}{\sqrt{8}\omega^2\beta_T|\cos\alpha|} e^{-Z^2} \int_0^Z e^{\xi^2} d\xi. \quad (5.46)$$

Для обыкновенной волны в принятом приближении  $n_2^2 = 1$ . Если же удержать в тензоре  $\epsilon_{\alpha\beta}$  члены порядка  $b\beta_T^2$  (которыми пренебрегалось при переходе от (4.98) к (5.43)), то можно убедиться, что в области гирорезонанса  $\omega \approx \omega_B$

$$n_2^2 = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2(1 + \cos^2\alpha)},$$

что совпадает с соответствующим значением в холодной плазме.

Характер поляризации нормальных волн определяется из системы (4.40) с тензором (5.43) следующими соотношениями:

$$\frac{E_x}{E_y} = -i \cos^2\alpha, \quad \frac{E_z}{E_y} = i \sin\alpha \cos\alpha, \quad (5.47)$$

для необыкновенной моды и

$$\frac{E_x}{E_y} = i, \quad \frac{E_z}{E_y} = -i \operatorname{tg}\alpha \quad (5.48)$$

для обыкновенной. Обе формулы соответствуют системе координат I (Рис. 6 а).

### 5.3. Плазменные волны

Дисперсионное уравнение (5.18) для волн в магнитоактивной плазме было записано в рамках элементарной теории, игнорирующей наличие теплового движения частиц в плазме. Если теперь обратиться к квазигидродинамическому приближению (см. §4), позволяющему провести учет теплового движения путем введения в уравнения электронного давления, то вместо (5.18) получим следующее дисперсионное уравнение [71]:

$$\begin{aligned} & \beta_T^2(1 - u \cos^2\alpha)n^6 - [1 - u - v + uv \cos^2\alpha + \\ & 2\beta_T^2(1 - v - u \cos^2\alpha)]n^4 + [2(1 - v)^2 - u(2 - v - v \cos^2\alpha) + \\ & \beta_T^2(1 - 2v + v^2 - u \cos^2\alpha)]n^2 + (1 - v)[u - (1 - v)^2] = 0, \quad (5.49) \end{aligned}$$

где  $\beta_T^2 = \kappa T / m_e c^2$ . При  $\beta_T^2 \rightarrow 0$  уравнение (5.49) переходит в (5.18).

Будучи уравнением третьего порядка относительно  $n^2$ , оно определяет три значения показателей преломления  $n_j = k_j \omega / c$  на данной частоте  $\omega$ , соответствующие трем (а не двум, как в элементарной теории) нормальным волнам в плазме. В результате на графиках  $n_j^2(v)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) теперь есть три дисперсионные кривые, которые мы будем отмечать цифрами I, II, III. Эти кривые изображены на Рис. 13 для случая распространения под малым углом  $\alpha$  к полю  $B_0$ . Волны, отвечающие отдельным ветвям дисперсионных кривых, которые разделены областями, обведенными кружками, обычно называют необыкновенной ( $n_1^2$ ), обыкновенной ( $n_2^2$ ) и плазменной ( $n_3^2$ ). Таким образом, индексы 1, 2, 3 указывают на название нормальной волны, а номера I, II, III — на то, к какой из дисперсионных кривых относится нормальная волна.

В однородной плазме области, обведенные кружками на Рис. 13, ничем не выделены; поэтому указанное разделение волн на необыкновенную, обыкновенную и плазменную весьма условно. В неоднородной плазме это более оправдано, так как в областях, где дисперсионные кривые с разными номерами подходят близко одна к другой, происходит линейное взаимодействие разных типов волн, принадлежащих различным дисперсионным кривым, и “переход” волн с одной кривой на другую (см. подробнее главу 3).

Из сопоставления дисперсионных кривых Рис. 10, 13 ясно, что тепловое движение заметно сказывается лишь на характере  $n_j^2(v)$  в области, где  $n_j^2(v) \gg 1$ , приводя к появлению продольных плазменных волн. При  $\beta_T^2 \rightarrow 0$  плазменным ветвям дисперсионных кривых соответствуют большие значения показателя преломления близ полюсов (5.22) функции  $n_j^2(v)$  (5.19). В остальных областях изменение характера распространения волн (величины показателя преломления, коэффициентов поляризации) за счет теплового движения, как правило, мало существенно и им в большинстве случаев можно пренебречь.

При  $\beta_T^2 \ll 1$  в дисперсионном уравнении (5.49) можно пренебречь всеми членами, содержащими  $\beta_T^2$ , за исключением члена с  $\beta_T^2$  перед  $n^6$ . Последний оказывается существенным при больших значениях  $n^2$ , когда в уравнении (5.49) можно оставить лишь члены с высшими степенями  $n$  (конкретно, с  $n^4$  и  $n^6$ ). Тогда получим

$$n_3^2 = \frac{1 - u - v + uv \cos^2 \alpha}{\beta_T^2 (1 - u \cos^2 \alpha)}. \quad (5.50)$$

Эта формула, очевидно, определяет квадрат показателя преломления

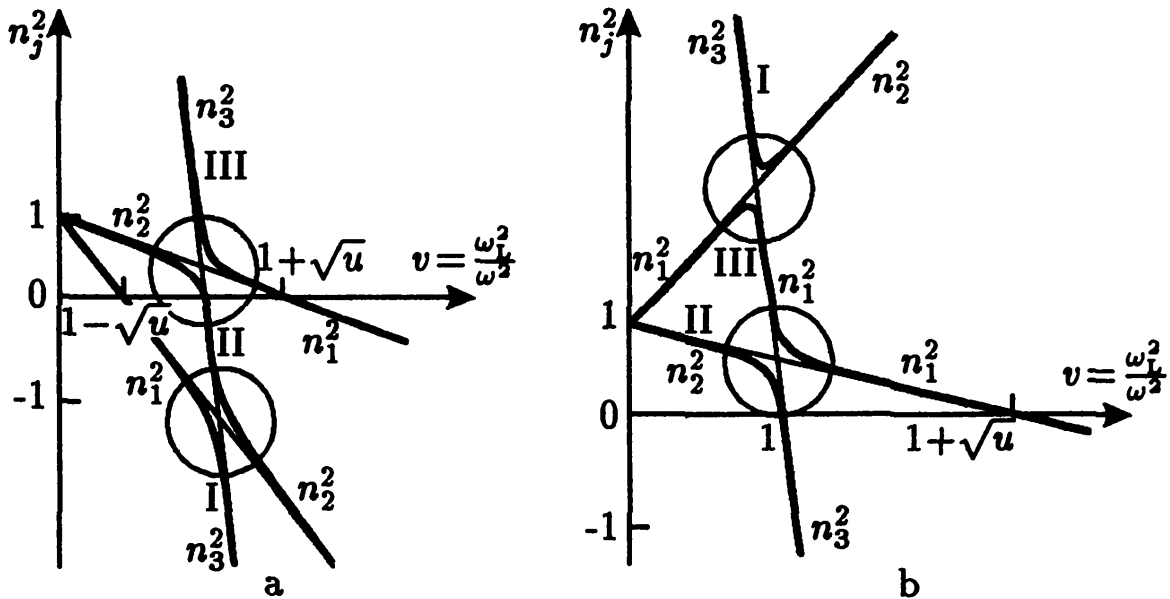


Рис. 13. Дисперсионные кривые  $n_j^2(v)$  ( $j = I, II, III$ ) при учете теплового движения в плазме ( $\alpha \ll 1$ ): (a)  $u < 1$ ; (b)  $u \cos^2 \alpha > 1$ . Кружками указаны области взаимодействия волн в неоднородной плазме, тонкими линиями внутри кружков — зависимость  $n_j^2(v)$  в случае продольного распространения

плазменной ветви дисперсионных кривых в области, где  $n_3^2(v) \gg 1$ . Формула (5.50) получена в квазигидродинамическом приближении. Более строгий кинетический расчет, проведенный с помощью тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  (4.98), показывает, что дисперсионное уравнение  $\epsilon_{||} = 0$ , где  $\epsilon_{||}$  определяется формулой (4.100), для плазменных волн в области слабого затухания и при условии  $n_3^2(v) \gg 1$  может быть сведено к виду [94]

$$n_3^2 \approx \frac{(1 - u - v + uv \cos^2 \alpha) / (v\beta_T^2)}{\frac{3 \sin^4 \alpha}{1 - 4u} + \left[ 1 + \frac{5 - u}{(1 - u)^2} \right] \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + 3(1 - u) \cos^4 \alpha}. \quad (5.51)$$

Выражение (5.51) существенно отличается от предыдущего. Это указывает на условность квазигидродинамического приближения в магнитоактивной плазме, использование которого для учета теплового движения может быть оправдано лишь наглядностью подхода и относительной простотой при исследовании таких задач, как распространение волн в неоднородной плазме и пр. Особенно существенно то обстоятельство, что квазигидродинамическое приближение не охватывает бесстолкновительного затухания (затухания Ландау), которое в определенных условиях может радикально изменить характер распространения волн, приводя к затуханию последних за время порядка

$1/\omega$ .

Проблема поглощения волн в равновесной магнитоактивной плазме будет специально обсуждаться в §13. Здесь мы лишь укажем критерии, при которых роль затухания Ландау еще не слишком велика, чтобы помешать пользоваться формулой (5.51) для показателя преломления плазменных волн. В первом разделе этого параграфа уже отмечалось, что затухание Ландау становится слабым (декремент  $\gamma \ll \Omega$ , см. (4.56)), если за период  $2\pi/\omega$  электроны плазмы перемещаются за счет теплового движения на расстояние, много меньшее длины волны  $\lambda = 2\pi/k$ , т.е. при  $k v_T/\omega \ll 1$ . В присутствии постоянного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  этот критерий можно записать в виде двух неравенств:

$$k_{\perp} v_T/\omega \ll 1, \quad k_{\parallel} v_T/\omega \ll 1, \quad (5.52)$$

где  $k_{\parallel}$  и  $k_{\perp}$  — поперечная и продольная (по отношению к  $\mathbf{B}_0$ ) компоненты волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Достаточные условия (5.52) определяют область слабого затухания в магнитоактивной плазме, пока магнитное поле достаточно слабое:

$$\frac{k_{\perp} v_T}{\omega_B} \gg 1. \quad (5.53)$$

Если же радиус вращения электрона в магнитном поле  $r_B = v_T/\omega_B$  становится меньше характерного размера изменения высокочастотного поля в направлении, ортогональном магнитному полю  $1/k_{\perp} = \lambda_{\perp}/2\pi$  ( $\lambda_{\perp}$  — “поперечная” длина волны), т.е. если

$$\frac{k_{\perp} v_T}{\omega_B} \ll 1, \quad (5.54)$$

то смещение электрона поперек поля  $\mathbf{B}_0$  на расстояние порядка  $2\pi/k_{\perp}$  оказывается невозможным. При этом, очевидно, первое из неравенств (5.52) станет излишним. В результате условием слабого затухания Ландау в плазме с сильным магнитным полем будет второе из неравенств (5.52) вместе с (5.54).

#### 5.4. Моды Бернштейна

При поперечном распространении относительно магнитного поля картина нормальных волн в плазме становится более сложной, чем это можно заключить, судя по предыдущим разделам. Прежде всего это касается продольных волн с дисперсионным уравнением  $\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ , где  $\epsilon_{\parallel}$  — из (4.100). При  $|Z_l| = |(\omega - l\omega_B)/k_{\parallel} v_T| \rightarrow \infty$ , т.е. при  $k_{\parallel} \rightarrow 0$ ,

формула для продольной диэлектрической проницаемости сводится к (4.102). Поэтому в случае поперечного распространения ( $\alpha = \pi/2$ ) дисперсионное уравнение для продольных волн имеет вид

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2\omega_L^2 l^2 I_l(\chi) e^{-\chi}}{(\omega^2 - l^2 \omega_B^2) \chi} = 0, \quad (5.55)$$

где  $l$  — номер гармоники,  $\chi = k_{\perp}^2 v_T^2 / \omega_B^2$ ,  $I_l(\chi)$  — модифицированная функция Бесселя. Это уравнение определяет дисперсионные характеристики так называемых электронных циклотронных волн или мод Бернштейна [88]. В космической плазме интерес к этим волнам возник в связи с их возможной ролью при генерации некоторых видов спорадического солнечного радиоизлучения, обладающего тонкой структурой (см. §16).

Напомним, что уравнение (5.55) справедливо лишь при условии, что  $c^2 k_{\perp}^2 / \omega^2 \gg 1$ , т.е. в области значений  $\chi$ , для которых

$$\chi \gg \beta_T^2 \frac{\omega^2}{\omega_B^2}. \quad (5.56)$$

Кроме того, оно получено предельным переходом к строго поперечному распространению  $k_{\parallel} \rightarrow 0$  ( $|Z_l| \rightarrow \infty$ ), хотя, конечно, им можно пользоваться и для  $\alpha$ , близких к  $\pi/2$  в области, где  $|Z_l| \gg 1$ ,<sup>36</sup> т.е. при

$$|\omega - l\omega_B| \gg k_{\parallel} v_T. \quad (5.57)$$

При нарушении указанного неравенства продольные волны сильно затухают вследствие циклотронного поглощения (см. §13). Если при дальнейшем увеличении  $k_{\parallel}$  будет выполнено условие  $\omega_B \ll k_{\parallel} v_T$  (см. (4.101)), то влияние магнитного поля  $B_0$  на характер продольных волн исчезнет и эти волны станут такими же, как в изотропной плазме.

Обратимся теперь к анализу дисперсионного уравнения (5.55). Для волн, удовлетворяющих условию  $\chi = k_{\perp}^2 v_T^2 / \omega_B^2 \ll 1$ , т.е. для волн с длиной, много большей гирорадиуса “тепловых” электронов  $r_B = v_T / \omega_B$ ,

<sup>36</sup> Условие на величину угла  $\alpha$ , при котором возможно распространение слабозатухающих продольных волн в плазме, можно получить, комбинируя критерий (5.56) с решениями дисперсионного уравнения (5.59), (5.62) (см. ниже). Оказывается, что при любых значениях  $\chi$  условие (5.56) реализуется в узкой области углов, где  $\cos^2 \alpha \ll 1$ .

уравнение (5.55) записывается так:

$$\epsilon_{||} = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - \omega_B^2} - \frac{3\omega_L^2\omega_B^2\chi}{(\omega^2 - 4\omega_B^2)(\omega^2 - \omega_B^2)} - \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - s^2\omega_B^2} \frac{s}{(s-1)!} \left(\frac{\chi}{2}\right)^{s-1} = 0. \quad (5.58)$$

Здесь  $s \geq 3$  — номер одной из гармоник  $l$ . Это уравнение имеет решение на частотах, близких к частотам циклотронных гармоник  $s\omega_B$ :

$$\omega^2 - s^2\omega_B^2 = \frac{\omega_L^2\omega_B^2}{(s^2-1)\omega_B^2 - \omega_L^2} \frac{s(s+1)}{(s-2)!} \left(\frac{\chi}{2}\right)^{s-1}, \quad (5.59)$$

и на частоте, близкой к частоте верхнего гибридного резонанса  $\omega_h = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_B^2}$ :<sup>37</sup>

$$\omega^2 = \omega_h^2 + 3\chi\omega_B^2(1 - 3\omega_B^2/\omega_L^2)^{-1} = \omega_h^2 + 3k_{\perp}^2 v_T^2(1 - 3\omega_B^2/\omega_L^2)^{-1} \quad (5.60)$$

Решение приобретает простой вид также в пределе больших  $\chi$ , когда длина продольной волны мала по сравнению с гирорадиусом, а частота  $\omega$  снова становится близкой к одной из гармоник  $s\omega_B$ . Тогда, как нетрудно убедиться, дисперсионное уравнение (5.55) сводится к

$$\epsilon_{||} = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - s^2\omega_B^2} \frac{2s^2}{\chi\sqrt{2\pi\chi}} = 0, \quad (5.61)$$

и решение записывается в такой форме:

$$\omega^2 - s^2\omega_B^2 \simeq \frac{2s^2\omega_L^2}{\chi\sqrt{2\pi\chi}}. \quad (5.62)$$

Для произвольных (в пределах (5.56)) значений  $\chi$  дисперсионные кривые мод Бернштейна представлены на Рис. 14 [95] (при различных фиксированных значениях отношения  $\omega_L^2/\omega_B^2$ ). Из рисунка следует, что поведение дисперсионных кривых в полосе  $(s-1)\omega_B < \omega < s\omega_B$  качественно разное в зависимости от того, лежит ли верхняя гибридная частота  $\omega_h = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_B^2}$  выше или ниже указанной полосы или

<sup>37</sup> Именно близость частоты  $\omega$  к одной из гармоник  $s\omega_B$  или к гибридной частоте  $\omega_h$  позволяет упростить уравнение (5.55), содержащее бесконечную сумму по гармоникам. При переходе от (5.55) к (5.58) в сумме оставлен только первый  $l=1$  и второй  $l=2$  члены, определяющие решение дисперсионного уравнения близ гибридной частоты и на второй гармонике, и резонансный член с номером  $l=s \simeq \omega/\omega_B$  (для  $s \geq 3$ ).

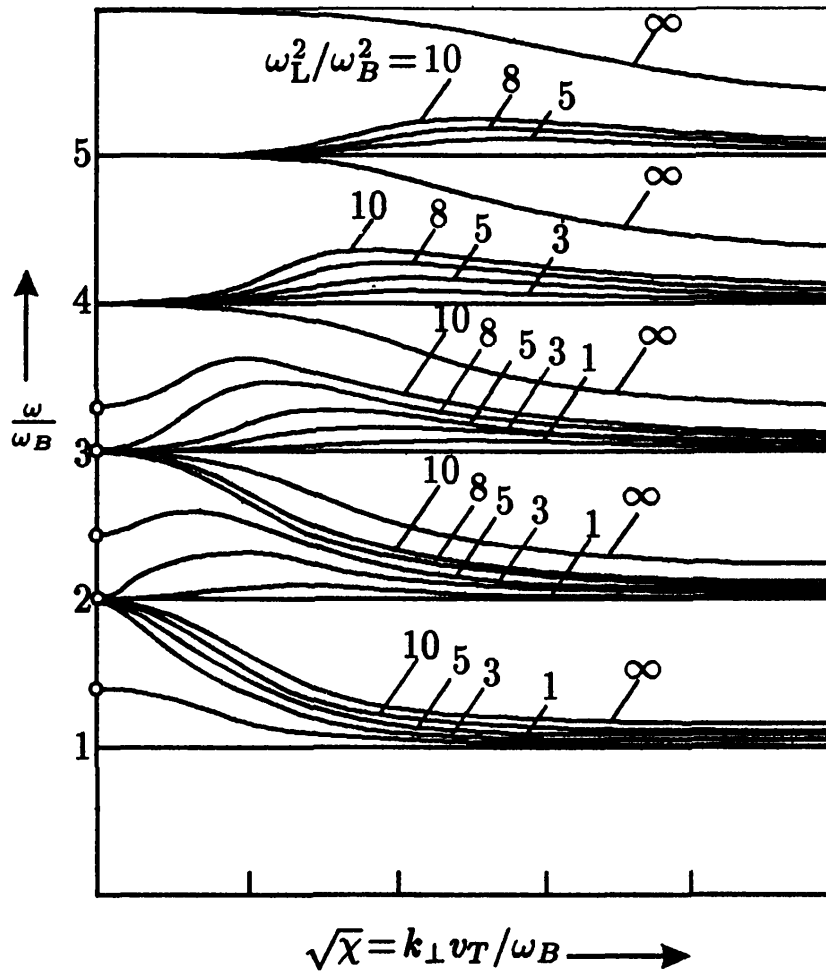


Рис. 14. Дисперсионные кривые для мод Бернштейна в нерелятивистской равновесной плазме. Светлыми точками на оси  $\omega/\omega_B$  отмечены значения, где  $\omega = \omega_h$

заклучена в ней. В последнем случае эту полосу мы будем называть гибридной полосой.

Если интервал между двумя соседними гармониками  $(s-1)\omega_B$  и  $s\omega_B$  расположен ниже гибридной полосы, то дисперсионная кривая близко подходит к значениям гармоник  $(s-1)\omega_B$  и  $s\omega_B$  (или, как говорят, к частотам электронного циклотронного резонанса) при больших и малых значениях  $\chi$ . При этом частота моды Бернштейна изменяется в соответствии с законом (5.62) и (5.59). Однако для  $\chi \sim s^2$  это уже не так: в этой области дисперсионные кривые переходят от одной гармоники к другой. (В частности, при  $\chi \approx s^2$  дисперсионные кривые определяют частоты, расположенные почти посередине между гармониками.) Заметим, что в рассматриваемом случае частота монотонно убывает с ростом  $k_\perp$ , т.е. моды Бернштейна обладают аномальной дисперсией.



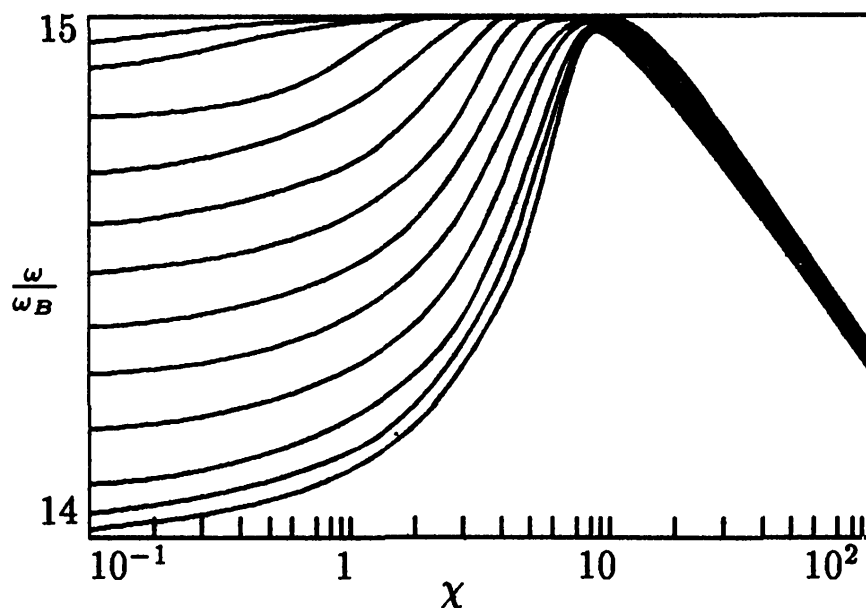


Рис. 15. Дисперсионные кривые для продольных волн в гибридной полосе при фиксированных значениях  $\omega_h/\omega_B$  в пределах  $14 < \omega_h/\omega_B < 15$  ( $\alpha = \pi/2$ ). Величина  $\omega_h/\omega_B$  для каждой кривой близка к значению  $\omega/\omega_B$  при малых  $\chi$

В полосах, располагающихся выше гибридной, поведение дисперсионных кривых меняется: как при малых, так и при больших  $\chi$  частота мод Бернштейна близка к нижней границе полосы (к частоте  $(s-1)\omega_B$ ), удаляясь от нее в области  $\chi \sim s^2$ . Однако с ростом номера  $s$  даже в этой области  $\chi$  кривые все ближе подходят к нижней границе полосы.

Наконец, в гибридной полосе при  $\chi > s$  дисперсионные кривые практически ничем не отличаются от соответствующих кривых для мод Бернштейна в полосах частот ниже гибридной. Качественное отличие появляется при значениях  $\chi < s$ , где дисперсионные кривые меняют знак производной  $d\omega/dk_{\perp}$ , и при малых  $\chi$  подходят к значению  $\omega_h$ , изменяясь по закону (5.60). Эволюцию дисперсионных кривых в гибридной полосе при изменении отношения  $\omega_h/\omega_B$  можно проследить с помощью Рис. 15 [96–98].

Отметим, что совпадение одной из частот электронного циклотронного резонанса  $s\omega_B$  с резонансной частотой  $\omega_{\infty}$ , (5.23), обычно называют двойным плазменным резонансом. В нашем случае, когда  $\alpha \approx \pi/2$ , частота  $\omega_{\infty}$  соответствует частоте верхнего гибридного резонанса  $\omega_h$ , и двойной резонанс наступает, когда  $\omega_h = s\omega_B$ . В пределах гибридной полосы при изменении  $\omega_L$  или  $\omega_B$  это происходит дважды — на нижней и верхней границах этой полосы.

Выше речь шла только о продольных электронных циклотронных волнах. Подробный анализ дисперсионного уравнения (4.41) с

тензором  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (4.98) показывает, что при поперечном распространении наряду с указанными волнами существуют также обыкновенные и необыкновенные циклотронные волны с характерными частотами  $\omega \approx s\omega_B$ . Здесь мы эти волны не рассматриваем, рекомендуя обратиться для подробного знакомства с ними к монографиям [72, 99].

### 5.5. Волны в релятивистской плазме

В предыдущих разделах этого параграфа были рассмотрены электромагнитные волны в нерелятивистской или слаборелятивистской плазме ( $\beta_T^2 = v_T^2/c^2 \ll 1$ ). Это приближение вполне достаточно для большинства астрофизических объектов. Однако в последние годы, главным образом благодаря открытию пульсаров, существенный интерес приобрели исследования релятивистской космической плазмы. Последнее объясняется тем, что в магнитосферах нейтронных звезд — пульсаров могут возникать сильные электрические поля, которые способны ускорить частицы до релятивистских энергий (§1); вполне возможно, что при этом магнитосферная плазма в целом также становится релятивистской. При исследовании нормальных волн в указанных условиях, конечно, нельзя игнорировать влияние мощного магнитного поля нейтронной звезды; однако сначала для простоты мы приведем дисперсионные характеристики волн в релятивистской изотропной плазме.

Как и в нерелятивистском случае, здесь по-прежнему могут распространяться поперечные электромагнитные и продольные плазменные волны, описываемые дисперсионными уравнениями (4.46) и (4.47) с  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$  в форме (4.86). Для изотропного распределения  $f_0(\mathbf{p}) = f_0(p)$ , содержащего только релятивистские частицы с  $v \approx c$  и  $\mathcal{E} \approx pc$ , формулы (4.86) могут быть преобразованы к виду

$$\epsilon_{\perp} \approx 1 - \frac{16\pi^2 e^2}{k^2 \omega^2} \quad (5.63)$$

$$\times \int_0^{\infty} f_0(p) p \left[ \frac{\omega^2}{k^2 c^2} - \left( 1 - \frac{\omega^2}{k^2 c^2} \right) \frac{\omega}{kc} \ln \left| \frac{1 - kc/\omega}{1 + kc/\omega} \right| \right] dp,$$

$$\epsilon_{\parallel} \approx 1 + \frac{16\pi^2 e^2}{\omega^2} \quad (5.64)$$

$$\times \int_0^{\infty} f_0(p) p v \left[ 2 \frac{\omega^2}{k^2 v^2} + \frac{\omega^3}{k^3 v^3} \ln \left| \frac{1 - kv/\omega}{1 + kv/\omega} \right| \right] dp.$$

Для “моноэнергетического” спектра

$$f_0(p) = \frac{N}{4\pi p^2} \delta(p - p_0) \quad (5.65)$$

из (5.63) при условии  $|1 - k^2 c^2 / \omega^2| \ll 1$  получаем

$$n_{\text{em}}^2 = \epsilon_{\perp} \approx 1 - \frac{4\pi e^2 N c}{\omega^2 p_0} = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_0} \quad (5.66)$$

( $\omega_L$  — собственная частота нерелятивистской плазмы). Для того же спектра из (5.64) следует, что показатель преломления плазменных волн

$$n_{\text{pl}}^2 \approx 1 - 4 \exp\left(-2 - \frac{\omega^2}{\omega_L^2} \frac{\mathcal{E}_0}{m_e c^2}\right). \quad (5.67)$$

Формула (5.67) справедлива в интервале  $1 \gg |1 - n_{\text{pl}}^2| \gg (m_e c^2 / \mathcal{E}_0)^2$ , где  $\mathcal{E}_0$  — энергия релятивистских электронов.

Для равновесной релятивистской плазмы ( $\kappa T \gg m_e c^2$ ) распределение отличается от максвелловского и имеет вид [55]

$$f_0(p) = \frac{N}{8\pi} \left(\frac{c}{\kappa T}\right)^3 e^{-cp/\kappa T}. \quad (5.68)$$

Подстановка (5.68) в (5.63) приводит к следующим выражениям для показателя преломления электромагнитных волн [78]:

$$n_{\text{em}}^2 \approx 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \frac{m_e c^2}{2\kappa T}, \quad (1 - n \ll 1), \quad (5.69)$$

$$n_{\text{em}}^2 \approx \frac{5}{6} \left(1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \frac{m_e c^2}{3\kappa T}\right), \quad (n \ll 1).$$

Соответственно для плазменных волн из (5.64), (5.68) получаем [78]

$$n_{\text{pl}}^2 \approx 1 - 4 \exp\left(-2 - \frac{\omega^2}{\omega_L^2} \frac{2\kappa T}{m_e c^2}\right), \quad (1 - n \ll 1), \quad (5.70)$$

$$n_{\text{pl}}^2 \approx \frac{5}{3} \left(1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \frac{m_e c^2}{3\kappa T}\right) \quad (n \ll 1).$$

Из приведенных выражений следует, что в релятивистской плазме  $n_{\text{em}}^2 < 1$ , т.е. фазовая скорость поперечных волн по-прежнему больше  $c$ . Формулы для  $n_{\text{pl}}^2$  также относятся лишь к случаю, когда  $n_{\text{pl}} < 1$ .

Если же фазовая скорость плазменных волн  $v_{ph}$  становится меньше  $c$ , следует ожидать сильного затухания Ландау на частицах со скоростями  $v \approx c$ . Однако до сих пор остается неясным, существуют ли вообще решения дисперсионного уравнения  $\epsilon_{||}(\omega, k) = 0$  в этой области для равновесной плазмы.

Характер электромагнитных волн в релятивистской магнитоактивной плазме можно исследовать на основе распределений  $f_0(\mathbf{p})$  вида (5.65) или (5.68). Однако мало вероятно, чтобы в каких-либо конкретных астрофизических объектах с сильным магнитным полем и прежде всего в магнитосферах нейтронных звезд распределение частиц соответствовало этим выражениям. Отсутствие общепринятой теории такой магнитосферы оставляет широкий простор для предположений о форме распределения  $f_0(\mathbf{p})$ , хотя среди множества неравновесных распределений выделяется одно “избранное”:

$$f_0(\mathbf{p}) = \mathcal{F}(p_{||}) \frac{\delta(p_{\perp})}{2\pi p_{\perp}}, \quad \mathcal{F}(p_{||}) = \frac{N}{2m_e c^2} \left[ 1 + \frac{p_{||}^2}{m_e^2 c^2} \right]^{-3/2}, \quad (5.71)$$

к которому релаксирует любое изотропное релятивистское распределение в результате потери энергии на магнитотормозное излучение в сильном магнитном поле  $\mathbf{B}_0$  (см. §10, в частности, формулу (10.38)). В плазме с таким одномерным распределением электронов продольные волны с  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$  описываются следующим дисперсионным уравнением [100]:

$$\omega^2 = \frac{c^2 k^2}{4} \left( \frac{ck}{\tilde{\omega}_L} + \frac{\tilde{\omega}_L}{ck} \right)^2, \quad \tilde{\omega}_L^2 = \frac{3\pi}{4} \omega_L^2. \quad (5.72)$$

Из него следует, что частота плазменных волн меняется в широких пределах от  $\tilde{\omega}_L/2$  (при  $k=0$ ) до бесконечности (при  $k \rightarrow \infty$ ). Для любых  $k$  фазовая скорость  $v_{ph} = \omega/k$  не опускается ниже скорости света  $c$ , благодаря чему затухание Ландау у этих волн отсутствует. В этой связи следует подчеркнуть, что реализация в релятивистской плазме продольных волн с  $v_{ph} < c$  зависит от конкретного вида функции распределения  $f_0(\mathbf{p})$ . Можно указать примеры  $f_0(\mathbf{p})$ , для которых плазменные волны с  $v_{ph} < c$  заведомо существуют и для них имеет место затухание Ландау (см. [9, 10]).

### 5.6. Электромагнитные волны в системе “намагниченный вакуум + разреженная плазма”

Как известно, сильные магнитные поля, близкие к критическому значению

$$B_{cr} = m_e^2 c^3 / \hbar e \simeq 4.4 \cdot 10^{13} \text{ Гс}, \quad (5.73)$$

существенно меняют свойства вакуума, вызывая его поляризацию и намагничение. Величина  $B_{cr}$  соответствует магнитному полю, в котором энергия кванта гирочастоты  $\hbar\omega_B$  совпадает с энергией покоя электрона  $m_e c^2$ . В такого рода сильных магнитных полях, реализующихся на нейтронных звездах, изменяется характер распространения электромагнитных волн. Их показатели преломления и поляризация зависят от величины и направления магнитного поля  $B_0$ , которое определяет компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $\mu_{\alpha\beta}$  в “анизотропной среде” — намагниченном вакууме. Тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и обратный тензор  $\mu_{\alpha\beta}^{-1}$  в системе координат II (Рис. 6, b) имеют вид:<sup>38</sup>

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}(1 - 2a) + 7a \frac{B_\alpha B_\beta}{B_0^2}, \quad (5.74)$$

$$\mu_{\alpha\beta}^{-1} = \delta_{\alpha\beta}(1 - 2a) - 4a \frac{B_\alpha B_\beta}{B_0^2}, \quad (5.75)$$

где  $\delta_{\alpha\beta}$  — единичный тензор и параметр

$$a = \frac{1}{45\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{B_0^2}{B_{cr}^2} \simeq 5.16 \cdot 10^{-5} B_0^2 B_{cr}^{-2}. \quad (5.76)$$

Эти формулы справедливы при условии  $B_0 \ll B_{cr}$ , когда рождением электрон-позитронных пар (и соответствующим поглощением электромагнитных волн) можно пренебречь. Из вида тензоров (5.74) и (5.75) следует, что вакуум в присутствии сильного магнитного поля ведет себя как одноосная анизотропная (негиротропная) среда. В системе координат I (Рис. 6, a) тензоры  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и  $\mu_{\alpha\beta}^{-1}$  примут вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 1 - 2a, & \quad \epsilon_{zz} = 1 + 5a, \\ \mu_{xx}^{-1} = \mu_{yy}^{-1} = 1 - 2a, & \quad \mu_{zz}^{-1} = 1 - 6a. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Остальные элементы равны нулю.

<sup>38</sup> Обратный тензор  $\mu_{\alpha\beta}^{-1}$  вводится соотношением  $H_\alpha = \mu_{\alpha\beta}^{-1} B_\beta$  между компонентами  $H_\alpha$  и  $B_\beta$  векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$ .

Влияние сильного магнитного поля в вакууме на распространение электромагнитных волн было рассмотрено в работе [101]. Позднее в [102] было обращено внимание на эту работу и подчеркнута важная роль эффекта намагничения вакуума в теории рентгеновского излучения нейтронных звезд.

Рассмотрим теперь нормальные волны в однородной системе, состоящей из намагниченного вакуума и разреженной плазмы [103, 104]. При этом исходим из уравнений Максвелла для  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} \propto \exp(-i\omega t)$ :

$$\begin{aligned} \text{rot}(\hat{\mu}^{-1}\mathbf{B}) &= -\frac{i\omega}{c}(\hat{\epsilon} + \hat{\epsilon}^{\text{Pl}} - \hat{\delta})\mathbf{E}, \\ \text{rot}\mathbf{E} &= \frac{i\omega}{c}\mathbf{B}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

где введены следующие операторы:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon} &\rightarrow \epsilon_{\alpha\beta}E_{\beta}, & \hat{\epsilon}^{\text{Pl}} &\rightarrow \epsilon_{\alpha\beta}^{\text{Pl}}E_{\beta}, \\ \hat{\mu}^{-1} &\rightarrow \mu_{\alpha\beta}^{-1}B_{\beta}, & \hat{\delta} &\rightarrow \delta_{\alpha\beta}E_{\beta}, \end{aligned} \quad (5.79)$$

(по одинаковым индексам предполагается суммирование). Для волн с  $\mathbf{E} \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$  уравнения (5.78) после исключения  $\mathbf{B}$  сводятся к виду

$$[\mathbf{k} \times \hat{\mu}^{-1}[\mathbf{k} \times \mathbf{E}]] = -\frac{\omega^2}{c^2}(\hat{\epsilon} + \hat{\epsilon}^{\text{Pl}} - \hat{\delta})\mathbf{E}. \quad (5.80)$$

Тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  характеризует влияние намагниченного вакуума и описывается формулами (5.77), а тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}^{\text{Pl}}$  относится к разреженной плазме (см. (5.43)). В проекциях на координатные оси системы I векторное уравнение (5.80) запишется как система трех линейных однородных уравнений. Приравняв нулю определитель этой системы, получим дисперсионное уравнение для электромагнитных мод в системе “намагниченный вакуум + разреженная плазма”:

$$\begin{aligned} 4\eta^2 - 2\eta\frac{\omega}{c} [ib(1 + \cos^2\alpha) + 11a \sin^2\alpha] + \\ \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2\alpha [iba(7 + 4\cos^2\alpha) + 28a^2 \sin^2\alpha] = 0, \end{aligned} \quad (5.81)$$

где введено обозначение  $\eta = k - \omega/c$ . Решение этого квадратного уравнения дает значения показателей преломления двух мод (обыкновенной и необыкновенной):

$$n_{1,2} = 1 + \frac{c}{\omega} \text{Re} \eta, \quad (5.82)$$

и коэффициентов поглощения этих мод по интенсивности

$$\mu_{1,2} = 2 \operatorname{Im} \eta. \quad (5.83)$$

В отсутствие плазмы, когда  $b=0$ , характер нормальных волн определяется только намагниченным вакуумом. В этом случае из (5.81) следует, что  $\operatorname{Im} \eta = 0$  — поглощение отсутствует. Показатели преломления  $n = kc/\omega$  равны соответственно [101]:

$$n_1 = 1 + \frac{7}{2} a \sin^2 \alpha, \quad n_2 = 1 + 2a \sin^2 \alpha. \quad (5.84)$$

Обе моды — необыкновенная волна 1 и обыкновенная волна 2 — линейно поляризованы. При этом в необыкновенной моде вектор  $\mathbf{E}_1$  лежит в плоскости  $xz$  и направлен под прямым углом к волновому вектору  $\mathbf{k}$ ; отношение  $E_x/E_z = -\operatorname{ctg} \alpha$ . В обыкновенной моде вектор  $\mathbf{E}_2$  ориентирован вдоль оси  $y$ .

В системе, состоящей из намагниченного вакуума и очень разреженной плазмы, концентрация которой, наряду с критерием (5.42), удовлетворяет также неравенству

$$\frac{\omega_L^2}{\omega^2 \beta_T} \ll \frac{1}{45\pi} \frac{e^2 B_0^2}{\hbar c B_{cr}^2}, \quad (5.85)$$

величина  $|b| \ll a$ , и решение дисперсионного уравнения (5.81) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\omega}{2c} (7a \sin^2 \alpha + ib \cos^2 \alpha), \\ \eta_2 &= \frac{\omega}{2c} (4a \sin^2 \alpha + ib). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Отсюда следует, что с точностью до величин порядка  $b/a$  показатели преломления по-прежнему описываются формулами (5.84), но появляется поглощение на частоте  $\omega \approx \omega_B$ . Это циклотронное поглощение в исследуемой системе обязано плазме и имеет бесстолкновительный характер. Оно рассмотрено в §13.

Условие (5.85), при котором поляризация нормальных волн определяется намагниченным вакуумом и остается линейной, а поглощение обеспечивается разреженной плазмой, реализуется в сильных магнитных полях нейтронных звезд. Так, на звезде с сильным магнитным полем  $B_0 \sim 0.1 B_{cr}$  это неравенство справедливо при концентрациях

плазмы  $N \ll 5 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$  (для  $\beta_T \simeq 0.15$  и частоты  $\omega \sim 1.5 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}$ , соответствующей жесткому рентгеновскому диапазону).

Далее, при условии, обратном неравенству (5.85), ролью намагниченного вакуума можно пренебречь. При этом параметр  $|b| \gg a$ , и характер поляризации, показатели преломления и поглощения нормальных волн полностью определяются разреженной плазмой. Этот случай был рассмотрен выше (см. формулы (5.46)–(5.48)). На частотах  $\omega \approx \omega_B$  он реализуется в оптическом диапазоне в плазменных оболочках магнитных белых карликов. Заметим, что критерий (5.85) относится только к частотам, близким к гирочастоте:  $(\omega - \omega_B)^2 \lesssim \omega^2 \beta_T^2$ . Вне этого интервала влияние вакуума на распространение электромагнитных волн будет определяющим при условии [105]

$$\frac{\omega_L^2}{\omega^2} \frac{\omega_B^2}{|\omega^2 - \omega_B^2|} \ll \frac{1}{15\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{B_0^2}{B_{cr}^2}. \quad (5.87)$$



## Глава 3

# Электромагнитные волны в регулярно неоднородной астрофизической плазме

В космических условиях существенное влияние на распространение электромагнитных волн оказывает неоднородный характер плазмы и магнитных полей. Волны в регулярно неоднородной астрофизической плазме будут рассмотрены в этой главе. Вместе с тем в астрофизической плазме имеются случайные макроскопические неоднородности, рассеяние на которых иногда заметно меняет характеристики наблюдаемого внеземного радиоизлучения. Здесь мы имеем в виду увеличение длительности импульсов пульсаров на низких частотах вследствие рассеяния в межзвездной среде, рост угловых размеров дискретных источников радиоизлучения при их затмении солнечной свержкоронной, мерцания дискретных источников из-за рассеяния в межпланетной плазме и пр. К сожалению, ограниченный объем книги не позволяет рассмотреть здесь эти эффекты (см. обзоры [106, 107], оригинальные статьи [108–113] и приведенную там библиографию). Эффекты рассеяния на отдельных частицах (электронах) в сильных магнитных полях могут также заметно влиять на характеристики оптического и рентгеновского излучения вырожденных звезд. Эту проблему мы рассмотрим в главе 8.

### §6. Приближение геометрической оптики в неоднородной среде

#### 6.1. Характер геометрико-оптического решения

В предыдущей главе было рассмотрено распространение электромагнитных волн в однородной безграничной плазме, где оно описывается системой уравнений (4.19)-(4.22). Их решения представляют

собой “нормальные волны”  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E} \propto \exp(i\mathbf{k}_j \mathbf{r} - i\omega t)$  или суперпозицию этих волн. В неоднородной среде указанные решения перестают удовлетворять уравнениям Максвелла (4.19)-(4.22). Однако при относительно малом изменении свойств плазмы на длине волны эти уравнения могут быть решены в геометрико-оптическом приближении. Оно учитывает то обстоятельство, что в плавно неоднородной среде распространение волн в каждой достаточно малой области происходит примерно так же, как в однородной среде с параметрами, близкими к параметрам этой области. Поэтому решение для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в приближении геометрической оптики в основном должно напоминать решение в однородной среде; надо лишь иметь в виду, что при изменении  $\mathbf{r}$  величина и направление волнового вектора  $\mathbf{k}_j$  меняются, так что “набег” фазы будет равен  $\int \mathbf{k}_j d\mathbf{r}$ , а не просто  $\mathbf{k}_j \mathbf{r}$ . Итак, имеем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_a(\mathbf{r}) \exp(i \int \mathbf{k}_j d\mathbf{r} - i\omega t), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) \exp(i \int \mathbf{k}_j d\mathbf{r} - i\omega t) \quad (6.1)$$

Индекс  $j$  в (6.1) указывает на тип волны (обыкновенной, необыкновенной или плазменной). Кроме того, в рассматриваемом приближении амплитуда волны перестает быть неизменной, но остается медленно меняющейся функцией координат; это также принято во внимание при написании (6.1).

Следует подчеркнуть, что вектор  $\mathbf{k}_j$  и отношение компонент амплитуды  $\mathbf{E}_a$  (т.е. поляризация волны) находятся соответственно из дисперсионного уравнения (4.41) и системы алгебраических уравнений (4.40) для однородной плазмы, свойства которой совпадают со свойствами неоднородной среды в данной точке  $\mathbf{r}$ .<sup>39</sup> Из сказанного ясно, что в приближении геометрической оптики значения показателя преломления  $n_j$ , число возможных волн в плазме и характер их поляризации остаются такими же, как в однородной среде.

Если в неоднородной плазме нет областей, в которых было бы неприменимо геометрико-оптическое приближение, или указанные области существуют, но фактически не достигаются волнами, то решения (6.1) с разными значениями  $\mathbf{k}_j$  будут линейно независимыми. Произвольное электромагнитное поле частоты  $\omega$  тогда может быть представлено в виде суперпозиции решений (6.1) с разными значениями  $\mathbf{k}_j$  и амплитуд  $\mathbf{E}_a$ ,  $\mathbf{B}_a$ . Это позволяет условно называть “нормальными” волнами и геометрико-оптические решения в плавно неоднородной

<sup>39</sup> Отношения компонент  $\mathbf{B}_a$  по известной амплитуде  $\mathbf{E}_a$  могут быть найдены из уравнения (4.33).

родной среде.

Наоборот, в случае, когда волны в процессе распространения проходят через область неприменимости геометрической оптики (где выражения для полей  $E$ ,  $B \propto e^{-i\omega t}$  существенно отличаются от (6.1) и от любой линейной комбинации этих функций), геометрико-оптические решения (6.1) вне этой области уже не остаются независимыми. Их амплитуды будут связаны определенными соотношениями, зависящими от характера решений в области нарушения геометрической оптики. Рассмотрение указанного явления “линейного взаимодействия” волн в плазме мы отложим до §7, ограничившись здесь обсуждением характера распространения волн в приближении геометрической оптики. Последнее в плавнонеоднородной среде имеет весьма широкую применимость, нарушаясь лишь в некоторых ограниченных областях сравнительно малой протяженности.

## 6.2. Приближение геометрической оптики в изотропной и магнитоактивной плазме

В изотропной плазме зависимость показателей преломления  $n_j = k_j c / \omega$  от параметра  $v = \omega_L^2 / \omega^2$  представлена на Рис. 7 в §5. Если плазма неоднородна, причем концентрация электронов  $N$  зависит только от одной координаты  $z$  по линейному закону,<sup>40</sup> то приведенные на рисунке графики отражают (с соответствующим изменением масштаба по оси абсцисс) зависимость  $n_j^2(z)$ .

В плавно меняющейся плоскослоистой среде для волн, распространяющихся вдоль оси  $z$ , геометрическая оптика применима везде, за исключением окрестности точки  $z$ , где  $v = 1$  (т.е.  $\epsilon = 0$  и  $n_j^2 = 0$ ; см. (5.2), (5.14)). Последнее представляется вполне естественным, так как по мере приближения к уровню  $n_j^2 = 0$  длина электромагнитной и плазменной волн  $\lambda_j = 2\pi c / \omega n_j$  неуклонно возрастает. Благодаря последнему обстоятельству относительное изменение свойств среды на расстоянии порядка  $\lambda_j / 2\pi$  становится все больше и больше; это приводит к нарушению основного критерия который определяет область применимости геометрико-оптического приближения (см. подробнее [71])

$$\frac{d\epsilon}{dz} \frac{\lambda}{2\pi} \ll \epsilon. \quad (6.2)$$

Аппроксимируя зависимость  $\epsilon(z) = 1 - \omega_L^2 / \omega^2$  в слое  $\epsilon \approx 0$  линейной функцией  $\epsilon = -za$ , где постоянная  $a = |d\epsilon/dz|$ , сведем неравенство

<sup>40</sup> Среду, свойства которой зависят только от одной координаты, называют плоскослоистой.

(6.2) к виду

$$|z| \gg (c^2/\omega^2 a)^{1/3} \quad (6.3)$$

для поперечных волн с  $\lambda_{em} = 2\pi c/(\omega\sqrt{\epsilon})$  и к виду

$$|z| \gg (3v_T^2/\omega^2 a)^{1/3} \quad (6.4)$$

для продольных волн с  $\lambda_{pl} = 2\pi\sqrt{3}v_T/(\omega\sqrt{\epsilon})$ . Отсюда следует, что, например, в солнечной короне, где  $|d\epsilon/dz| \sim 10^{-10} \text{ см}^{-1}$ , геометрическая оптика на частоте  $\omega \sim 2\pi \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  полностью нарушается лишь в узком слое  $|z| \lesssim 2 \cdot 10^4 \text{ см}$  для электромагнитных и  $|z| \lesssim 10^3 \text{ см}$  для плазменных волн близ уровня, на котором  $\epsilon(\omega) = 0$ .<sup>41</sup>

В слоях, где выполнено неравенство (6.3), для электромагнитных волн, распространяющихся вдоль  $z$ , приближение геометрической оптики имеет вид [71]:

$$E = c_1 \frac{e_1}{\sqrt{n_1}} e^{i\frac{\omega}{c} \int n_1 dz - i\omega t} + c_2 \frac{e_2}{\sqrt{n_2}} e^{-i\frac{\omega}{c} \int n_2 dz - i\omega t} \quad (6.5)$$

Фактор  $1/\sqrt{n_j}$  определяет зависимость амплитуды электрического поля в волне от координаты  $z$ , константы  $c_1$  и  $c_2$  — абсолютную величину амплитуды; вектор  $e_j$  характеризует поляризацию  $j$ -й волны с показателем преломления  $n_j(\omega)$ . В изотропной плазме в качестве “нормальных” электромагнитных волн могут быть выбраны любые две волны ( $j=1, 2$ ) с одинаковым значением  $n_j(\omega) = n_{em}$  (5.2) и с любыми (но ортогональными) поляризациями  $e_j$ . Для плазменных волн ( $j=3$ ) выражение для электрического поля в области (6.4) аналогично приведенному, с той лишь разницей, что  $e_j \parallel k_j$  и вместо фактора  $1/\sqrt{n_{em}}$  в нем фигурирует  $\omega_L/\omega\sqrt{n_{pl}}$  [114, 115].

В области  $z < 0$ , где  $n_j^2 > 0$  и  $n_j(z)$  — действительная величина, первое слагаемое в (6.5) определяет волну, бегущую в сторону положительных  $z$  (вглубь плазмы), а второе слагаемое — волну противоположного направления. В слоях  $z > 0$ , где  $n_j^2 < 0$  и величина  $n_j(z)$  чисто мнимая,<sup>42</sup> первое слагаемое описывает экспоненциально затухающую, а второе — экспоненциально нарастающую (с ростом  $z$ ) волну. Нарушение геометрико-оптического приближения (6.5) в слое  $n_j^2(z) \approx 0$  приводит к “линейному взаимодействию” между волнами,

<sup>41</sup> Согласно точному решению задачи о распространении волн в линейном слое, приведенному, например, в [71], правые части неравенств (6.3), (6.4) с точностью до коэффициента порядка единицы равны максимальной длине волны  $\lambda_{max}$ , достигаемой в плазме.

<sup>42</sup> О характере волн в области чисто мнимых значений  $n_j$ , см. §5.

бегущими в противоположные стороны. Этот эффект, определяющий отражение волн, устанавливает связь между коэффициентами  $c_1$  и  $c_2$  в областях  $z < 0$  и  $z > 0$ . Так, при падении на линейный слой волны с амплитудой  $c_1$  из области  $n_j^2 \approx 0$  в область  $z < 0$  выходит отраженная волна с амплитудой  $c_2 = c_1 e^{-i\pi/2}$ , а в области  $z > 0$  возникает лишь экспоненциально затухающее поле с амплитудой  $c_1 e^{-i\pi/2}$ .

При наклонном распространении волн в плоскостной плазме (под углом к  $\nabla\epsilon$ ) электрическое поле волны может быть представлено в виде  $\mathbf{E} = F(z)e^{ik_x x + ik_y y}$  [71]. Без ограничения общности это выражение можно записать в следующей форме:

$$\mathbf{E} = F(z)e^{ik_x x}, \quad k_x = \text{const}, \quad (6.6)$$

если повернуть систему координат так, чтобы новая ось  $x$  была направлена вдоль составляющей вектора  $\mathbf{k}_j$  в плоскости, ортогональной  $z$ . Поскольку  $k_x = \text{const}$  (не зависит от координат), закон изменения  $\mathbf{E}(z)$  полностью характеризуется функцией  $F(z)$ .

Уравнения, описывающие электромагнитные волны с вектором  $\mathbf{E}$ , лежащим вместе с  $\mathbf{k}_j$  в плоскости  $xz$  (в плоскости распространения), и с вектором, ортогональным этой плоскости, разделяются. Это означает, что волны с указанными ориентациями вектора  $\mathbf{E}$  при наклонном распространении в плоскостной среде остаются независимыми. При этом для электромагнитных волн с вектором  $\mathbf{E}$ , ортогональным плоскости  $xz$ , зависимость  $F(z)$  в общем аналогична рассмотренной ранее зависимости  $\mathbf{E}(z)$  (6.5) в случае нормального распространения (вдоль  $z$ ). Различие состоит лишь в том, что точке отражения (в окрестности которой осцилляционный характер изменения поля в пространстве сменяется экспоненциальным) соответствует не значение  $n_j(z) = 0$ , как раньше, а значение

$$n_j(z) = \frac{ck_x}{\omega}. \quad (6.7)$$

Для волн с вектором  $\mathbf{E}$  в плоскости распространения зависимость  $F(z)$  отличается бóльшим своеобразием. Правда, электромагнитная волна по-прежнему отражается от точки  $n_{\text{em}} = ck_x/\omega$ . Вместе с тем приближение геометрической оптики для этой волны становится несправедливым и в точке  $n_{\text{pl}}(z) = ck_x/\omega$ , где отражается плазменная волна. Поэтому между электромагнитной и плазменной волнами в окрестности этой точки возникает взаимодействие, сопровождаемое переходом одного типа волн в другой (электромагнитной в плазменную и наоборот). Замечания об этом эффекте см. в §7.

Обратимся теперь к неоднородной магнитоактивной плазме. Прежде всего отметим, что дисперсионные кривые  $n_j^2(v)$ , изображенные на Рис. 8–10 в §5, передают (на частоте  $\omega$  при фиксированном значении угла  $\alpha$  между  $k_j$  и  $B_0$  в постоянном магнитном поле  $B_0$ ) зависимость  $n_j^2$  от концентрации плазмы  $N$ , так как параметр  $v = \omega_L^2/\omega^2$  и  $\omega_L^2 = 4\pi e^2 N/m_e \propto N$ . Эти кривые также характеризуют (при соответствующем изменении масштаба по оси абсцисс) зависимость  $n_j^2(z)$  в неоднородной плоскостойкой плазме с параметром  $v$ , меняющимся по закону  $v = az$  (где  $a = \text{const}$ ), и  $u = \text{const}$  (линейный слой). Если  $v(z)$  — функция нелинейная, но монотонно растущая вместе с  $z$ , то качественный характер дисперсионных кривых (относительное расположение нулей и полюсов  $n_j^2$ , областей взаимодействия между разными типами волн) сохранится без изменений.

В неоднородной магнитоактивной плазме геометрико-оптическое приближение вида (6.1) выполняется обычно при условии

$$\frac{\omega}{c} n_j \Lambda \gg 1, \quad (6.8)$$

где  $\Lambda$  — характерный масштаб изменения свойств среды вдоль направления распространения волн. Так, например, нарушение этого условия в областях, где  $n_j^2 \approx 0$ , приводит к отражению волн, распространяющихся вдоль  $z$  в плоско-слоистой среде.

Исследование распространения электромагнитных волн в астрофизической плазме становится более сложной задачей, когда магнитное поле  $B_0$  (т.е.  $u$  и  $\alpha$ ) существенно меняется в пространстве наряду с концентрацией электронов  $N$  (т.е.  $v$ ). Примером реализации таких условий служат магнитосферы пульсаров, планетные магнитосферы, области активности над солнечными пятнами и т.п. В пульсарах положение еще более осложняется тем, что магнитоактивная плазма, вероятно, релятивистская и неравновесная, изучение характера волн в таких условиях далеко от полноты (см. §5), и мы этот вариант рассматривать не станем, несмотря на его очевидную важность для теории излучения пульсаров.

В активных областях солнечной короны и хромосферы ситуация представляется более простой благодаря равновесному и нерелятивистскому характеру основной частицы плазмы. Однако и здесь распределение значений  $n_j^2$  остается весьма сложным. Чтобы получить представление об этом распределении, рассмотрим [116] по возможности более простой случай — зависимость  $n_j^2$  от расстояния до центра Солнца  $R$  для значений  $R > R_\odot$  ( $R_\odot$  — радиус фотосферы) на оси уни-

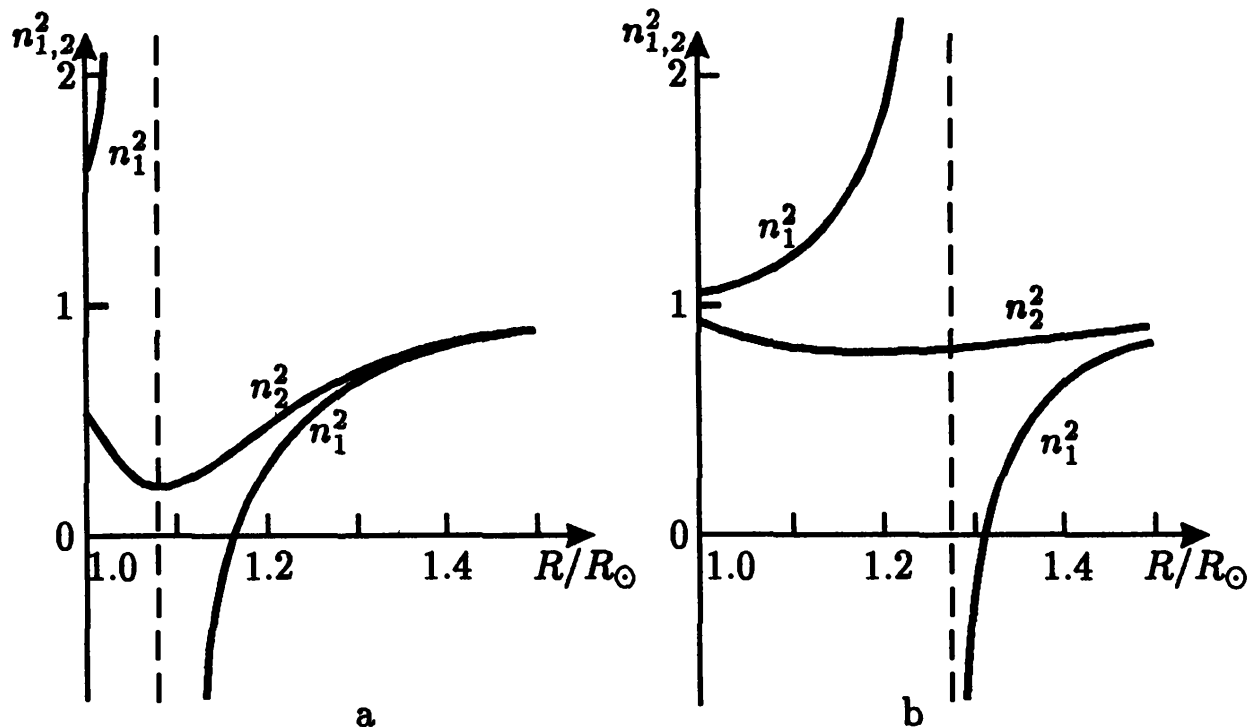


Рис. 16. Зависимость квадрата показателя преломления  $n_{1,2}^2(R/R_\odot)$  в корональной плазме над солнечным пятном ( $\alpha=0$ ):  $a - B_b = 2.5 \cdot 10^2$  Гс,  $b - B_b = 2.5 \cdot 10^3$  Гс

полярного солнечного пятна, модель магнитного поля которого определяется формулой (1.17). При этом предполагается, что концентрация электронов в короне задана формулой Баумбаха–Аллена (1.16).

Графики  $n_j^2(R/R_\odot)$  для необыкновенных ( $j=1$ ) и обыкновенных ( $j=2$ ) волн в короне над пятном приведены на Рис. 16–18. Они построены по формуле (5.19), не учитывающей тепловое движение в плазме, для частоты  $\omega = 2\pi \cdot 10^8$  с $^{-1}$ , площади магнитного полюса  $\pi b^2 = 3 \cdot 10^{19}$  см $^2$  (что по порядку величины равно площади очень крупного пятна) и нескольких фиксированных значений магнитного поля в центре пятна  $B_b$  и угла  $\alpha$  между  $B_0$  и  $k_j$ .

Качественное различие между графиками  $n_{1,2}^2(R/R_\odot)$  на Рис. 17,  $a$  и  $b$  связано с тем, что в модели пятна с сильным магнитным полем (Рис. 17,  $b$ ) уровень  $\omega_B = \omega$  лежит в солнечной атмосфере выше слоя, где  $\omega_L = \omega$ , а в случае Рис. 17,  $a$ , построенного для модели пятна с более слабым магнитным полем, относительное расположение уровней  $\omega_B = \omega$  и  $\omega_L = \omega$  меняется на обратное.

Показатель преломления  $n_{1,2}^2(R/R_\odot)$  при  $\beta_T = v_T/c \rightarrow 0$  (в отсутствие теплового движения) обращается в бесконечность в тех слоях короны, для которых выполняется соотношение (5.21). Из него, в частности, следует, что при малых углах  $\alpha$  величина  $n_{1,2}^2(R/R_\odot)$  имеет два полюса на уровнях  $u \approx 1$  и  $v \approx 1$  (см. Рис. 17). Нетрудно убедиться,

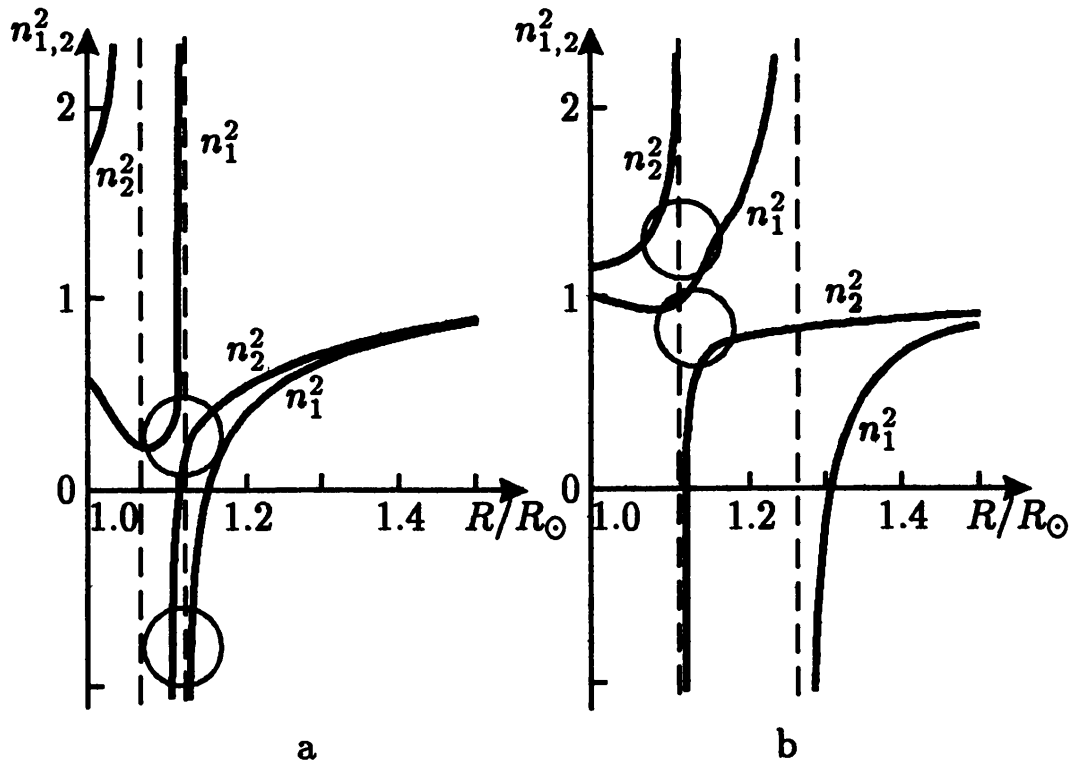


Рис. 17. То же, что и на Рис. 16, для  $\alpha = 15^\circ$ . Кругами отмечены области взаимодействия разных типов волн

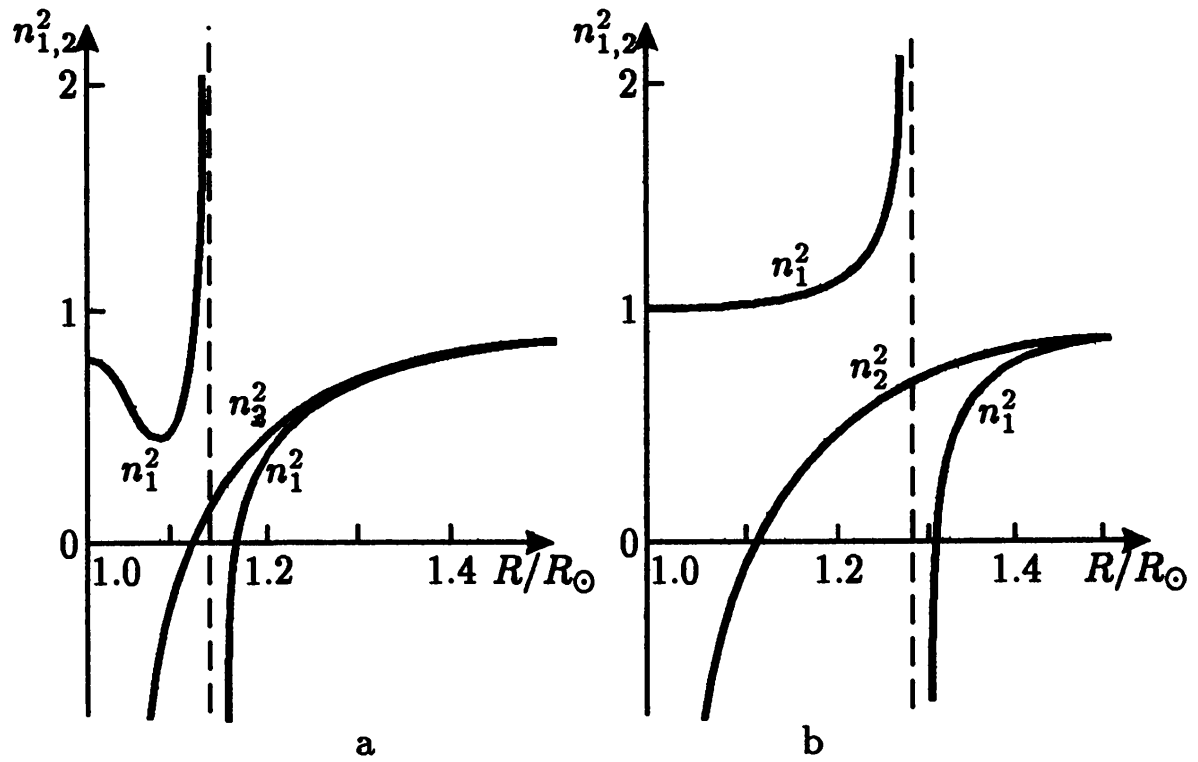


Рис. 18. То же, что и на Рис. 16, для  $\alpha = 90^\circ$



что по мере увеличения угла  $\alpha$  полюс, расположенный ближе к фотосфере и принадлежащий обыкновенной волне, сначала перемещается во внутренние слои короны, а затем исчезает под фотосферой. Наоборот, более удаленный от солнечной поверхности полюс у необыкновенной волны существует при любых углах  $\alpha$ ; с ростом последнего он переходит во внешние слои короны. Для  $\alpha = \pi/2$  этот полюс располагается на уровне  $1 - u - v = 0$ , т.е. в области, где  $u < 1$ ,  $v < 1$ .

Для необыкновенной волны в слое, заключенном между полюсом и расположенным выше (при  $v = 1 - \sqrt{u}$ ) нулем функции  $n_1^2(R/R_\odot)$ , значения последней отрицательны (т.е. волна в этом слое экспоненциально затухает). Сказанное означает, что излучение, которое генерируется на частоте  $\omega$  в областях короны, расположенных ниже нуля  $n_j^2$  (т.е. ниже уровня  $v = 1 - \sqrt{u}$ ), практически не может выйти из короны в околосолнечное пространство в виде волн необыкновенного типа.

Заключение о невозможности выхода необыкновенных волн из тех районов космической плазмы, в которых  $v > 1 - \sqrt{u}$ , в широких пределах не зависит от конкретных предположений о распределении электронной концентрации и магнитного поля в плазме. Необходимо лишь, чтобы протяженность слоя, в котором  $n_1^2 < 0$ , не была слишком малой, так как в противном случае ослабление волны станет недостаточным и она будет выходить из области  $v > 1 - \sqrt{u}$  вследствие сильного "просачивания" через слой  $n_1^2 < 0$ . Как показывает подробное рассмотрение этого эффекта [71], в плавно неоднородной космической плазме, когда  $\omega/ca \gg 1$  и плазма в интересующей нас области аппроксимируется линейным слоем ( $v = az$ ,  $u = \text{const}$ ), явление "просачивания" становится существенным при условии

$$\pi \frac{\omega}{ca} u^{3/4} \sim 1. \quad (6.9)$$

Последнее реализуется лишь в очень слабых магнитных полях, для которых  $u \ll 1$ . Например, в стационарной корональной плазме для  $\omega \sim 2\pi \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  и  $a \sim 10^{-10} \text{ см}^{-1}$  условие (6.9) выполняется лишь для  $B_0 \sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ Гс}$ . В короне магнитное поле значительно выше, так что указанное явление совершенно не существенно. Однако оно может играть заметную роль при резком увеличении градиентов концентрации в астрофизической плазме, сопровождающем, например, возникновение разрывов типа ударных волн. И наконец, в случае, когда

$$\pi \frac{\omega}{ca} u^{3/4} \ll 1, \quad (6.10)$$

Влиянием магнитного поля на характер распространения волн в области  $v \approx 1$  можно пренебречь.

### 6.3. Лучевая трактовка

В неоднородной изотропной плазме в рамках приближения геометрической оптики величина волнового вектора  $\mathbf{k}_j = (\omega/c)n_j\mathbf{s}$  в каждой точке среды определяется значением показателя преломления  $n_j(\omega, \mathbf{r})$  в этой точке. Отыскание распределения направлений единичного вектора  $\mathbf{s}$  в неоднородной среде представляет собой более сложную задачу. Для ее решения с помощью соотношения  $\int \mathbf{k}_j d\mathbf{r} = (\omega/c)\psi(\mathbf{r})$  вводится функция  $\psi(\mathbf{r})$ , которая называется эйконалом. Из этого определения ясно, что

$$\nabla\psi \equiv \frac{d\psi}{d\mathbf{r}} = n_j\mathbf{s}. \quad (6.11)$$

В результате приходим к уравнению эйконала

$$(\nabla\psi)^2 = n_j^2. \quad (6.12)$$

В изотропной среде с известным распределением показателя преломления  $n_j(\omega, \mathbf{r})$  это уравнение вместе с граничными условиями определяет функцию  $\psi(\mathbf{r})$ . Зная последнюю, можно найти  $\mathbf{s}(\mathbf{r})$  с помощью соотношения (6.11).

Приближение геометрической оптики в неоднородной среде допускает также “лучевую” трактовку распространения волн, которая особенно важна при исследовании переноса излучения (см. главу 4). Здесь под лучом понимается траектория движения “центра тяжести” волнового пакета — сигнала, ограниченного в пространстве и во времени. В рамках геометрической оптики, как и в однородной среде, направление движения пакета определяется вектором групповой скорости  $\mathbf{v}_{gr} = d\omega/d\mathbf{k}$  и совпадает со средним по времени направлением потока энергии в волне. В изотропной среде направление  $\mathbf{v}_{gr}$  совпадает также с направлением  $\mathbf{k}$ , т.е. с вектором  $\mathbf{s}$ . Иными словами, если траектория луча в изотропной плазме есть  $\mathbf{r}(l)$  ( $l$  — длина вдоль луча), то  $\mathbf{s} = d\mathbf{r}/dl$ .

Уравнение для вектора  $\mathbf{s}(l)$  вдоль луча

$$n_j \frac{d\mathbf{s}}{dl} = \nabla n_j - \mathbf{s}(\mathbf{s}\nabla n_j) \quad (6.13)$$

можно получить, исходя из уравнения эйконала (6.12). Соответствующий вывод приведен в [117]. Однако к (6.13) можно прийти и более простым способом [118], используя принцип Ферма.

В плоскостой среде, где  $n_j = n_j(z)$ , из уравнения (6.13) следует, что луч лежит в плоскости, параллельной оси  $z$ , причем в этой

плоскости форма луча определяется уравнением

$$\frac{1}{n_j} \frac{dn_j}{dz} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad (6.14)$$

где  $\varphi$  — угол между  $\mathbf{s}$  и осью  $z$ . Его решение

$$n_j \sin \varphi = \operatorname{const}, \quad (6.15)$$

в котором константа не зависит от  $z$ , называется законом преломления Декарта–Снеллиуса. Соотношение (6.15), разумеется, прямо следует из вида геометрико-оптического решения в плоскостой изотропной среде (6.6), согласно которому  $k_x = (\omega/c)n_j \sin \varphi = \operatorname{const}$ .<sup>43</sup> Константа в (6.15) будет фиксирована, если задать угол  $\varphi = \varphi_0$  между  $\mathbf{k}_j$  и осью  $z$  на некотором уровне  $z = z_0$ :

$$n_j(z) \sin \varphi(z) = n_j(z_0) \sin \varphi_0. \quad (6.16)$$

Часто в качестве уровня  $z_0$  выбирают начало плазменного слоя  $\epsilon = 1$ , где имеет место переход от плазмы к вакууму. Угол  $\varphi_0$  в этом слое называется углом падения волны на слой, значение  $n_j(z_0)$  здесь равно единице для электромагнитных и  $1/\sqrt{3}\beta_T$  для плазменных волн (см. (5.2) и (5.14)).<sup>44</sup>

О поведении луча при наклонном падении волны под углом  $\varphi_0$  на плоскостой среду можно судить по Рис. 19, а. Вершина луча, соответствующая точке отражения  $z_{\text{ref}}$ , определяется из (6.16) при условии  $\varphi = \pi/2$ :

$$n_j(z_{\text{ref}}) = n_j(z_0) \sin \varphi_0 \quad (6.17)$$

или, что то же самое,

$$\epsilon(z_{\text{ref}}) = 1 - \frac{\omega_L^2(z_{\text{ref}})}{\omega^2} = \sin^2 \varphi_0. \quad (6.18)$$

Если в плазме находится источник, излучающий во всех направлениях, то благодаря рефракции излучение при выходе из плазмы приобретает направленный характер. Интервал углов  $\varphi \leq \varphi_{\text{max}}$ , под которыми излучение покидает среду, легко найти, если учесть, что луч,

<sup>43</sup> Это соотношение сохраняется и в плоскостой магнитоактивной плазме. Однако вследствие различия в направлениях  $\mathbf{v}_{\text{ph}}$  и  $\mathbf{v}_{\text{gr}}$  в такой плазме форма лучей становится весьма сложной. Некоторые результаты расчетов лучей в плазме с магнитным полем приведены в [71].

<sup>44</sup> Угол падения для плазменных волн, разумеется, можно ввести лишь условно, поскольку в вакууме эти волны не существуют, а в областях плазмы, достаточно далеких от слоя  $\epsilon = 0$  (там, где  $v_{\text{ph}} \sim v_T$ ), они затухают на расстоянии порядка длины волны, что делает их распространение практически невозможным.

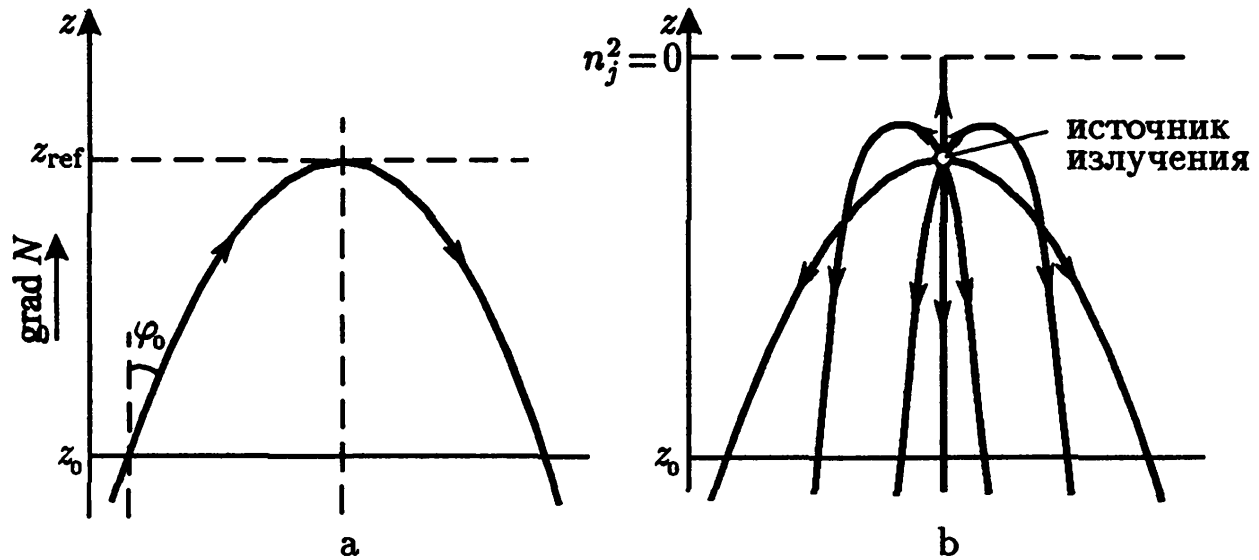


Рис. 19. Рефракция в плоскослоистой плазме с  $\nabla N$  вдоль оси  $z$ : (а) форма луча, входящего в плазму под углом  $\varphi_0$ ; (б) лучи от точечного источника в плазме

выходящий за пределы плазмы под наибольшим углом  $\varphi_{\max}$ , имеет вершину в точке  $z = z_{\text{src}}$ , где располагается источник (Рис. 19 б). Тогда согласно (6.18),

$$\varphi_{\max} = \arcsin \sqrt{\epsilon(z_{\text{src}})} = \text{arcsec} \frac{\omega}{\omega_{L \text{ src}}}, \quad (6.19)$$

где  $\omega_{L \text{ src}} = \omega_L(z_{\text{src}})$ . Из этого выражения следует, что направленность увеличивается по мере приближения источника к уровню  $\epsilon(z, \omega) = 0$  (либо за счет перемещения источника постоянной частоты в глубь плазмы, либо вследствие уменьшения частоты, генерируемой источником). Формула (6.19) позволяет оценить величину электронной концентрации в окрестности источника по наблюдаемой ширине углового спектра излучения на данной частоте.

Пусть теперь распределение электронной концентрации в плоскослоистой плазме  $N(z)$  — немонотонное, с максимумом в слое  $z = z_{\max}$ . Этот вариант, очевидно, представляет интерес для планетных ионосфер, в том числе для ионосферы Юпитера, откуда, возможно, выходит его декаметровое радиоизлучение. Если на ионосферный слой падает волна под углом  $\varphi_0$ , то она отразится от уровня  $z = z_{\text{ref}}$ , где собственная частота плазмы (см. (6.18))

$$\omega_L(z_{\text{ref}}) = \omega \cos \varphi_0. \quad (6.20)$$

С увеличением частоты точка отражения перемещается в глубь слоя с большими значениями  $\omega_L$ . При некотором значении  $\omega$ , равном кри-

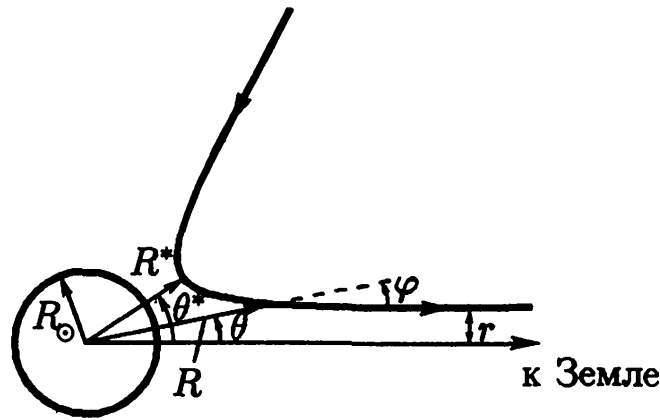


Рис. 20. К расчету формы луча в сферически-симметричной солнечной короне

тической частоте ионосферы при наклонном падении

$$\omega_{cr} = \omega_L^{\max} \sec \varphi_0, \quad (6.21)$$

она достигает максимума слоя, где собственная частота плазмы  $\omega_L^{\max}$  соответствует электронной концентрации  $N_{\max}$ . В области  $\omega > \omega_{cr}$  отражение исчезает и волна свободно проходит через ионосферный слой. На фиксированной частоте  $\omega$  это неравенство определяет интервал углов  $\varphi_0$ , под которыми покидает ионосферу прошедшее через нее излучение; при этом наибольший угол

$$\varphi_{\max} = \operatorname{arcsec} \frac{\omega}{\omega_L^{\max}}. \quad (6.22)$$

уменьшается вместе с отношением  $\omega/\omega_L^{\max}$ , обращаясь в нуль при  $\omega/\omega_L^{\max} = 1$ .

Плоскостная модель неоднородной плазмы благодаря своей простоте весьма удобна для исследования принципиальной стороны вопроса о распространении волн в ионосферах планет, солнечной короне и т.п. Однако в ряде случаев — при изучении направленности излучения, поглощения излучения вдоль луча и т.п., — оказывается необходимым более точное рассмотрение хода лучей в ионосфере или короне с учетом их сферичности.

Конфигурация лучей в сферически-симметричной преломляющей среде определяется законом преломления, который можно получить, исходя из уравнения (6.13) и предполагая, что  $n_j = n_j(R)$ , где  $R$  — расстояние от центра симметрии (центра Солнца или планеты) до данной точки луча. Обозначая через  $\varphi$  угол между направлением луча и радиусом  $R$ , находим, что элемент длины луча  $dl = dR/\cos \varphi$ . Учитывая это обстоятельство и используя Рис. 20, представим уравнение

(6.13) в форме

$$\frac{1}{n_j} \frac{dn_j}{dR} + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d\varphi}{dR} = -\frac{1}{R}. \quad (6.23)$$

Решением этого уравнения является закон преломления в сферически-симметричной среде:

$$n_j(R) R \sin \varphi = \operatorname{const}, \quad (6.24)$$

Если обозначить через  $R_\infty$  точку на траектории луча вне среды, то этому закону преломления можно придать следующий вид:

$$n_j(R) R \sin \varphi = n_j(R_\infty) R_\infty \sin \varphi(R_\infty) = n_j(R_\infty) r, \quad (6.25)$$

где  $r$  — “прицельный параметр”, характеризующий расстояние от входящего в среду луча до идущего параллельно ему радиуса.<sup>45</sup> Для поперечных электромагнитных волн показатель преломления за пределами короны  $n_j(R_\infty) = 1$ ; учет формального отличия  $n_j(R_\infty)$  от единицы нужен лишь при рассмотрении рефракции плазменных волн. Типичный ход луча в солнечной короне с монотонно убывающей при увеличении  $R$  электронной концентрацией приведен на Рис. 20.

Из (6.25) и этого рисунка ясно, что элемент длины луча

$$dl = \frac{dR}{\cos \varphi} = \frac{dR}{\sqrt{1 - r^2/n_j^2 R^2}}. \quad (6.26)$$

Траектория луча в полярных координатах  $R, \theta$

$$\theta = \theta_\infty + \int_R^{R_\infty} \frac{r dR}{R \sqrt{n_j^2 R^2 - r^2}}. \quad (6.27)$$

Величина  $\theta_\infty$ , очевидно, совпадает с  $\varphi(R_\infty)$ . Точка отражения (точка “поворота”), где  $\varphi = \pi/2$ ,  $R = R^*$  и  $\theta = \theta^*$ , определяется равенством

$$R^* n_j(R^*) = r. \quad (6.28)$$

Траектория луча симметрична относительно радиуса  $R^*$ , проходящего через точку поворота, и лежит в плоскости, проходящей через центр симметрии. Конфигурации электромагнитных лучей в солнечной короне, рассчитанные в [119] по формуле (6.27) в предположении, что распределение электронной концентрации подчиняется формуле Баумбаха – Аллена (1.16), приведены на Рис. 21.

<sup>45</sup> На Солнце параметр  $r$  имеет смысл расстояния от центра солнечного диска.

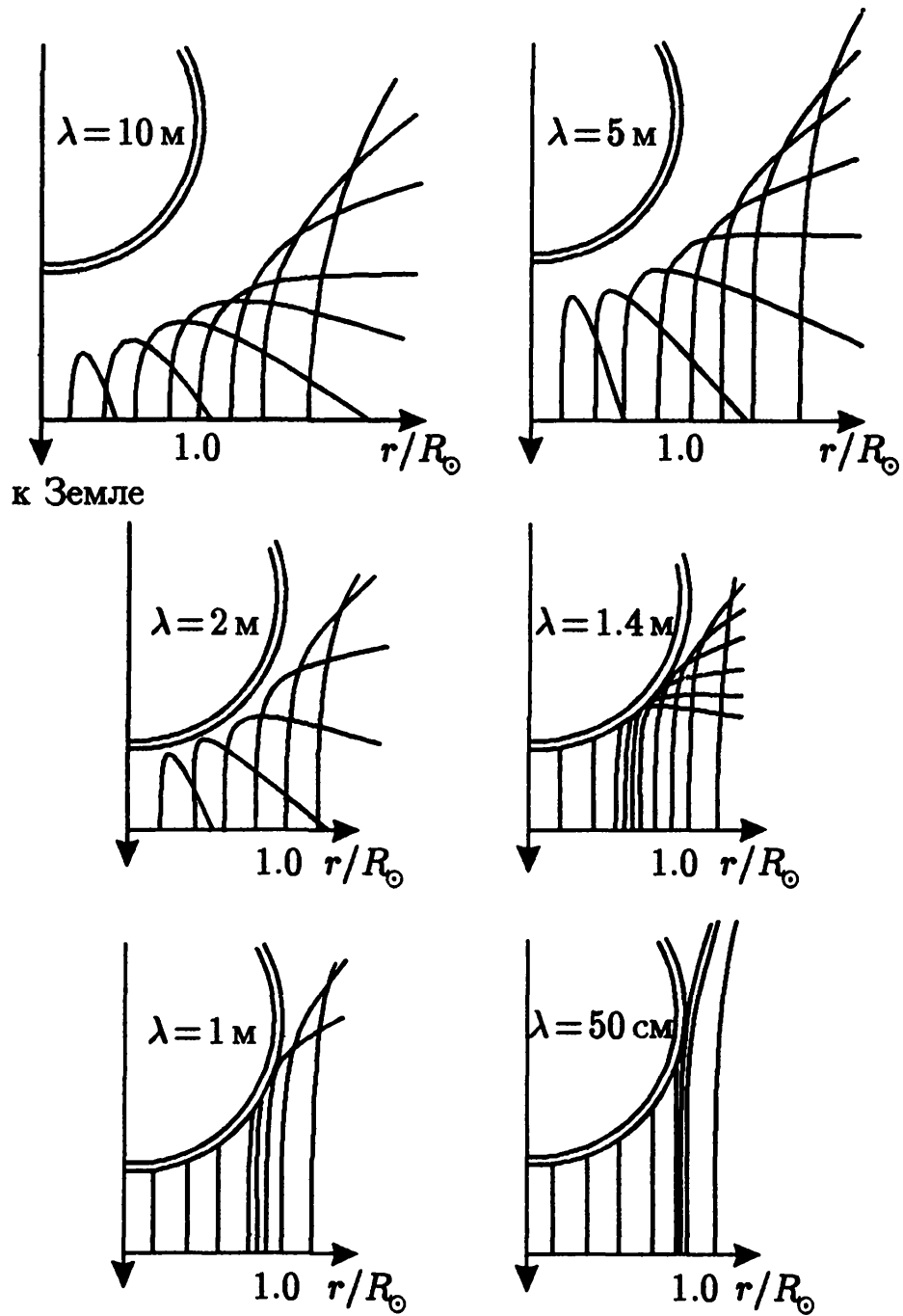


Рис. 21. Форма лучей в солнечной короне для волн длиной от 50 см до 10 м

Из рисунков ясно, что на данной частоте луч проникает глубже в корону при меньших значениях прицельного параметра  $r$ . Иными словами, поверхность точек поворота, касающаяся в центре диска уровня  $n_j(\omega) = 0$  (т.е.  $\omega = \omega_L$ ), с увеличением расстояния  $r$  до центра диска приподнимается над этим уровнем. Поскольку указанная поверхность является нижней границей области короны, из которой радиоизлучение на данной частоте может выйти за ее пределы в заданном направлении, излучение в центре диска может наблюдаться от более глубоко расположенных источников, чем на лимбе. С повышением частоты поверхность точек поворота перемещается в более глубокие слои короны, при этом расширяется область короны, которая в принципе может быть ответственна за создание наблюдаемого излучения. Благодаря рефракции “видимое” в радиолучах положение источника в короне отличается от истинного меньшим расстоянием до центра диска.

#### 6.4. Эффект группового запаздывания сигналов

Рассмотрим теперь роль групповой скорости волн в плазме при распространении сигналов вдоль луча. Если источник в плазме генерирует излучение с широким частотным спектром, имеющее огибающую импульсного характера (в форме всплеска), то вследствие частотной дисперсии групповой скорости  $v_{gr} = v_{gr}(\omega)$  моменты прихода наблюдаемых сигналов на разных частотах будут различны. Время группового запаздывания на частоте  $\omega$  (по сравнению с сигналом в вакууме) равно

$$\Delta t_{gr} = \int \left( \frac{1}{v_{gr}} - \frac{1}{c} \right) dl. \quad (6.29)$$

Интеграл берется вдоль луча между источником и точкой приема.

Для электромагнитных волн в изотропной плазме  $v_{gr} = c\sqrt{\epsilon}$ ; см. §5. Поэтому в линейном слое максимальное запаздывание, очевидно, будет происходить на частоте  $\omega$ , для которой  $n_{em} = \sqrt{\epsilon} \approx 0$  в точке, где расположен источник излучения.<sup>46</sup> При этом

$$(\Delta t_{gr})_{\max} = \frac{1}{c|\nabla\epsilon|}. \quad (6.30)$$

<sup>46</sup> Обращение  $v_{gr}$  в нуль в этой точке не препятствует выходу излучения с уровня  $n_{em} = 0$ , так как приближение геометрической оптики близ  $n_{em} = 0$  нарушается и указанная формула для  $v_{gr}$  становится неверной. Поэтому в окрестности  $n_{em} = 0$  следовало бы пользоваться более строгой формулой для  $\Delta t_{gr}$ , чем (6.30). Однако вклад в  $(\Delta t_{gr})_{\max}$  от линейного слоя близ  $n_{em} = 0$  толщиной порядка нескольких длин волн мал по сравнению с вкладом от протяженной области, где геометрико-оптическое приближение вполне законно.



При наблюдениях солнечного радиоизлучения этот эффект обычно мало существен: в условиях солнечной короны  $|\nabla\epsilon| \sim 10^{-10}$  см и величина  $(\Delta t_{\text{gr}})_{\text{max}}$  не превышает секунды или долей секунды. Впрочем, групповое запаздывание несколько увеличится, если учесть большую протяженность короны вдали от уровня  $\epsilon \approx 0$  (т. е. отклонения от линейного слоя во внешних областях короны).

В то же время трудно преувеличить значение эффекта группового запаздывания в исследованиях радиоизлучения пульсаров. Позволив оценить расстояния до пульсаров, он сыграл решающую роль в доказательстве галактического происхождения этих объектов [120]. В условиях разреженной межзвездной среды, где  $\omega_L^2 \ll \omega^2$ , групповая скорость радиоволн  $v_{\text{gr}} = c\sqrt{\epsilon} \approx c(1 - \omega_L^2/2\omega^2)$ , и формула (6.29) приобретает вид

$$\Delta t_{\text{gr}} \approx \frac{1}{2c\omega^2} \int \omega_L^2 dl. \quad (6.31)$$

Если пульсар посылает импульс в момент  $t_{\text{rad}} = 0$ , то он будет зарегистрирован на Земле в момент  $t_{\text{obs}} = L/c + \Delta t_{\text{gr}}$ , причем на низких частотах импульс регистрируется позднее, чем на высоких:  $t_{\text{obs}} - L/c \propto \omega^{-2}$ . В результате производная

$$\frac{dt_{\text{obs}}}{d\omega} \approx -\frac{1}{c\omega^3} \int \omega_L^2 dl \quad (6.32)$$

оказывается обратно пропорциональной кубу частоты. Это обстоятельство можно проверить экспериментально, регистрируя моменты прихода импульсов на двух близких частотах (что позволяет определить  $dt_{\text{obs}}/d\omega$ ). Проверка показала [120, 121], что в широком интервале частот  $dt_{\text{obs}}/d\omega \propto \omega^{-3}$ ; это означает, что моменты прихода импульсов пульсаров на Землю действительно определяются групповым запаздыванием сигналов в разреженной плазме с  $\omega_L^2 \ll \omega^2$ .

По величине  $dt_{\text{obs}}/d\omega$  из (6.32) можно найти “меру дисперсии”  $DM = \int N dl$  между источником и точкой приема; для PSR 1919 — первого из обнаруженных пульсаров  $DM \approx 12$  пк см $^{-3}$  [121]. Предположив, что основной вклад в эту величину вносит межзвездная среда со средней электронной концентрацией  $N \sim 0.1$  см $^{-3}$ , получим оценку расстояния до пульсара  $L \sim 1.2 \cdot 10^3$  пк. Ясно, что подобные оценки существенно зависят от предполагаемой величины  $N$  в межзвездной среде. Если же имеются независимые оценки расстояний до пульсаров, то значения меры дисперсии могут быть использованы для заключений о величине средней электронной концентрации в межзвездной среде  $\bar{N}$ .

Например, расстояния до пульсаров, располагающихся в оболочках сверхновых, т.е. для PSR 0532 в Крабовидной туманности и для PSR 0833 в созвездии Парусов, составляет  $1.7 \cdot 10^3$  пк и  $5 \cdot 10^2$  пк, соответственно. С учетом измеренных мер дисперсии для этих объектов ( $57$  пк см $^{-3}$  и  $69$  пк см $^{-3}$  [122]) это дает значения  $\bar{N} \simeq 3.3 \cdot 10^{-2}$  см $^{-3}$  в направлении на PSR 0532 и  $\bar{N} \simeq 1.4 \cdot 10^{-1}$  см $^{-3}$  в направлении на PSR 0833.

Роль группового запаздывания сигналов становится особенно существенной в случае, когда величина  $v_{gr} \ll c$  вдоль всей трассы распространения волн. Такая ситуация, например, реализуется для той ветви дисперсионных кривых в магнитоактивной плазме, которая соответствует вистлерам. Для них величина  $n_2^2$  определяется формулой (5.29), а угол между фазовой и групповой скоростями  $\vartheta$  — формулой (5.40), из которой следует, что  $\text{tg } \vartheta = -(1/2) \text{tg } \alpha$  ( $\alpha$  — угол между  $k$  и  $B_0$ ). С помощью (5.29) и (5.39) нетрудно убедиться, что для вистлеров проекция  $v_{gr}$  на направление  $k$ :

$$v_{grk} = \frac{2c}{\omega_L} \sqrt{\omega \omega_B |\cos \alpha|}. \quad (6.33)$$

Величина  $v_{gr} = v_{grk} |\cos \alpha|^{-1}$ ; с учетом соотношения  $\text{tg } \vartheta = -(1/2) \text{tg } \alpha$  это приводит к следующему выражению для момента прихода вистлера в точку наблюдения  $B$ , если сигнал был испущен в точке  $A$  в момент  $t=0$  [92]:

$$t_{obs} = \int \frac{dl}{v_{gr}} = \frac{1}{c} \int n_2 (\sqrt{4 + \text{tg}^2 \alpha})^{-1} dl, \quad (6.34)$$

( $n_2$  — из (5.29); интеграл берется вдоль луча, соединяющего точки  $A$  и  $B$ ). Для отыскания величины  $t_{obs}$  на более высоких частотах, где не соблюдается условие  $u \cos^2 \alpha \gg 1$ , надо использовать для  $n_j^2$  формулу (5.30). Тогда вместо (6.34) получаем [123]

$$t_{obs} = \frac{1}{c} \int n_1 \left( \sqrt{4 \left( \frac{|\sqrt{u} \cos \alpha| - 1}{\sqrt{u} \cos \alpha} \right)^2 + \text{tg}^2 \alpha} \right)^{-1}. \quad (6.35)$$

Из (6.34) следует, что  $t_{obs} \propto \omega^{-1/2}$ , если форма луча не меняется с частотой. Последнее, строго говоря, справедливо лишь в однородной среде. Однако отмеченная в §5 близость направления  $v_{gr}$  для вистлеров к направлению магнитного поля оправдывает во многих случаях применение формулы (6.34) и в неоднородной среде с изменяющимся в пространстве магнитным полем.

Зависимость  $t_{\text{obs}} \propto \omega^{-1/2}$  характерна для низкочастотных сигналов в диапазоне 1 – 10 кГц, возникающих при атмосферных разрядах на Земле. При приеме на слух эти сигналы воспринимаются как свисты постоянно понижающегося тона, что и дало основание назвать их свистящими атмосфериками (вистлерами). Пропорциональность  $t_{\text{obs}}$  и  $\omega^{-1/2}$  для свистящих атмосфериков объясняется тем, что сигнал проходит через земную магнитосферу по дуге, составляющей небольшие углы с силовыми линиями геомагнитного поля, распространяясь в форме волн, соответствующих дисперсионной ветви с  $n_2^2$  (5.29).

Из более общей формулы (6.35) ясно, что зависимость  $t_{\text{obs}} \propto \omega^{-1/2}$  сохраняется только на низких частотах, для которых  $|\sqrt{u} \cos \alpha| \gg 1$ . Согласно (6.35) при продольном распространении ( $\alpha = 0$ ) зависимость  $t_{\text{obs}}(\omega)$  имеет минимум на частоте

$$\omega_{\min} = \frac{\omega_B}{4}; \quad (6.36)$$

на более высоких частотах  $t_{\text{obs}}$  снова возрастает [124]. Это обстоятельство может быть использовано для определения величины магнитного поля в плазме по времени прихода вистлеров на разных частотах.

## §7. Линейное взаимодействие волн в магнитоактивной плазме

В предыдущем параграфе было выяснено, что при распространении в неоднородной плазме поляризация обыкновенных и необыкновенных волн и их показатели преломления изменяются в соответствии с формулами (5.19), (5.33), (5.34), если рассматривать фигурирующие в них параметры  $v = \omega_L^2/\omega^2$ ,  $u = \omega_B^2/\omega^2$  и угол  $\alpha$  как функции координат. Это справедливо до тех пор, пока сохраняет свою силу приближение геометрической оптики, в рамках которого волна каждого типа распространяется в плазме независимо от волн других типов. В плавнонеоднородных средах, свойства которых мало меняются на расстояниях порядка длины волны, это приближение нарушается только в некоторых ограниченных областях, где характер поля становится более сложным. Произвольное электромагнитное поле при этом может быть составлено лишь из точных решений системы уравнений, описывающей электромагнитные волны во всей плазме, включая области неприменимости геометрической оптики. Вдали от этих областей точные решения асимптотически представляются в виде линейных комби-

наций функции (6.1), т.е. волн геометрико-оптического приближения с определенной связью между их амплитудами. Последнее означает, что если волны в процессе распространения проходят через указанную область, возникает “взаимодействие” между ними, состоящее в том, что отношение амплитуд геометрико-оптических решений принимает фиксированное значение, зависящее от условий распространения волн в области нарушения геометрической оптики. В частности, при падении волны одного типа на область взаимодействия из нее выходят когерентные волны двух типов. Иными словами, в указанной области происходит частичный переход (трансформация) одного типа волн в другой. Подобное взаимодействие называется линейным, поскольку оно не вызвано нарушением принципа суперпозиции для полей в плазме, в отличие от нелинейного взаимодействия, речь о котором пойдет в главе 8.<sup>47</sup>

Исследование взаимодействия волн разных типов показывает, что оно происходит в тех областях плазмы, где дисперсионные кривые  $n_j^2(\omega)$  близко подходят друг к другу. Последнее вполне естественно, так как именно в областях с близкими свойствами волн возможен их “переход” с одной дисперсионной кривой на другую. На примере Рис. 10, 13 ясно, что в постоянном магнитном поле  $B_0$  это имеет место в слоях, где  $v \approx 1$  (при распространении волн под малыми углами  $\alpha$  к  $B_0$ ).

Начало исследования проблемы взаимодействия волн разных типов в магнитоактивной плазме было положено в [125, 126] в связи с изучением так называемого эффекта “утраивания” сигналов в ионосфере (см. об этом [71]). В астрофизических условиях взаимодействие при  $v \approx 1$  имеет существенное значение для решения (по крайней мере в принципе) проблемы выхода излучения из плотной плазмы, например, из солнечной короны. В последнее время трансформация одного типа волн в другой в плотной неоднородной плазме привлекла внимание в связи с проблемой нагрева лабораторной плазмы (при исследованиях управляемого термоядерного синтеза). Одним из возможных способов такого нагрева является ввод электромагнитного (оптического или СВЧ) излучения в плазму с последующей линейной трансформацией его в плазменные волны; поглощение последних и обеспечивает повы-

---

<sup>47</sup> Из сказанного ясно, что возникновение эффекта линейного взаимодействия связано с нарушением в некоторой области плазмы геометрико-оптического приближения сразу для двух волн. Однако это условие, вообще говоря, недостаточное, и в каждом конкретном случае наличие взаимодействия может быть установлено только в результате специального исследования.

шение температуры плазмы.<sup>48</sup>

Взаимодействие и взаимная трансформация волн разных типов может возникать также в неоднородном магнитном поле, если плазма достаточно разреженная ( $v \ll 1$ ) или магнитное поле достаточно слабое ( $u \ll 1$ ). Взаимная трансформация обыкновенных и необыкновенных волн в указанных “слабоанизотропных” условиях может оказать весьма существенное влияние на характер поляризации радиоизлучения, распространяющегося в плазме. С исследования этого явления мы и начнем рассмотрение эффектов линейного взаимодействия в плазме.

### 7.1. Уравнения квазиизотропного приближения и основные параметры линейного взаимодействия

Как уже отмечалось, в плавнонеоднородной плазме, где выполнено условие (6.8), обычно справедливо геометрико-оптическое приближение вида (6.1). Однако, это приближение может быть нарушено в тех областях плазмы, где не выполняется критерий

$$\frac{\omega}{c} |n_1 - n_2| \Lambda \gg 1. \quad (7.1)$$

В этих областях, очевидно, дисперсионные кривые  $n_1(\mathbf{r})$  и  $n_2(\mathbf{r})$  близко подходят одна к другой, и свойства среды существенно меняются на периоде пространственных биений между волнами двух типов  $(c/\omega) \cdot |n_1 - n_2|^{-1}$ .

Исследование проблемы взаимодействия в трехмерно-неоднородной магнитоактивной плазме упрощается, если наряду с критерием плавной неоднородности среды (6.8) (который мы будем считать всегда выполненным) потребовать соблюдения условия слабой анизотропии среды

$$|\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon \delta_{\alpha\beta}| \ll \epsilon \simeq \frac{1}{3} \text{Sp } \epsilon_{\alpha\beta}. \quad (7.2)$$

Здесь  $\epsilon_{\alpha\beta}$  — тензор диэлектрической проницаемости,  $\text{Sp } \epsilon_{\alpha\beta}$  — шпур (след) матрицы  $\epsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера, а через  $\epsilon$  обозначено выражение

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{2(1-v)(u+v-1) + uv \sin^2 \alpha}{u-1+v-uv \cos^2 \alpha}. \quad (7.3)$$

Следуя работе [129] (см. также [130]), исходим из уравнений Максвелла (4.19), (4.20) с материальным соотношением (4.29), содержащим тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega)$  в форме (4.70). Будем отыскивать электрическую

<sup>48</sup> Линейному взаимодействию в лабораторной плазме посвящены обзоры [127, 128] и многие оригинальные работы.

индукцию  $D$  и магнитную индукцию  $B$  в виде разложения по степеням  $1/k_0$ , где  $k_0 = \omega/c$ . Тогда, используя плавную неоднородность  $(k_0 n \Lambda)^{-1}$  и слабую анизотропию  $\epsilon^{-1} \cdot |\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon \delta_{\alpha\beta}|$  как малые параметры, придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{d\zeta} + in_1 f_1 &= -\Psi f_2, \\ \frac{df_2}{d\zeta} + in_2 f_2 &= \Psi f_1 \end{aligned} \quad (7.4)$$

для комплексных “амплитуд”  $f_{1,2}$ . Здесь

$$\Psi = -\frac{1}{2(1+q^2)} \frac{dq}{d\zeta}, \quad q = \frac{\sqrt{u} \sin^2 \alpha}{2(1-v) \cos \alpha}, \quad (7.5)$$

$\zeta = k_0 l$ , а  $l$  — координата вдоль квазиизотропного луча в среде с показателем преломления  $n = (n_1 + n_2)/2 \simeq \epsilon^{1/2}$ . Форма этого луча определяется уравнением эйконала (6.12) с показателем преломления  $n$ . Компоненты электрического поля  $E_x$ ,  $E_y$  в монохроматической волне  $\propto e^{+i\omega t}$  связаны с  $f_{1,2}$  соотношениями

$$\begin{aligned} E_x &= \Phi_0 \left\{ \frac{f_1}{(1+K_1^2)^{1/2}} + \frac{f_2}{(1+K_2^2)^{1/2}} \right\}, \\ E_y &= \Phi_0 \left\{ \frac{iK_1 f_1}{(1+K_1^2)^{1/2}} + \frac{iK_2 f_2}{(1+K_2^2)^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Здесь  $K_{1,2}$  — коэффициенты поляризации необыкновенной и обыкновенной мод; в локальной системе координат Рис. 6, б с вектором  $k$  вдоль квазиизотропного луча<sup>49</sup>

$$K_{1,2} = -i \frac{E_y^{(1),(2)}}{E_x^{(1),(2)}} = q \mp \sqrt{1+q^2}. \quad (7.7)$$

Верхний знак относится к необыкновенной моде, нижний — к обыкновенной. Функция  $\Phi_0(l)$  подчиняется уравнению

$$\operatorname{div}(n\Phi_0^2 l) = 0 \quad (7.8)$$

<sup>49</sup>Применение этой координатной системы с магнитным полем  $B_0$  в фиксированной плоскости  $zy$ , упрощая запись и анализ уравнений, не дает возможности учесть эффекты, связанные с кручением (широм) магнитного поля, т.е. с изменением ориентации составляющей вектора  $B_0$  в плоскости  $zy$ . О линейном взаимодействии в плазме с широм магнитного поля см. [131–133].

( $l$  — единичный вектор вдоль луча). Поскольку, как следует из (7.4),

$$|f_1|^2 + |f_2|^2 = \text{const}, \quad (7.9)$$

уравнение (7.8) отражает закон сохранения энергии в монохроматической волне:  $\text{div} S = 0$ , где  $S$  — вектор Пойнтинга. Из сказанного ясно, что соотношения (7.6) представляют собой замену переменных при переходе от уравнений Максвелла к приближенной системе уравнений (7.4).

Условие слабой анизотропии (7.2), при котором справедлива система (7.4), выполняется либо в слабых магнитных полях, где

$$\sqrt{u} \ll 1 - v, \quad v < 1, \quad (7.10)$$

либо в разреженной плазме:

$$v \ll 1, \quad |1 - \sqrt{u}| \gg v. \quad (7.11)$$

В обоих случаях при  $u \ll 1$  приближенно  $\epsilon \simeq 1 - v$ , а в случае (7.11) при  $u \gg 1$  величина  $\epsilon \simeq 1$ . Условие (7.10) соответствует квазиизотропной плазме (неравенство  $v < 1$  обеспечивает прозрачность среды для электромагнитных волн). Критерий (7.11) указывает на близость холодной плазмы к вакууму (пустоте); неравенство  $|1 - \sqrt{u}| \gg v$  исключает при этом область гирорезонанса  $u \simeq 1$  ( $\omega \simeq \omega_B$ ), где сильная анизотропия сохраняется даже при  $v \ll 1$  (без учета теплового движения; см. критерий (5.36)).

В случае  $u \ll 1$ ,  $v \ll 1$  система (7.4) переходит в уравнения, полученные в [134]. В одномерном случае (т.е. для распространения волн вдоль градиента  $n_j^2$  в плавнонеоднородной плоскостной среде) эта система была получена в [135, 136] при более слабых ограничениях, а именно — в пренебрежении отраженными волнами и с учетом относительной близости показателей преломления  $|n_1 - n_2| \ll n_1 + n_2$ . Последнее неравенство эквивалентно двум следующим условиям:

$$uv \sin^2 \alpha \ll |1 - v| \cdot |1 - v - u|, \quad v\sqrt{u} |\cos \alpha| \ll |1 - v - u|, \quad (7.12)$$

которые могут реализоваться даже в анизотропной плазме, где критерий (7.2) будет нарушен.

В области применимости геометрической оптики функции  $f_1$  и  $f_2$  характеризуют амплитуды необыкновенной и обыкновенной волн соответственно, тогда как в области взаимодействия корректное разделение поля на две моды невозможно из-за быстрого изменения  $f_1$  и  $f_2$ .

Решая систему уравнений (7.4), можно найти значения амплитуд  $f_{1,2}^{\text{out}}$  на выходе из области линейного взаимодействия по заданным значениям  $f_{1,2}^{\text{inc}}$  на входе. Это позволяет рассчитать так называемый коэффициент трансформации  $Q$ , определяющий относительную интенсивность одной моды на выходе, если на слой падает волна другого типа. Из данного определения и равенства (7.9) следует, что

$$Q = \frac{|f_1^{\text{out}}|^2}{|f_1|^2 + |f_2|^2} = \frac{|f_1^{\text{out}}|^2}{|f_2^{\text{inc}}|^2} \quad (7.13)$$

если  $f_1^{\text{inc}} = 0$  и

$$Q = \frac{|f_2^{\text{out}}|^2}{|f_1|^2 + |f_2|^2} = \frac{|f_2^{\text{out}}|^2}{|f_1^{\text{inc}}|^2} \quad (7.14)$$

при  $f_2^{\text{inc}} = 0$ . Ясно, что  $0 \leq Q \leq 1$  и что коэффициент “трансформации” в ту же волну (отношение  $|f_1^{\text{out}}|^2 / |f_1^{\text{inc}}|^2$  при  $f_2^{\text{inc}} = 0$ ) составит  $1 - Q$ . Из симметрии системы (7.4) следует, что оба значения (7.13) и (7.14) совпадают между собой.

Заметим, что линейное взаимодействие отсутствует (и коэффициент трансформации  $Q = 0$ ) в случае продольного ( $\alpha = 0$ ) и поперечного ( $\alpha = \pi/2$ ) распространения. В обоих случаях функция (7.5) обращается в нуль, и система (7.4) распадается на два независимых уравнения, каждое из которых характеризует независимое распространение обыкновенной и необыкновенной волн. Кроме того, из вида уравнений (7.4) следует, что в рамках их применимости линейное взаимодействие имеет место только между попутными волнами, тогда как волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, остаются независимыми.

Далее, однако, анализ линейного взаимодействия удобнее вести, используя следующее из системы (7.4) уравнение Риккати для отношения комплексных “амплитуд”  $P = -if_1/f_2$ :

$$\frac{dP}{d\eta} = i(P^2 - 1) - 2iG(\eta)P. \quad (7.15)$$

Здесь  $\eta = -\int \Psi d\zeta$  — новая независимая переменная,

$$G(\eta) = \frac{n_2 - n_1}{2\Psi} = \frac{n_1 - n_2}{2\eta'}, \quad (7.16)$$

а штрих означает дифференцирование по безразмерной координате  $\zeta = k_0 l$ . Согласно (7.5) и (7.7),

$$\eta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{arctg } q, \quad K_2 = -K_1^{-1} = \text{tg } \eta. \quad (7.17)$$



По известному из уравнения (7.15) отношению  $P(\eta)$  можно определить коэффициент поляризации излучения в любой точке вдоль луча:

$$K = -iE_x/E_y = K_1(K_2 - iP)(K_1 - iP)^{-1}. \quad (7.18)$$

Заметим, что наряду с (7.15) можно использовать и уравнение

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + I(\eta)f = 0, \quad (7.19)$$

где

$$I(\eta) = 1 - i\frac{dG(\eta)}{d\eta} + G^2(\eta).$$

Его можно получить из системы (7.4) после исключения функции  $f_1$  и перехода к новой неизвестной

$$f = f_2 \exp\left(i \int n d\zeta\right)$$

и новой независимой переменной  $\eta$  (7.17).

Из этого уравнения следует, что весь процесс изменения поляризации излучения вдоль луча (включая область взаимодействия) определяется поведением характерной функции  $G(\eta)$  на интервале  $\Delta\eta$  изменения переменной  $\eta(l)$  в рассматриваемом слое плазмы. Поэтому его решение с данной функцией  $G(\eta)$  будет описывать не только процесс линейного взаимодействия в конкретном слое с фиксированными функциями  $n_{1,2}(\eta)$  и  $q(\eta)$ ; это решение останется справедливым и во всех других слоях, обладающих той же характерной функцией  $G(\eta)$ , независимо от конкретного вида  $n_{1,2}(\eta)$  и  $q(\eta)$ . Сказанное облегчает применение метода эталонных задач для исследования эффектов линейного взаимодействия, т.е. метода отыскания точных решений для достаточно широкого класса неоднородных слоев. В самом деле, если сначала задать конкретный профиль неоднородности слоя, то по большей части это приведет к сложному дифференциальному уравнению с функцией  $G(\eta)$ , решение которого неизвестно.<sup>50</sup> Напротив, если начать решение задачи с выбора эталонной функции  $G(\eta)$  так, чтобы уравнение (7.19) свелось к одному из изученных уравнений, решаемых в известных функциях, то задача существенно упрощается. Набор таких уравнений достаточно велик. Сделанный выбор налагает, согласно (7.16), одну дифференциальную связь на функции  $n_{1,2}(\zeta)$  и  $q(\zeta)$ ,

<sup>50</sup> Некоторые исключения из этого правила обсуждаются ниже.

определяющие неоднородные профили параметров среды. Интегрируя эту связь, получаем целый класс функций, соответствующий различным конкретным реализациям неоднородного слоя. Таким образом, начиная решение задачи “с середины”, т.е. с выбора эталонной функции  $G(\eta)$ , мы сводим задачу к двум, вообще говоря, более простым: известному решению уравнения (7.19) и определению набора неоднородных слоев, трансформация волн в которых описывается выбранной функцией  $G(\eta)$ , с помощью (7.16). Эффективность такого метода продемонстрирована в обзоре [137] и цитированных там работах.

Обращаясь к качественному анализу эффекта линейного взаимодействия на основе уравнения (7.15), отметим прежде всего, что независимая переменная  $\eta$  (7.17) почти не меняется в области значений  $q^2 \ll 1$  (область квазипродольного распространения с циркулярной поляризацией мод), оставаясь близкой к  $\pi/4$ . При  $q^2 \gg 1$  (область квазипоперечного распространения с линейной поляризацией мод; см. §5) значения  $\eta$  близки к 0 или  $\pi/2$ . На интервале  $-\infty < q < \infty$  изменение  $\eta$  происходит в основном там, где  $q \sim 1$  и коэффициенты  $K_{1,2}$  (7.17) соответствуют эллиптической поляризации необыкновенной и обыкновенной волн.

В предельном случае больших значений функции  $G(\eta)$  вдоль луча в плазме:  $|G(\eta)| \gg 1$  (т.е. когда  $n_1 \neq n_2$  и переменная  $\eta$  медленно меняется вдоль луча; см. (7.16)), в уравнении Риккати можно пренебречь членом  $i(P^2 - 1)$ . Тогда решение уравнения примет вид:

$$\begin{aligned} P(\eta) &= P(\eta_0) \exp \left[ -2i \int_{\eta_0}^{\eta} G(\eta) d\eta \right] \\ &= P(\zeta_0) \exp \left[ -i \int_{\zeta_0}^{\zeta} (n_1 - n_2) d\zeta \right], \end{aligned} \quad (7.20)$$

где  $\zeta_0$  — координата в начале луча. Если в этой точке  $f_1(\zeta_0) = 0$  и  $f_2(\zeta_0) \neq 0$  (т.е.  $P(\zeta_0) = 0$ ), то на всем протяжении луча  $P(\zeta) = 0$  и  $f_1(\zeta) = 0$ . Это означает, что если на входе в плазменный слой задана волна одного типа (обыкновенная в нашем случае), то волна другого типа не появится при распространении вдоль луча. Следовательно, в рассматриваемом случае  $|G(\eta)| \gg 1$  коэффициент трансформации  $Q = 0$ , что соответствует приближению геометрической оптики.

В другом предельном случае  $|G(\eta)| \ll 1$ , когда  $n_1 = n_2$ , но  $\eta$  меняется вдоль луча, можно пренебречь последним членом в правой части

уравнения (7.15). Тогда решение принимает вид:

$$P(\eta) = i \operatorname{tg} \{ \eta - \eta_0 + \operatorname{arctg} [iP(\eta_0)] \}. \quad (7.21)$$

В этом случае эллипс поляризации излучения не меняется вдоль луча:  $K = \operatorname{const}$ , т.е. распространение происходит как в изотропной плазме или в пустоте (“изотропное приближение”). Поскольку при этом  $K_{1,2}$  меняются вдоль луча за счет изменения  $v$ ,  $u$ , и  $\alpha$ , относительное содержание волн обоих типов также будет изменяться. Если в начале слоя, в точке  $\eta = \eta_0$ , была волна одного типа (например,  $K = K_1$ ), то вдоль слоя за счет изменения  $K_{1,2}$  постоянный эллипс поляризации будет содержать волны обоих типов. Сказанное означает, что коэффициент трансформации  $Q \neq 0$ . Его величина

$$Q = \sin^2 \Delta\eta, \quad (7.22)$$

где  $\Delta\eta = \eta - \eta_0$ , может быть получена простым пересчетом между двумя представлениями постоянного эллипса поляризации вдоль луча: в виде эллипса поляризации волны одного типа в начале слоя и в виде двух ортогональных эллипсов поляризации на выходе из слоя плазмы.

При значительном изменении  $\eta$  в слое:  $\Delta\eta \sim 1$ , т.е. при существенном изменении поляризации мод  $K_{1,2}$ , вариант  $|G(\eta)| \ll 1$  соответствует сильному эффекту взаимодействия волн, а формула (7.22) в этом случае описывает максимальный коэффициент трансформации  $Q_{\max}$ . Если вдоль луча происходит один переход от квазиперечного распространения  $q^2 \gg 1$  к квазипродольному  $q^2 \ll 1$  или наоборот, то  $\Delta\eta = \pm\pi/4$  и  $Q_{\max} = 1/2$ . Величина  $Q_{\max} = 1$ , если  $\Delta\eta = \pm\pi/2$ , т.е. в случае двойной смены характера распространения волн (например, переход от квазипродольного к квазиперечному распространению и затем снова к квазипродольному).

Заметим, что малое изменение  $\eta$  вдоль луча (даже на интервале, где  $|G(\eta)| \ll 1$ ) приводит к появлению лишь слабого взаимодействия  $Q \ll 1$  (см. (7.22)).

Резюмируя изложенное, можно сказать, что линейное взаимодействие практически отсутствует, если  $|G(\eta)| \gg 1$  вдоль луча. Взаимодействие остается слабым ( $Q \ll 1$ ) и в том случае, если при  $|G(\eta)| \ll 1$  интервал изменения  $\eta$  мал:  $|\Delta\eta| \ll 1$ . Эффективное взаимодействие с коэффициентом трансформации  $Q \sim 1$  может реализоваться в слоях, где  $|G(\eta)|$  опускается до значений порядка единицы на интервале  $|\Delta\eta| \sim 1$ . Наконец, взаимодействие становится сильным, когда  $|G(\eta)| \ll 1$  на интервале  $|\Delta\eta| \sim 1$ . При  $\Delta\eta = \pm\pi/4$  и  $\Delta\eta = \pm\pi/2$  коэф-

коэффициент трансформации  $Q$  близок к своим максимальным значениям  $1/2$  и  $1$ , соответственно.

Отсюда ясно, что в случае, когда изменение  $G(\eta)$  на интервале  $|\Delta\eta| \sim 1$  меньше величины самой функции или сравнимо с ней, эффективность взаимодействия вдоль луча может быть охарактеризована величиной параметра  $G = |G(\eta^*)|$ , где  $\eta^*$  — фиксированное значение переменной  $\eta$  из интервала  $\Delta\eta \sim 1$ . Этот интервал соответствует области  $q^2 \sim 1$ , поскольку при  $q^2 \gg 1$  или  $q^2 \ll 1$  величина  $\eta$  меняется мало. Поэтому параметр взаимодействия можно определить, полагая  $\eta^* = 3\pi/8$  или  $\eta^* = \pi/2$  (в зависимости от знака  $q$ ); эти значения отвечают величине  $q^2 = 1$ :

$$G = |G(\eta)|_{q^2=1} = \left| \frac{n_2 - n_1}{2\Psi} \right|_{q^2=1}. \quad (7.23)$$

Данное определение означает следующее. Если в плазме имеется область существенного изменения поляризации  $K_{1,2}$  вдоль луча:  $|\Delta\eta| \sim 1$ , причем в этой области относительное изменение характерной функции  $G(\eta)$  меньше или сравнимо с единицей, то величина параметра взаимодействия (7.23) позволяет судить об эффективности линейной трансформации волн:

$$\begin{aligned} Q &\ll 1 && \text{if } G \gg 1 \\ Q &\sim 1 && \text{if } G \sim 1 \\ Q &\simeq Q_{\max} && \text{if } G \ll 1. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Смысл введенного параметра взаимодействия  $G$  становится ясен, если ввести характерный размер области взаимодействия, определяемый масштабом изменения величины  $q$  вдоль луча в области  $q^2 \sim 1$ :

$$\Lambda_q = \left| \frac{1}{q} \frac{dq}{dl} \right|_{q^2=1}^{-1} \quad (7.25)$$

и принять во внимание, что, согласно (7.16),

$$2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} G(\eta) d\eta = \frac{\omega}{c} \int_{l_2}^{l_1} (n_1 - n_2) dl. \quad (7.26)$$

Если изменение  $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$  в области взаимодействия  $q^2 \sim 1$  достаточно велико (сравнимо с единицей), что имеет место, если размер

области взаимодействия  $l_2 - l_1$  порядка  $\Lambda_q$ , то левая часть (7.26) по модулю примерно равна  $2G$ , а правая  $(\omega/c)(n_1 - n_2)\Lambda_q$ , то есть

$$2G \simeq \frac{\omega}{c} |n_1 - n_2| \Lambda_q. \quad (7.27)$$

Поскольку равенство

$$\frac{\omega}{2c} |n_1 - n_2| l \sim 1$$

определяет пространственный период биений между обыкновенной и необыкновенной волнами, из (7.27) следует, что величина параметра  $G$  равна числу биений в области взаимодействия. Напомним, что на размерах области взаимодействия  $\Lambda_q$  происходит существенное изменение поляризации необыкновенных и обыкновенных волн. Таким образом, слабое взаимодействие происходит в случае  $G \gg 1$ , когда изменение поляризации этих волн мало на периоде пространственных биений. Напротив, линейное взаимодействие становится сильным ( $G \ll 1$ ), если изменение поляризации этих волн происходит на расстоянии много меньшем периода пространственных биений между ними. В последнем случае, как мы видели, в области взаимодействия  $K = \text{const}$ , то есть поляризация полного излучения “не успевает” следить за изменением поляризации  $K_1$  и  $K_2$  геометро-оптических волн.

## 7.2. Линейное взаимодействие в неоднородном магнитном поле

Эффекты линейного взаимодействия в неоднородном магнитном поле играют важную роль в формировании поляризационных характеристик внеземного радиоизлучения. В особенности это относится к радиоизлучению Солнца и, возможно, — к радиоизлучению Юпитера. Поэтому рассмотрим эти условия более подробно, полагая, что во своей области взаимодействия электронная концентрация постоянна ( $v = \text{const}$ ), и вся неоднородность плазмы связана с изменением магнитного поля по величине и направлению. В магнитоактивной плазме параметр взаимодействия определяется выражением

$$\begin{aligned} G^2 &= \left[ 2(n_1 - n_2) \frac{\omega}{c} \Lambda_q \right]_{q^2=1}^2 \\ &= \frac{8uv^2(1-v)\cos^2\alpha}{(1-v-u)(1-v-u+uv\cos^2\alpha)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{\sqrt{u}\sin^2\alpha}{2(1-v)\cos\alpha} \right] \right\}_{q^2=1}^{-2}, \quad (7.28) \end{aligned}$$

где масштаб  $\Lambda_q$  определяется из (7.25). Если  $v \ll 1$  и  $u \sim |1 - u| \sim \alpha \sim 1$ , то, согласно (7.28),

$$G \sim \frac{\omega}{c} v \Lambda_q. \quad (7.29)$$

В областях, где эта величина  $G \gg 1$  (что характерно для астрофизической плазмы в радиодиапазоне), распространение волн происходит в рамках геометрико-оптического приближения, без существенной линейной трансформации. Исследование общего выражения (7.28) показывает, однако, что параметр  $G$  существенно уменьшается при выполнении одного из двух условий:

$$\sqrt{u} \ll 1 - v, \quad \cos^2 \alpha \ll 1, \quad v < 1 \quad (7.30)$$

или

$$u \gg 1, \quad \sin^2 \alpha \ll 1, \quad v \ll \sqrt{u}. \quad (7.31)$$

Неравенство  $v < 1$  в первом из них обеспечивает прозрачность плазмы:  $n^2 > 0$ , а неравенство  $v \ll \sqrt{u}$  — близость дисперсионных кривых  $n_{1,2}(l)$ .

Если масштаб  $\Lambda_q$  определяется главным образом изменением величины магнитного поля вдоль луча,<sup>51</sup> то в (7.28) можно положить  $u = u(\zeta)$ ,  $v = \text{const}$ ,  $\alpha = \text{const}$ . Тогда при условии (7.30) параметр взаимодействия примет вид:

$$G_0 = 4\sqrt{2} \frac{\omega}{c} v (1 - v)^{1/2} \cos^2 \alpha \left| \frac{\sqrt{u}}{d\sqrt{u}/dl} \right|_{q^2=1}, \quad (7.32)$$

а в области (7.31) этот параметр определяется следующим выражением:

$$G_\infty = \sqrt{2} \frac{\omega}{c} \frac{v}{|1 - v|} \sin^2 \alpha \left| \frac{\sqrt{u}}{d\sqrt{u}/dl} \right|_{q^2=1}. \quad (7.33)$$

В разреженной плазме ( $v \ll 1$ ) параметр  $G_0$  описывает, в частности, трансформацию волн в нейтральном токовом слое (см. [138] и следующий раздел). Взаимодействие, описываемое параметром  $G_\infty$ , может быть реализовано при определенных условиях в “переходном” слое (то есть, в слое, где происходит переход от квазипродольного к квазиперечному распространению или наоборот [130] (см. ниже).

<sup>51</sup> Соответствующие условия для этого легко найти, обратившись к приведенному выше определению (7.25), которое связывает  $\Lambda_q$  с производной от  $q$  вдоль луча.

Пусть теперь основной вклад в масштаб  $\Lambda_q$  вносит изменение магнитного поля по направлению. Полагая  $\alpha = \alpha(\zeta)$ ,  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  в (7.28), получим, что при условии (7.30) параметр взаимодействия приобретает следующий вид:

$$G_{\perp} = \sqrt{2} \frac{\omega}{c} \frac{uv}{(1-v)^{3/2}} \left| \frac{\cos \alpha}{d \cos \alpha / dl} \right|_{q^2=1}. \quad (7.34)$$

Этот параметр характеризует трансформацию в поперечном магнитном поле [3, 131, 134, 139, 140]. Далее, в области (7.31) параметр [12]

$$G_{\parallel} = \sqrt{2} \frac{\omega}{c} \frac{v}{\sqrt{u}} \left| \frac{\sin \alpha}{d \sin \alpha / dl} \right|_{q^2=1}. \quad (7.35)$$

Как и  $G_{\infty}$ , этот параметр имеет отношение к переходным слоям.

В достаточно разреженной плазме ( $v \ll 1$ ) все четыре параметра взаимодействия в неоднородных магнитных полях содержат малые факторы, которых нет в общем случае (7.29). Благодаря этому сильный эффект взаимодействия ( $G \lesssim 1$ ) наступает при больших масштабах  $\Lambda_q$  или в менее разреженной плазме, чем в случае, когда справедлива формула (7.29).

Следует подчеркнуть, что в приведенных выражениях для параметров взаимодействия величины  $\alpha$ ,  $u$  и  $v$  связаны между собой условием  $q^2 = 1$ , где  $q$  определяется второй формулой (7.5). Это надо учитывать при использовании формул (7.32)–(7.35) в конкретных задачах.

Принимая во внимание сказанное, представим выражения для параметров взаимодействия в форме, удобной для конкретных приложений [3, 130, 138–141]:

$$G_0 = 8\sqrt{2} \frac{\omega}{c} \frac{v |\cos^3 \alpha|}{|d\sqrt{u}/dl|} (1-v)^{3/2}, \quad (7.36)$$

$$G_{\infty} = 2\sqrt{2} \frac{\omega}{c} \frac{v}{|d\sqrt{u}/dl|}, \quad (7.37)$$

$$G_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{c} \frac{vu^{3/2}}{(1-v)^{5/2} |d\alpha/dl|}, \quad (7.38)$$

$$G_{\parallel} = 2 \frac{\omega}{c} \frac{vu^{-3/4} (1-v)^{1/2}}{|d\alpha/dl|}. \quad (7.39)$$

В некоторых случаях здесь приведены уточненные значения численных коэффициентов по сравнению с формулами, полученными в указанных работах.

### 7.3. Переходные слои и “предельная поляризация” излучения

Постановка вопроса о предельной поляризации волн, выходящих из магнитоактивной плазмы, связана со следующим обстоятельством. Физически ясно, что при достаточно малом  $\nu$  или  $u$ , т.е. в условиях слабой анизотропии, влияние магнитного поля на характер поляризации волн (форму поляризационного эллипса) должно исчезать. Если  $\nu \rightarrow 0$ , волны должны распространяться так же, как в вакууме, при  $u \rightarrow 0$  — так же, как в изотропной плазме; поэтому изменение коэффициента поляризации  $K$  (7.18) в области достаточно малых  $\nu$  (или  $u$ ) прекращается, и излучение выходит в вакуум (или в изотропную плазму) примерно с таким же эллипсом поляризации, какой оно имело до входа в область слабой анизотропии. Наоборот, согласно приближению геометрической оптики, эллипс поляризации и здесь должен менять свою форму в соответствии с изменением параметров  $\nu$ ,  $u$  и  $\alpha$  (см. выражения для  $K_{1,2}$ (7.7)). Это означает, что при малых  $u$  или  $\nu$  геометрико-оптические решения для обыкновенных и необыкновенных волн становятся неприменимыми и вопрос о характера предельной поляризации при выходе волны из области с большими значениями параметров  $\nu$ ,  $u$  в области с малыми значениями  $\nu$  или  $u$  нуждается в более последовательном рассмотрении на основе уравнений, описывающих распространение электромагнитных волн в неоднородной магнитоактивной плазме.

Учитывая все сказанное, можно представить себе следующую картину распространения волн в плазме, если оно сопровождается переходом из области применимости геометрико-оптического приближения  $|G(\eta)| \gg 1$  в область  $|G(\eta)| \ll 1$ , где выполнено “изотропное” приближение. При распространении волны одного типа, например, необыкновенной, в сторону выхода из магнитного поля в изотропную плазму ( $u \rightarrow 0$ ) или из плазмы в вакуум ( $\nu \rightarrow 0$ ) изменение эллипса поляризации происходит сначала в полном соответствии с требованиями геометрической оптики. Затем, после перехода через характерный слой  $|G(\eta)| \sim 1$ , изменение характера поляризации прекращается и волна распространяется дальше, сохраняя поляризацию, приобретенную в этом слое. Поэтому при выходе в область  $u \rightarrow 0$  или  $\nu \rightarrow 0$  предельная поляризация излучения, вообще говоря, будет отличаться от значений  $K$  (7.7), определяемых приближением геометрической оптики. В этом и заключается эффект предельной поляризации. В указанной области эллипс поляризации можно рассматривать как сумму эллипсов, характерных для обыкновенной и необыкновенной волн. Следо-



вательно, при подходе волны одного типа к слою  $|G(\eta)| \sim 1$  в изотропную плазму или в вакуум выходят когерентные волны двух типов; последнее можно рассматривать как следствие трансформации волн из-за линейного взаимодействия в области неприменимости геометрической оптики.

При каких условиях взаимодействие волн приводит к существенному отличию поляризации от значений, характерных для геометрико-оптического приближения? Прежде всего, ясно, что если при переходе в изотропную среду или пустоту поляризация волн обоих типов  $K_{1,2}$  меняется слабо:  $\Delta\eta \ll 1$  (см. (7.17)), то предельная поляризация соответствует приближению геометрической оптики и, следовательно, эффект предельной поляризации заведомо отсутствует. Если же переход из анизотропной плазмы в изотропную или в пустоту сопровождается существенным изменением поляризации обыкновенных и необыкновенных волн  $K_{1,2}$  (т.е.  $|\Delta\eta| \sim 1$ , что возможно, в частности, при переходе от квазипродольного ( $q^2 \ll 1$ ) распространения к квазипоперечному ( $q^2 \gg 1$ ) или наоборот), то взаимодействие волн может оказаться существенным. Это имеет место в условиях, когда переход от квазипродольного к квазипоперечному распространению (при котором в указанном приближении происходит радикальное изменение поляризационных свойств волны) совершается в области, где это приближение нарушено. Иными словами, сильный эффект предельной поляризации возникает, если область "изотропного" распространения  $|G(\eta)| \ll 1$  включает в себя слой  $q^2 \sim 1$ . Наоборот, эффект предельной поляризации становится весьма слабым, если в области  $q^2 \sim 1$  сохраняет силу приближение геометрической оптики. Для этого необходимо, чтобы там реализовалось условие  $|G(\eta)| \gg 1$ . И, наконец, при  $|G(\eta)| \sim 1$  в области  $q^2 \sim 1$  реализуется такое критическое сочетание параметров, которое разделяет случаи сильного и слабого эффектов предельной поляризации. При выходе волн из плазмы в вакуум в условиях, когда магнитное поле  $B_0$  сохраняется неизменным по величине и направлению, надеяться на появление значительного эффекта предельной поляризации за счет изменения  $v$  (т.е. электронной концентрации  $N$ ) не приходится, если в плазме  $v \ll 1$ : в области  $v \ll 1$  величина  $q^2$  заметно не меняется ( $|\Delta\eta| \ll 1$ ) вместе с эллипсом поляризации волны одного типа в приближении геометрической оптики  $K_{1,2}$ . Наоборот, в области  $v \ll 1$  может наступить сильный эффект предельной поляризации, если сильное изменение  $q^2$  (при котором  $|\Delta\eta| \sim 1$ ) при переходе в область  $|G(\eta)| \ll 1$  обеспечивается за счет неоднородного характера магнитного поля. Сильный эффект мо-

жет реализоваться и “внутри” плазмы — в переходном слое от  $q^2 \gg 1$  до  $q^2 \ll 1$ .

Рассмотренная качественная картина эффекта предельной поляризации подтверждается расчетом эталонных задач о линейном взаимодействии в переходных слоях (то есть в слоях плазмы, где происходит плавный монотонный переход от одного значения параметра  $q = q_{\text{inc}}$  до другого  $q = q_{\text{out}}$ ). В качестве примера рассмотрим слой с функцией (7.16) в виде

$$G(\eta) = -\frac{p}{2\sqrt{2}} \frac{(q_{\text{inc}} - q_{\text{out}})[1 + \text{ctg}^2 2\eta]^{3/2}}{[q_{\text{inc}} + \text{ctg} 2\eta][q_{\text{out}} + \text{ctg} 2\eta]}, \quad (7.40)$$

где  $q_{\text{inc}} > q_{\text{out}} > 0$  [130]. Роль параметра взаимодействия  $G$  при переходе от квазипоперечного ( $q_{\text{inc}} \gg 1$ ) к квазипродольному ( $q_{\text{out}} \ll 1$ ) распространению здесь играет величина  $p = G(3\pi/8) = |G(\eta)|_{q^2=1}$ . На входе и выходе из слоя, где

$$\eta_{\text{inc}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{arctg} q_{\text{inc}}, \quad \eta_{\text{out}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{arctg} q_{\text{out}},$$

функция  $G(\eta) \gg 1$ , а в середине слоя достигает минимального значения  $G_{\text{min}} > 0$ . В соответствии с изложенной выше качественной картиной линейного взаимодействия такая форма  $G(\eta)$  обеспечивает законность геометро-оптического приближения на краях слоя. Если при этом  $G_{\text{min}} \gg 1$ , то эффект линейного взаимодействия отсутствует: он становится существенным, если  $G_{\text{min}} \sim 1$  и сильным, когда  $G_{\text{min}} \ll 1$ . Согласно (7.16), величина  $q$  в слое  $G(\eta)$  меняется по закону

$$q(\sigma) = \frac{q_{\text{inc}} - q_{\text{out}}}{1 + \exp(2^{5/2}\sigma/p)}, \quad \sigma = \int \frac{n_1 - n_2}{2(q^2 + 1)^{1/2}} d\zeta, \quad (7.41)$$

где  $\zeta = (\omega/c)l$ . Если в этом слое выбрать зависимость  $n_1 - n_2$  в виде  $n_1 - n_2 \propto (q^2 + 1)^{1/2}$ , то  $\sigma$  будет меняться линейно вдоль луча  $l$ ; в этом случае зависимость  $q(l)$  будет представлять собой так называемый слой Эпштейна (см., например, [142]). Заметим, что в конкретных задачах, где параметры  $\nu$ ,  $u$ ,  $\alpha$  удовлетворяют предельным случаям, обсуждавшимся при получении (7.32)-(7.35), параметр  $p$  будет совпадать соответственно с  $G_0$ ,  $G_\infty$ ,  $G_\perp$ , и  $G_\parallel$ .

Решение уравнения (7.19) с функцией  $G(\eta)$  вида (7.40) сводится к гипергеометрическим функциям [142]. Коэффициент трансформации для слоя, содержащего переход от  $q_{\text{inc}} \gg 1$  к  $q_{\text{out}} \ll 1$ , равен

$$Q = [1 + \exp(2^{-3/2}\pi p)]^{-1}. \quad (7.42)$$

Как видно из этой формулы, в этом случае  $Q$  определяется только параметром взаимодействия  $G \equiv p$ . В полном соответствии с результатами качественного анализа,  $Q \ll 1$  при  $p \gg 1$ ,  $Q \sim 1$  при  $p \sim 1$ , и  $Q = 1/2$  при  $p \ll 1$ .

Следует отметить, что последний результат имеет ясный физический смысл. Действительно, при  $G \ll 1$  поляризация излучения не меняется при распространении в плазменном слое (см. обсуждение “изотропного приближения” на базе формулы (7.21)). Если на входе в слой (в начале луча, где  $q_{\text{inc}} \gg 1$ ) имеется линейно-поляризованная волна одного типа (скажем, обыкновенная), то на выходе, где  $q_{\text{out}} \ll 1$ , такая поляризация соответствует суперпозиции двух поляризованных по кругу волн равной интенсивности — обыкновенной и необыкновенной. В соответствии с определением (7.13), это приводит к значению  $Q = 1/2$ .

#### 7.4. Прохождение волн через области с поперечным и нулевым магнитным полем

При распространении электромагнитных волн в неоднородных магнитных полях вполне возможна ситуация, когда волна последовательно проходит через два слоя  $q^2 \sim 1$ . Примером в этом отношении служит прохождение через слой с поперечным магнитным полем (Рис. 22) и через нейтральный токовый слой с нулевым магнитным полем (Рис. 23). В обоих случаях распространение волны сопровождается изменением знака проекции поля  $B_0$  на направление распространения (ось  $z$  на Рис. 22, 23; точками на этой оси отмечены значения  $q^2 = 1$  по обе стороны от поперечного или нулевого магнитного поля). В соответствии с изложенным выше, характер поляризации волн, прошедших через область плазмы с указанной структурой магнитного поля, зависит от величины параметров  $G_{\perp}$  или  $G_0$  в слоях  $q^2 \sim 1$ .

При распространении через область квазипоперечного магнитного поля поляризация волн будет меняться следующим образом [131]. Поскольку в согласии с (7.38) величина  $G_{\perp} \propto \omega^{-4}$  (в диапазоне  $\omega^2 \gg \omega_L^2$ ), на достаточно низких частотах по сравнению с критическим значением

$$\omega_t = \frac{1}{m_e c} \left( \frac{2\sqrt{2}\pi e^5 N B^3}{|d\alpha/dz|} \right)^{1/4}, \quad (7.43)$$

параметр  $G_{\perp}^2 \gg 1$  в слоях  $q^2 \sim 1$  (частота  $\omega_t$  здесь получена из условия  $G_{\perp} = 1$ ; более точное значение см. в (7.63)). Последнее означает, что в указанных слоях, переходных от квазипродольного к квазипопе-

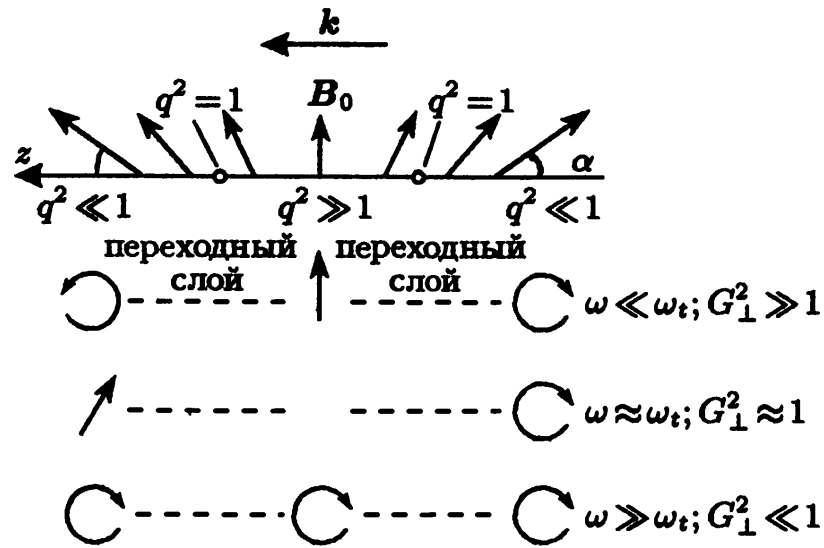


Рис. 22. Распространение волн через область квазипоперечного магнитного поля и изменение их поляризации

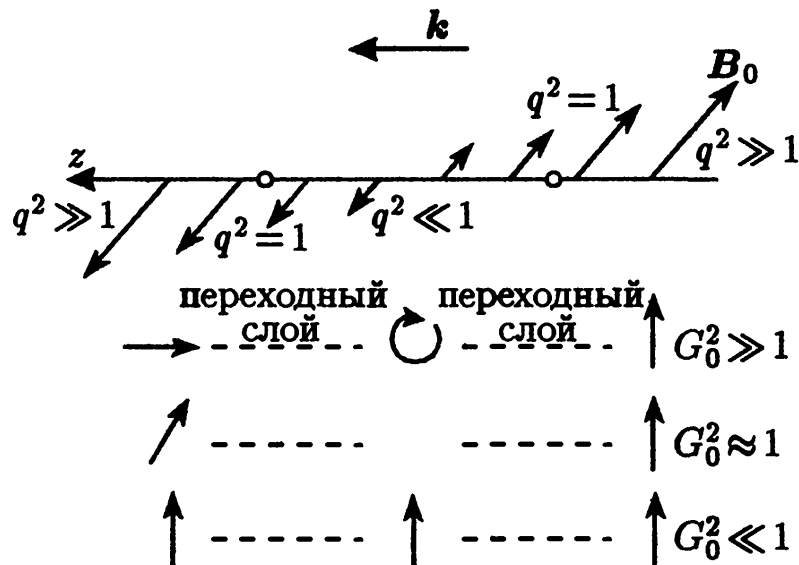


Рис. 23. Распространение волн через нейтральный токовый слой и изменение их поляризации

речному распространению (и наоборот), приближение геометрической оптики сохраняет свою силу. При этом, как известно, обыкновенная и необыкновенная волны распространяются независимо одна от другой; каждая волна при прохождении области поперечного магнитного поля становится линейно-поляризованной, а при выходе из указанной области меняет знак вращения на противоположный вследствие изменения направления продольной (вдоль  $k$ ) составляющей магнитного поля  $B_0$ . В этом случае коэффициент трансформации  $Q \ll 1$ .

С ростом частоты геометрико-оптическое приближение в слое  $q^2 \sim 1$  нарушается, и на высоких частотах  $\omega \gg \omega_t$ , где  $G_{\perp}^2 \ll 1$ , волны в области  $q^2 \sim 1$  распространяются как в изотропной плазме (или вакууме), не “замечая” изменения магнитного поля. Более подробное рассмотрение показывает, что слой  $|G(\eta)| \simeq 1$  (условная граница между областью применимости приближения геометрической оптики и областью “изотропного” распространения) перемещается при  $G_{\perp}^2 \ll 1$  в область  $q^2 \ll 1$ , т.е. в районы, где имеет место квазипродольное распространение с круговой поляризацией обыкновенных и необыкновенных волн. В результате область “изотропного” распространения  $|G(\eta)| \ll 1$  занимает весь переход через квазипоперечное магнитное поле; в эту область волна входит еще в слоях  $q^2 \ll 1$ , следует далее через поперечное магнитное поле и выходит снова из нее по другую сторону от поперечного поля — вновь в слое, где  $q^2 \ll 1$ . Таким образом, весь переход через квазипоперечное магнитное поле, включая промежуточные слои  $q^2 \sim 1$  и область квазипоперечного распространения  $q^2 \gg 1$ , не описывается в терминах геометрико-оптического приближения и происходит без изменения характера поляризации волны. Последнее означает, что если в процессе распространения волна одного типа (скажем, обыкновенного) входит в область “изотропного” приближения, расположенную по обе стороны от поперечного магнитного поля, то она покидает ее, сохранив круговую поляризацию и прежний знак вращения. Однако при выходе из области изотропного распространения эта волна будет соответствовать другому типу (необыкновенному), поскольку направление продольной компоненты магнитного поля  $B_0$  станет противоположным. Коэффициент трансформации  $Q$  в этом случае близок к единице.

Описанные выше варианты изменения поляризации при распространении волны через поперечное магнитное поле представлены на Рис. 22. Из рисунка ясно, что случай сильного взаимодействия  $G_{\perp}^2 \ll 1$  соответствует сохранению знака вращения поляризации; случай слабого взаимодействия  $G_{\perp}^2 \gg 1$  отвечает изменению знака вращения на

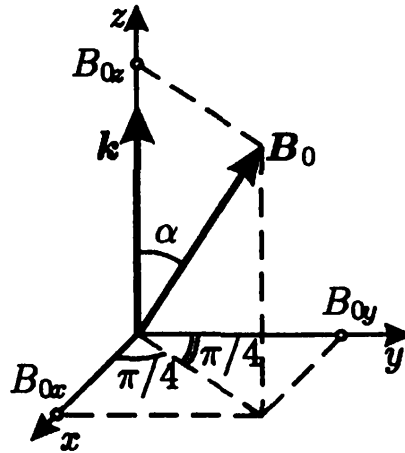


Рис. 24. Координатная система

обратный вместе с изменением знака проекции магнитного поля  $B_0$  на направление распространения. Наконец, при  $G_{\perp}^2 \approx 1$  имеет место промежуточный случай: при подходе к области взаимодействия волны одного типа (обыкновенной, например) ее покидают уже две волны — обыкновенная и необыкновенная. Отношение амплитуд обеих волн зависит от частоты, и где-то в районе  $\omega \simeq \omega_t$  (точное значение этой частоты устанавливается расчетом; см. ниже) оно становится равным единице. Поскольку трансформированные волны когерентны и имеют разные знаки вращения, результирующая поляризация излучения близ  $\omega \simeq \omega_t$  будет чисто линейной. По мере удаления от указанной частоты степень линейной поляризации  $\zeta_l$  (2.43) будет убывать от 1 до 0, а степень круговой поляризации  $\zeta_c$  (2.41) расти по абсолютной величине от 0 до 1. Значения  $\zeta_l \approx 0$ ,  $\zeta_c \approx \pm 1$  реализуются при  $G_{\perp}^2 \gg 1$  и при  $G_{\perp}^2 \ll 1$ .

Количественное исследование линейного взаимодействия при прохождении волн через поперечное магнитное поле мы начнем, применив метод фазовых интегралов. С его помощью мы получим зависимость коэффициентов трансформации, степени линейной и циркулярной поляризации в зависимости от частоты  $\omega$  [141]. Это рассмотрение послужит также иллюстрацией возможностей метода фазовых интегралов, который использован (в более сложном варианте) для расчета коэффициентов трансформации в области  $\omega_L \simeq \omega$ , расположенной в неоднородной магнитоактивной плазме с постоянным магнитным полем (см. ниже). В этой области, как отмечалось выше, уравнения квазиизотропного приближения (7.4) становятся неприменимыми.

Метод фазовых интегралов, на котором основано исследование указанного взаимодействия, позволяет найти связь между амплитудами взаимодействующих волн разных типов вдали от области взаимодей-

ствия, опираясь только на геометрико-оптическое приближение, не зная точного решения уравнений (7.4) и используя лишь некоторые его свойства (в частности, аналитичность в комплексной плоскости  $z$ ).<sup>52</sup> Итак, рассмотрим, следуя [141], распространение плоских электромагнитных волн вдоль оси  $z$  в плазме, помещенной в неоднородное магнитное поле  $\mathbf{B}_0(z)$ . Последнее выберем таким образом, чтобы его поперечная (по отношению к оси  $z$ ) компонента не зависела от координат, а продольная составляющая  $B_{0z}$  была бы монотонной функцией  $z$ , обращающейся в нуль при  $z = 0$ . Легко видеть, что при такой конфигурации магнитного поля реализуется интересующий нас случай распространения через область поперечного поля (с изменением знака продольного поля  $B_{0z}$ ); вместе с тем задача остается одномерной (все переменные зависят только от одной координаты  $z$ ), что заметно упрощает ее решение.

Строго говоря, подобное поле  $\mathbf{B}_0$  не может существовать в плазме, поскольку для него  $\operatorname{div} \mathbf{B}_0 \neq 0$ . Условию  $\operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0$  можно удовлетворить, сохраняя нужную нам конфигурацию силовых линий (Рис. 22), если  $\mathbf{B}_0$  будет зависеть от двух координат. Однако исследование взаимодействия в такой системе на основе уравнений квазиизотропного приближения (7.4), справедливых в трехмерном случае, показало, что результаты, полученные в одномерной модели, с достаточной точностью отражают действительный характер распространения волн (см. ниже).

При исследовании задачи о трансформации электромагнитных волн в области с поперечным магнитным полем мы будем исходить из системы (4.19)–(4.22) с тензором  $\epsilon_{ij}(\omega)$  в форме (4.70). В плоско-слоистой среде, параметры которой зависят только от одной координаты  $z$ , для плоских волн (т.е. для волн, поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в которых тоже зависят только от этой координаты), указанная система примет вид [141]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_+}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (C - B) F_+ &= -i \frac{\omega^2}{c^2} A F_-, \\ \frac{d^2 F_-}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (C + B) F_- &= i \frac{\omega^2}{c^2} A F_+, \end{aligned} \quad (7.44)$$

где

<sup>52</sup>Нередко метод фазовых интегралов трактуют более широко, отождествляя его с методом геометрической оптики. С методом фазовых интегралов можно познакомиться, обратившись к книге [143]. В используемой нами форме он был развит сначала [144] для решения некоторых задач квантовой механики, а затем перенесен в теорию распространения электромагнитных волн в неоднородной плазме [145, 146].

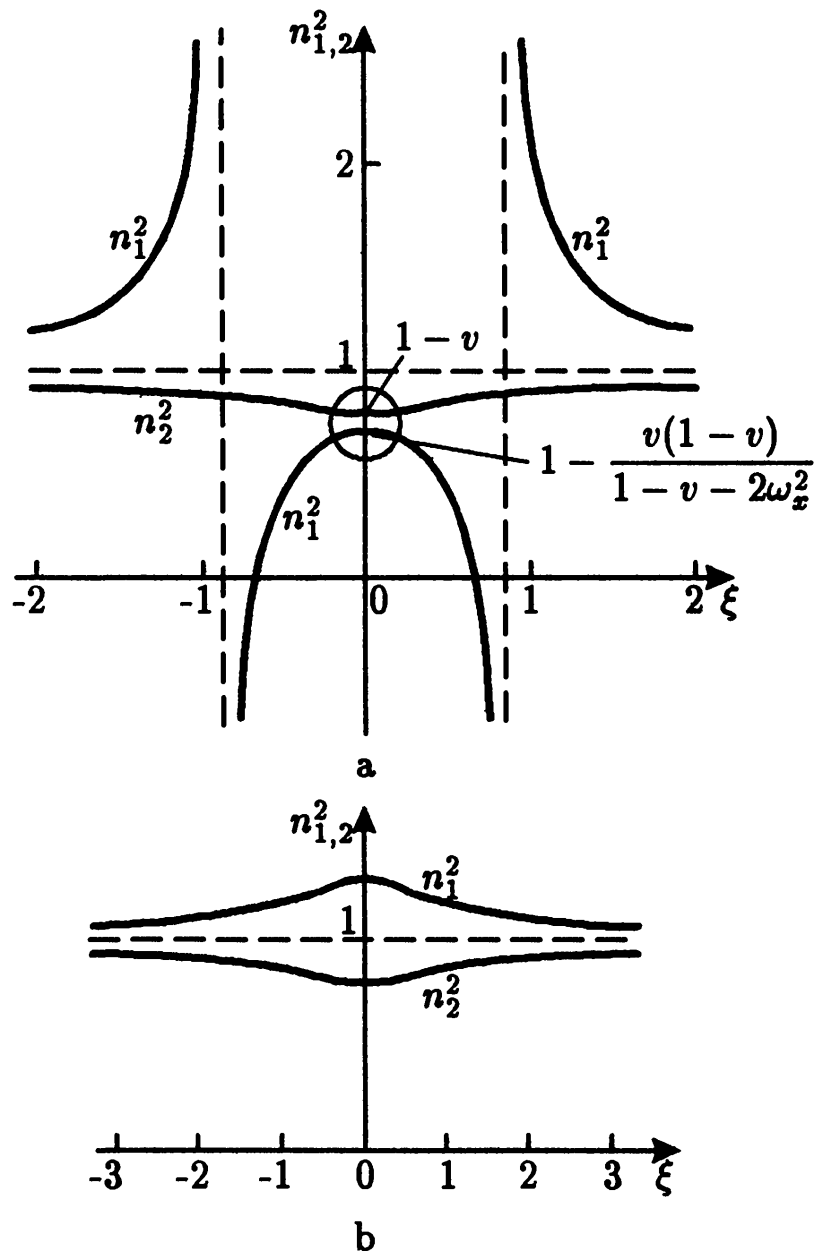


Рис. 25. Зависимость квадрата показателей преломления  $n_j^2$  от  $\xi \equiv \omega_x$  в плазме с неоднородным магнитным полем типа (7.46): а,  $u \sin^2 \alpha < 1 - \nu$ ; б,  $u \sin^2 \alpha > 1 - \nu$



$$F_{\pm} = E_x \pm iE_y,$$

$$A = -\frac{v\omega_x^2}{2\omega_x^2 - (1 - \omega_z^2)(1 - v)},$$

$$B = \frac{v(1 - v)\omega_z}{2\omega_x^2 - (1 - \omega_z^2)(1 - v)}, \quad (7.45)$$

$$C = 1 - \frac{v(\omega_x^2 + v - 1)}{2\omega_x^2 - (1 - \omega_z^2)(1 - v)},$$

$$\omega_x = \frac{eB_{0x}}{mc\omega}, \quad \omega_z = \frac{eB_{0z}}{mc\omega} = \sqrt{u} \cos \alpha.$$

Уравнения (7.44) записаны в другой системе координат, повернутой относительно изображенной на Рис. 6, b на  $45^\circ$  вокруг оси  $z$ . Как видно из Рис. 24, в новой системе проекции вектора  $B_0$  на оси  $x$  и  $y$  одинаковы.

Коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  зависят от  $z$  через параметр  $\omega_z$ , который в случае линейной функции  $B_{0z}(z)$  можно представить в виде

$$\omega_z = \Lambda z, \quad \Lambda = \text{const.} \quad (7.46)$$

В плоскости  $z = 0$ , таким образом, магнитное поле перпендикулярно к направлению распространения волны. Вводя новую независимую переменную  $\omega_z = \Lambda z$ , и обозначая ее (для упрощения записи) через  $\xi$ , а отношение  $\omega/\Lambda c$  — через  $\rho_B$ , запишем систему (7.44) в следующей форме:

$$\frac{d^2 F_+}{d\xi^2} + \rho_B^2 (C - B) F_+ = -i\rho_B^2 A F_-,$$

$$\frac{d^2 F_-}{d\xi^2} + \rho_B^2 (C + B) F_- = i\rho_B^2 A F_+, \quad (7.47)$$

где  $\rho_B = \omega/\Lambda c$ . Исключив из этих уравнений  $F_+$ , получим для  $F_-$  уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами. Решенные последнего будем искать в приближении геометрической оптики:

$$F_- = \exp \{ \rho_B [S_0(\xi) + \rho_B^{-1} S_1(\xi) + \rho_B^{-2} S_2(\xi) + \dots] \}, \quad (7.48)$$

Учитывая, что в нашем случае магнитное поле мало меняется на расстоянии порядка длины волны и, следовательно, параметр  $\rho_B \gg 1$ . Тогда для функции  $(dS_0(\xi)/d\xi)^2$  получаются два значения,  $n_1^2$  и  $n_2^2$ ,

совпадающие с выражениями (5.19) для квадратов показателей преломления в однородной плазме. Эти значения определяют возможность существования в плазме двух типов волн — необыкновенной и обыкновенной. Функция  $S_1(\xi)$  в свою очередь удовлетворяют уравнению:

$$\left(\frac{dS_1(\xi)}{d\xi}\right)_{1,2} = -\frac{1}{2} \frac{(dS_0/d\xi)_{1,2}}{(S_0)_{1,2}} \mp \frac{1}{2} \frac{d\sigma/d\xi}{\sqrt{1+\sigma^2}} - \frac{1}{2} \frac{\sigma d\sigma/d\xi}{1+\sigma^2}, \quad (7.49)$$

где

$$\sigma = -\frac{B}{A} = (1-v) \frac{\omega_z}{\omega_x^2} = \frac{\xi}{\xi_0}, \quad \xi_0 = \frac{\omega_x^2}{1-v}. \quad (7.50)$$

Подставляя (7.49) в (7.48), с учетом (5.19) запишем решение для  $F_-$  в такой форме:

$$\begin{aligned} F_-(\xi) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\sigma d\sigma}{1+\sigma^2}\right\} & \left[ \left( c_1 e^{i\rho_B \int n_1 d\xi} + d_1 e^{-i\rho_B \int n_1 d\xi} \right) \right. \\ & \times e^{-\frac{1}{2} \int n_1^{-1} dn_1 - \frac{1}{2} \int (1+\sigma^2)^{-1/2} d\sigma} + \left( c_2 e^{i\rho_B \int n_2 d\xi} \right. \\ & \left. \left. + d_2 e^{-i\rho_B \int n_2 d\xi} \right) e^{-\frac{1}{2} \int n_2^{-1} dn_2 + \frac{1}{2} \int (1+\sigma^2)^{-1/2} d\sigma} \right]. \quad (7.51) \end{aligned}$$

Поскольку, как уже отмечалось, без учета областей отражения, в которых  $n_{1,2}^2 \approx 0$ , волны, бегущие в разные стороны, независимы,<sup>53</sup> их одновременное рассмотрение, усложнив решение, не приведет здесь к новым результатам. Поэтому мы ограничимся исследованием волн, бегущих в сторону положительных  $\xi$ , и запишем приближение геометрической оптики в таком виде:

$$\begin{aligned} F_-(\xi) = e^{i\rho_B \int \frac{1}{2}(n_1+n_2)d\xi - \frac{1}{2} \int \frac{\sigma d\sigma}{1+\sigma^2}} \\ \times \left( \frac{c_1}{\sqrt{n_1}} e^{-i\rho_B \int \frac{1}{2}(n_2-n_1)d\xi - \frac{1}{2} \int \frac{d\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}} \right. \\ \left. + \frac{c_2}{\sqrt{n_2}} e^{i\rho_B \int \frac{1}{2}(n_2-n_1)d\xi + \frac{1}{2} \int \frac{d\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}} \right). \quad (7.52) \end{aligned}$$

Это выражение для  $F_-(\xi)$  при произвольных  $c_1$  и  $c_2$  описывает независимые волны двух типов (необыкновенные и обыкновенные)

<sup>53</sup>То есть постоянные  $c_1$ ,  $c_2$  и  $d_1$ ,  $d_2$  в (7.51) не связаны между собой; взаимодействие в области квазипоперечного магнитного поля происходит только между волнами разных типов, распространяющимися в одном и том же направлении.

и является асимптотическим представлением точного решения при  $\rho_B \gg 1$  вне областей взаимодействия и отражения. О положении последних можно судить с помощью (7.52), приняв во внимание, что области неприменимости геометрико-оптического решения отличаются резким изменением амплитуды волн в пространстве (на размерах порядка длины волны). Рассматривая выражение (7.52), убеждаемся, что при больших  $\rho_B$  это имеет место в окрестности точек, где  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 0$ , или  $n_1 = n_2$ . Последнее равенство соответствует точкам  $\sigma = \xi/\xi_0 = \pm i$ , лежащим в комплексной плоскости  $\xi$ .

На Рис. 25 приведены зависимости квадратов показателей преломления  $n_{1,2}^2$  от параметра  $\xi \equiv \omega_z$ . Ход дисперсионных кривых существенно различен при  $u \sin^2 \alpha = 2\omega_x^2 < 1 - v$  и  $u \sin^2 \alpha = 2\omega_x^2 > 1 - v$  (ср. Рис. 25 *a* и *b*). Если  $u \sin^2 \alpha < 1 - v$  (т.е.  $\xi_0 < 1/2$ ), то случай квазипоперечного распространения, реализующийся в области малых  $\xi$ , выделен в том отношении, что дисперсионные кривые здесь подходят одна к другой, и тем ближе, чем меньше произведение  $v\omega_x$  (т.е. в достаточно разреженной плазме или в достаточно слабом магнитном поле). Именно при этих условиях, облегчающих “переход” волны с одной дисперсионной кривой на другую, следует ожидать эффективного взаимодействия волн. Если же  $u \sin^2 \alpha > 1 - v$ , то в области квазипоперечного распространения дисперсионные кривые  $n_{1,2}^2(\xi)$  не приближаются, а отходят дальше друг от друга.

Ограничиваясь ниже случаем  $u \sin^2 \alpha < 1 - v$ , заметим, что мы не станем учитывать наличие нулей и полюсов у функции  $n_{1,2}^2(\xi)$ , считая, что реальное неоднородное магнитное поле аппроксимируется линейной зависимостью (7.25) только при достаточно малых  $\omega_z = \sqrt{u} \cos \alpha$ ; при больших  $\sqrt{u} \cos \alpha$  поле меняется так, что  $n_1^2$  не достигает нуля и необыкновенная волна, равно как и обыкновенная, беспрепятственно выходит за пределы области квазипоперечного поля.

Поскольку прохождение волн через область взаимодействия, отмеченную кружком на Рис. 25, *a*, сопровождается их трансформацией в волны другого типа, константы  $c_1$  и  $c_2$  в геометрико-оптическом решении (7.52) будут различны по обе стороны от указанной области. Последнее формально следует из того, что только в случае, когда коэффициенты различны в разных областях комплексной плоскости  $\xi$ , решение  $F_-(\xi)$  (7.52), представляющее собой комбинацию многозначных функций, может аппроксимировать точное решение системы (7.47) (которое является функцией аналитической, т.е. обязательно однозначной в области взаимодействия и ее окрестности). К отысканию связи между значениями констант, характеризующих амплитуды

необыкновенных и обыкновенных волн по разные стороны от области взаимодействия, и сводится решение задачи о линейной трансформации волн в плазме.

Как известно [143], в решениях типа (7.52) константы  $c_1$  и  $c_2$  остаются постоянными в областях, ограниченных так называемыми линиями Стокса; при переходе последних они меняются скачком. На этих линиях, определяемых из условия

$$\arg \left( \pm i \rho_B \int_{\pm i \xi_0}^{\xi} \frac{1}{2} (n_2 - n_1) d\xi \right) = \pi + 2\pi l, \quad (7.53)$$

где  $l=0, 1, 2, \dots$ , функции

$$\exp \left( \pm i \rho_B \int_{\pm i \xi_0}^{\xi} \frac{1}{2} (n_2 - n_1) d\xi \right),$$

входящие в приближение геометрической оптики (7.52), принимают (по мере удаления от точек  $\pm i \xi_0$ ) сколь угодно большие или сколь угодно малые действительные значения, а отношение указанных функций становится экстремальным.

При переходе через линию Стокса скачком изменяется только одна из двух компонент, а именно — константа, стоящая в решении при экспоненциально убывающей функции; при этом величина скачка  $\Delta c = c'_1 - c_1$  пропорциональна коэффициенту  $c_2$  при нарастающей экспоненте:<sup>54</sup>  $c'_1 = c_1 + \alpha c_2$ ,  $c'_2 = c_2$ . Аналогичные соотношения имеют место и на линии Стокса, где нарастающей становится экспонента с коэффициентом  $c_1$ :  $c'_2 = c_2 + \beta c_1$ ,  $c'_1 = c_1$ .

Для построения линий Стокса воспользуемся выражением (5.19), согласно которому

$$n_2 - n_1 \equiv \frac{n_2^2 - n_1^2}{n_2 + n_1} = \Xi(\xi) \sqrt{\xi^2 + \xi_0^2}, \quad (7.54)$$

где функция  $\Xi(\xi)$  — аналитическая и не имеющая нулей в окрестности точек  $\xi = \pm \xi_0$ . В случае, когда  $n_2 - n_1 = \sqrt{\xi^2 + \xi_0^2}$ , расположение линий

<sup>54</sup> Это вполне естественно, так как вследствие линейности исходной системы уравнений коэффициенты по разные стороны от линии Стокса должны быть связаны линейной зависимостью типа  $c'_1 = \tilde{\alpha} c_1 + \alpha c_2$ . Однако при  $c_2 = 0$  для сохранения законности асимптотического приближения надо потребовать, чтобы  $\tilde{\alpha} = 1$ , т.е. чтобы скачок отсутствовал. В то же время отличие  $\alpha$  от нуля (и, тем самым, появление скачка в члене с экспоненциально убывающей функцией при  $c_2 \neq 0$ ) не ухудшает точности геометрико-оптического приближения к строгому решению, так как на линиях Стокса ошибка в экспоненциально нарастающей функции становится порядка абсолютной величины экспоненциально убывающей функции.

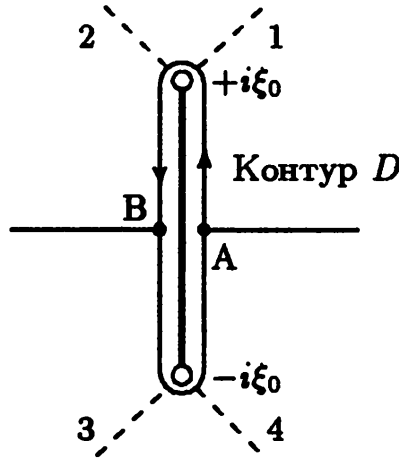


Рис. 26. Расположение линий Стокса (штриховые линии 1–4) на комплексной плоскости  $\xi$  для  $n_2 - n_1 = \sqrt{\xi^2 + \xi_0^2}$

Стокса на плоскости  $\xi$ , разрезанной вдоль линии, соединяющей точки  $i\xi_0$  и  $-i\xi_0$  представлено на Рис. 26. Появление в разности  $n_2 - n_1$  функции  $\Xi(\xi)$  может вызвать непрерывную деформацию линий Стокса, но не меняет общего характера этих линий; при рассмотрении взаимодействия знание их точной конфигурации не является необходимым.

Связь между постоянными  $c_1, c_2$  в точке  $A$  и их значениями в точке  $B$  (последние обозначены через  $C_1, C_2$ ) будет определена, если известны величины скачков коэффициентов при переходе через линии Стокса. Эти скачки можно найти, обходя точки ветвления  $\pm i\xi_0$  функции  $n_2 - n_1$  по замкнутому контуру  $D$  в комплексной плоскости  $\xi$  (см. Рис. 26) и требуя при этом, чтобы исходные значения констант  $c_1, c_2$  в точке  $A$  совпали со значениями коэффициентов в (7.52), полученными в той же точке после обхода по указанному контуру.

Не останавливаясь на этой процедуре, подробно изложенной в [3, 141], сразу приведем соотношения между константами в точках  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}} C_1 + e^{-\delta_0} C_2, \\ c_2 &= -e^{-\delta_0} C_1 + \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}} C_2. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Напомним, что мы рассматриваем волны, бегущие в сторону положительных значений  $\xi$ . Поэтому константы  $C_1$  и  $C_2$  характеризуют амплитуды волн (соответственно необыкновенной и обыкновенной) в точке  $B$ , т.е. перед областью взаимодействия, а константы  $c_1$  и  $c_2$  — амплитуды волн в точке  $A$ , т.е. за областью взаимодействия. Квадраты констант, очевидно, характеризуют интенсивности соответствующих волн. Легко проверить с помощью (7.55), что суммарная интенсивность волн, входящих в область взаимодействия, равна об-

щей интенсивности волн, выходящих из указанной области:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = |C_1|^2 + |C_2|^2.$$

Из (7.55) ясно, что связь между обыкновенными и необыкновенными волнами при прохождении области квазипоперечного магнитного поля определяется характерным параметром

$$2\delta_0 = -i\rho_B \oint \frac{1}{2}(n_2 - n_1)d\xi \quad (7.56)$$

— действительной величиной, интеграл от разности  $n_2 - n_1$  в которой берется по замкнутому контуру  $D$ . В пределе при  $\delta_0 \ll 1$  эффект трансформации максимален — волна с одной дисперсионной кривой на Рис. 25, *a* полностью переходит в волну, отвечающую другой кривой ( $C_2 = c_1$ ,  $C_1 = c_2$ ), а при  $\delta_0 \gg 1$  взаимодействие отсутствует ( $C_1 = c_1$  и  $C_2 = c_2$ ).

Выражение для  $\delta_0$  приведено выше в виде контурного интеграла, вычисление которого в общем случае представляется затруднительным. Задача, однако, упрощается при

$$2v\omega_x^2 \ll (1-v)(1-v+2\omega_x^2), \quad (7.57)$$

когда только и можно ожидать сильного взаимодействия (при условии (7.57) дисперсионные кривые близко подходят друг к другу, см. Рис. 25, *a*). Здесь вдоль контура интегрирования  $n_1 \approx n_2 \approx \sqrt{1-v}$  и, следовательно,

$$2\delta_0 \approx -\frac{i\rho_B}{\sqrt{1-v}} \oint \frac{1}{4}(n_2^2 - n_1^2)d\xi.$$

Подставив сюда в качестве  $n_{1,2}^2$  выражения (5.19), получим [141]

$$\begin{aligned} 2\delta_0 &\approx \frac{i\rho_B v}{2\sqrt{1-v}} \oint \frac{\sqrt{\xi^2 + \xi_0^2}}{\xi^2 + 2\xi_0^2 - 1} d\xi \\ &= -\pi\rho_B \frac{v}{\sqrt{1-v}} \frac{\sqrt{1-2\xi_0} + \xi_0 - 1}{\sqrt{1-2\xi_0}}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

В случае, когда  $2\xi_0 \approx 2\omega_x(1-v)^{-1} \ll 1$ , параметр связи примет вид [139, 140]

$$2\delta_0 \simeq \frac{\pi\rho_B}{2} \frac{v\omega_x^4}{(1-v)^{5/2}} = \frac{\pi\omega v u^{3/2}}{8c(1-v)^{5/2}|d\alpha/dz|}. \quad (7.59)$$

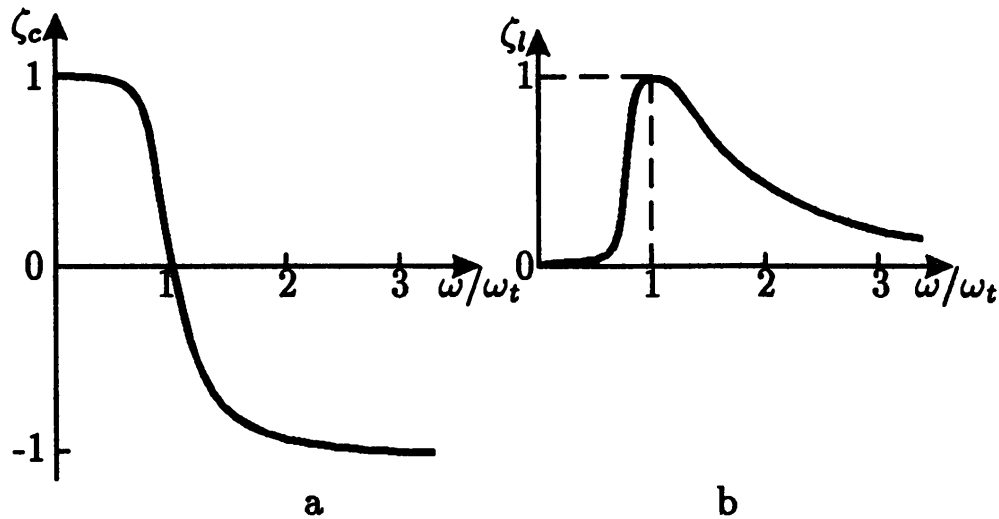


Рис. 27. Зависимость степеней круговой ( $\zeta_c$ ) и линейной ( $\zeta_l$ ) поляризации от отношения  $\omega/\omega_t$

При переходе к последнему выражению учтено, что  $2\omega_x^2$  совпадает с величиной  $u = \omega_B^2/\omega^2$  в точке  $z = 0$ , а параметр  $\rho_B = \omega/c\Lambda$ , где  $\Lambda = d\omega_x/dz = \sqrt{u}|d\alpha/dz|$  (см. (7.46)) Если же  $v \ll 1$ , то [141]

$$2\delta_0 \simeq \frac{\pi\omega v u^{3/2}}{8c|d\alpha/dz|} = \frac{\pi\omega_L^2\omega_B^3}{8c\omega^4|d\alpha/dz|} = 2.5 \cdot 10^{20} \frac{NB_0^3}{\omega^4|d\alpha/dz|}. \quad (7.60)$$

Отметим, что выражение (7.59) с точностью до численного множителя порядка единицы совпадает с выражением (7.38) для параметра взаимодействия  $G_{\perp}$ , введенного в предыдущем разделе для характеристики взаимодействия волн в поперечном магнитном поле:  $2\delta_0 \equiv (\pi\sqrt{2}/8)G_{\perp}$ .

С помощью (7.55), (7.60) нетрудно построить частотные зависимости степени круговой и линейной поляризации излучения, вышедшего из области взаимодействия в область квазипродольного распространения, если заданы характеристики излучения, падающего на первую область.

Как известно (см. §2), степень круговой поляризации излучения определяется равенством  $\zeta_c = (I_l - I_r)/(I_l + I_r)$ , в котором  $I_l$  и  $I_r$  — интенсивности лево- и правополяризованных компонент. В нашем случае последние пропорциональны  $|c_2|^2$  и  $|c_1|^2$  соответственно. Степень линейной поляризации  $\zeta_l$  в свою очередь определяется из соотношения  $\zeta_c^2 + \zeta_l^2 = \zeta^2$ , где  $\zeta = \text{const}$  — полная степень поляризации излучения.

Если в область квазипоперечного магнитного поля входит волна только одного типа (например, обыкновенная) с интенсивностью  $|C_2|^2$

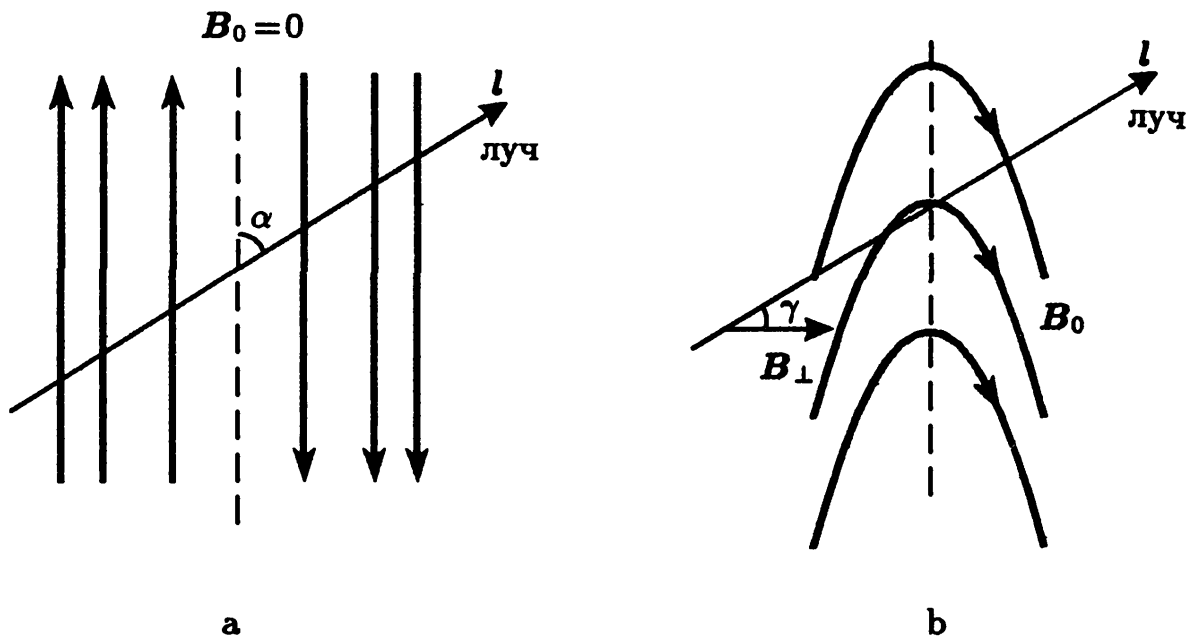


Рис. 28. Конфигурация силовых линий магнитного поля  $B_0$  в случае: (а) нейтрального токового слоя, содержащего поверхность  $B_0 = 0$ ; (б) токового слоя, представляющего собой суперпозицию полей в нейтральном токовом слое и ортогонального к ним постоянного магнитного поля  $B_{\perp}$

$= 1$ , то согласно (7.55) из нее выйдет обыкновенная волна с интенсивностью  $1 - e^{-2\delta_0}$  и необыкновенная волна с интенсивностью  $e^{-2\delta_0}$ . Таким образом, коэффициент трансформации из одной моды в другую равен

$$Q = e^{-2\delta_0} = \exp\left(-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}G_{\perp}\right). \quad (7.61)$$

Степени круговой и линейной поляризации в этом случае

$$\zeta_c = 1 - 2e^{-2\delta_0}, \quad \zeta_l = \sqrt{1 - \zeta_c^2} = 2e^{-\delta_0}\sqrt{1 - e^{-2\delta_0}}. \quad (7.62)$$

(поскольку  $\zeta = 1$ ). Знак  $\zeta_c$  и направление вращения в результирующем эллипсе поляризации изменяются при  $2\delta_0 = \ln 2 \simeq 0.7$ . Этому значению отвечает частота

$$\omega_t = \left(\frac{\pi^2 e^5 N B_0^3}{2 \ln 2 m_e^4 c^4 |d\alpha/dz|}\right)^{1/4} \simeq 2\pi \left(3 \cdot 10^{17} \frac{N B_0^3}{|d\alpha/dz|}\right)^{1/4}. \quad (7.63)$$

указанная ранее менее точно (см. (7.43)). Соответствующие графики зависимостей  $\zeta_c$  и  $\zeta_l$  от  $\omega/\omega_t$ , приведены на Рис. 27. Из рисунков ясно, что знак круговой поляризации меняется на частоте  $\omega = \omega_t$ ; здесь же становится максимальной степень линейной поляризации излучения, прошедшего через область с поперечным магнитным полем [141].



Отметим, что формулы (7.59), (7.62), (7.63) могут быть получены из аналитического решения уравнений квазиизотропного приближения (7.4) (например, в форме (7.19)) [134]. Если  $\cos \alpha = l/\Lambda$ , а параметры  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$ , то в случае (7.30) функция (7.28) примет вид:

$$G(\eta) = -\frac{vu^{3/2}}{4(1-v)^{5/2}} \frac{\omega}{c} \frac{\Lambda}{\cos^3 2\eta}. \quad (7.64)$$

Тогда уравнение (7.19) имеет точное решение, выражающееся через функции параболического цилиндра. В результате из этого решения следуют те же формулы для степени круговой и линейной поляризации выходящего излучения (7.62) и для критической частоты (7.63).

### 7.5. Распространение волн через область с нулевым магнитным полем

В реальных условиях область, содержащая поверхность, на которой  $B_0 = 0$ , может существовать внутри нейтральных токовых слоев. (см. Рис. 28, а).

Рассмотрим характер распространения волн через нейтральный токовый слой. Он будет существенно зависеть от параметров этого слоя — характерной толщины  $L_{sh}$ , величины магнитного поля на краях слоя  $B_{sh}$  и угла между лучом и магнитным полем  $\alpha$  — и определяется величиной параметра взаимодействия (7.36), который можно представить в виде

$$G_0 = 32\sqrt{2}\pi e \frac{NL_{sh}}{B_{sh}} |\cos^3 \alpha| \simeq 7 \cdot 10^{-8} \frac{NL_{sh}}{B_{sh}} |\cos^3 \alpha|. \quad (7.65)$$

Если на краях слоя  $q^2 \ll 1$ , то внутри него, при  $v \ll 1$ , это неравенство сохраняется. Это означает, что вдоль всего луча, расположенного в токовом слое, сохраняется квазипродольное распространение. В соответствии с результатами качественного анализа эффекта линейного взаимодействия, в этом случае данный эффект отсутствует. Если же на краях слоя  $q^2 \gg 1$ , то процесс распространения излучения будет происходить следующим образом. Пусть на нейтральный слой падает волна одного типа, скажем, обыкновенная. Эта волна обладает линейной поляризацией с вектором  $E$  в плоскости  $k - B_0$ . При распространении в сторону нулевого магнитного поля волна пройдет последовательно через слои  $q^2 \sim 1$ ,  $q^2 \ll 1$  и  $q^2 \sim 1$ , снова выйдя в область квазипоперечного приближения  $q^2 \gg 1$  на другой стороне нейтрального токового слоя. Если параметр взаимодействия  $G_0^2 \ll 1$ , геометрическая оптика будет нарушена в слое  $q^2 \sim 1$ . Если модуль функции

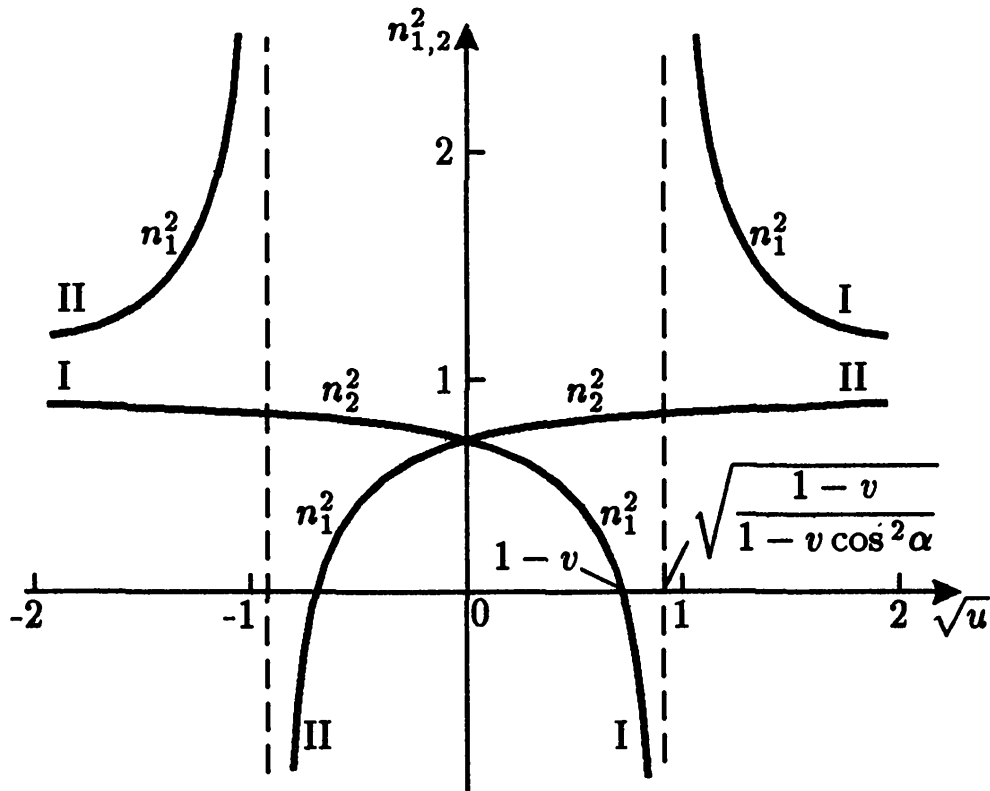


Рис. 29. К распространению волн через нейтральный токовый слой. Зависимость квадрата показателя преломления  $n_j^2$  от параметра  $\sqrt{u}$  при  $v = \text{const}$  и  $\alpha \neq \pi/2$

$G(\eta)$  (см. (7.16)) остается малым по сравнению с единицей в области  $q^2 \lesssim 1$ , то в этом случае геометрическая оптика нарушается во всей переходной области  $q^2 \lesssim 1$ , уступая там место “изотропному” приближению. Поэтому линейно-поляризованная волна, войдя в область  $q^2 \lesssim 1$ , распространяется без изменения своей поляризации и выходит в область  $q^2 \gg 1$  по другую сторону от нейтрального слоя, оставаясь по-прежнему поляризованной в плоскости  $\mathbf{k}-\mathbf{B}_0$ . Такая поляризация соответствует здесь волне обыкновенного типа и, следовательно, сильное взаимодействие при переходе в плазме через нейтральный слой из области  $q^2 \gg 1$  снова в область  $q^2 \gg 1$  сохраняет неизменной плоскость поляризации и тип нормальной волны.

Рассмотренный вариант распространения через нейтральный слой (при  $G_0^2 \ll 1$ ) имеет место для углов  $\alpha$ , достаточно близких к  $\pi/2$  (см. (7.36)). Если же отличие  $\alpha$  от  $\pi/2$  достаточно велико, параметр  $G_0^2$  становится много больше единицы, и геометрико-оптическое приближение сохраняет свою силу в области  $q^2 \gtrsim 1$ . Нетрудно убедиться, что при этом оно остается справедливым и близ  $\mathbf{B}_0 = 0$  (в области  $q^2 \ll 1$ ). Таким образом, весь переход через нейтральный слой из

области  $q^2 \gg 1$  снова в область квазипоперечного распространения при  $G_0^2 \gg 1$  описывается в терминах геометрической оптики. Изменение показателя преломления волны  $n_j^2$  и ее поляризации  $K_j$  при этом определяется формулами (5.19) и (5.34), полученными для нормальных волн в однородной среде, в них следует лишь учесть, что величина параметра  $u$  меняется вдоль направления распространения волны;  $u = u(z)$ . Зависимость  $n_j^2(\sqrt{u})$  представлена на Рис. 29; приведенные дисперсионные кривые при  $\omega = \text{const}$  описывают также (в определенном масштабе) характер изменения  $n_j^2(l)$  в неоднородном магнитном поле с нейтральным слоем, если предположить, что  $\sqrt{u}$  есть линейная функция  $l$  вида  $\sqrt{u} = al$ . Изменение направления магнитного поля при переходе через нулевую поверхность  $l = 0$  учитывается на рисунке сменой знака  $\sqrt{u}$  при постоянном значении угла  $\alpha$ .

Если справа на Рис. 29 задана волна одного типа, скажем, обыкновенного с показателем преломления  $n_2$ , то при распространении в неоднородном магнитном поле ее показатель преломления меняется в соответствии с дисперсионной кривой  $II$ .<sup>55</sup> В приближении геометрической оптики и независимо от направления магнитного поля имеется единое решение системы уравнений (7.4), отвечающее кривой  $II$ . Другое геометрико-оптическое решение (для кривой  $I$ ) линейно-независимо от первого. Это означает, что волна, распространяющаяся в плазме “по дисперсионной кривой  $I$ ”, не может “перейти” на кривую  $II$ , и наоборот, — до тех пор, пока в неоднородном поле выполнено приближение геометрической оптики. Напротив, случай сильного взаимодействия  $G_0^2 \ll 1$  соответствует практически полному переходу волны с одной дисперсионной кривой на другую.

Учитывая сказанное, нетрудно проследить за изменением поляризации волны в случае  $G_0^2 \gg 1$  при прохождении через плазму с нейтральным слоем. Если справа на Рис. 23, 29 в области квазипоперечного распространения ( $q^2 \gg 1$ ) задана линейно-поляризованная обыкновенная волна с вектором  $E$  в плоскости  $k$ - $B_0$ , то в области квазипродольного распространения ( $q^2 \ll 1$ ) она станет циркулярно

<sup>55</sup>Изменение названия волны со сменой направления магнитного поля (т.е. с переходом из области  $\sqrt{u} > 0$  в область  $\sqrt{u} < 0$  на Рис. 29) к существу дела не относится. Согласно установившейся традиции отдельные ветви дисперсионных кривых называют обыкновенными или необыкновенными так, чтобы при изменении направления магнитного поля  $B_0 \rightarrow -B_0$  величина  $n_j^2$  для данного типа волны не менялась. Это и определило выбор наименований дисперсионных ветвей на Рис. 29, форму записи выражений  $n_{1,2}^2$  (5.26) для квазипродольного приближения (с модулями  $|\sqrt{u} \cos \alpha|$ ) и т.д.

поляризованной. При переходе через слой  $\sqrt{u} = 0$  направление вращения (знак поляризации) не меняется, а в области  $q^2 \gg 1$ , расположенной слева на Рис. 23, 29, поляризация волны (отнесенной теперь к необыкновенному типу) станет линейной, с вектором  $\mathbf{E}$ , ортогональным  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ . Таким образом, в приближении геометрической оптики  $G_0^2 \gg 1$  распространение через нейтральный слой сопровождается изменением типа волны и ориентации плоскости линейной поляризации, в отличие от сильного взаимодействия  $G_0^2 \ll 1$ , когда эта ориентация не меняется.

Отмеченное выше постоянство знака вращения при переходе через слой  $\sqrt{u} = 0$  вдоль одной дисперсионной кривой (I или II) на Рис. 29 сразу же следует из формулы (5.34) для коэффициента поляризации  $K_j \equiv -iE_y/E_x$ . Дело в том, что в квазипродольном приближении  $K_j \approx \sqrt{u} \cos \alpha (\pm |\sqrt{u} \cos \alpha|)^{-1}$  и при изменении знака  $\sqrt{u} \cos \alpha$  величина  $K_j$  остается неизменной (поскольку одновременно меняется тип волны, соответствующей дисперсионной кривой II, т.е. знак в знаменателе  $K_j$ ).

Вывод о сохранении знака поляризации в отсутствие линейного взаимодействия при прохождении волн через нулевое магнитное поле в нейтральном токовом слое прямо противоположен случаю прохождения волн через поперечное магнитное поле. В последнем случае отсутствие линейного взаимодействия (т.е. сохранение приближения геометрической оптики) ведет к изменению знака поляризации волны на противоположный.

Проведенное рассмотрение эффектов линейного взаимодействия волн в неоднородном магнитном поле позволяет представить себе качественную картину и установить характерные параметры взаимодействия, однако в количественном отношении оно далеко не исчерпывает сложности всей проблемы. В [147] численными методами рассчитано взаимодействие волн в области нулевого магнитного поля. Результат приведен на Рис. 30, где представлена зависимость коэффициента трансформации  $Q$  от характерного параметра взаимодействия  $G_0$  (7.13). Величина  $Q$  определена здесь как отношение квадратов амплитуд обыкновенных волн (выходящей из области взаимодействия и падающей на нее). Отношение квадрата амплитуды необыкновенной волны, выходящей из области взаимодействия, к квадрату амплитуды обыкновенной волны, падающей на указанную область при этом будет равно  $1 - Q$ . В предельных случаях слабого ( $G_0 \gg 1$ ) и сильного ( $G_0 \ll 1$ ) взаимодействия аналитические выражения для коэффициента линейной трансформации имеют следующий вид [138]:

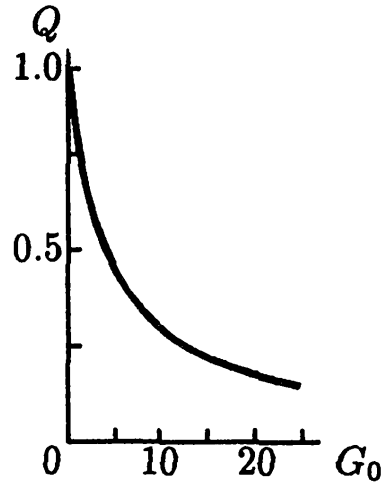


Рис. 30. Коэффициент трансформации  $Q$  при прохождении волн через область с нулевым магнитным полем (зависимость от параметра взаимодействия  $G_0$ ), когда волна переходит с дисперсионной кривой  $II$  на кривую  $I$

$$Q \simeq \frac{\pi\sqrt{2}}{G_0}, \quad G_0 \gg 1, \quad (7.66)$$

$$Q \simeq 1 - \frac{\pi}{2} G_0^{2/3} [Ai'(0)]^2, \quad G_0 \ll 1.$$

Здесь  $Ai'(0) \approx -0.459$  — производная от функции Эйри при нулевом значении аргумента. И, наконец, решение эталонной задачи, справедливое во всем интервале значений  $G_0$ , приведено в [148].

Картина распространения волн может существенно измениться, если на нейтральный токовый слой наложена еще поперечная компонента магнитного поля  $B_{\perp}$  (см. Рис. 28, *b*). В этом случае токовый слой не содержит поверхности  $B_0 = 0$ , хотя при малых значениях  $B_{\perp} \ll B_{sh}$  величина магнитного поля в середине слоя сильно уменьшается по сравнению со значениями на краях. Анализ линейного взаимодействия в плазменных токовых слоях проведен в статье [148]. Для определенности мы будем рассматривать токовый слой — суперпозицию самосогласованного нейтрального слоя (так называемого слоя Харриса [149]):

$$B_H^2 = B_{sh}^2 \operatorname{th}^2(z/L_{sh}), \quad N = N_0 \operatorname{ch}^{-2}(z/L_{sh}), \quad (7.67)$$

и однородного магнитного поля  $B_{\perp} \perp B_{sh}$ , ориентированного вдоль оси  $z$ . Если угол  $\gamma$  между полем  $B_{\perp}$  и направлением луча  $l$  достаточно мал:

$$\operatorname{tg}^2 \gamma < B_{\perp}^2 / B_{sh}^2, \quad (7.68)$$

то ни в одной точке вдоль луча магнитное поле  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_H + \mathbf{B}_\perp$  не может стать ортогональным к направлению  $l$ . В этом случае знак проекции поля  $\mathbf{B}$  на  $l$  постоянен в токовом слое вдоль луча. В приближении геометрической оптики это приводит к постоянному знаку вращения вектора  $\mathbf{E}$ . Более того, как показывают расчеты, в случае нарушения геометрико-оптического приближения в области  $q^2 \sim 1$  вдоль луча, коэффициент трансформации  $Q$  остается меньше  $1/2$ . Такая трансформация недостаточна для изменения знака поляризации.

В противоположном случае

$$\operatorname{tg}^2 \gamma > B_\perp^2 / B_{sh}^2 \quad (7.69)$$

всегда существует точка  $z_\perp$ , где общее магнитное поле ортогонально направлению луча. В этой точке

$$\operatorname{th}(z_\perp / L_s) = -B_\perp / B_{sh} \operatorname{tg} \gamma. \quad (7.70)$$

В хорошо сформированном токовом слое ( $B_\perp^2 \ll B_{sh}^2$ ), который будет обсуждаться в дальнейшем, точка  $z_\perp$  существует в широком интервале углов падения  $\gamma$  (исключением служит узкий сектор  $\gamma^2 < B_\perp^2 / B_{sh}^2 \ll 1$ , где луч  $l$  почти коллинеарен направлению поля  $\mathbf{B}_H$ ). В этой точке проекция  $\mathbf{B}$  на вектор  $l$  меняет знак, а поляризационный параметр  $q(l)$  (7.5) меняет знак, проходя через значения  $\pm\infty$ .

Картина распространения излучения через токовый слой достаточно сложна. Достаточно сказать, что в этом слое, вообще говоря, существуют четыре области вдоль луча, в которых  $q^2 \simeq 1$  (см. подробнее [148]). Однако, проведенное исследование показало, что одновременно существенное влияние на результирующий коэффициент трансформации оказывают только две области из четырех, причем изменение знака поляризации, связанное со взаимодействием при прохождении через поперечное магнитное поле, по-прежнему определяется параметром  $G_\perp$ , (7.38). В этом параметре следует учесть, что значение магнитного поля в точке  $z_\perp$  будет отличаться от его значения на краю токового слоя  $B_{sh}$  (в существенно меньшую сторону), точно так же величина  $|d\alpha/dl|^{-1}$  будет определяться масштабом, который меньше толщины слоя  $L_{sh}$ . Все это приведет к уменьшению величины  $G_\perp$ , то есть к более легкой реализации в токовом слое условий сильного взаимодействия в квазипоперечном поле, которое ведет к сохранению знака поляризации. В результате в токовом слое параметр взаимодействия имеет вид

$$G_{\perp sh} = \frac{\omega_L^2 (\omega_{B_{sh}})^3 L_{sh} B_\perp^4}{\sqrt{2} c \omega^4 \operatorname{tg}^5 \gamma B_{sh}^4}, \quad (7.71)$$

где  $\omega_{B_{sh}} = eB_{sh}/m_e c$ . В интервале (7.69) при условии  $B_{\perp}^2 \ll B_0^2$  поляризация будет менять знак на противоположный, если  $G_{\perp sh} > 1$  (при  $G_{\perp sh} \gg 1$  линейное взаимодействие отсутствует). Из (7.71) следует, что неравенство  $G_{\perp sh} > 1$  эквивалентно условию

$$\operatorname{tg}^{5/4} \gamma < \frac{B_{\perp}}{B_{sh}} \left( \frac{\sqrt{2} c \omega^4}{\omega_L^2 \omega B_{sh}^3 L_{sh}} \right)^{1/4}. \quad (7.72)$$

В случае обратного неравенства линейное взаимодействие становится сильным, что ведет к сохранению знака поляризации в токовом слое.

### 7.6. О роли линейного взаимодействия в космической плазме с неоднородным магнитным полем

Прохождение излучения через области, содержащие поперечное или нулевое магнитное поле, может существенно изменить поляризацию этого излучения. Характер этого изменения зависит от величины введенных выше параметров  $G_{\perp}$  (или  $2\delta_0$ ) и  $G_0$ . Так, например, при распространении электромагнитных волн в межзвездной плазме легко реализуется эффект взаимодействия в квазипоперечном магнитном поле. Действительно, в среде с электронной концентрацией  $N \sim 0.1 \text{ см}^{-3}$ , магнитным полем  $B_0 \sim 3 \cdot 10^{-6} \text{ Гс}$  и характерным размером неоднородности поля  $L_{\alpha} = |d\alpha/dz|^{-1} \sim 3 \cdot 10^{20} \text{ см} \equiv 100 \text{ пк}$  величина  $\omega_t$  (7.63) составляет около  $7 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$  (т.е.  $f_t = \omega_t/2\pi \sim 0.1 \text{ МГц}$ ). Отсюда ясно, что в межзвездной среде во всем диапазоне частот, представляющем интерес для радиоастрономии, выполнено неравенство  $\omega \gg \omega_t$ , т.е. условие сильного взаимодействия  $2\delta_0 \ll 1$ . Поэтому в процессе распространения радиоволн в неоднородном галактическом магнитном поле знак вращения циркулярной поляризации сохраняется неизменным, несмотря на многократные изменения направления проекции магнитного поля  $B_0$  на луч зрения.

Эффект взаимодействия в неоднородном магнитном поле, возможно, оказывает некоторое влияние на формирование характера поляризации радиоизлучения пульсаров. Например, хаотическое изменение величины  $\omega_t$  в магнитосфере нейтронной звезды или в окружающем пространстве может вызвать сильные вариации поляризации от импульса к импульсу, наблюдаемые у некоторых пульсаров [150]. Однако с численными оценками параметров, определяющих эффект взаимодействия и условия выхода радиоизлучения из пульсаров, следует быть осторожным, поскольку плазма в магнитосферах нейтронных звезд может быть релятивистской. Проблема линейного взаимодействия в релятивистской плазме, к сожалению, пока не рассматрива-

лась, хотя эта задача весьма актуальна.

Условия прохождения электромагнитных волн через область поперечного магнитного поля в солнечной короне существенно определяют поляризационные характеристики солнечного радиоизлучения. В качестве примера можно сослаться на эффект обращения знака поляризации, наблюдаемый иногда у микроволновых всплесков на частотах  $f \sim 3 \cdot 10^3$  МГц [151]. Это обстоятельство можно объяснить [152], предположив, что в процессе распространения радиоизлучения от источника до наблюдателя оно проходит в солнечной короне через область квазипоперечного магнитного поля, где реализуется такое сочетание параметров  $N$ ,  $B_0$  и  $L_\alpha$ , при которых частота  $\omega_t \sim 6\pi \cdot 10^3$  МГц. Согласно (7.63), последнее имеет место, если  $NB_0^3L_\alpha \sim 4 \cdot 10^{20} \text{ Г}^3\text{см}^{-2}$ . Отсюда нетрудно получить оценку для напряженности магнитного поля в области взаимодействия  $B_0 \simeq 5 \text{ Г}$ , предположив, что там  $N \sim 3 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$  и  $L_\alpha \sim 10^{10} \text{ см}$ ; смена знака круговой поляризации на частоте  $\omega \approx \omega_t$  будет происходить при этом в соответствии с графиком Рис. 27, а.

Из сказанного ясно, что определение частоты  $\omega_t$ , при исследовании эффекта обращения знака поляризации солнечного радиоизлучения может служить удобным способом оценки величины магнитных полей в короне. Действительно, о положении области взаимодействия в солнечной короне можно судить, задавшись определенной конфигурацией силовых линий магнитного поля в активной области короны. Конкретизируя далее распределение электронной концентрации в центре активности, можно найти произведение  $NL_\alpha$  в области квазипоперечного поля. Тогда величина магнитного поля  $B_0$ , соответствующая наблюдаемому значению  $\omega_t$ , получается из формулы (7.63), согласно которой  $B_0$  слабо зависит от значений параметров  $N$ ,  $L_\alpha$  и значительно сильнее — от частоты  $\omega_t$ .

Заметим, что в диапазоне частот, близких к  $\omega_t$ , выходящее из области с поперечным полем радиоизлучение должно обладать сильной линейной поляризацией (см. Рис. 27, б). Однако ее уверенная регистрация затрудняется сильной дисперсией угла фарадеевского вращения в короне над областью взаимодействия; поэтому линейную поляризацию можно заметить только при наблюдениях в весьма узкой полосе частот (см. §9 и более подробно [3]).

Учет поляризационных эффектов при распространении волн в неоднородном магнитном поле особенно необходим для интерпретации результатов измерений поляризации радиоизлучения локальных источников, расположенных над солнечными пятнами с противополож-



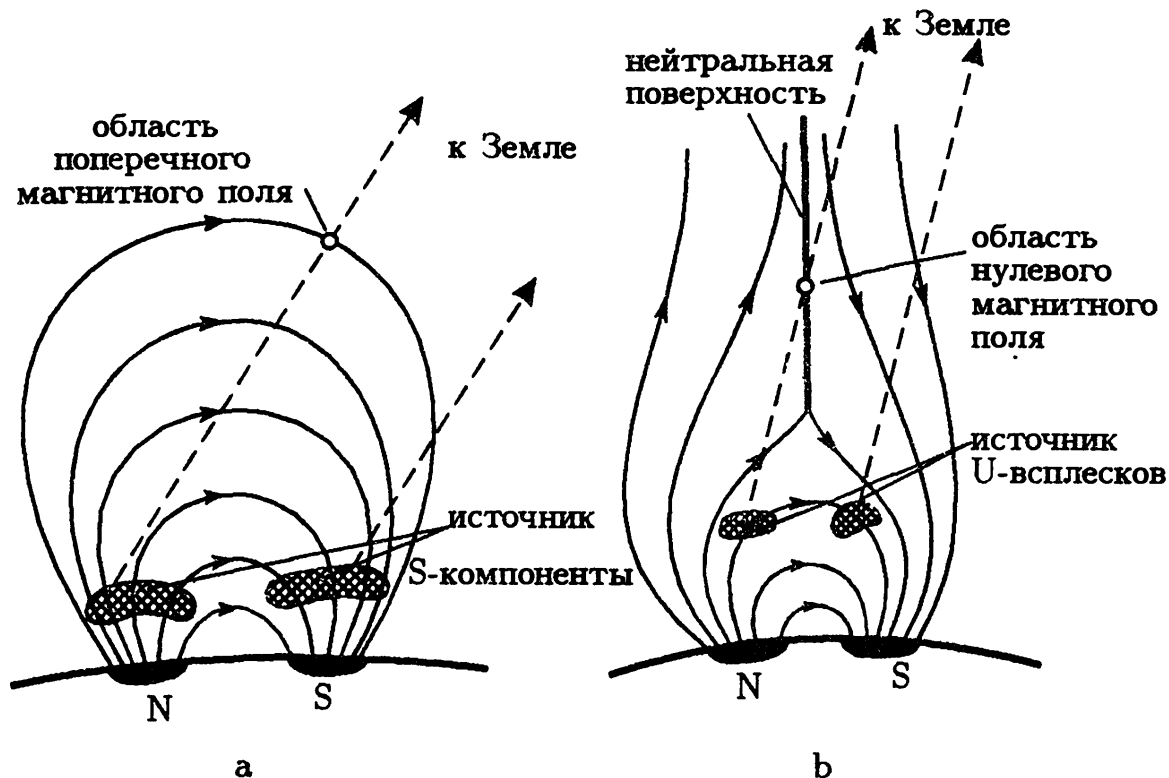


Рис. 31. Выход солнечного радиоизлучения за пределы активной области с биполярной группой пятен: а) через поперечное магнитное поле; б) через нулевое магнитное поле

ной полярностью. Примером могут служить области генерации  $S$ -компоненты солнечного радиоизлучения на сантиметровых волнах (см. §13 и [3]). К таким источникам относятся области генерации шумовых бурь,  $U$ -всплесков и т.д.<sup>56</sup>

Общим для указанных компонент является отмеченное во многих случаях различие знаков поляризации радиоизлучения, регистрируемого от источников, локализованных в областях с противоположными проекциями магнитного поля на луч зрения [3, 153, 154]. Это различие на первый взгляд представляется вполне естественным, поскольку при генерации поляризованного излучения обеспечивается преобладание одного типа волн над другим (необыкновенных волн в источниках  $S$ -компоненты, обыкновенных волн в источниках  $U$ -всплесков). Поэтому из областей с противоположными проекциями  $B_0 \cos \alpha$  на луч зрения выходит излучение с разными знаками вращения, но соответствующее волнам одного типа в магнитном поле.

Регистрация радиоизлучения с разными знаками вращения перестает быть тривиальной, если учесть, что по мере распространения

<sup>56</sup> $U$ -всплески представляют одну из разновидностей быстродрейфующих всплесков III типа (о последних см. §15). По современным представлениям  $U$ -всплески генерируются электронными потоками, которые движутся вдоль магнитной дуги (арки), опирающейся в фотосфере на области различной магнитной полярности.

в короне радиоизлучение от источников противоположной полярности переходит в области с более однородным магнитным полем, где знак проекции  $B_0$  на направление распространения становится одинаковым для обоих источников. При этом радиоизлучение одного из источников должно, очевидно, пройти через область, в которой проекция магнитного поля  $B_0 \cos \alpha$  меняет свой знак. Такая смена знака  $B_0 \cos \alpha$  может происходить в нулевом или в поперечном магнитном поле. В последнем случае распространение излучения от источников противоположной полярности во внешние слои короны можно представить с помощью Рис. 31а, на котором изображена обстановка над биполярной группой пятен при выходе  $S$ -компоненты солнечного радиоизлучения за пределы активной области короны. Если переход через поперечное магнитное поле происходит с соблюдением приближения геометрической оптики, то знаки поляризации излучения от обоих источников должны стать одинаковыми. Поскольку наблюдения, как правило, свидетельствуют об обратном, мы приходим к выводу, что переход через поперечное поле совершается без обращения знака поляризации радиоизлучения, т.е. в условиях сильного взаимодействия (см. Рис. 22). Последнее реализуется в случае, когда  $G_{\perp} \ll 1$ ; из приведенного выше примера обращения знака поляризации микроволновых всплесков ясно, что в условиях короны на сантиметровых волнах реализация условия  $G_{\perp} \ll 1$  не представляет затруднений. При выходе  $S$ -компоненты радиоизлучения возможно соблюдение и обратного неравенства  $G_{\perp} \gg 1$ ; на это указывают поляризационные наблюдения [155], согласно которым знак поляризации иногда не соответствует полярности пятна, над которым расположен источник.

Согласно [154] и многим более ранним публикациям, в метровом диапазоне наблюдаемое соответствие между знаком поляризации радиоизлучения и полярностью солнечного пятна, над которым локализован источник, трудно объяснить эффектом сильного взаимодействия в поперечном магнитном поле. Действительно, на частотах  $\omega \sim 2\pi \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  и для  $B_0 \sim 1 \text{ Гс}$ ,  $L_{\alpha} \sim 10^{10} \text{ см}$  критерий  $G_{\perp} \ll 1$ , обеспечивающий сохранение знака поляризации при прохождении через область с поперечным магнитным полем, выполняется лишь при условии, что в указанной области электронная концентрация  $N \ll 5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$ . Последнее означает, что область поперечного поля должна лежать высоко в короне (на расстоянии  $R > 2.5 R_{\odot}$  от центра Солнца; см. Рис. 1), где магнитное поле имеет преимущественно квазирадиальный характер. С другой стороны, нет оснований предполагать, что в области взаимодействия величина  $B_0$  значительно меньше 1 Гс

— значения, характерного для общего поля Солнца (это предположение позволило бы переместить область поперечного поля ближе к поверхности Солнца).

Здесь уместно вспомнить о существовании в солнечной короне нейтральных токовых слоев, содержащих поверхности, на которых магнитное поле  $B_0 = 0$  (см. §1). Поскольку источники метровых всплесков располагаются довольно высоко в короне, вполне возможно и более вероятно, что смена знака проекции магнитного поля на направление распространения  $B_0 \cos \alpha$  происходит для них не в области поперечного поля, а в нейтральном токовом слое (например, так, как изображено на Рис. 31, *b*) [147].

Выше в этом разделе было показано, что при квазипродольном распространении в неоднородном магнитном поле (и в том числе при прохождении через нейтральный слой) знак поляризации не меняется, если условие квазипродольности  $q^2 \ll 1$  выполнено по всей трассе распространения радиоволн от источника до выхода из короны в межпланетную среду. Указанное обстоятельство объясняет тесное соответствие между поляризацией метрового радиоизлучения и направлением магнитного поля в источнике. Обсуждаемый эффект сохранения знака вращения поляризации при прохождении через нейтральные слои в короне может иметь существенное значение и для интерпретации поляризационных характеристик микроволнового радиоизлучения.

Заметим, наконец, что при распространении излучения в направлениях, отвечающих квазипоперечному приближению на краях слоя ( $q^2 \gg 1$ ), характер поляризации после выхода из нейтрального слоя будет зависеть от величины параметра взаимодействия  $G_0$  (см. (7.65)) в этом слое. Для  $N \sim 10^7 \text{ см}^{-3}$ ,  $B_{sh} \sim 10 \text{ Гс}$  и  $L_{sh} \sim 10^8 - 10^9 \text{ см}$  величина

$$G_0 \simeq (0.7 - 7) \cdot 10^7 |\cos^3 \gamma|.$$

Отсюда следует, что эффективное взаимодействие  $G_0 \lesssim 1$  с обращением знака поляризации возможно лишь для углов  $\gamma \lesssim 0^\circ.5$ .

Таким образом, в широком интервале углов  $\gamma$ , для которых по всей трассе распространения радиоволн от источника до выхода из короны (включая нейтральные токовые слои) реализуется квазипродольное распространение  $q^2 \ll 1$ , поляризация обыкновенных и необыкновенных волн остается круговой. Если на краях нейтрального токового слоя  $q^2 \gg 1$  (квазипоперечное приближение), то знак поляризации излучения изменится только в узком интервале углов  $\gamma$  порядка одного градуса. Однако, этот вариант прохождения через нейтральный токовый слой в короне реализуется довольно редко.

Следует обратить внимание на то, что длительное существование нейтральных токовых слоев маловероятно вследствие тиринг-неустойчивости. Однако, токовый слой стабилизируется слабым магнитным полем  $B_{\perp}$ , ориентированным ортогонально к полю нейтрального токового слоя [157, 158]. Получающаяся структура — плазменный токовый слой — изображена на Рис. 29, *b*. В этом случае, как следует из содержания предыдущего раздела, сохранение знака поляризации проходящего излучения обеспечивается, если в токовом слое обеспечено неравенство, обратное (7.72). По оценкам в статье [159], для  $\omega \simeq 2\pi \cdot 160$  МГц,  $N \simeq 10^7$  см $^{-3}$ ,  $B_{sh} \simeq 10$  Г, и  $L_{sh} \simeq 10^8$  см величина в скобках равна  $3 \cdot 10^2$ . Однако, малый показатель степени  $1/4$  приводит к величине порядка единицы ( $\simeq 0.25$ ). В результате получаем, что смена знака поляризации происходит только в очень узком интервале углов

$$\operatorname{tg}^{5/4} \gamma < B_{\perp} / B_{sh} \ll 1.$$

Напротив, в широком интервале углов  $\gamma$  линейное взаимодействие в поперечном поле является сильным, и знак поляризации сохраняется. Это означает, что в хорошо сформированном токовом слое ( $B_{\perp} \ll B_0$ ) результирующая поляризация излучения такая же, как в нейтральном токовом слое (с  $B_{\perp} = 0$ ), хотя детальная картина взаимодействия и геометрико-оптического распространения в этих случаях существенно разная.

### 7.7. Взаимодействие электромагнитных волн и проблема выхода радиоизлучения из плотной плазмы

Выше в этом параграфе проблема выхода излучения за пределы плазмы обсуждалась только с точки зрения формирования поляризационных характеристик этого излучения. Однако важную роль играет и другой аспект проблемы, а именно — вопрос о принципиальной возможности для излучения покинуть плазму (а не задержаться и, в конце концов, поглотиться в ней). Исследование условий выхода в таком аспекте фактически началось еще в §6 в рамках приближения геометрической оптики. Там было выяснено, что покидают плотную плазму лишь волны, которым соответствуют на Рис. 16–18 отрезки дисперсионных кривых  $n_j^2(R)$ , заключенные между значениями  $n_j^2 = 0$  в плазме и  $n_j^2 = 1$  вне ее. Условие  $n_j^2(R) = 0$  определяет нижнюю границу области, из которой радиоизлучение беспрепятственно выходит из плазмы. Для необыкновенных волн на этой границе  $v = 1 - \sqrt{u}$ , для обыкновенных волн  $v = 1$ , т.е. в последнем случае граница располагается в более плотных слоях. Волны, отвечающие другим ветвям

дисперсионных кривых, не в состоянии покинуть пределы плазмы. В связи с этим вполне естественно возникает задача об отыскании условий, при которых происходит “переход” излучения с этих ветвей на отрезки дисперсионных кривых, соответствующих выходящим волнам, и об оценке эффективности такого перехода.

Одной из возможностей решения проблемы выхода служит линейное взаимодействие и взаимная трансформация разных типов волн в области  $v \sim 1$ , которые при определенных условиях возникают как в магнитоактивной, так и в изотропной регулярно неоднородной плазме. Другая возможность связана с рассеянием волн на частицах или на других волнах в плазме, которое сопровождается появлением излучения, соответствующего волнам разных типов, т.е. также сопровождается трансформацией (конверсией одного типа волн в другой). Этот эффект будет подробно рассмотрен в главе 8, здесь же мы ограничимся обсуждением роли линейного взаимодействия в проблеме трансформации и выхода излучения из плотной плазмы и прежде всего процесса перехода плазменных волн в электромагнитные.

Указанная проблема особенно важна для “плазменной гипотезы” происхождения солнечного спорадического радиоизлучения, выдвинутой [160, 161] еще в первые годы развития радиоастрономии, а затем обсуждавшейся в применении к радиоизлучению Юпитера, квазаров и пульсаров в работах [162–164, 346, 347] и многих других. Согласно этой гипотезе источником наблюдаемого радиоизлучения служат плазменные колебания (волны), возбуждаемые некоторым агентом (например, потоком частиц) на частотах  $\omega \sim \omega_L$ . Последовательное проведение подобной точки зрения на происхождение солнечного радиоизлучения зависит от того, могут ли плазменные волны в конкретных условиях солнечной атмосферы с достаточной эффективностью трансформироваться в излучение, выходящее из короны, Дело в том, что сами плазменные волны не могут распространяться в вакууме; будучи возбуждены близ уровня  $\omega \approx \omega_L$ , они полностью поглощаются в более разреженных слоях плазмы благодаря затуханию Ландау (см. §12).

В принципиальном отношении вопрос о переходе плазменных волн в электромагнитные возникает в связи с тем обстоятельством, что в строго однородной плазме оба типа волн в линейном приближении не связаны и распространяются совершенно независимо. При распространении волн вдоль  $\nabla N$  в неоднородной плоскостойкой изотропной плазме уравнения, описывающие электромагнитные и плазменные волны, разделяются, что указывает на независимость (отсутствие

взаимодействия) этих волн. Однако при распространении под углом к  $\nabla N$  ситуация меняется: электромагнитные волны (с вектором  $\mathbf{E}$  в плоскости падения) и плазменные волны взаимодействуют в области близ точки отражения плазменной волны, поскольку в этой области одновременно нарушается геометрико-оптическое приближение для обеих волн (уточним, что речь идет о волнах с одинаковой проекцией волновых векторов  $k_{em}$  и  $k_{pl}$  на плоскость, ортогональную  $\nabla N$ ). В результате указанного взаимодействия часть энергии плазменной волны трансформируется в энергию электромагнитной волны, выходящее за пределы плазмы. Поскольку условие изотропности плазмы (6.10) очень жесткое, и в космической плазме влиянием магнитного поля  $B_0$  на линейное взаимодействие волн пренебрегать, как правило, нельзя, мы не станем подробно обсуждать эффект конверсии плазменных волн в электромагнитные в изотропной плазме. Читатель может познакомиться с ним, обратившись к [3, 114, 115].

Исследование взаимодействия волн в плазме в присутствии постоянного магнитного поля  $B_0$  представляет собой весьма сложную проблему. Поэтому среди задач о взаимодействии электромагнитных волн в области  $v = \omega_L^2/\omega^2 \approx 1$  рассмотрены только наиболее простые варианты, в которые магнитное поле предполагается однородным, среда плоскостойкой, а распространение волн — происходящим вдоль градиента электронной концентрации.

Указанное взаимодействие было подробно исследовано [145, 146, 165, 166] методом фазовых интегралов, с которым читатель уже познакомился ранее на примере расчета взаимодействия волн в поперечном магнитном поле. Поэтому ниже детальные выкладки мы не приводим, ограничиваясь изложением конечных результатов (подробнее см. [3, 71]).

Обратимся прежде всего к Рис. 10, который характеризует квадраты показателей преломления волн разных типов  $n_j^2(v)$ , где  $v = \omega_L^2/\omega^2$ , не только в однородной плазме ( $\omega_L = \text{const}$ ) на разных частотах, но и в неоднородной плазме ( $\omega_L \neq \text{const}$ ) на данной частоте. Из этих рисунков видно, что при  $u < 1$  в регулярно неоднородной плазме существует практически лишь одна область взаимодействия; другая область, в которой  $n_j^2 < 0$ , обычно не достигается волнами, так как по мере приближения к ней последние экспоненциально затухают. Указанное обстоятельство заметно упрощает всю картину взаимодействия; существенно также, что в случае, когда  $u < 1$ , тепловым движением в плазме при исследовании взаимодействия вполне можно пренебречь, поскольку ход дисперсионных кривых в области

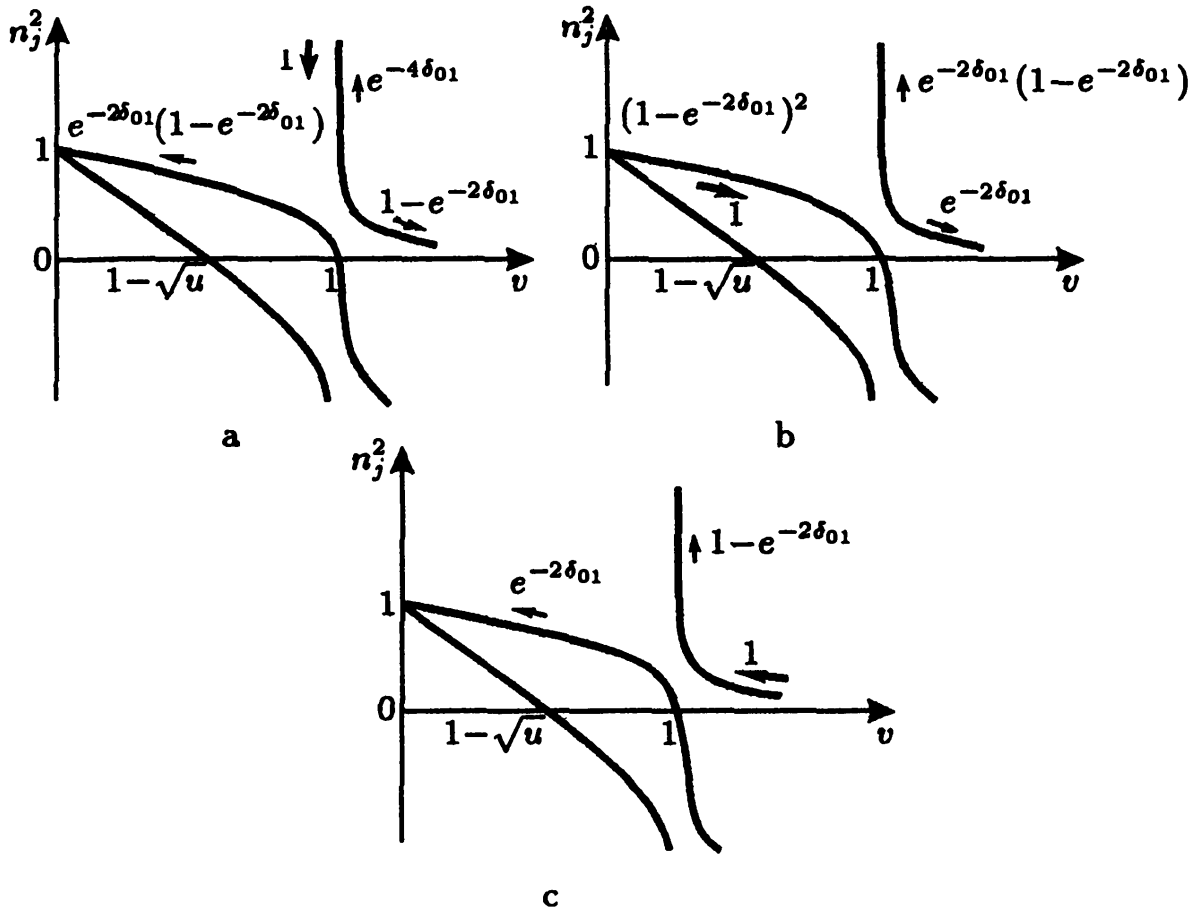


Рис. 32. Различные варианты (а, b и c) линейного взаимодействия волн при  $u = \omega_B^2/\omega^2 < 1$ . Указаны квадраты модулей амплитуд волн, выходящих из области взаимодействия, при падении на нее волны с единичной амплитудой. Жирной стрелкой отмечена падающая волна, тонкими стрелками — волны, возникающие в результате взаимодействия

$v \approx 1$  при  $v_T^2/c^2 \ll 1$  меняется незначительно.

Решение задачи аналогично приведенному выше для случая взаимодействия в области поперечного магнитного поля. Характерный параметр взаимодействия

$$2\delta_{01} = -i\rho_N \oint \frac{n_2 - n_1}{2} d\epsilon. \quad (7.73)$$

контур интегрирования охватывает точки ветвления на плоскости  $\epsilon = 1 - v$ , в которых  $n_1 = n_2$  (ср. с (7.56)). Вычисление  $2\delta_{01}$  при достаточно малых углах  $\alpha$  между  $B_0$  и направлением распространения волн дает:

$$2\delta_{01} \approx \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{c|\nabla\epsilon|} \frac{\alpha^2}{(1 + \omega/\omega_B)^{3/2}}. \quad (7.74)$$

В случае, когда  $u \cos^2 \alpha > 1$ , обе области взаимодействия соответствуют значениям  $n_j^2 > 0$  (Рис. 10); поэтому при расчете взаимодей-

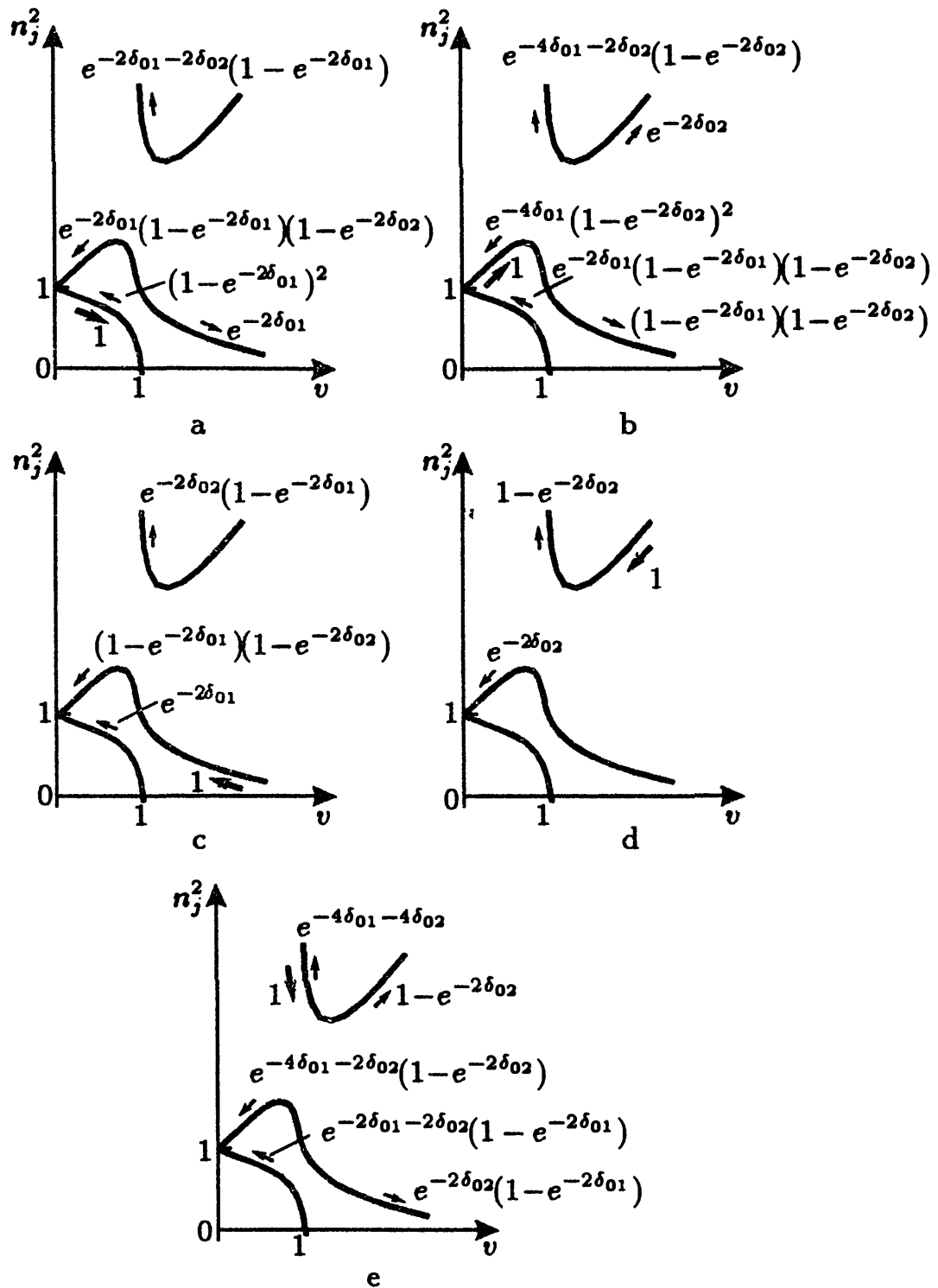


Рис. 33. Различные варианты линейного взаимодействия при  $\nu \cos^2 \alpha > 1$ .  
 Обозначения те же, что на предыдущем рисунке



ствия в сильном магнитном поле или на достаточно низких частотах необходим учет обеих областей. Как показывает подробное рассмотрение [165, 166], взаимодействие в нижней области (где близко подходят друг к другу дисперсионные кривые II и III, см. Рис. 13) определяется теми же формулами, что и в случае  $u < 1$ , с характерным параметром  $\delta_{01}$ , (7.74). Для верхней области взаимодействия (где близки дисперсионные кривые I и III) характерный параметр другой; при малых углах он равен

$$2\delta_{02} \approx \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{c|\nabla\epsilon|} \frac{\alpha^2}{(1 - \omega/\omega_B)^{3/2}}. \quad (7.75)$$

Различные варианты взаимодействия в области  $v \approx 1$  представлены на Рис. 32, 33. В частности, из Рис. 32, а следует, что если к области  $v \approx 1$  слева (т.е. со стороны  $v < 1$ ) подходит плазменная волна с единичной амплитудой, то из этой области выходит обыкновенная волна, распространяющаяся в сторону малых  $v$ . Модуль квадрата амплитуды этой волны (который при этом называют коэффициентом трансформации)

$$Q_{\text{ord}} = e^{-2\delta_{01}}(1 - e^{-2\delta_{01}}). \quad (7.76)$$

Оговоримся, что при получении (7.76) отражение необыкновенных волн от точки  $v = 1 + \sqrt{u}$  не учитывалось (оно может оказаться несущественным, например, по причине сильного поглощения на пути до этого слоя и обратно; в случаях, приведенных на Рис. 17, этот слой в пределах солнечной короны вообще не существует). Если же  $u \cos^2 \alpha > 1$ , то при падении плазменной волны на область взаимодействия из последней в сторону малых  $v$  выходит как обыкновенная, так и необыкновенная волны, причем относительные интенсивности этих волн, определяющие эффективность трансформации, соответственно равны

$$\begin{aligned} Q_{\text{ord}} &= e^{-2\delta_{01} - 2\delta_{02}}(1 - e^{-2\delta_{01}}), \\ Q_{\text{ext}} &= e^{-4\delta_{01} - 2\delta_{02}}(1 - e^{-2\delta_{02}}). \end{aligned} \quad (7.77)$$

(Рис. 33, е).

Коэффициенты трансформации  $Q_{\text{ord}}$ ,  $Q_{\text{ext}}$  достигают значений порядка единицы, если  $\delta_{01,02} \sim 1$ . Как показывает анализ, в условиях солнечной короны рассмотренные эффекты взаимодействия волн в области  $v \approx 1$  обычно весьма малы (поскольку значения параметров  $\delta_{01,02} \sim 1$  достигаются лишь при очень малых углах  $\alpha$  между направлением распространения волны и магнитным полем). Однако эффективность взаимодействия может повыситься, если в области  $v \approx 1$

реализуются большие градиенты электронной концентрации, например, при наличии в плазме разрывов типа ударных волн и т.п.

### 7.8. Линейное взаимодействие в системе “плазма + намагниченный вакуум”.

Выше в §5 отмечалось, что в сильном магнитном поле вакуум ведет себя как одноосная анизотропная среда, лишенная гиротропии. Линейное взаимодействие в такого рода средах было изучено на примере жидких кристаллов в статье [167], где было показано, что трансформация волн возникает только при поворотах оси анизотропии в пространстве. В намагниченном вакууме этот эффект связан с шириной магнитного поля, то есть поворотом проекции магнитного поля в плоскости, ортогональной распространению волны. В отсутствие ширины линейное взаимодействие в намагниченном вакууме исчезает. Однако, оно может иметь место в системе, состоящей из плазмы и намагниченного вакуума, что было отмечено в [168]. Этот случай мы обсудим, следуя статье [169]. Предположим, что плазма достаточно разреженная (параметр  $v \ll 1$ ), но тепловое движение частиц в плазме еще несущественно (выполнен, в частности, критерий (5.36), соответствующий приближению холодной плазмы).

В системе, состоящей из холодной классической плазмы и намагниченного вакуума, могут распространяться волны двух типов (обыкновенная и необыкновенная) с показателями преломления

$$n_{1,2} = \epsilon \pm C\sqrt{1+q^2} \quad (7.78)$$

и коэффициентами поляризации  $K_{1,2}$  вида (7.7). Верхний знак и индекс 1 относятся, как обычно, к необыкновенной, а нижний знак и индекс 2 — к обыкновенной моде. В этих формулах

$$q = \frac{\sqrt{u} \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \left[ 1 + \frac{3a(1-u)}{uv} \right], \quad (7.79)$$

$$\epsilon = 1 + \frac{11}{2} a \sin^2 \alpha - \frac{v(2-u \sin^2 \alpha)}{2(1-u)}, \quad (7.80)$$

$$C = \frac{v\sqrt{u} \cos \alpha}{u-1},$$

а параметры  $u$ ,  $v$ ,  $a$  и  $\alpha$  — те же, что и в §5.

Согласно результатам качественного анализа линейного взаимодействия волн, эффективность трансформации определяется параметром (7.27), где масштаб  $\Lambda_q = |q^{-1} dq/dl|_{q^2=1}^{-1}$  характеризует изменение

величины  $q$  вдоль луча. Взаимодействие будет сильным, если в области  $q^2 \sim 1$  параметр  $G \ll 1$ . Слабой трансформации соответствует случай  $G \gg 1$  или случай, когда волна вообще не проходит через область  $q^2 \sim 1$ .

В §5 отмечалось, что влияние намагниченного вакуума на характер распространения излучения становится существенным лишь в сильных магнитных полях нейтронных звезд (до  $10^{13}$  Гс). Вместе с тем, благодаря мощной гравитации на этих звездах масштаб  $\Lambda_q$  может быть прежде всего связан с изменением плотности плазмы, а не магнитного поля звезды. Именно этот случай мы и рассмотрим в данном разделе; обсуждение других вариантов см. в статье [169].

Пусть в глубине плазмы на нейтронной звезде, в слоях  $uv \gg 3a|1 - u|$ , где влияние плазмы на распространение волн превалирует над влиянием вакуума, реализуется квазипоперечное приближение  $q^2 = u \sin^4 \alpha / 4 \cos^2 \alpha \gg 1$ . В этих слоях поляризации обыкновенной и необыкновенной волн близки к линейным, с вектором  $\mathbf{E}$  по оси  $x$  для необыкновенной волны и с вектором  $\mathbf{E}$  по оси  $y$  для обыкновенной волны (в системе координат на Рис. 6 б). Если плотность плазмы в направлении распространения волн уменьшается, то параметр  $q$  (7.79) при  $u > 1$  убывает, становится равным нулю в точке

$$1 + \frac{3a(1-u)}{uv} = 0, \quad (7.81)$$

и затем меняет знак и возрастает по абсолютной величине до значений  $|q| \gg 1$ . В последней области поляризацию волн обоих типов определяет намагниченный вакуум; поляризация снова становится близка к линейной, но здесь вектор  $\mathbf{E}$  в волне обыкновенного типа направлен по оси  $x$ , а необыкновенная волна поляризована по оси  $y$  (см. §5). Эффективное взаимодействие возникает, если в слоях  $q^2 \sim 1$ , разделяющих области с разной ориентацией вектора  $\mathbf{E}$  для волн одного типа, свойства системы “плазма + вакуум” меняются столь резко, что поле проходящей волны не “успевает” изменить свою ориентацию в соответствии с требованиями геометрико-оптического приближения. Это происходит, когда параметр взаимодействия  $G \ll 1$ ; в рассматриваемом случае  $\alpha = \text{const}$ ,  $u = \text{const} > 1$  и переменного  $v$  параметр взаимодействия (7.27) принимает вид

$$G_v^\perp = 12\sqrt{2} \frac{\omega}{c} \frac{a}{u} \text{ctg}^2 \alpha \left( \frac{v}{|dv/dl|} \right)_{q^2=1}. \quad (7.82)$$

Из этого выражения следует, что эффект линейного взаимодействия

усиливается по мере приближения направления распространения к чисто поперечному ( $\alpha = \pi/2$ ).

Параметр взаимодействия меняет свой вид, если в глубине плазмы, где влияние вакуума несущественно, волны циркулярно поляризованы ( $q^2 \ll 1$ ). При выходе из плазмы величина  $q$  возрастает, поляризация становится эллиптической, а затем — линейной в области, где влияние вакуума становится преобладающим и  $q^2 \gg 1$ . Если в переходном слое  $q^2 \simeq 1$  при этом реализуется условие

$$\left| 1 + \frac{3a(1-u)}{uv} \right| \gg 1, \quad (7.83)$$

то параметр взаимодействия примет вид

$$G_v^{\parallel} = 3\sqrt{2} \frac{\omega}{c} a \sin^2 \alpha \left( \frac{v}{|dv/dl|} \right)_{q^2=1}. \quad (7.84)$$

Взаимодействие в этом случае усиливается при продольном распространении волны, когда  $\alpha \rightarrow 0$ .

Приведем теперь коэффициент трансформации волн в случае, характеризуемом параметром взаимодействия (7.82). В системе “плазма + намагниченный вакуум” уравнения квазиизотропного приближения (7.4) для линейного слоя плазмы  $v = v_0 - bl$  (где  $v_0$  — значение переменной  $v$  в точке (7.81), где  $q = 0$ ), сводятся к уравнению Вебера. Его решения выражается через функции параболического цилиндра. Соответствующий коэффициент трансформации (7.13) имеет вид:

$$Q = \exp\left(-\frac{\pi}{4\sqrt{2}} G_v^{\perp}\right). \quad (7.85)$$

В целом это решение аналогично рассмотренному выше случаю взаимодействия волн в плазме при распространении через поперечное магнитное поле (ср. (7.85) и (7.61)), хотя выражения для параметра взаимодействия  $G$  совершенно различны.

В случае, когда взаимодействие в системе “плазма + намагниченный вакуум” характеризуется параметром (7.84), выражение для коэффициента трансформации  $Q$  может быть получено из уравнения Риккати (7.15). В этом уравнении следует учесть, что функция  $G(\eta)$  (см. (7.16)), по-прежнему выражается через разность  $n_1 - n_2$  и функцию  $\Psi(q)$ . Однако,  $n_1 - n_2$  и  $q$  теперь определяются формулами (7.78) и (7.79), соответственно. Если на звезде плотность плазмы меняется по

барометрическому закону  $v \propto \exp(-l/H)$ , то функция взаимодействия  $G(\eta)$  с учетом (7.83) примет вид

$$G(\eta) = 3 \frac{\omega}{c} a H \sin^2 \alpha (\sin 2\eta \cos^2 2\eta)^{-1}, \quad (7.86)$$

где  $\eta = \pi/4 + (1/2) \operatorname{arctg} q$ . Решение уравнения Риккати выражается при этом через гипергеометрические функции (аналогично случаю взаимодействия в переходном слое плазмы, который рассмотрен в [130]). Коэффициент трансформации имеет вид

$$Q = \left[ 1 + \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} G_v^{\parallel}\right) \right]^{-1/2}, \quad (7.87)$$

где  $G_v^{\parallel}$  описывается формулой (7.84).

Посмотрим теперь, насколько эффект линейного взаимодействия может быть существенным при формировании поляризации излучения нейтронных звезд — рентгеновских пульсаров. Примем для оценки, что характерный масштаб высоты в плазменной атмосфере нейтронной звезды  $L \simeq H \simeq 10^2$  см, а магнитное поле  $B_0 \simeq 5 \cdot 10^{12}$  Г.

В случае, когда взаимодействие описывается параметром  $G_v^{\parallel}$ , оно станет достаточно сильным, если  $G_v^{\parallel} \lesssim 1$ . Согласно (7.84), это приводит к соотношению  $\hbar\omega \sin^2 \alpha \lesssim 4 \cdot 10^{-5}$  keV. Даже для мягкого рентгеновского излучения с энергией  $\hbar\omega \simeq 1$  keV на квант эффект трансформации будет иметь место только в узкой области углов в доли градуса и, следовательно, практически несуществен.

В другом случае, когда имеет место взаимодействие с параметром  $G_v^{\perp}$ , трансформация становится эффективной, если  $G_v^{\perp} \lesssim 1$ . Для широкой области углов  $\alpha \sim 1$  это условие справедливо, если  $\hbar\omega \lesssim 0.4$  keV (см. the формулу (7.82)). Концентрация плазмы в переходной области должна при этом обеспечить соблюдение равенства (7.81), согласно которому  $N_0 \simeq 10^{20}$  см<sup>-3</sup>. Поскольку этот эффект возможен в широкой области углов  $\alpha$ , можно ожидать, что в этом случае эффект линейного взаимодействия окажется существенным при формировании поляризации наблюдаемого рентгеновского излучения в диапазоне  $\hbar\omega \lesssim 1$  keV. Следует подчеркнуть, однако, что этот эффект изменяет степень поляризации излучения только в том случае, если исходное излучение поляризовано. Неполаризованное излучение после прохождения области взаимодействия так и останется неполяризованным. Это обстоятельство, следующее из равенства коэффициентов трансформации (7.13) и (7.14), разумеется, надо иметь в виду во всех рассмотренных выше случаях линейного взаимодействия в плазме.

## Глава 4

# Перенос излучения в астрофизической плазме

В §6 была рассмотрена так называемая лучевая трактовка приближения геометрической оптики. Согласно этой трактовке распространение набора волн с волновыми векторами  $k_j$  в элементе фазового объема  $d^3k$  (“пакета”, по терминологии, принятой в физике плазмы) происходит вдоль лучей, — кривых, касательные к которым совпадают с направлением вектора групповой скорости  $v_{gr}$ . Сказанное вполне соответствует тому обстоятельству, что в изотропной среде вектор потока энергии (вектор Пойнтинга) все время, а в магнитоактивной плазме в среднем по времени направлен по групповой скорости  $v_{gr}$ . Указанный набор волн, распространяющихся вдоль луча (“излучение”, по терминологии, принятой в астрофизике), характеризуется величиной интенсивности  $I_\omega$ , определение которой было дано в §2. Коль скоро форма луча в среде определена (в неоднородной изотропной среде она описывается уравнением (6.13)), то возникает проблема отыскания закона изменения интенсивности вдоль луча. Ясно, что в однородной среде (где лучи совпадают с прямыми) интенсивность излучения не меняется вдоль луча, если среда не обладает поглощением и собственным излучением. В неоднородных средах это уже не так: интенсивность зависит от координаты  $l$  вдоль луча даже в прозрачной неизлучающей среде. Эта зависимость, учитывающая также собственное излучение и поглощение среды, описывается уравнением переноса интенсивности излучения, вид которого и его решения будут установлены в §8.

При распространении излучения в магнитоактивной плазме наряду с интенсивностью меняется поляризация этого излучения, Задача об изменении поляризации в процессе распространения излучения (“перенос поляризации”) представляет особенный интерес для радиоастрономии и прежде всего для исследования поляризации распре-

деленного космического радиоизлучения, радиоизлучения дискретных источников, Солнца и т.п. Исследование поляризации играют важную роль и в оптической астрономии. Поэтому наряду с уравнением переноса интенсивности важную роль в описании характеристик излучения в астрофизической плазме играет уравнение переноса поляризации излучения, описывающее изменение поляризационных параметров (см. §2) вдоль луча. Это уравнение и его решения будут обсуждаться в §9 в этой главе.

## §8. Перенос интенсивности излучения

### 8.1. Уравнение переноса в изотропной плазме

В однородной среде изменение интенсивности излучения в направлении  $v_{gr}$  описывается, вообще говоря, уравнением

$$\frac{dI_\omega}{dl} = \mathcal{F}(I_\omega), \quad (8.1)$$

в котором  $dl$  — элемент длины вдоль  $v_{gr}$  (вдоль луча), а  $I_\omega$  — спектральная интенсивность излучения (см. §2). Поскольку в (8.1) время не входит, ясно, что такое уравнение пригодно лишь для описания стационарного распределения интенсивности  $I_\omega(l)$  в среде с параметрами, не зависящими от времени. (Соответствующее обобщение на случай нестационарной интенсивности  $I_\omega$  в среде с переменными параметрами будет представлено в конце этого раздела.) Если величина  $I_\omega$  достаточно мала, функцию  $\mathcal{F}(I_\omega)$  можно разложить в ряд по  $I_\omega$ , ограничившись в разложении первыми двумя членами, Тогда уравнение (8.1) примет следующий вид:

$$\frac{dI_\omega}{dl} = a_\omega - \mu_j I_\omega. \quad (8.2)$$

Здесь не зависящий от  $I_\omega$  член  $a_\omega$  в правой части уравнения называется излучательной способностью, а коэффициент пропорциональности  $\mu_j$  во втором слагаемом — коэффициентом поглощения (по интенсивности).<sup>57</sup>

<sup>57</sup> Индекс  $j$  у коэффициента поглощения  $\mu_j$  (равно как у показателя преломления  $n_j$ ) указывает, что эти величины характеризуют волны  $j$ -го типа (электромагнитные или плазменную). К определенному типу волн относятся, конечно, и

Из вида уравнения переноса (8.2) ясно, что  $a_\omega$  полностью определяет приращение интенсивности излучения в точке  $l$  на луче, если  $I_\omega(l) = 0$ . Отсюда следует, что  $a_\omega$  характеризует вклад в интенсивность от излучения, испускаемого средой (плазмой). Учитывая определение интенсивности как потока излучения через единичную площадку в единицу времени в единичном интервале частот и телесных углов и замечая, что  $a_\omega$  дает прирост интенсивности на единичном отрезке вдоль луча, нетрудно сообразить, что по своему смыслу излучательная способность  $a_\omega$  совпадает со спектральной мощностью излучения, испускаемого единичным объемом среды (об определении спектральной мощности излучения источника  $\mathcal{P}_{\omega\Omega}$  см. §3). С другой стороны, фигурирующий в (8.2) коэффициент поглощения  $\mu_j$  представляет относительное уменьшение интенсивности на единице длины  $-I_\omega^{-1}(dI_\omega/dl)$  в условиях, когда излучательная способность  $a_\omega = 0$  (т.е. без учета излучения, испускаемого средой на этом интервале).

Поскольку  $a_\omega$  не связана с интенсивностью излучения  $I_\omega$ , она характеризует спонтанные процессы, не зависящие от наличия или отсутствия излучения вдоль данного луча. Наоборот, член  $\mu_j I_\omega$  определяет те индуцированные (вынужденные) процессы излучения и поглощения, которые происходят лишь под действием излучения, переносимого вдоль этого луча, и исчезают при  $I_\omega \rightarrow 0$ . Вид  $a_\omega$  и  $\mu_j$  будет установлен в дальнейшем: расчету излучательной способности плазмы посвящен §11, а вычислению коэффициента поглощения — главы 6 и 7. Как  $a_\omega$ , так и  $\mu_j$  могут зависеть от интенсивности излучения вдоль других лучей (или от величины интенсивности вдоль данного луча, но переносимой в противоположном направлении, или имеющей другую частоту). В этом случае речь идет об учете в уравнении переноса (8.2) процессов рассеяния излучения. Простейший пример уравнения переноса с учетом рассеяния и его решение будут рассмотрены в этом параграфе; более полное обсуждение мы отложим до главы 8, где будет установлена форма  $a_\omega$  и  $\mu_j$  для различных конкретных типов рассеяния на волнах и частицах плазмы.

Заметим, что по самому смыслу разложения функции  $\mathcal{F}(I_\omega)$  (8.1) параметры  $a_\omega$  и  $\mu_j$  не зависят от величины интенсивности  $I_\omega$  вдоль рассматриваемого луча, для которого написано уравнение переноса (8.1), (8.2). Если, однако, интенсивность  $I_\omega$  становится не слишком малой, нелинейный характер  $\mathcal{F}(I_\omega)$  можно учесть путем введения сле-

---

величины  $a_\omega$  и  $I_\omega$ ; однако для упрощения записи индекс  $j$  у этих величин мы опускаем, равно как и индекс  $\Omega$ , указывающий, что эти величины относятся к единичному телесному углу.



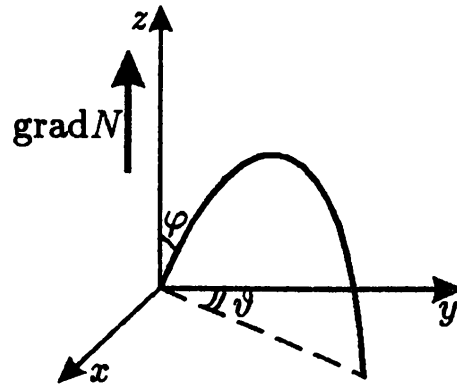


Рис. 34. К учету рефракции в уравнении переноса излучения в плоскослоистой среде

дующих членов разложения (более высокого, чем первый, порядка по  $I_\omega$ ). Можно, однако, что нередко и делается, считать  $\mu_j$  функцией  $I_\omega$ . Пример такого рассмотрения представлен в §15 при исследовании квазилинейной релаксации системы поток – плазма под действием возбужденных плазменных волн.

Выше отмечалось, что уравнение переноса (8.2) справедливо лишь в однородной среде. При переходе к случаю неоднородной плазмы в уравнении переноса следует учесть то обстоятельство, что интенсивность излучения  $I_\omega$  не сохраняется вдоль луча даже при  $a_\omega = 0$  и  $\mu = 0$ . Это связано в конечном счете с изменением телесного угла  $d\Omega$ , в котором распространяется излучение, вследствие рефракции в среде с показателем преломления  $n_j(\mathbf{r})$ . Закон изменения  $I_\omega(l)$  в произвольной плавно неоднородной среде можно получить, исходя из уравнения непрерывности для плотности энергии излучения в фазовом пространстве векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{k}$ . Подобная процедура проведена в [170, 171]; однако мы отложим получение уравнения переноса излучения таким способом до следующего раздела, где будет рассматриваться случай неоднородной магнитоактивной плазмы. Здесь же мы пойдем более прямым и более наглядным путем, предположив, что изотропная плазма — плоскослоистая, т. е. ее показатель преломления  $n_j$  зависит только от одной декартовой координаты  $z$ . Учет рефракции в этом случае значительно упрощается.

Введем в плоскослоистой среде систему координат  $x, y, z$ , направив ось  $z$  вдоль  $\text{grad } N$ . Рассмотрим луч, расположенный в плоскости, проходящей через ось  $z$ , и составляющий с плоскостью  $yz$  угол  $\vartheta$  (Рис. 34). Уравнение луча определяется законом (6.14) и в нашем случае может быть записано в форме

$$n_j \sin \phi = n'_j \sin \phi', \quad \vartheta = \vartheta', \quad (8.3)$$

где  $n_j$ ,  $\phi$ ,  $\vartheta$  относятся к значению  $z$ , а  $n'_j$ ,  $\phi'$ ,  $\vartheta'$  — к значению  $z'$  ( $z$  и  $z'$  определяют две произвольно выбранные плоскости, параллельные плоскости  $xy$ ). Далее, наряду с лучом, имеющим в плоскости  $z$  угол падения  $\phi$ , рассмотрим луч, проходящий через плоскость  $z$  под углами  $\phi + d\phi$  и  $\vartheta + d\vartheta$ ; для него, очевидно,

$$n_j \sin(\phi + d\phi) = n'_j \sin(\phi' + d\phi'), \quad \vartheta + d\vartheta = \vartheta' + d\vartheta'. \quad (8.4)$$

С учетом соотношений (8.3) и малости приращений  $d\phi$  и  $d\vartheta$ , из (8.4) получим

$$n_j \cos \phi d\phi = n'_j \cos \phi' d\phi', \quad d\vartheta = d\vartheta'. \quad (8.5)$$

Перемножая почленно первое равенство из (8.3) и оба равенства (8.5) и принимая во внимание, что  $d\Omega = \sin \phi d\phi d\vartheta$  и  $d\Omega' = \sin \phi' d\phi' d\vartheta'$  представляют собой элементы телесных углов, в которых лежат лучи из интервалов  $d\phi d\vartheta$  и  $d\phi' d\vartheta'$ , получим следующее соотношение:

$$n_j^2 \cos \phi d\Omega = n'_j{}^2 \cos \phi' d\Omega'. \quad (8.6)$$

Далее учтем, что в плоскостной среде с  $a_\omega = 0$  и  $\mu_j = 0$  и при стационарном распределении интенсивности вдоль лучей закон сохранения энергии требует, чтобы потоки энергии через одинаковые площадки  $dS$  и  $dS'$ , сквозь которые проходит рассматриваемый луч в плоскостях  $z$  и  $z'$ , были равны между собой. Поток энергии через  $dS$  равен  $I_\omega \cos \phi d\Omega dS$  и, следовательно, равенство потоков через  $dS = dS'$  приводит к соотношению

$$I_\omega \cos \phi d\Omega = I'_\omega \cos \phi' d\Omega', \quad (8.7)$$

( $I_\omega$  — интенсивность вдоль луча в точке  $z$ ,  $I'_\omega$  — то же самое, но в точке  $z'$ ). Деля почленно равенство (8.7) на (8.6), получаем  $I_\omega n_j^{-2} = I'_\omega n'_j{}^{-2}$ . Поскольку плоскости  $z$  и  $z'$  были выбраны произвольно, отсюда следует, что в прозрачной ( $\mu_j = 0$ ) и неизлучающей ( $a_\omega = 0$ ) плоскостной среде со стационарным распределением интенсивности  $I_\omega(l)$  имеет место следующий инвариант вдоль луча:

$$\frac{I_\omega}{n_j^2} = \text{const}. \quad (8.8)$$

Тот же инвариант соблюдается в изотропной среде с произвольным (но плавным) характером неоднородности.

Использование (8.8) для случая распространения волн в солнечной короне позволяет установить, что вследствие рефракции интенсивность радиоизлучения вдоль луча увеличивается по мере удаления

от Солнца, поскольку в корональной плазме показатель преломления  $n_{em}^2 < 1$  и растет с увеличением расстояния от центра Солнца  $R$  (см. §6). В вакууме ( $n_{em} = 1$ ) при удалении от Солнца или другого протяженного источника интенсивность излучения не изменяется. Это обстоятельство представляется вполне естественным, если учесть, что по мере удаления от источника плотность потока излучения  $F_\omega$  (2.10) через единичную площадку убывает как  $R^{-2}$ , а телесный угол  $\Omega$ , в котором сосредоточено излучение в каждой точке этой площадки, уменьшается по закону  $\Omega \sim R^{-2}$ . Именно поэтому сохраняется величина интенсивности  $I_\omega = F_\omega/\Omega$ , равная отношению плотности потока излучения к телесному углу, в котором сосредоточено это излучение.

Из сказанного ясно, что уравнения переноса, рассматриваемые в этом параграфе, и прежде всего инвариант (8.8), относятся только к такому излучению, которое в каждой точке пространства обладает угловым спектром конечной ширины. Лишь в этом случае, очевидно, можно ввести понятие интенсивности излучения  $I_\omega$ , имеющей смысл плотности потока излучения, отнесенной к единичному телесному углу по направлениям фазовых или групповых скоростей. Наоборот, для излучения, не распределенного в каждой точке пространства по телесным углам, указанное выше понятие интенсивности ввести нельзя. Это означает, что для излучения, обладающего в каждой точке одним определенным направлением векторов  $v_{ph}$  и  $v_{gr}$  (например, к нерассеянному излучению от точечного источника), нельзя применять инвариант  $I_\omega/n_j^2 = \text{const}$ .

Посмотрим теперь, каким образом учет этого инварианта в неоднородной среде меняет вид уравнения переноса. Согласно (8.8) вносимое рефракцией изменение интенсивности на единице длины луча составляет  $dI_\omega/dl = (2I_\omega/n_j)(dn_j/dl)$ . В неоднородной среде с отличной от нуля излучательной способностью  $a_\omega$  и коэффициентом поглощения  $\mu_j$  величину  $(2I_\omega/n_j)(dn_j/dl)$  нужно добавить в правую часть уравнения переноса (8.2). В результате оно приобретет следующий вид [172]:

$$n_j^2 \frac{d}{dl} \left( \frac{I_\omega}{n_j^2} \right) = a_\omega - \mu_j I_\omega. \quad (8.9)$$

Если интенсивность излучения зависит не только от координаты вдоль луча, но и от времени:<sup>58</sup>  $I_\omega = I_\omega(l, t)$ , то уравнение переноса

<sup>58</sup> Подобная зависимость от времени может быть обусловлена изменением во времени или граничных условий для  $I_\omega$ , или значений параметров  $a_\omega$ ,  $\mu_j$ .

должно быть записано в форме [171]:

$$\frac{1}{v_{\text{gr}}} \frac{\partial I_{\omega}}{\partial t} + n_j^2 \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{I_{\omega}}{n_j^2} \right) = a_{\omega} - \mu_j I_{\omega}. \quad (8.10)$$

И наконец, в случае, когда показатель преломления медленно меняется во времени:  $n_j = n_j(\mathbf{r}, t)$ , уравнение переноса обобщается таким образом:

$$\frac{1}{v_{\text{gr}}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{I_{\omega}}{n_j^2} \right) + \frac{3}{c} \frac{\partial n_j}{\partial t} \frac{I_{\omega}}{n_j^2} + \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{I_{\omega}}{n_j^2} \right) = \frac{a_{\omega}}{n_j^2} - \mu_j \frac{I_{\omega}}{n_j^2}. \quad (8.11)$$

Формула (8.11) представляет собой уравнение переноса интенсивности в нестационарной плавно неоднородной изотропной среде. Вывод (8.11) можно найти в [173].

Уравнение переноса излучения с учетом эффектов рассеяния можно записать в виде

$$\frac{dI_{\omega}}{dl} = a_{\omega} - \mu_j I_{\omega} + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \mu_j^{\text{sc}}(\Omega') I_{\omega}(\Omega') d\Omega' - \mu_j^{\text{sc}}(\Omega) I_{\omega}. \quad (8.12)$$

Здесь  $\mu_j^{\text{sc}}$  — коэффициент рассеяния,<sup>59</sup>  $\Omega$  — единичный вектор вдоль луча, а  $\Omega'$  характеризует другие направления, из которых излучение интенсивности  $I_{\omega}(\Omega')$  рассеивается в направлении  $\Omega$ . Предпоследний интегральный член играет роль излучательной способности в направлении  $\Omega$ , а последний характеризует ослабление интенсивности  $I_{\omega}(\Omega)$  за счет рассеяния из  $\Omega$  в другие направления  $\Omega'$ . Уравнение переноса (8.12) записано для стационарного случая и в среде с показателями преломления  $n_j$ , близкими к единице. В плоскостой среде, где все переменные зависят от одной координаты  $h$ , это уравнение принимает вид

$$\cos \Theta \frac{dI_{\omega}}{dh} = a_{\omega} - \mu_j I_{\omega} + \frac{\mu_j^{\text{sc}}}{2} \int_0^{\pi} I_{\omega}(\Theta') \sin \Theta' d\Theta' - \mu_j^{\text{sc}} I_{\omega}, \quad (8.13)$$

где  $\Theta$  — угол между направлением луча  $\Omega$  и осью  $h$ . Более подробно об уравнениях переноса в рассеивающих средах см. в [174–177].

Приведенные уравнения переноса излучения могут использоваться лишь в условиях, когда космологические эффекты, связанные с расширением Вселенной, несущественны. Дело в том, что расширение

<sup>59</sup>Предполагается для простоты, что индикатриса рассеиваемого излучения изотропна, но коэффициент  $\mu_j^{\text{sc}}$  зависит от направления рассеивающегося излучения.

Вселенной приводит к изменению плотности энергии и интенсивности излучения даже в тех условиях, когда они согласно (8.11) должны оставаться постоянными. Конкретным примером служит однородное распределение интенсивности излучения в вакууме: из (8.11) следует, что в этом случае  $\partial I_\omega / \partial t = 0$ , тогда как в процессе космологического расширения величина  $I_\omega$  и плотность энергии  $W_\omega$  меняется. Последнее вызвано изменением объема, занимаемого излучением, и частоты излучения в нестационарной Вселенной. Как мы убедимся, указанными эффектами можно пренебречь, если перенос излучения ограничен временами, малыми по сравнению с характерным временем расширения Вселенной ( $\sim 10^{10}$  лет), поэтому они не сказываются на результатах исследования процессов излучения и распространения электромагнитных волн большинством известных астрономических источников. Однако при изучении объектов, удаленных на космологические расстояния, и особенно реликтового излучения, приходящего к нам с расстояний, на которых  $z_c \gtrsim 10^3$ ,<sup>60</sup> космологические эффекты имеют определяющее значение.

Согласно современным представлениям, основанным на горячей модели Вселенной [178, 179], реликтовое излучение возникло в дозвездной стадии развития Вселенной, когда однородная первичная плазма была нагрета до температуры порядка  $5 \cdot 10^3$  К. После охлаждения плазмы, связанного с космологическим расширением, и перехода последней в состояние нейтрального газа (из-за рекомбинации водорода) вещество перестало эффективно взаимодействовать с излучением. (Последнее обстоятельство объясняется весьма слабым излучением и поглощением в разреженном нейтральном водороде в непрерывном спектре.) Благодаря этому во Вселенной присутствует сохранившееся от тех времен (“реликтовое”) излучение, обладающее теперь температурой всего лишь 2.7 К. Реликтовое излучение содержит важную информацию о состоянии и физических условиях в первичной плазме. Для получения такой информации надо исследовать изменение характера излучения в процессе космологического расширения на основе соответствующего уравнения переноса интенсивности излучения.

В нестационарной модели однородной и изотропной Вселенной все характеристики излучения и его источников зависят лишь от времени  $t$ , но не от пространственных координат. Поэтому, в частности, спек-

<sup>60</sup> Параметр  $z_c$  вводится для характеристики относительной величины красного смещения. Он равен  $(\omega_0 - \omega) / \omega$ , где  $\omega_0$  и  $\omega$  — частоты монохроматического излучения в системах отсчета, связанных соответственно с источником и наблюдателем.

тральная плотность энергии излучения  $W_\omega = W_\omega(\omega, t)$ <sup>61</sup> и в уравнении переноса будут фигурировать производные  $\partial W_\omega / \partial t$ , характеризующие “перенос” излучения во времени.

Как уже отмечалось, изменение величины  $W_\omega$  в процессе космологического расширения происходит по двум причинам: из-за увеличения объема, в котором сосредоточено излучение, и изменения частоты этого излучения. При этом локально, в каждом элементе объема расстояния между любыми двумя точками пространства увеличиваются в соответствии с законом Хаббла

$$v = Hr, \quad (8.14)$$

в котором  $v$  — относительная скорость точек, находящихся на расстоянии  $r$ . (Закон Хаббла справедлив для расстояний  $r$ , на которых  $v \ll c$ . Параметр  $H$  называется постоянной Хаббла; в настоящее время величину  $H^{-1}$  принимают равной  $(1 - 2) \cdot 10^{10}$  лет.)

В рассматриваемых условиях удобно получить сначала уравнение переноса, описывающее изменение спектральной плотности фотонов  $N_\omega$ , а затем уже перейти к уравнению для спектральной плотности энергии  $W_\omega$  (см. [179]). Упомянутая величина  $N_\omega$  имеет смысл числа фотонов в единице объема, приходящихся на единичный интервал частот  $\omega$ . Из этого определения следует, что спектральная плотность фотонов  $N_\omega$  связана с  $W_\omega$  соотношением

$$W_\omega = \hbar\omega N_\omega, \quad (8.15)$$

в котором  $\hbar\omega$  — энергия фотонов.

При увеличении объема  $V = (4/3)\pi r^3$  в процессе космологического расширения число квантов в этом объеме остается неизменным:

$$\frac{4\pi}{3} r^3 N_\omega = \text{const.}$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим

$$\frac{\partial N_\omega}{\partial t} r + 3N_\omega \frac{dr}{dt} = 0,$$

что с учетом (8.14) дает следующее:

$$\frac{\partial N_\omega}{\partial t} = -3HN_\omega. \quad (8.16)$$

<sup>61</sup> Об определении величины  $W_\omega$  см. §2.

Далее примем во внимание изменение частоты излучения в процессе космологического расширения. При таком расширении длина волны излучения  $\lambda = 2\pi c/\omega$  (т.е. величина, обратная импульсу фотона  $\hbar k$ ) меняется так же, как расстояние  $r$  между двумя точками:  $(1/\lambda)d\lambda/dt = (1/r)dr/dt = H$ . (При переходе к последнему соотношению был принят во внимание закон (8.14).) Отсюда следует, что производная по времени от частоты  $\omega = 2\pi c/\lambda$  будет равна

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\omega}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = -H\omega. \quad (8.17)$$

Эта производная характеризует скорость “движения” фотонов по оси частот  $\omega$ , а величина  $N_\omega d\omega/dt$  — поток фотонов по этой оси вследствие расширения. Нетрудно сообразить, что изменение спектральной плотности фотонов  $N_\omega$  в единицу времени из-за “перемещения” фотонов по оси частот составит тогда

$$\frac{\partial N_\omega}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{d\omega}{dt} N_\omega \right) = H \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega N_\omega). \quad (8.18)$$

Таким образом, хаббловское расширение приводит к уменьшению плотности числа фотонов (8.16) и к ее перераспределению в низкочастотную часть спектра (8.18).

Для получения полного изменения  $N_\omega$  при космологическом расширении нужно сложить оба эффекта (8.16) и (8.18):

$$\frac{\partial N_\omega}{\partial t} = -3HN_\omega + H \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega N_\omega). \quad (8.19)$$

Теперь, учитывая связь между  $N_\omega$  и  $W_\omega$  (8.15), нетрудно написать уравнение переноса для спектральной плотности излучения с учетом космологического расширения в однородной и изотропной Вселенной [179]:

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial t} = -3HW_\omega + H\omega \frac{\partial W_\omega}{\partial \omega} + \alpha_\omega - \beta W_\omega. \quad (8.20)$$

В правую часть уравнения (8.20) внесены также члены, характеризующие испускание ( $\alpha_\omega$ ) и поглощение ( $\beta$ ) излучения в среде. Только этими членами и учитывается в данном уравнении переноса наличие вещества во Вселенной, поскольку показатель преломления среды  $n_j$  был принят равным единице (т.е.  $v_{gr} = c$ ). Сопоставляя эти члены с величинами, стоящими в правой части уравнения переноса (8.10) для

интенсивности  $I_\omega = v_{\text{gr}} W_\omega = c W_\omega$ , убеждаемся, что введенные величины  $\alpha_\omega$  и  $\beta$  связаны с излучательной способностью  $a_\omega$  и коэффициентом поглощения  $\mu_j$  следующими простыми соотношениями:  $\alpha_\omega = a_\omega$  и  $\beta = \mu_j c$ .

## 8.2. Уравнение переноса в магнитоактивной плазме

В предыдущем разделе были сформулированы уравнения для анализа переноса излучения в изотропной среде или вакууме. Однако в физике плазмы и особенно в теории генерации и распространения радиоизлучения в космических условиях несомненный интерес представляет и проблема переноса излучения в неоднородной магнитоактивной плазме.

При выводе соответствующего уравнения переноса [180] применяется способ, аналогичный использованному в [170] для изотропной среды. Основное отличие заключается в учете того обстоятельства, что в магнитоактивной плазме дисперсионное уравнение для волн  $j$ -го типа имеет вид

$$\omega = \omega_j(\mathbf{k}_j, \mathbf{r}),$$

т.е. частота  $\omega$  зависит не только от величины волнового вектора  $\mathbf{k}_j$  (как в изотропной среде), но и от его направления.

Если обозначить через  $l$  координату вдоль луча, то  $\mathbf{k}_j = \mathbf{k}_j(l)$  и радиус-вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$ , так что

$$\omega = \omega_j(\mathbf{k}_j(l), \mathbf{r}(l)). \quad (8.21)$$

Однако в стационарной среде частота  $\omega(l)$  вдоль луча остается постоянной (меняется лишь волновое число  $k_j$  и длина волны  $\lambda = 2\pi/k_j$ ); поэтому, дифференцируя (8.21) по  $l$ , получаем

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}_j} \frac{d\mathbf{k}_j}{dl} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{r}}{dl} = 0. \quad (8.22)$$

Здесь  $d\mathbf{r}/dl = \mathbf{l}$  и  $\partial \omega / \partial \mathbf{k}_j = v_{\text{gr}} = v_{\text{gr}} \mathbf{l}$  ( $\mathbf{l}$  — единичный вектор вдоль луча), так что равенству (8.22) можно придать следующий вид:

$$\mathbf{l} \left( v_{\text{gr}} \frac{d\mathbf{k}_j}{dl} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0.$$

Поскольку направление луча в данной точке может быть произвольным, получаем, что выражение в скобках равно нулю:

$$v_{\text{gr}} \frac{d\mathbf{k}_j}{dl} = - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} \quad (8.23)$$



Излучение вдоль луча переносится со скоростью  $v_{gr}$ , поэтому  $v_{gr} = dl/dt$  и, следовательно, соотношение (8.23) примет такой вид:

$$\frac{dk_j}{dt} = \dot{k}_j = -\frac{\partial\omega}{\partial r}. \quad (8.24)$$

В дальнейшем нам потребуется также соотношение

$$\frac{dr}{dt} \equiv \dot{r} = \frac{\partial\omega}{\partial k_j}, \quad (8.25)$$

справедливость которого следует из определения групповой скорости  $v_{gr} = \partial\omega/\partial k_j$ .

Энергия излучения, соответствующего волне  $j$ -го типа, в элементе фазового объема  $d^3r d^3k_j$  равна  $W_{\mathbf{k}} d^3r d^3k_j$ , где  $d^3r = dV$  — элементарный объем в пространстве координат,  $d^3k_j$  — элементарный объем в пространстве волновых векторов и  $W_{\mathbf{k}}$  — спектральная плотность энергии, определенная в §2.<sup>62</sup> В соответствии с законом сохранения энергии  $W_{\mathbf{k}}$  подчиняется уравнению непрерывности

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\dot{r} W_{\mathbf{k}}) + \frac{\partial}{\partial k_j}(\dot{k}_j W_{\mathbf{k}}) = \alpha_{\mathbf{k}} - \beta_j W_{\mathbf{k}}. \quad (8.26)$$

Заметим, что по форме уравнение (8.26) аналогично уравнению непрерывности для плотности заряда  $\rho_e$  в координатном пространстве:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0,$$

( $\mathbf{j} = \rho_e \mathbf{v}$  — плотность тока). Однако в (8.26) фигурирует не плотность заряда, а плотность энергии излучения; соответственно и под знаком дивергенции в члене  $\partial(\dot{r} W_{\mathbf{k}})/\partial r \equiv \nabla \cdot (\dot{r} W_{\mathbf{k}})$  стоит не плотность тока, а интенсивность  $I_{\mathbf{k}} = v_{gr} W_{\mathbf{k}} = \dot{r} W_{\mathbf{k}}$ , характеризующая плотность потока энергии в единичном телесном угле (см (2.11)). Далее, поскольку  $W_{\mathbf{k}}$  зависит не только от  $r$ , но и от  $k_j$ , в уравнении непрерывности фигурирует дивергенция от плотности потока энергии в пространстве волновых векторов  $\nabla_{\mathbf{k}_j} \cdot (\dot{k}_j W_{\mathbf{k}}) \equiv \partial(\dot{k}_j W_{\mathbf{k}})/\partial k_j$ . И, наконец, в правую часть уравнения (8.26) включены источники, определяющие вклад спонтанных ( $\alpha_{\mathbf{k}}$ ) и индуцированных ( $\beta_j W_{\mathbf{k}}$ ) процессов в магнитоактивной среде.

<sup>62</sup> Индекс  $j$  в обозначении  $W_{\mathbf{k}}$ , равно как и в обозначениях интенсивности  $I_{\mathbf{k}}$ ,  $I_{\omega}$ , здесь и ниже для простоты записи опускается.

С помощью (8.24), (8.25) уравнение (8.26) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial r} + \dot{k}_j \frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial k_j} = \alpha_{\mathbf{k}} - \beta_j W_{\mathbf{k}}. \quad (8.27)$$

Принимая во внимание соотношения  $\dot{r} = v_{\text{gr}} l = v_{\text{gr}} dr/dl$ ,  $\dot{k}_j = v_{\text{gr}} dk_j/dl$  и учитывая операторное равенство

$$\frac{dr}{dl} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{dk_j}{dl} \frac{\partial}{\partial k_j} = \frac{d}{dl}$$

определяющее правило дифференцирования функции  $W_{\mathbf{k}}(r(l), k_j(l))$  по переменной  $l$ , получим следующее уравнение переноса для плотности энергии:

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} + v_{\text{gr}} \frac{dW_{\mathbf{k}}}{dl} = \alpha_{\mathbf{k}} - \beta_j W_{\mathbf{k}}. \quad (8.28)$$

Оно справедливо, как это следует из приведенного вывода, в стационарной<sup>63</sup> неоднородной магнитоактивной плазме.

Наряду с (8.28) часто используется уравнение переноса для интенсивности излучения, связанной с  $W_{\mathbf{k}}$  соотношением, следующим из формул (2.4) и (2.13):

$$I_{\omega} = \frac{k_j^2}{|\cos \vartheta_j|} W_{\mathbf{k}} \quad (8.29)$$

( $\vartheta_j$  — угол между  $k_j$  и  $d\omega/dk_j$ , который в магнитоактивной плазме, вообще говоря, не равен нулю). Согласно (8.28), (8.29) уравнение переноса для интенсивности имеет вид [180]:

$$\frac{1}{v_{\text{gr}}} \frac{\partial I_{\omega}}{\partial t} + \frac{n_j^2}{|\cos \vartheta_j|} \frac{d}{dl} \left( \frac{I_{\omega} |\cos \vartheta_j|}{n_j^2} \right) = a_{\omega} - \mu_j I_{\omega}. \quad (8.30)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $n_j = k_j c / \omega$  — показатель преломления волны  $j$ -го типа с частотой  $\omega$ , постоянной вдоль луча,  $a_{\omega} = k_j^2 \alpha_{\mathbf{k}} (|\cos \vartheta_j| v_{\text{gr}})^{-1}$  — излучательная способность среды в волны  $j$ -го типа,  $\mu_j = \beta_j v_{\text{gr}}^{-1}$  — коэффициент поглощения волн этого же типа

<sup>63</sup> Стационарность здесь (равно как и в уравнении (8.10) для изотропной плазмы) понимается в смысле независимости от времени показателя преломления  $n_j(r)$ , т.е. групповой скорости  $v_{\text{gr}}$  и формы лучей в среде. Параметры  $\alpha_{\mathbf{k}}$  и  $\beta_j$  при этом могут быть функциями времени.

вдоль луча. В случае, если параметры среды и источников не зависят от времени (равно как и сама интенсивность  $I_\omega$ ), уравнение (8.30) сводится к виду [3]

$$\frac{n_j^2}{|\cos \vartheta_j|} \frac{d}{dl} \left( \frac{I_\omega |\cos \vartheta_j|}{n_j^2} \right) = a_\omega - \mu_j I_\omega. \quad (8.31)$$

Из него следует, что в прозрачной ( $\mu_j = 0$ ), неизлучающей ( $a_\omega = 0$ ) и неоднородной магнитоактивной плазме имеет место следующий инвариант вдоль луча:

$$\frac{I_\omega |\cos \vartheta_j|}{n_j^2} = \text{const}. \quad (8.32)$$

Приведенная форма уравнения переноса (8.30) тесно связана с принятым в §2 определением интенсивности излучения в магнитоактивной плазме, согласно которому интенсивность относится к единичному телесному углу волновых векторов (а не групповых скоростей, как это нередко принимается). Уравнение переноса при другом определении интенсивности получено, например, в [181]. Оно имеет более сложную форму, чем (8.30), что лишний раз свидетельствует о целесообразности определения, принятого в этой книге.

Следует еще раз подчеркнуть, что рассмотренные уравнения переноса имеют место только в рамках приближения геометрической оптики, где возможна лучевая трактовка процесса распространения излучения. В частности, для справедливости уравнений необходимо, чтобы в плавно неоднородной среде отсутствовало отражение и заметное линейное взаимодействие волн разных типов. Уравнение переноса, разумеется, можно применять как в равновесных, так и в неравновесных средах, включая тот случай, когда плазма становится неустойчивой и коэффициент поглощения  $\mu_j$  — отрицательным (об условиях реализации неравенства  $\mu_j < 0$ , приводящего к усилению излучения в среде, см. главу 7).

### 8.3. Решение уравнений переноса излучения

В этом разделе приведены решения уравнений переноса в изотропной и магнитоактивной космической плазме для стационарного распределения интенсивности  $I_\omega(l)$ , а также уравнения переноса для нестационарного распределения спектральной плотности энергии  $W_\omega(t)$  в модели однородной и изотропной Вселенной.

Поскольку уравнения (8.9), (8.31) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, их решения сводятся к квадратурам. В слое с однородным распределением  $a_\omega$  и  $\mu_j$  решение уравнения (8.2) имеет вид

$$I_\omega(l) = I_\omega(l_0)e^{-\mu_j(l-l_0)} + \frac{a_\omega}{\mu_j}(1 - e^{-\mu_j(l-l_0)}). \quad (8.33)$$

В неоднородной среде с  $a_\omega = a_\omega(l)$  и  $\mu_j = \mu_j(l)$  это решение выглядит несколько сложнее:

$$I_\omega(l) = I_\omega(l_0)e^{-\tau_j} + \int_0^{\tau_j} \frac{a_\omega}{\mu_j} e^{\xi-\tau_j} d\xi. \quad (8.34)$$

В этих формулах

$$\tau_j(l) = \int_{l_0}^l \mu_j(l) dl \quad (8.35)$$

— оптическая толщина между точками  $l_0$  и  $l$  вдоль луча, а  $I_\omega(l_0)$  интенсивность излучения, падающего на слой в точке  $l_0$ . Отношение  $S(l) = a_\omega/\mu_j$  называется функцией источников. Вид этих решений значительно упрощается, если плазма будет равновесной (в смысле распределения частиц по энергиям и скоростям). В условиях полного термодинамического равновесия, когда не только сама плазма, но и излучение становятся равновесными, его интенсивность  $I_\omega^{(0)}$  определяется формулой (2.16). Из вида последней ясно, что при  $I_\omega = I_\omega^{(0)}$  левые части уравнений (8.9), (8.31) обращаются в нуль, и, следовательно, при термодинамическом равновесии в среде уравнение переноса сводится к закону Кирхгофа:

$$a_\omega = \mu_j I_\omega^{(0)}. \quad (8.36)$$

Закон Кирхгофа, связывая излучательную способность  $a_\omega$  и коэффициент поглощения  $\mu_j$  в условиях термодинамического равновесия, имеет, однако, более широкую область применимости: он может быть использован в равновесной плазме даже в том случае, когда излучение неравновесное. Последнее объясняется слабым воздействием излучения на вещество при не слишком высоких плотностях излучения, когда степень поглощения  $\mu_j$  и излучательная способность  $a_\omega$  определяются только равновесным характером распределения частиц плазмы по скоростям, фиксированной величиной кинетической температуры  $T$  (но не интенсивностью излучения, которое может быть

и неравновесным). Поэтому в равновесной плазме даже при отсутствии термодинамического равновесия с излучением величины  $a_\omega$  и  $\mu_j$  остаются такими же, как в случае полного термодинамического равновесия. Связь между  $a_\omega$  и  $\mu_j$  тогда по-прежнему определяется законом Кирхгофа (8.36), в котором фигурирует равновесная интенсивность  $I_\omega^{(0)}$ , соответствующая кинетической температуре  $T$ .

Поскольку  $a_\omega$  и  $I_\omega^{(0)}$  — величины существенно положительные, коэффициент поглощения в равновесной плазме не может стать отрицательным. Поэтому излучение из объема, занятого равновесной плазмой, не превышает суммарного излучения входящих в нее частиц. Сказанное означает, в соответствии с определением, данным в §3, что механизм излучения из равновесной плазмы может быть только некогерентным.

В равновесной магнитоактивной плазме, где, вообще говоря,  $I_\omega \neq I_\omega^{(0)}$ , но  $a_\omega$  и  $\mu_j$  связаны уравнением Кирхгофа (8.36), уравнение переноса (8.31) примет следующий вид:

$$\frac{n_j^2}{|\cos \vartheta_j|} \frac{d}{dl} \left( \frac{I_\omega |\cos \vartheta_j|}{n_j^2} \right) = \mu_j (I_\omega^{(0)} - I_\omega) \quad (8.37)$$

или

$$\frac{d}{d\tau_j} \left( \frac{I_\omega |\cos \vartheta_j|}{n_j^2} \right) = \frac{\omega^2 \kappa T}{8\pi^3 c^2} - \frac{I_\omega |\cos \vartheta_j|}{n_j^2}. \quad (8.38)$$

В последнем соотношении учтено выражение для равновесной интенсивности (2.16) и введена новая переменная — оптическая толщина (8.35). Уравнению переноса (8.38) можно придать еще более простую форму, если от интенсивности  $I_\omega$  перейти к эффективной температуре излучения  $T_b$  (2.17):

$$\frac{dT_b}{d\tau_j} = T - T_b. \quad (8.39)$$

Из этого уравнения ясно, что особенности равновесной среды (изотропная или магнитоактивная плазма, характер неоднородности, распределение источников излучения) сказываются на форме луча, распределении кинетической температуры вдоль луча  $T = T(l)$  и на связи оптической толщины  $\tau_j$  с координатой  $l$  вдоль луча (8.35).

Решение уравнения (8.39) может быть получено методом вариации постоянной, в результате получаем, что эффективная температура в точке  $l$  луча

$$T_b(l) = e^{-\tau_j} \int_0^{\tau_j} T(\xi) e^\xi d\xi + e^{-\tau_j} T_b(l_0). \quad (8.40)$$

Здесь  $T_b(l_0)$  — эффективная температура излучения вдоль луча в точке  $l_0$ ;  $\tau_j$  — оптическая толщина отрезка луча от  $l_0$  до  $l$ ;  $T(\xi) = T(l)$ , причем  $\xi(l) = \int_{l_0}^l \mu_j dl$ . В (8.40) первый член справа описывает излучение в точке  $l$ , собираемое с рассматриваемого отрезка луча, второй член представляет излучение, прошедшее через слой длиной  $l - l_0$ , и частично ослабленное им (в  $e^{\tau_j}$  раз). Выражение (8.40) можно представить в несколько ином виде, если вместо  $\xi$  — текущего значения оптической толщины, отсчитываемой от точки  $l_0$ , — ввести новую переменную  $\zeta = \tau_j - \xi$ , т.е. оптическую толщину, отсчитываемую от точки  $l$ :

$$T_b(l) = \int_0^{\tau_j} T e^{-\zeta} d\zeta + e^{-\tau_j} T_b(l_0). \quad (8.41)$$

Если кинетическая температура не меняется вдоль луча ( $T = \text{const}$  — термически однородный слой), то

$$T_b(l) = T(1 - e^{-\tau_j}) + e^{-\tau_j} T_b(l_0). \quad (8.42)$$

Среда при этом может быть неоднородной:  $n_j = n_j(l)$ . Согласно (8.42) для оптически толстого ( $\tau_j \gg 1$ ) термически однородного слоя плазмы яркостная температура совпадает с кинетической температурой этого слоя:

$$T_b \approx T. \quad (8.43)$$

Иными словами, интенсивность излучения из этого слоя  $I_\omega$  достигает уровня равновесной интенсивности  $I_\omega^{(0)}$  на данной частоте  $\omega$ . Для оптически тонкого слоя ( $\tau_j \ll 1$ ) яркостная температура

$$T_b \approx T\tau_j + T_b(l_0)(1 - \tau_j). \quad (8.44)$$

Таким образом, вклад оптически тонкого слоя в яркостную температуру выходящего излучения много меньше кинетической температуры  $T$ .

При неоднородном распределении температуры  $T(l)$  величина  $T_b$  для излучения, выходящего за пределы оптически толстой плазмы, описывается формулой

$$T_b(l) = \int_0^{\tau_j} T(\zeta) e^{-\zeta} d\zeta. \quad (8.45)$$

(см. (8.41)). Однако ориентировочную оценку величины  $T_b$  в этом случае можно получить, исходя из следующих соображений. Обращаясь к формуле (8.45) и рассматривая  $T_b(l)$  в точке  $l$  как функцию  $l_0$ ,

убеждаемся, что при не слишком неоднородном распределении кинетической температуры  $T$  вдоль луча излучение создается в основном за счет вклада тех слоев плазмы  $l_0^*$ , в которых оптическая толщина  $\tau_j = \int_{l_0^*}^l \mu_j dl \sim 1$ . При этом  $T_b \sim T(l_0^*)$ , где  $T(l_0^*)$  — кинетическая температура указанного слоя.

Примеры применения уравнений переноса и приведенных выше решений будут даны в §12, §13 после вычисления коэффициентов поглощения излучения в астрофизической плазме. Эти коэффициенты  $\mu_j(\omega)$  необходимы для отыскания оптической толщины  $\tau_j(\omega)$  вдоль лучей, без последней в свою очередь нельзя сделать определенные заключения о физических условиях в источниках излучения на основе рассмотренных уравнений переноса.

Когда поглощение вдоль луча несущественно (это имеет место в случае, если оптическая толщина  $\tau_j \ll 1$ ), нестационарное уравнение переноса интенсивности (8.10) примет вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\omega}{\partial t} + \frac{\partial I_\omega}{\partial l} = a_\omega(l, t). \quad (8.46)$$

(для простоты полагаем, что влияние среды на характер распространения излучения также не сказывается:  $n_j = 1$  и  $v_{gr} = c$ ). Уравнение (8.46) можно записать в иной форме:

$$\frac{\partial I_\omega}{\partial l} = a_\omega(l, t - l/c). \quad (8.47)$$

Его решение:

$$I_\omega(l, t) = \int_l^\infty a_\omega\left(l, t - \frac{l}{c}\right) dl. \quad (8.48)$$

В случае, когда излучательная способность не зависит от времени ( $a_\omega = a_\omega(l)$ ), наблюдаемая интенсивность совпадает с потерями излучающей системы на излучение. Если же распределение излучательной способности вдоль луча нестационарно, ситуация меняется. Например, для источника, перемещающегося как целое со скоростью  $v$  вдоль луча,  $a_\omega = a_\omega(l - vt)$  и, следовательно, наблюдаемая интенсивность составит

$$I_\omega(l, t) = \int_l^\infty a_\omega\left(l - v\left(t - \frac{l}{c}\right)\right) dl = \frac{\int a_\omega(\xi) d\xi}{1 + v/c}. \quad (8.49)$$

— в полном соответствии со сделанным в §3 заключением о потоке энергии, создаваемом движущимся источником (см. (3.25)).<sup>64</sup>

<sup>64</sup>Различие в знаках перед скоростью в формулах (3.25) и (8.49) связано с тем,

Найдем теперь возможные нестационарные решения уравнения переноса излучения (8.20) с учетом космологического расширения. В процессе эволюции Вселенной свойства первичной плазмы меняются, так что параметры  $\alpha_\omega$  и  $\beta$  в (8.20), характеризующие собственное излучение и поглощение в расширяющейся среде, зависят от времени. Ясно поэтому, что изучение реликтового излучения должно включать детальный анализ процессов, дающих вклад в  $\alpha_\omega$  и  $\beta$ , и зависимости последних от времени. Однако при приближенном рассмотрении, которым мы здесь и ограничимся, можно считать, что в первичной плазме  $\alpha_\omega$  и  $\beta$  достаточно велики, благодаря чему испущенное излучение успевает поглотиться раньше, чем существенно изменятся параметры вещества в процессе космологического расширения.

Иными словами, на этом этапе будет справедливо квазистационарное решение уравнения (8.20), которое получается, если пренебречь всеми членами уравнения, кроме последних двух членов в правой части:  $\alpha_\omega \approx \beta W_\omega$ . Однако при равновесном распределении частиц в плазме отношение  $\alpha_\omega/\beta$  равно спектральной плотности энергии равновесного излучения  $W_\omega^{(0)}$  — результат, следующий из закона Кирхгофа (8.36), если вспомнить, что  $\alpha_\omega = a_\omega$ ,  $\beta = \mu_j c$ , и  $I_\omega = W_\omega c$  (в плазме с показателем преломления  $n_j \simeq 1$ ). Как известно, спектральная плотность равновесного излучения описывается законом Планка:

$$W_\omega^{(0)} = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^3 (e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1)}, \quad (8.50)$$

Поэтому квазистационарное решение в первичной плазме  $W_\omega(t) = W_\omega^{(0)}(\omega, T)$ , где температура  $T(t)$  равна кинетической температуре плазмы.

Указанное равновесие излучения с веществом сохранится лишь до времен  $t \sim t_{\text{rec}}$ , когда температура водородной плазмы  $T$  понизится до значений  $T \sim T_{\text{rec}} \simeq 5 \cdot 10^3 \text{ К}$ , при которых наступает эффективная рекомбинация протонов и электронов. Значения  $\alpha_\omega$  и  $\beta$  в образующемся нейтральном газе (на интервале  $t > t_{\text{rec}}$ ) резко уменьшаются, и излучение эволюционирует в соответствии с уравнением

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial t} = -3HW_\omega + H\omega \frac{\partial W_\omega}{\partial \omega} \quad (8.51)$$

и начальным условием, в качестве которого можно взять закон Планка (8.50) с  $T = T_{\text{rec}}$ .

---

что в (8.49) положительному значению скорости соответствует движение источника от наблюдателя; в (3.25)  $\beta \cos \theta > 0$ , когда источник движется к наблюдателю.



Будем искать решение уравнения (8.51) в форме (8.50), считая  $T = T(t)$ . Подставив (8.50) в (8.51), получим, что в процессе космологического расширения в вакууме исходное равновесное излучение остается равновесным, однако его температура меняется во времени в соответствии с уравнением [179]

$$\frac{dT}{dt} = -HT. \quad (8.52)$$

т.е.

$$T = T_{\text{rec}} e^{-H(t-t_{\text{rec}})}. \quad (8.53)$$

Согласно (8.50) максимум в спектре равновесного излучения приходится на частоту  $\omega_{\text{max}} \approx 2.8\kappa T/\hbar$ ; поэтому в процессе космологического расширения  $\omega_{\text{max}}$  убывает по тому же закону, что и температура (8.53):

$$\omega_{\text{max}} = \omega_{\text{max, rec}} e^{-Ht}. \quad (8.54)$$

Последнее представляется вполне естественным, если учесть, что изменение температуры  $T$  и частоты фотонов  $\omega$  при расширении описываются одинаковыми уравнениями (8.52) и (8.17).

В настоящее время температура реликтового излучения составляет  $T \approx 2.7$  К, а в момент “отрыва” излучения от вещества  $t \sim t_{\text{rec}}$  его температура достигала  $T_{\text{rec}} \sim 5 \cdot 10^3$  К; относительное изменение температуры  $T/T_{\text{rec}} \sim 2 \cdot 10^3$ . Из (8.53), (8.54) следует, что во столько же раз изменилась и частота в максимуме спектра реликтового излучения (т.е. параметр  $z_c = (\omega_0 - \omega)/\omega$ , характеризующий красное смещение, составляет для реликтового излучения  $2 \cdot 10^3$ ). Указанное изменение частоты реликтового излучения можно трактовать как эффект Доплера при регистрации излучения от источников в первичной плазме, удаляющейся от нас со скоростями, близкими к скорости света.<sup>65</sup>

В заключение этого раздела приведем некоторые простейшие решения уравнения переноса излучения с учетом рассеяния, используя метод Шварцшильда–Шустера (см. например, [174, 177]). Он состоит в замене уравнения переноса (8.13) для  $I_\omega(\Omega)$  системой уравнений для интегральных величин

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} I_\omega(\Theta) \sin \Theta d\Theta, \quad I_2 = \int_{\pi/2}^\pi I_\omega(\Theta) \sin \Theta d\Theta. \quad (8.55)$$

Если трактовать переменную  $h$  в уравнении (8.13) как высоту, то величины  $I_1$  и  $I_2$  характеризуют излучение, распространяющееся вверх

<sup>65</sup> Об электромагнитном фоновом (реликтовом) излучении см. также [182].

и вниз, то есть в верхнюю и нижнюю полусферы. Умножим каждый член уравнения (8.13) на  $\sin \Theta$  и проинтегрируем его почленно по  $\Theta$  в пределах от 0 до  $\pi/2$ . Затем в левой части уравнения вынесем за знак интеграла  $\cos \Theta$  со значением  $1/2$  (то есть средним значением  $\cos \Theta$  по полусфере, соответствующей углам  $\Theta$  из интервала интегрирования). Точно ту же процедуру проведем, интегрируя почленно в интервале  $\pi/2 \leq \Theta \leq \pi$ , вынося из-под интеграла  $\cos \Theta$  с соответствующим средним значением  $-1/2$  (именно в замене  $\cos \Theta$  на  $\pm 1/2$  и состоит основное приближение в методе Шварцшильда–Шустера). В результате мы получаем следующую систему уравнений для переноса излучения в однородном слое, занимающем по высоте  $h$  интервал  $h_0 - \Delta h < h < h_0$  (подробнее см., например, [183]):

$$\frac{dx}{d\tau} = 2(1+p)y, \quad \frac{dy}{d\tau} = 2p(x-2). \quad (8.56)$$

В этих уравнениях

$$x = \frac{I_1 + I_2}{I_\omega^{(0)}}, \quad y = \frac{I_1 - I_2}{I_\omega^{(0)}}, \quad (8.57)$$

параметр  $p = \mu_j / \mu_{sc}$ , а  $\tau = \mu_j^{sc}(h_0 - h)$  — оптическая толщина по рассеянию, отсчитываемая от  $h$  до верхней границы слоя  $h_0$ . При переходе от (8.13) к (8.56) мы предположили, что среда — равновесная и в ней справедлив закон Кирхгофа (8.36).

Найдем теперь решение системы уравнений (8.56) при граничных условиях

$$\begin{aligned} x &= y, & \text{при } h &= h_0, \\ x + y &= 2I^{inc}/I_\omega^{(0)}, & \text{при } h &= h_0 - \Delta h. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что первое условие означает отсутствие излучения, падающего на слой сверху, а второе условие указывает, что снизу на слой падает излучение с интенсивностью  $I_1 = I^{inc}$ .

В сильно рассеивающей среде, для которой параметр  $p \ll 1$ , интенсивность излучения, выходящего из слоя в область  $h > h_0$ , равна

$$I_1 = I^{inc}(1 + \tau^{sc})^{-1} + 2I_\omega^{(0)}\tau_j, \quad (8.58)$$

где  $\tau_j = \mu_j \Delta h$  и  $\tau^{sc} = \mu^{sc} \Delta h$  — оптические толщины всего слоя по поглощению и рассеянию, соответственно. Это решение относится к случаю, когда слой достаточно “тонкий”, а именно

$$2\sqrt{p}\tau^{sc} = 2\sqrt{\mu_j \mu^{sc}} \Delta h \ll 1. \quad (8.59)$$

В случае обратного неравенства

$$2\sqrt{p}\tau^{sc} \gg 1, \quad (8.60)$$

соответствующего “толстому” слою, интенсивность выходящего излучения

$$I_1 = 4\sqrt{p}I^{inc}e^{-2\sqrt{p}\tau^{sc}} + 2\sqrt{p}I_{\omega}^{(0)}. \quad (8.61)$$

В (8.58) и (8.61) первый член справа описывает интенсивность излучения, которое прошло сквозь слой, а второй член представляет собой собственное излучение слоя. В пределе однородной среды, заполняющей полупространство, с границей раздела  $h=h_0$ , выходящее в область  $h > h_0$  излучение может быть получено из (8.61) предельным переходом  $\Delta h \rightarrow \infty$  (то есть  $\tau_j \rightarrow \infty$ ):

$$I_1 = 2\sqrt{\frac{\mu_j}{\mu^{sc}}}I_{\omega}^{(0)}. \quad (8.62)$$

Поскольку  $p \ll 1$ , величина  $I_1 \ll I_{\omega}^{(0)}$ , то есть эффект рассеяния существенно уменьшает уровень излучения по сравнению с равновесной интенсивностью (ср. полученный результат с излучением из чисто поглощающего оптически толстого слоя (8.43)).

Вторым примером решения уравнения переноса излучения с учетом рассеяния может служить неоднородная среда (например, звездная атмосфера) с барометрической зависимостью распределения плазмы по высоте:

$$N = N_0 \exp(-h/H), \quad (8.63)$$

где  $H$  — приведенная высота, которая для водородной плазмы равна  $= 2kT/m_p g$  ( $m_p$  — масса протона,  $g$  — ускорение свободного падения).

Чтобы решить уравнение (8.13), введем переменную

$$\tau = \int_h^{\infty} \mu^{sc} dh \quad (8.64)$$

и учтем, что коэффициент рассеяния на частицах плазмы  $\mu^{sc} = \sigma^{sc} N$ , где  $\sigma^{sc}$  — сечение рассеяния (см. §18), а коэффициент поглощения (за счет межчастичных столкновений)  $\mu_j \propto N^2$  (см. (12.8), (12.12)). Тогда уравнение переноса примет вид:

$$\cos \Theta \frac{dI_{\omega}}{d\tau} = (1 + M\tau)I_{\omega} - M\tau I_{\omega}^{(0)} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} I_{\omega}(\Theta') \sin \Theta' d\Theta'. \quad (8.65)$$

Здесь параметр

$$M = \frac{\mu_j}{H(\mu^{\text{sc}})^2} = \tau_j \tau^{-2}, \quad (8.66)$$

— величина постоянная, не зависящая от высоты  $h$ , а  $\tau_j = \int_h^\infty \mu_j dh$ . Снова применяя метод Шварцшильда–Шустера, т.е. умножая обе части уравнения (8.65) на  $\sin \Theta$ , интегрируя почленно по  $\Theta$  в пределах от 0 до  $\pi/2$  и от  $\pi/2$  до  $\pi$ , наконец, вынося за знак интеграла в левых частях уравнений  $\cos \Theta$  со значением, равным  $1/2$  и  $-1/2$ , соответственно, получим следующую систему для интегральных интенсивностей (8.55):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dI_1}{d\tau} &= (1 + M\tau)I_1 - M\tau I_\omega^{(0)} - \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \\ -\frac{1}{2} \frac{dI_2}{d\tau} &= (1 + M\tau)I_2 - M\tau I_\omega^{(0)} - \frac{1}{2}(I_1 + I_2). \end{aligned} \quad (8.67)$$

Эту систему можно переписать в иной форме, введя новые переменные  $x$  и  $y$  соотношениями (8.57):

$$\frac{dx}{d\tau} = 2(1 + M\tau)y, \quad \frac{dy}{d\tau} = 2M\tau(x - 2). \quad (8.68)$$

Исследуем решение этой системы в области, где

$$M\tau \ll 1 \quad (8.69)$$

(т.е. на достаточно больших высотах  $h$ ) Это позволяет нам пренебречь членом  $M\tau$  по сравнению с единицей в первом уравнении и выразить решение через функции Эйри  $\text{Ai}(\xi)$  и  $\text{Bi}(\xi)$ :<sup>66</sup>

$$x = 2 + C_1 \text{Ai}(\xi) + C_2 \text{Bi}(\xi), \quad y = \frac{1}{2} \frac{dx}{d\tau}, \quad (8.70)$$

где

$$\xi = (4M)^{1/3} \tau, \quad (8.71)$$

и  $C_1, C_2$  — постоянные, определяемые из граничных условий задачи. Поскольку при больших  $\tau$  (то есть в глубине атмосферы) интенсивности  $I_1$  и  $I_2$  не могут неограниченно нарастать, постоянную  $C_2$  следует принять равной нулю (так как функция  $\text{Bi}(\xi) \rightarrow \infty$  при  $\xi \rightarrow \infty$ ). Так как по предположению никакого излучения извне на атмосферу не падает,

<sup>66</sup>Подробнее об этом решении см. [184]. Аналогичное решение для линейного слоя атмосферы было получено в [185].

положим  $I_2 = 0$ , т.е.  $x = y$ , при  $\tau = 0$ . Из (8.70) ясно, что это верно, если

$$C_1 = -2 \frac{3^{4/3} \Gamma(2/3) \Gamma(4/3)}{3^{2/3} \Gamma(4/3) + (M/2)^{1/3} \Gamma(2/3)}. \quad (8.72)$$

Принимая во внимание значения постоянных  $C_1$ ,  $C_2$ , мы найдем из (8.70), (8.56), что

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= [2 + C_1 \text{Ai}(\xi)] I_\omega^{(0)}, \\ I_1 - I_2 &= (M/2)^{1/3} C_1 I_\omega^{(0)} \frac{d\text{Ai}(\xi)}{d\xi}, \end{aligned} \quad (8.73)$$

где  $C_1$  — из (8.72). В среде с сильным рассеянием параметр  $M^{1/3} \ll 1$ . В этом случае разность  $I_1 - I_2$  также мала по сравнению с  $I_\omega^{(0)}$ . Глубоко в атмосфере (при  $\xi \rightarrow \infty$ ) интенсивности  $I_1 \simeq I_2 \simeq I_\omega^{(0)}$ . Для излучения, выходящего вверх, за пределы атмосферы,

$$I_1^{\text{out}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(4/3)} M^{1/3} I_\omega^{(0)}; \quad (8.74)$$

его интенсивность мала по сравнению с интенсивностью равновесного излучения  $I_\omega^{(0)}$ . Сопоставляя формулы (8.74) и (8.62), мы видим, что при наличии рассеяния интенсивность выходящего за пределы слоя излучения существенным образом зависит от формы слоя, то есть от распределения электронов в слое по высоте  $N(h)$ . Переход от равновесной интенсивности  $I_1 \simeq I_\omega^{(0)}$  в глубине атмосферы к уровню излучения (8.74) происходит в слоях, где

$$\xi = (4\tau_j \tau)^{1/3} \simeq 1. \quad (8.75)$$

Поскольку в случае сильного рассеяния  $\tau \gg \tau_j$ , условие (8.75) соответствует высотам, на которых  $\tau \gg 1$ , но  $\tau_j \ll 1$ .

Мы получили решение уравнения (8.65) при условии (8.69). Ясно, что для справедливости полученного распределения  $I_1$ ,  $I_2$  по высоте (8.73) необходимо, чтобы условие (8.69) было выполнено в интервале  $\xi \lesssim 1$ , т.е. для  $\tau \lesssim (4M)^{-1/3}$ . В этом интервале произведение  $M\tau \lesssim (M/2)^{2/3} \ll 1$ , так что проведенное рассмотрение вполне корректно.

Преимущество использованного выше для решения уравнений переноса излучения в рассеивающей среде метода Шварцшильда-Шюстера (а также аналогичного ему метода Эддингтона (см. [174])

заключается в его простоте. Точность же полученных решений сравнительно невелика — полученные формулы справедливы с точностью до факторов, близких или сравнимых с единицей. Однако во многих астрофизических задачах этого вполне достаточно для качественного анализа и получения ориентировочных (как говорят, полуколичественных) результатов. Для получения большей строгости следует обратиться к более рафинированным методам решения уравнения переноса и к численным расчетам моделей конкретных рассеивающих сред.

Решения уравнения переноса с учетом сильного рассеяния будут использованы в главе 8 при рассмотрении циклотронных эффектов в сильных магнитных полях белых карликов и нейтронных звезд.

## §9. Перенос поляризации излучения

### 9.1. Эффекты Фарадея и Коттона–Мутона в плазме

Электромагнитное излучение в плазме может быть как неполяризованным, так и поляризованным (полностью или частично). Неполяризованное (хаотически поляризованное) излучение представляет собой суперпозицию некогерентных волн разных типов. В свою очередь полностью поляризованное излучение, т.е. излучение с вполне определенным эллипсом поляризации — с фиксированным отношением и ориентацией осей эллипса, — может быть представлено как суперпозиция когерентных между собой разных типов волн. Конечно, полностью поляризованное излучение может содержать и волны только одного типа (скажем, обыкновенные или необыкновенные). Тогда его поляризация совпадает с поляризацией этих волн. Какая ситуация реализуется в космической плазме, — зависит от свойств излучающего объекта и конкретных условий на пути распространения радиоволн, включая эффекты взаимодействия, рассмотренные в §7.

При распространении волн одного типа в магнитоактивной плазме ориентация эллипса поляризации в картинной плоскости, т.е. в плоскости, ортогональной направлению распространения  $\mathbf{k}$ , определяется только направлением проекции магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  на эту плоскость. Поэтому в плавно неоднородной среде, где выполнено приближение геометрической оптики, эллипс поляризации сохраняет фиксированное положение или медленно поворачивается в соответствии с изменением направления проекции  $\mathbf{B}_0$  (“широм” магнитного поля). Ситу-

ация меняется, если в плазме распространяются когерентные между собой обыкновенная и необыкновенная волны с разными показателями преломления (разной фазовой скоростью). Поскольку в этом случае ориентация результирующего эллипса поляризации определяется не только формой и ориентацией составляющих его эллипсов обыкновенных и необыкновенных волн, но и сдвигом фаз между ними, изменение последнего вдоль направления распространения ведет (при определенных условиях) к вращению результирующего эллипса поляризации в процессе распространения волн в плазме — к эффекту Фарадея.

Указанное влияние разности фаз на форму и ориентацию результирующего эллипса поляризации мы рассмотрим более подробно. Допустим, что в плазме существует поляризованное излучение с эллипсом поляризации, не соответствующим нормальным волнам. Согласно изложенному выше это излучение может быть представлено в виде суперпозиции двух когерентных между собой волн — обыкновенной и необыкновенной. При этом в плоскости  $xy$ , перпендикулярной к направлению распространения  $\mathbf{k}$ , электрическое поле этих волн запишется следующим образом (см. Рис. 4)

$$E_x = a \sin \omega t, \quad E_y = ap \cos \omega t; \quad (9.1)$$

$$E_x = bp \sin (\omega t - \psi), \quad E_y = -b \cos (\omega t - \psi). \quad (9.2)$$

Здесь  $a$  и  $b$  характеризуют амплитуды волн, электрические векторы  $E$  которых вращаются в противоположные стороны. Далее, в приведенных формулах  $\psi$  есть разность фаз между волнами. Поскольку волны когерентны, величина  $\psi$  в фиксированной плоскости  $xy$  имеет постоянное значение, не зависящее от времени. Наконец, через  $p$  обозначена степень эллиптичности  $E_y/E_x$  волны (9.1). Знак  $p$  отражает направление вращения вектора  $E$  в волне. Так, если  $p < 0$ , то волна (9.1) будет поляризована по правому, а волна (9.2) — по левому кругу (если смотреть в направлении вектора  $\mathbf{k}$ ). Если величину  $p$  положить равной  $K_1$  (5.34), то формулы (9.1) будут описывать волну необыкновенного типа. Формулы (9.2) тогда описывают обыкновенную волну.

Из (9.1), (9.2) следует, что компоненты вектора в рассматриваемом поляризованном излучении с частотой  $\omega$  изменяются во времени по закону

$$E_x = a \sin \omega t + bp \sin (\omega t - \psi) = A \sin (\omega t - \Psi), \quad (9.3)$$

$$E_y = ap \cos \omega t - b \cos (\omega t - \psi) = B \sin (\omega t - \Phi),$$

где

$$A^2 = a^2 + b^2 p^2 + 2abp \cos \psi, \quad (9.4)$$

$$B^2 = a^2 p^2 + b^2 - 2abp \cos \psi,$$

$$\operatorname{tg} \Psi = \frac{bp \sin \psi}{a + bp \cos \psi}, \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{ap - b \cos \psi}{b \sin \psi}. \quad (9.5)$$

Эллипс, определяемый соотношениями (9.3)-(9.5), ориентирован под углом  $\chi$  к координатной оси  $x$  и имеет отношение полуосей, равное  $\operatorname{tg} \sigma$ , причем

$$\operatorname{tg}(2\chi) = \frac{2AB \cos(\Psi - \Phi)}{A^2 - B^2}, \quad (9.6)$$

$$\operatorname{tg}^2 \sigma = \frac{A^2 + B^2 + \sqrt{(A^2 - B^2)^2 + 4A^2 B^2 \cos^2(\Psi - \Phi)}}{A^2 + B^2 - \sqrt{(A^2 - B^2)^2 + 4A^2 B^2 \cos^2(\Psi - \Phi)}}. \quad (9.7)$$

Подставляя сюда выражения для  $A$ ,  $B$ ,  $\Psi$  и  $\Phi$  (9.4), (9.5), получим [186]

$$\operatorname{tg} 2\chi = \pm 2 \frac{1 + p^2}{p} \frac{\sin \psi}{(p^{-1} - p)(ab^{-1} - ba^{-1}) + 4 \cos \psi}, \quad (9.8)$$

$$\sin 2\sigma = \pm 2 \frac{b^2 - a^2 + ab(p^{-1} - p) \cos \psi}{(a^2 + b^2)(p^{-1} + p)}. \quad (9.9)$$

Дополнительная разность фаз между обыкновенной и необыкновенной компонентами излучения, приобретаемая при распространении волн на расстояние  $L$  вдоль  $k$ , равна

$$\Delta\psi = \frac{\omega}{c} \int_L (n_2 - n_1) dl, \quad (9.10)$$

где значения показателей преломления обыкновенных ( $n_2$ ) и необыкновенных ( $n_1$ ) волн определяются формулой (5.19). В процессе прохождения излучения через область с постоянным знаком разности  $n_2 - n_1$  величина  $\psi = \psi_0 + \Delta\psi$ , где  $\psi_0$  — исходная разность фаз, монотонно нарастает; при этом ориентация и отношение осей результирующего эллипса поляризации меняются в соответствии с выражениями (9.8), (9.9). Если положение исходного эллипса характеризовать углом  $\chi_0$ , то эллипс поляризации излучения, прошедшего в плазме путь  $L$ , будет ориентирован под углом

$$\chi = \chi_0 + \Delta\chi. \quad (9.11)$$



В простейшем и часто реализующемся случае распространения, когда поляризация необыкновенных и обыкновенных волн близка к круговой (т.е.  $p \approx -1$ ), степень эллиптичности излучения остается неизменной (см. (9.9)), а фарадеевское вращение результирующего эллипса описывается соотношением

$$\Delta\chi = \frac{\Delta\psi}{2} = \frac{\omega}{2c} \int_L (n_2 - n_1) dl. \quad (9.12)$$

Первое равенство является следствием соотношения  $\operatorname{tg} 2\chi = \pm \operatorname{tg} \psi$ , к которому сводится в этом случае (9.8); при переходе к последнему равенству в (9.12) учтено выражение (9.10).

Чтобы найти соотношение, связывающее величину вращения  $\Delta\chi$  непосредственно с параметрами плазмы и частотой излучения, примем во внимание следующее. Согласно (5.26) на достаточно высоких частотах, когда справедливо квазипродольное приближение (5.24), обеспечивающее круговую поляризацию обыкновенных и необыкновенных волн, а также выполнены неравенства  $v = \omega_L^2/\omega^2 \ll 1$ ,  $\sqrt{u} = \omega_B/\omega \ll 1$ , разность показателей преломления может быть представлена в виде

$$n_2 - n_1 \approx \frac{n_2^2 - n_1^2}{2} \approx v|\sqrt{u} \cos \alpha|. \quad (9.13)$$

Тогда, как следует из (9.12) и (9.13),

$$\Delta\chi \approx \frac{\omega}{2c} \int_L v\sqrt{u} \cos \alpha dl \simeq \frac{2.35 \cdot 10^4}{f^2} \int_L NB_0 \cos \alpha dl. \quad (9.14)$$

(В последнем выражении частота  $f$  — в Гц,  $N$  — в  $\text{см}^{-3}$ ,  $B_0$  — в Гс и  $l$  — в см.) Из (9.14) ясно, что в рассматриваемых условиях величина фарадеевского вращения  $\Delta\chi$  обратно пропорциональна квадрату частоты и прямо пропорциональна “мере вращения”  $RM = \int NB_0 \cos \alpha dl$ . При одинаковых амплитудах циркулярно поляризованных волн результирующее излучение становится линейно поляризованным. Эффект Фарадея сводится тогда к равномерному вращению плоскости поляризации с ростом величины  $RM$ . Если же указанные амплитуды не одинаковы, то излучение эллиптически поляризовано и эффект Фарадея заключается в равномерном повороте осей эллипса поляризации по мере увеличения  $RM$  (см. Рис. 35, а).

Необходимо специально подчеркнуть, что формула (9.14) получена для случая, когда  $\sqrt{u} \cos \alpha > 0$  (вектор  $\mathbf{k}$  составляет острый угол с

$B_0$ ). Нетрудно сообразить, однако, что (9.14) останется справедливой и при  $\sqrt{u} \cos \alpha < 0$ , когда типы волн, отвечающие поляризации по правому и левому кругу, меняются местами. Последнее приведет к смене знака разности показателей преломления волн, вращающихся по правому и левому кругу, и соответственно, — к изменению направления вращения эллипса поляризации излучения. Это изменение учитывается в (9.14) введением  $\sqrt{u} \cos \alpha$  вместо  $|\sqrt{u} \cos \alpha|$ , фигурирующего в формуле (9.13) для  $n_2 - n_1$ .

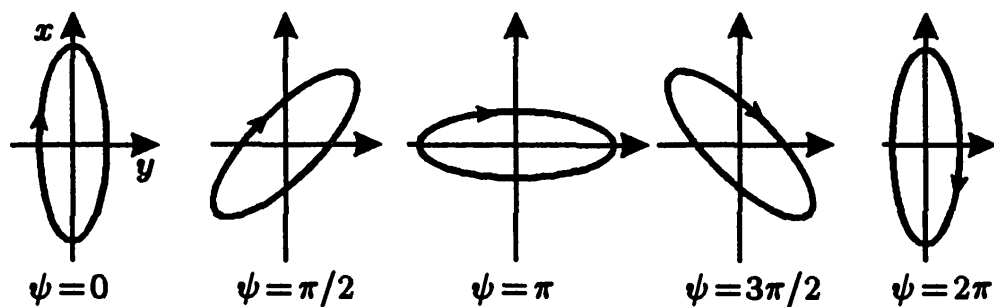
В условиях квазипоперечного распространения (5.25), когда поляризация нормальных волн становится линейной, характер изменения поляризации излучения, связанного с набегом фаз  $\Delta\psi$ , резко отличается от рассмотренного выше. В этом случае  $K_1 \rightarrow 0$  и  $K_2 \rightarrow -\infty$  и, следовательно, степень эллиптичности  $p \rightarrow 0$ . Тогда из (9.8), (9.9) следует, что при равных амплитудах обеих волн ( $a = b$ ) величина  $\operatorname{tg} 2\chi = \pm\infty$ , что соответствует двум возможным значениям угла  $\chi = \pm\pi/4$ . Одно из значений реализуется на интервале, где разность фаз  $\psi$  меняется от  $2\pi m$  до  $2\pi m + \pi$ ; другое значение — когда  $\psi$  лежит в пределах  $2\pi m + \pi \leq \psi \leq 2\pi m + 2\pi$  ( $m$  — целое число). При этом форма результирующего эллипса периодически варьируется так, что поляризация из линейной с  $\chi = \pi/4$  переходит в круговую, потом становится снова линейной, но с  $\chi = -\pi/4$ , затем снова круговой, но с противоположным направлением вращения, и т.д. (см. Рис. 35, б). Линейной поляризации соответствуют значения  $\psi = \pi m \pm \pi/2, 2\pi m + 3\pi/2$ , круговой —  $\psi = \pi m$ . Описанное изменение поляризации излучения называется эффектом Коттона–Мутона. Иногда его называют также “QT-эффектом Фарадея”, в отличие от случая квазипродольного распространения (“QL-эффект Фарадея”), описываемого формулами (9.12), (9.14).

Полный цикл изменения поляризованного эллипса при эффекте Коттона–Мутона занимает интервал  $\Delta\psi = 2\pi$ . При квазипоперечном распространении (5.25) в разреженной плазме ( $v \ll 1$ ) разность показателей преломления

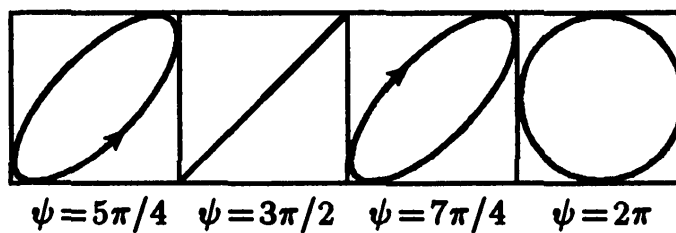
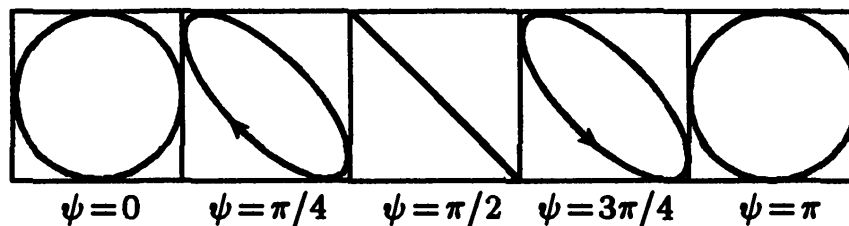
$$n_2 - n_1 \approx \frac{n_2^2 - n_1^2}{2} \approx \frac{uv \sin^2 \alpha}{2(1 - u \sin^2 \alpha)} \quad (9.15)$$

(см. (5.27)). Приобретаемая на пути  $L$  разность фаз (9.10) между линейно-поляризованными нормальными волнами при этом составит

$$\delta\psi = \frac{\omega}{2c} \int_L \frac{uv \sin^2 \alpha}{1 - u \sin^2 \alpha} dl. \quad (9.16)$$



a



b

Рис. 35. Изменение характера поляризации излучения с ростом разности фаз  $\psi$ : a эффект Фарадея ( $a=b$ ,  $p=1$ ); b эффект Коттона-Мутона ( $a=b$ ,  $p=0$ )

Если в плазме наряду с  $v \ll 1$  выполнено также условие  $u \ll 1$ , то область квазипоперечного распространения сужается, занимая лишь узкий интервал углов  $\alpha$  близ  $\pi/2$ . В этом интервале формула (9.16) выглядит несколько проще:

$$\delta\psi = \frac{\omega}{2c} \int_L uv \, dl. \quad (9.17)$$

В других обозначениях:

$$\delta\psi = \frac{1}{2\omega^3 c} \int_L \omega_L^2 \omega_B^2 \, dl \approx \frac{6.5 \cdot 10^{10}}{f^3} \int_L NB_0^2 \, dl. \quad (9.18)$$

Входящий в (9.18) интеграл  $\int_L NB_0^2 \, dl$  можно назвать “мерой пульсаций” при эффекте Коттона–Мутона, обозначив его через РМ. С ростом величины РМ сокращается расстояние, на котором происходит полный цикл изменения поляризационного эллипса, представленный на Рис. 35, б.

В произвольном случае эллиптической поляризации обыкновенных и необыкновенных волн вместо простых выражений (9.12), (9.14) и (9.18) следует пользоваться более сложными формулами (9.8)–(9.10) с показателями преломления в общем виде (5.19). Анализ выражения (9.8) показывает, что при  $|p| \neq 1$  фарадеевское вращение становится неравномерным, хотя при изменении  $\Delta\psi$  на величину, много большую  $2\pi$ , среднее изменение  $\Delta\chi$  по-прежнему совпадает с (9.12). Наконец при

$$|p^{-1} - p| \cdot |ab^{-1} - ba^{-1}| > 4, \quad (9.19)$$

т.е. при достаточном отличии эллипса поляризации нормальных волн от окружности и отношения амплитуд этих волн от единицы, вращение эллипса сменяется его колебанием с амплитудой по  $\chi$  не более  $\pi/4$ . Последнее обстоятельство сразу же следует из формулы (9.8); в случае (9.19) правая часть равенства (9.8) остается конечной для любых  $\psi$ , тогда как при вращении (т.е. монотонном изменении  $\chi$ ) обе части равенства должны обращаться в бесконечность в точках  $\chi = -\pi/4, \pi/4, \dots$  и т.д. Далее, при условиях

$$|p^{-1} - p| \cdot |ab^{-1} - ba^{-1}| \gg \max[4; 2p^{-1}(1 + p^2)] \quad (9.20)$$

правая часть (9.8) становится много меньше единицы; тогда

$$\chi = \pm \frac{1 + p^2}{1 - p^2} \frac{\sin \psi}{ab^{-1} - ba^{-1}} \quad (9.21)$$

или отличается от нее на величину, равную или кратную  $\pi/2$ . Фиксированная ориентация эллипса поляризации излучения в случае (9.20) (с точностью до малых колебаний относительно положения, соответствующего эллипсу поляризации обыкновенной и необыкновенной волн) представляется вполне естественной: наложение на эллипс сильной волны эллипса слабой волны не в состоянии существенно изменить ориентацию результирующего эллипса.

Роль эффектов Фарадея и Коттона–Мутона в космической плазме весьма существенна. Эти эффекты (особенно первый) нельзя не учитывать при поляризационных наблюдениях внеземного радиоизлучения, поскольку они могут радикально изменить характер поляризации излучающих объектов.

Так, в межзвездной среде ( $N \sim 0.1 \text{ см}^{-3}$  и  $B_0 \sim 10^{-6} \text{ Гс}$ ) фарадеевское вращение  $\Delta\chi$  (9.14) на пути  $L \sim 100 \text{ пк} \sim 3 \cdot 10^{20} \text{ см}$  составляет около 70 радиан для частоты  $f \sim 10^8 \text{ Гц}$  ( $\lambda \sim 3 \text{ м}$ ) и 0.7 радиан для частоты  $f \sim 10^9 \text{ Гц}$  ( $\lambda \sim 30 \text{ см}$ ). Указанную величину  $L \sim 100 \text{ пк}$  (иногда  $L \sim 10 \text{ пк}$ ) обычно рассматривают как характерный размер областей квазиоднородного магнитного поля (“магнитных облаков”) в модели Галактики с хаотическим магнитным полем. Поскольку угол  $\alpha$  вдоль луча принимает с одинаковой вероятностью случайные значения в интервале от 0 до  $2\pi$ , то  $\overline{\cos \alpha} = 0$  и, следовательно, при постоянных  $N$  и  $B_0$  в межзвездной среде среднее значение фарадеевского вращение  $\overline{\Delta\chi} = 0$  (см. формулу (9.14)). Однако средняя квадратичная дисперсия угла вращения в рассматриваемом случае может быть весьма значительной, поскольку она зависит от числа  $n$  пройденных излучением облаков:  $\sqrt{(\Delta\chi)^2} \sim \Delta\chi_{cl} \sqrt{n}$ . Здесь через  $\Delta\chi_{cl}$  обозначена средняя величина фарадеевского вращение на протяжении одного облака. Оценки  $\Delta\chi_{cl}$  для  $L \sim 100 \text{ пк}$  были приведены выше.

Таким образом, при распространении линейно-поляризованного излучения в среде с хаотическим магнитным полем происходит взаимная компенсация фарадеевского вращение на отрезках луча, расположенных в отдельных магнитных облаках. Подобная компенсация будет отсутствовать (или ее действие будет существенно ослаблено), если траектория луча лежит главным образом в галактическом диске, где магнитное поле обладает более высокой степенью упорядоченности (см. §1).

Оценки по формуле (9.14) показывают, что эффект Фарадея для радиоволн в солнечной короне также очень велик. В самом деле, даже при сравнительно скромных величинах концентрации электронов, магнитных полей и длины “траектории” лучей в короне ( $N \sim$

$10^8 \text{ см}^{-3}$ ,  $B_0 \sim 4 \text{ Гс}$ ,  $L \sim 10^{10} \text{ см}$ ) угол  $\Delta\chi$  порядка  $10^{23} f^{-2}$  радиан. (Для сравнения заметим, что в ионосфере Земли  $\Delta\chi$  на шесть порядков меньше.) Из сказанного следует, что в короне  $\Delta\chi \lesssim 1$  только на волнах  $\lambda \lesssim 0.1 \text{ см}$ ;  $\Delta\chi$  быстро растет с длиной волны, достигая значений  $10^6$  радиан на  $\lambda \sim 1 \text{ м}$ . Фактически величина вращения в короне, в особенности над центрами активности с более высокими значениями  $N$  и  $B_0$ , может быть еще больше.

Фарадеевское вращение в источнике и на пути от источника до наблюдателя ведет не только к потере информации о положении плоскости поляризации излучения в самом источнике, оно вызывает также деполяризацию (уменьшение степени линейной поляризации  $\zeta_l$ ) наблюдаемого излучения. Указанная деполяризация обусловлена конечными размерами излучающей области и конечной шириной полосы частот приемной аппаратуры  $\Delta f_{\text{rec}}$ . Влияние первого фактора мы рассмотрим в конце этого раздела, где роль источников в формировании поляризационных характеристик излучения будет исследована на основе уравнений переноса поляризации. Здесь же мы обсудим значение второго фактора – конечной полосы частот приемной аппаратуры.

Из выражений (9.11), (9.12) ясно, что угол  $\chi$  есть функция частоты  $f$  даже в том случае, если исходная ориентация эллипса поляризации  $\chi_0$  не зависит от  $f$ . В узком частотном интервале, например, в полосе поляриметра  $\Delta f_{\text{rec}} \ll f_0$ , угол  $\chi(f)$  можно представить в виде

$$\chi(f) = \chi(f_0) + \left. \frac{\partial(\Delta\chi)}{\partial f} \right|_{f=f_0} (f - f_0), \quad (9.22)$$

где  $f_0$  — “рабочая частота” приемной аппаратуры. Тогда изменение ориентации  $\chi$  результирующего эллипса в указанной полосе составит

$$\delta\chi \approx \left. \frac{\partial(\Delta\chi)}{\partial f} \right|_{f=f_0} \Delta f_{\text{rec}}. \quad (9.23)$$

В частности, при квазипродольном распространении в области  $n_1 \approx n_2 \approx 1$ , когда  $\Delta\chi \propto f^{-2}$  (см. (9.14)), производная  $\partial(\Delta\chi)/\partial f|_{f=f_0} = -2f_0^{-1} \Delta\chi|_{f=f_0}$ , а изменение величины  $\chi$  в полосе  $\Delta f_{\text{rec}}$  составит

$$\delta\chi \approx 2f_0^{-1} \Delta\chi|_{f=f_0} \Delta f_{\text{rec}}. \quad (9.24)$$

Вследствие различия в положениях эллипса на разных частотах наблюдаемая поляризация радиоизлучения будет отличаться от первоначальной меньшей степенью линейной поляризации  $\zeta_l$ ; ее величина резко падает, если  $\delta\chi \gg 1$ .

В солнечной короне благодаря сильному вращению плоскости поляризации этот эффект выступает весьма ярко. Это приводит к необходимости строгого учета эффектов, связанных с дисперсией фарадеевского вращения в короне (см. в этой связи [3, 187]). Так, если на волнах  $\lambda \sim 1$  м величина  $\Delta\chi \sim 10^6$  радиан, то дисперсия  $\delta\chi$  согласно (9.24) будет меньше единицы только в весьма узкой полосе  $\Delta f_{\text{rec}} < 150$  Гц, которая, как правило, не достигается при современных поляризационных измерениях. Это означает, что зафиксировать наличие заметной линейной поляризации в составе наблюдаемого солнечного радиоизлучения без специальных узкополосных средств невозможно. Недавно это удалось сделать [188] при измерениях на радиометре с приемной полосой около 20 кГц.

Деполаризация радиоизлучения за счет конечной ширины полосы поляриметра может играть заметную роль и при поляризационных исследованиях нетеплового излучения межзвездной среды. При этом модуляция ширины полосы  $\Delta f_{\text{rec}}$  (и соответствующее изменение степени линейной поляризации  $\zeta_l$ ) служит одним из методов регистрации слабой линейной поляризации космического радиоизлучения на фоне многочисленных паразитных эффектов [189].

Деполаризация наблюдаемого космического излучения может быть связана не только с эффектом Фарадея в плазме: она возникает, например, и за счет различной ориентации плоскости линейной поляризации излучения от различных источников, охватываемых диаграммой направленности приемной антенны [190]. Конкретным примером служит здесь синхротронное излучение протяженной системы релятивистских электронов в хаотически неоднородном магнитном поле. Ориентация плоскости поляризации такого излучения ортогональна проекции магнитного поля на картинную плоскость (т.е. плоскость, перпендикулярную к лучу зрения, см. §10, §11). Поэтому в хаотическом магнитном поле ориентации плоскости поляризации излучения от различных областей квазиоднородного поля также будут случайны. В модели Галактики с хаотическим магнитным полем это приведет к столь сильной деполаризации радиоизлучения, что степень линейной поляризации упадет ниже реально обнаружимого уровня. Регистрация поляризации космического радиоизлучения поэтому служит одним из аргументов в пользу существования в нашей Галактике магнитных полей, обладающих значительной степенью упорядоченности.

## 9.2. Уравнения переноса поляризации в магнитоактивной плазме

Проблема формирования поляризационных характеристик излучения не ограничивается учетом фазовых сдвигов между волнами разных типов, приводящих к эффектам Фарадея и Коттона–Муттона: помимо указанной причины поляризация излучения зависит и от характера поляризации источников, и от степени поглощения излучения в магнитоактивной плазме. Характер поляризации с учетом всех указанных обстоятельств определяется уравнением переноса поляризации, описывающим изменение поляризационных параметров излучения в пространстве. К установлению вида этого уравнения мы сейчас и перейдем.

В §2 было отмечено, что состояние поляризации излучения в данной точке среды полностью определяется четырьмя параметрами Стокса  $I$ ,  $Q$ ,  $U$ , и  $V$  (2.30) или четырьмя компонентами тензора поляризации  $I_{\alpha\beta} = \overline{D_\alpha D_\beta^*}$  (2.34). (В последнем выражении  $D_\alpha$ ,  $D_\beta$  — компоненты вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  в электромагнитном излучении.) Таким образом, уравнение переноса поляризации должно описывать изменение в пространстве тензора поляризации или параметров Стокса.

Получим наиболее простые и наглядные уравнения переноса поляризации излучения, считая магнитоактивную плазму однородной и стационарной, характеристики излучения не зависящими от времени, а поляризации нормальных волн — ортогональными. При этом мы используем процедуру, предложенную в [191] для учета влияния фазовых сдвигов между нормальными волнами на величину тензора поляризации излучения  $I_{\alpha\beta}$ , распространив эту процедуру на все уравнение переноса поляризации [57]. Затем мы обсудим возможные обобщения и другие формы уравнений переноса поляризации.

Выделим из состава электромагнитного излучения в среде ту часть, которая обладает волновыми векторами, ориентированными вдоль оси  $z$ , и частотами, заключенными в интервале  $\Delta\omega$ . Вектор электрической индукции этой части излучения  $\mathbf{D}$  лежит в плоскости  $xy$ , причем  $\alpha$ -компонента этого вектора ( $\alpha = x, y$ ) может быть записана в следующем виде

$$D_\alpha(z, t) = \int_{\Delta\omega} D_1 e_{1\alpha} \exp(-i\omega t + ik_1 z + i\psi_1) d\omega + \int_{\Delta\omega} D_2 e_{2\alpha} \exp(-i\omega t + ik_2 z + i\psi_2) d\omega. \quad (9.25)$$



Первый интеграл характеризует часть излучения, соответствующую необыкновенным волнам с амплитудой  $D_1$ , а второй — обыкновенным волнам с амплитудой  $D_2$ . Далее,  $e_{1\alpha}$  и  $e_{2\alpha}$  — компоненты единичных векторов поляризации  $e_1$  и  $e_2$  необыкновенных (индекс 1) и обыкновенных (индекс 2) волн,  $\psi_1$  и  $\psi_2$  — фазы, а  $k_1$  и  $k_2$  — волновые числа этих волн. Все указанные величины, вообще говоря, функции частоты  $\omega$ .

При наличии поглощения (или усиления) в среде волновые числа будут комплексными:

$$k_1 = k'_1 + ik''_1, \quad k_2 = k'_2 + ik''_2, \quad (9.26)$$

причем

$$k'_{1,2} = \frac{\omega}{c} n_{1,2}, \quad k''_{1,2} = \frac{\omega}{c} \eta_{1,2}, \quad (9.27)$$

( $n_{1,2}$  и  $\eta_{1,2}$  — показатели преломления и поглощения волн разных типов; см. §4).

Далее, поскольку векторы поляризации единичные,

$$e_1 e_1^* = 1, \quad e_2 e_2^* = 1. \quad (9.28)$$

Если к тому же поляризации нормальных волн ортогональны, то между векторами  $e_1$  и  $e_2$  существуют следующие соотношения:

$$e_1 e_2^* = 0 \quad e_1^* e_2 = 0. \quad (9.29)$$

Для нормальных волн с неортогональными поляризациями вместо (9.29) справедливы равенства

$$e_1 e_2^* = \bar{\alpha}, \quad e_1^* e_2 = \bar{\alpha}^*, \quad (9.30)$$

которые служат определением величины  $\bar{\alpha}$  — степени неортогональности поляризаций нормальных волн. Как уже отмечалось, мы будем считать, что  $\bar{\alpha} = 0$ , т.е. что у нас выполнены условия (9.29). Возможные ограничения на пределы применимости полученного при условии (9.29) уравнения переноса поляризации будут указаны ниже.

Записывая в форме, аналогичной (9.25), компоненту вектора электрической индукции  $D_\beta(z, t)$  (где  $\beta = x, y$ ), перемножая  $D_\alpha(z, t)$  и  $D_\beta^*(z, t)$  и дифференцируя результат по  $z$ , найдем:

$$\frac{\partial}{\partial z} (D_\alpha D_\beta^*) = \int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} D_1 \tilde{D}_1 e_{1\alpha} \tilde{e}_{1\beta}^* (ik_1 - i\tilde{k}_1)$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp(-i\omega t + i\tilde{\omega} t + i\psi_1 - i\tilde{\psi}_1 + ik_1 z - i\tilde{k}_1 z) d\omega d\tilde{\omega} + \\
& \quad \int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} D_2 \tilde{D}_2 e_{2\alpha} \tilde{e}_{2\beta}^* (ik_2 - i\tilde{k}_2) \\
& \times \exp(-i\omega t + i\tilde{\omega} t + i\psi_2 - i\tilde{\psi}_2 + ik_2 z - i\tilde{k}_2 z) d\omega d\tilde{\omega} + \\
& \quad \int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} D_1 \tilde{D}_2 e_{1\alpha} \tilde{e}_{2\beta}^* (ik_1 - i\tilde{k}_2) \\
& \times \exp(-i\omega t + i\tilde{\omega} t + i\psi_1 - i\tilde{\psi}_2 + ik_1 z - i\tilde{k}_2 z) d\omega d\tilde{\omega} + \\
& \quad \int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} D_2 \tilde{D}_1 e_{2\alpha} \tilde{e}_{1\beta}^* (ik_2 - i\tilde{k}_1) \\
& \times \exp(-i\omega t + i\tilde{\omega} t + i\psi_2 - i\tilde{\psi}_1 + ik_2 z - i\tilde{k}_1 z) d\omega d\tilde{\omega}. \quad (9.31)
\end{aligned}$$

Здесь тильдой отмечены величины, зависящие от  $\tilde{\omega}$  — частоты в выражении для  $D_\beta^*$ ; переобозначение  $\omega \rightarrow \tilde{\omega}$  введено при переходе к двойным интегралам.

Считая полосу  $\Delta\omega$  столь узкой, что в ее пределах

$$\begin{aligned}
|k'_1 - \tilde{k}'_1| &\ll |k''_1 + \tilde{k}''_1| \approx 2|k''_1|, \\
|k'_2 - \tilde{k}'_2| &\ll |k''_2 + \tilde{k}''_2| \approx 2|k''_2|,
\end{aligned} \quad (9.32)$$

пренебрежем разностями  $k'_1 - \tilde{k}'_1$  и  $k'_2 - \tilde{k}'_2$  в предэкспоненциальных множителях формулы (9.31) (напомним, что в (9.31) величины  $k_1$  и  $k_2$  имеют вид (9.26)). Узость полосы  $\Delta\omega$  позволяет также вынести за знак интеграла компоненты векторов поляризации  $e_{1,2}$  и волновые числа  $k_{1,2}$  со значениями в середине указанного интервала частот. После проведения этих операций в (9.31) останутся интегралы, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} D_1 \tilde{D}_1 \exp(-i\omega t + i\tilde{\omega} t + i\psi_1 - i\tilde{\psi}_1 \\
& \quad + ik_1 z - i\tilde{k}_1 z) d\omega d\tilde{\omega} = e_{1\gamma}^* e_{1\delta} D_\gamma D_\delta^*, \\
& \int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} D_2 \tilde{D}_2 \exp(-i\omega t + i\tilde{\omega} t + i\psi_2 - i\tilde{\psi}_2 \\
& \quad + ik_2 z - i\tilde{k}_2 z) d\omega d\tilde{\omega} = e_{2\gamma}^* e_{2\delta} D_\gamma D_\delta^*, \\
& \int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} D_1 \tilde{D}_2 \exp(-i\omega t + i\tilde{\omega} t + i\psi_1 - i\tilde{\psi}_2 \\
& \quad + ik_1 z - i\tilde{k}_2 z) d\omega d\tilde{\omega} = e_{1\gamma}^* e_{2\delta} D_\gamma D_\delta^*, \\
& \int_{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} D_2 \tilde{D}_1 \exp(-i\omega t + i\tilde{\omega} t + i\psi_2 - i\tilde{\psi}_1 \\
& \quad + ik_2 z - i\tilde{k}_1 z) d\omega d\tilde{\omega} = e_{2\gamma}^* e_{1\delta} D_\gamma D_\delta^*.
\end{aligned} \quad (9.33)$$

В их справедливости можно убедиться с помощью формул типа (9.25) для  $D_\gamma$  и  $D_\delta$  и равенств (9.28), (9.29). Подставив (9.33) в (9.31) и усреднив члены уравнений по времени, получим следующее уравнение переноса поляризации излучения [57]:

$$\frac{dI_{\alpha\beta}}{dz} = S_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta\gamma\delta}I_{\gamma\delta}, \quad (9.34)$$

где тензор четвертого ранга  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , называемый тензором переноса поляризации, может быть представлен в виде разности

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - K_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (9.35)$$

Здесь  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  характеризует изменение тензора поляризации  $I_{\alpha\beta}$  за счет сдвига фаз, а  $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$  — вследствие различного поглощения волн разных типов при распространении в магнитоактивной среде:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= i(k'_1 - k'_2)(e_{1\alpha}e_{2\beta}^*e_{1\gamma}^*e_{2\delta} - e_{2\alpha}e_{1\beta}^*e_{2\gamma}^*e_{1\delta}), \\ K_{\alpha\beta\gamma\delta} &= (k''_1 + k''_2)(e_{1\alpha}e_{2\beta}^*e_{1\gamma}^*e_{2\delta} + e_{2\alpha}e_{1\beta}^*e_{2\gamma}^*e_{1\delta}) \\ &\quad + 2k''_1e_{1\alpha}e_{1\beta}^*e_{1\gamma}^*e_{1\delta} + 2k''_2e_{2\alpha}e_{2\beta}^*e_{2\gamma}^*e_{2\delta}. \end{aligned} \quad (9.36)$$

В уравнение (9.34) дополнительно введен тензор поляризации источников излучения в плазме  $S_{\alpha\beta}$ , определяющий изменение  $I_{\alpha\beta}$  за счет собственного излучения среды.

Если в среде есть излучение одного типа (скажем, составленное только из необыкновенных волн:  $D_1 \neq 0$ ,  $D_2 = 0$ ), то согласно (9.33) и (2.34),  $e_{2\gamma}^*e_{2\delta}I_{\gamma\delta} = 0$ ,  $e_{1\gamma}^*e_{2\delta}I_{\gamma\delta} = 0$  и  $e_{2\gamma}^*e_{1\delta}I_{\gamma\delta} = 0$ . Тогда в уравнении (9.34) нет членов, связанных со сдвигом фаз между волнами:  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}I_{\gamma\delta} = 0$ , а члены, характеризующие влияние поглощения, существенно упрощаются:<sup>67</sup>

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta}I_{\gamma\delta} = 2k''_1e_{1\alpha}e_{1\beta}^*e_{1\gamma}^*e_{1\delta}I_{\gamma\delta} = 2k''_1I_{\alpha\beta}. \quad (9.37)$$

В случае, когда собственное излучение среды отсутствует ( $S_{\alpha\beta} = 0$ ), мы приходим к уравнению переноса:

$$\frac{dI_{\alpha\beta}}{dz} = -2k''_1I_{\alpha\beta}. \quad (9.38)$$

Оно отражает то тривиальное обстоятельство, что все компоненты вектора  $D$  в необыкновенной волне изменяются вследствие поглощения по закону  $e^{-k''_1 z}$ . При этом, очевидно, будет изменяться лишь

<sup>67</sup> Переход к последнему равенству в (9.37) можно совершить с помощью первой формулы (9.33) и выражения для  $D_\alpha D_\beta^*$ , записанного при условии  $D_1 \neq 0$ ,  $D_2 = 0$ .

интенсивность, излучения (первый параметр Стокса)  $I_1 = I_{xx} + I_{yy}$  в соответствии с уравнением

$$\frac{dI_1}{dz} = -2k_1'' I_1, \quad (9.39)$$

в то время как остальные поляризационные характеристики излучения  $\zeta$ ,  $p$ ,  $\chi$ , определяемые отношениями компонент тензора поляризации  $I_{\alpha\beta}$  (см. формулы (2.31) и (2.33)), сохраняются неизменными. Величины  $\zeta$ ,  $p$ ,  $\chi$  останутся постоянными и в присутствии источников ( $S_{\alpha\beta} \neq 0$ ), если последние дают вклад только в необыкновенное излучение. Заметим, что благодаря ортогональности поляризации нормальных волн интенсивность произвольного излучения в среде  $I$  складывается из интенсивностей излучения, соответствующих двум типам волн:  $I = I_1 + I_2$ . Можно показать (см. следующий раздел), что при этом излучение каждого типа по-прежнему удовлетворяет своему уравнению переноса интенсивности типа (9.39).

При выводе уравнения (9.34) с тензором переноса поляризации в форме (9.35), (9.36) предположение об ортогональности поляризации нормальных волн (9.29) было весьма существенным. Однако в присутствии поглощения (или усиления) волн, когда  $k_1'', k_2'' \neq 0$ , указанная ортогональность, вообще говоря, нарушается. Если, однако, неортогональность остается достаточно слабой ( $\bar{\alpha}\bar{\alpha}^* \ll 1$ ), уравнениями (9.34)-(9.36) можно пользоваться и в непрозрачной среде.<sup>68</sup>

В случае произвольной (не малой) неортогональности поляризации тензор  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  становится более сложным [192]:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\gamma\delta} = & (1 - \bar{\alpha}^2)^{-2} \\ & \times \left\{ -2k_1'' e_{1\alpha} e_{1\beta}^* [e_{1\gamma}^* e_{1\delta} - \bar{\alpha}(e_{1\gamma}^* e_{2\delta} + e_{2\gamma}^* e_{1\delta}) + \bar{\alpha}^2 e_{2\gamma}^* e_{2\delta}] \right. \\ & - 2k_2'' e_{2\alpha} e_{2\beta}^* [e_{2\gamma}^* e_{2\delta} - \bar{\alpha}(e_{1\gamma}^* e_{2\delta} + e_{2\gamma}^* e_{1\delta}) + \bar{\alpha}^2 e_{1\gamma}^* e_{1\delta}] \\ & + [i(k_1' - k_2') - (k_1'' + k_2'')] e_{1\alpha} e_{2\beta}^* \\ & \times [e_{1\gamma}^* e_{2\delta} - \bar{\alpha}(e_{1\gamma}^* e_{1\delta} + e_{2\gamma}^* e_{2\delta}) + \bar{\alpha}^2 e_{2\gamma}^* e_{1\delta}] \\ & + [-i(k_1' - k_2') - (k_1'' + k_2'')] e_{2\alpha} e_{1\beta}^* \\ & \left. \times [e_{2\gamma}^* e_{1\delta} - \bar{\alpha}(e_{1\gamma}^* e_{1\delta} + e_{2\gamma}^* e_{2\delta}) + \bar{\alpha}^2 e_{1\gamma}^* e_{2\delta}] \right\} \quad (9.40) \end{aligned}$$

<sup>68</sup> Не вдаваясь в подробности, отметим, что сильная неортогональность ( $\bar{\alpha}\bar{\alpha}^* \sim 1$ ) в плазме реализуется, если эрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости ( $\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha}^*$ ) сравнима по величине с антиэрмитовой ( $\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha}^*$ ). Если же тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  близок к эрмитовому или антиэрмитовому, то степень неортогональности становится малой, что и оправдывает использование в этом случае тензоров (9.36) для анализа переноса поляризации излучения [192].

Его можно получить, действуя так же, как было описано выше, но используя вместо соотношений (9.29) равенства (9.30). Заметим, что для простоты выражение (9.40) записано при условии, что степень неортогональности  $\bar{\alpha}$  — действительная величина. Это условие, в частности, выполнено в плазме с изотропным распределением частиц по импульсам. Обобщить  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  на случай комплексных  $\bar{\alpha}$  нетрудно.

В среде, где поляризации нормальных волн неортогональны, излучение, содержащее лишь волны одного типа, по-прежнему подчиняется уравнениям (9.38), (9.39) и не меняет характера своей поляризации в процессе распространения (если волны другого типа отсутствуют). Однако при наличии волн обоих типов интенсивность излучения в среде  $I$  уже не складывается из интенсивностей волн разных типов: <sup>69</sup>  $I \neq I_1 + I_2$ , причем перестает быть справедливым и уравнение переноса в форме (9.39). В этом случае, тем не менее, можно добиться [195, 196], чтобы интенсивность определенной части излучения все-таки подчинялась уравнению типа (9.39), если ввести так называемые векторы “переносной” поляризации  $t_1, t_2$ , ортогональные векторам поляризации нормальных волн  $e_1, e_2$ :

$$e_1 t_1^* = 0 \quad e_2 t_2^* = 0. \quad (9.41)$$

При этом интенсивности  $I_{t_1}$  и  $I_{t_2}$  излучения, обладающего “переносной” поляризацией  $t_1$  и  $t_2$ , будут изменяться в пространстве в соответствии с уравнениями

$$\frac{dI_{t_1}}{dz} = -2k_2'' I_{t_1} \quad (9.42)$$

$$\frac{dI_{t_2}}{dz} = -2k_1'' I_{t_2}. \quad (9.43)$$

Эти уравнения можно получить строго из уравнений переноса (9.34). Они становятся вполне очевидными, если учесть, что в излучении с переносной поляризацией  $t_2$  не содержится обыкновенных волн, обладающих вектором поляризации  $e_2$ . Это означает, что в  $I_{t_2}$  содержатся только необыкновенные волны. Поэтому вполне естественна идентичность уравнения переноса (9.43) для  $I_{t_2}$  и уравнения переноса (9.39), описывающего изменение интенсивности необыкновенного излучения. То же самое, разумеется, справедливо и в отношении уравнения (9.42). Поскольку переносные поляризации неорто-

<sup>69</sup> Полная интенсивность  $I$  тогда зависит от  $z$ , осциллируя с пространственным периодом  $2\pi/(k_1' - k_2')$  [192–194].

гональны между собой при  $\bar{\alpha} \neq 0$ , полная интенсивность излучения не равна сумме  $I_{t_1} + I_{t_2}$ .

В условиях космической плазмы, особенно в межзвездной среде и в плазме дискретных источников, важную роль играет случай слабоанизотропной разреженной среды. Этот вариант реализуется в плазме малой плотности ( $v = \omega_L^2 / \omega^2 \ll 1$ ), помещенной в слабое магнитное поле ( $u = \omega_B^2 / \omega^2 \ll 1$ ), когда элементы тензора диэлектрической проницаемости удовлетворяют критерию

$$|\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}| \ll 1, \quad (9.44)$$

( $\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера). При этом тензор переноса  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  (9.40) существенно упрощается и может быть приведен к виду [192]

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = i \frac{\omega}{c} (\epsilon_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \epsilon_{\beta\delta}^* \delta_{\alpha\gamma}). \quad (9.45)$$

Если в тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}$  явно входит волновой вектор  $\mathbf{k}$ , то при подстановке  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в (9.45) величину  $k$  следует положить равной  $k = \omega/c$ . Поскольку индексы  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  принимают только два значения  $x$  и  $y$ , ясно что элементы тензора переноса  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  (9.45) определяются лишь компонентами  $\epsilon_{\alpha\beta}$  в плоскости  $xy$ .

Уравнение переноса (9.43) с тензором (9.45) было получено в [197] непосредственно из уравнений Максвелла. Элементы тензора  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  весьма просто выражаются через элементы тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$ . В этом отношении представление  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  в форме (9.45) существенным образом отличается от  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  в виде (9.35), (9.36) и (9.40), поскольку в них фигурируют непосредственно параметры нормальных волн в плазме (векторы поляризации, показатели преломления и поглощения). Какую форму  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  лучше применять для анализа поляризации излучения — зависит от характера поставленной задачи и в значительной степени определяется соображениями удобства. При этом не следует, конечно, забывать о пределах применимости разных форм тензора переноса поляризации.

Выше совсем не затрагивался важный вопрос о нахождении тензора поляризации источников излучения в плазме  $S_{\alpha\beta}$ . Эта задача достаточно сложна. В общем случае тензор  $S_{\alpha\beta}$  может быть выражен через интегралы от произведений фурье-компонент сторонних токов в источнике. Для слабоанизотропной плазмы такие выражения можно найти в [197], для конкретных типов источников синхротронного излучения — в [197] и др. Однако задача становится более простой в случае теплового излучения, т.е. излучения в системе, где частицы

имеют равновесное распределение по энергиям и импульсам. В этом случае тензор  $S_{\alpha\beta}$  может быть выражен через тензор переноса  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  и тензор поляризации равновесного излучения  $I_{\alpha\beta}^{(0)}$  — подобно тому как излучательная способность теплового излучения  $a_\omega$  может быть представлена через коэффициент поглощения  $\mu_j$  и равновесную интенсивность  $I_\omega^{(0)}$  (закон Кирхгофа (8.36)). Действительно, в условиях полного термодинамического равновесия вещества с излучением в однородной среде  $dI_{\alpha\beta}/dz=0$  и, следовательно,

$$S_{\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta\gamma\delta} I_{\gamma\delta}^{(0)}. \quad (9.46)$$

(см. (9.34)). Поскольку  $S_{\alpha\beta}$  определяется только характером источников излучения (распределением сторонних токов в них) и не зависит от окружающего излучения (если оно не слишком велико), становится ясным, что соотношение (9.46) будет справедливо и в отсутствие термодинамического равновесия между веществом и излучением; достаточно лишь, чтобы плазма оставалась равновесной в отношении распределения частиц, определяющего вид тензора диэлектрической проницаемости.

Проблема нахождения  $S_{\alpha\beta}$  с помощью (9.46) становится особенно простой в слабоанизотропной разреженной плазме, когда в первом приближении можно считать тензор  $I_{\alpha\beta}^{(0)}$  таким же, как в вакууме:

$$I_{\alpha\beta}^{(0)} = I_\omega^{(0)} \delta_{\alpha\beta}. \quad (9.47)$$

При написании этой формулы мы пронормировали  $I_{\alpha\beta}^{(0)}$  так, чтобы при  $\alpha = \beta$  величина  $I_{\alpha\beta}$  совпадала с равновесной интенсивностью  $I_\omega^{(0)}$ , имеющей смысл потока энергии в единичном интервале частот и телесных углов. При  $\alpha \neq \beta$  величина  $I_{\alpha\beta}^{(0)}$  (9.47) равна нулю; это отражает неполяризованный характер равновесного излучения в вакууме. Принимая во внимание выражение (9.45) для  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$ , из (9.46) и (9.47) получаем, что в слабоанизотропной разреженной равновесной плазме [195, 196]<sup>70</sup>

$$S_{\alpha\beta} = -i \frac{\omega}{2c} I_\omega^{(0)} (\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon_{\beta\alpha}^*). \quad (9.48)$$

Величина  $I_\omega^{(0)}$  описывается при этом формулой (2.17), в которой для обсуждаемых условий следует положить  $n = 1$  и  $\cos \vartheta = 1$ . Заме-

<sup>70</sup> Из (9.46) ясно, что малые поправки к  $I_{\alpha\beta}^{(0)}$ , обусловленные конечной плотностью плазмы и анизотропией, скажутся лишь незначительно на величине  $S_{\alpha\beta}$ .

тим, что согласно (9.48) тензор поляризации источников в равновесной плазме непосредственно определяется антиэрмитовой частью тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$ .

Аналог (9.46) закона Кирхгофа был использован [198] для отыскания тензора  $S_{\alpha\beta}$  в более сложном случае равновесной магнитоактивной плазмы с произвольной степенью анизотропии (но в предположении об ортогональности поляризаций нормальных волн). Оказалось, что источники теплового излучения в плазме испускают некогерентные между собой обыкновенные и необыкновенные волны, поэтому поляризация теплового излучения в магнитоактивной среде должна совпадать с поляризацией нормальных волн. Так, например, при выполнении условий квазипродольного распространения (5.24), когда обыкновенные и необыкновенные волны поляризованы по кругу, источники теплового излучения в плазме излучают наряду с естественно поляризованным только циркулярно поляризованное излучение. Поэтому линейная поляризация излучения в такой среде не может возникнуть за счет собственных источников теплового излучения. Соответственно в квазипоперечном приближении (5.25) с линейно-поляризованными нормальными волнами источники теплового излучения дают вклад лишь в линейно-поляризованное излучение и не могут обеспечить появление излучения, поляризованного по кругу.

Выше мы рассматривали уравнение переноса поляризации (9.34) только в однородной среде. При попытке обобщить эти уравнения на случай произвольной неоднородной среды возникают существенные трудности, связанные с необходимостью учитывать различия в траекториях лучей для обыкновенных и необыкновенных волн.<sup>71</sup> Однако в достаточно разреженной неоднородной среде, когда рефракция становится несущественной  $n_j \approx 1$ , для анализа поляризации излучения можно использовать приведенные выше уравнения: достаточно при этом считать элементы тензора поляризации источников  $S_{\alpha\beta}$  и тензора переноса поляризации  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  функциями координат. Далее, в так называемом квазиизотропном приближении, рассмотренном в §7 и применимом в неоднородной плазме, для которой  $|n_1 - n_2| \ll |n_1 + n_2|$ , рефракция существенна, но указанные траектории можно считать одинаковыми. При этом уравнение переноса поляризации, выписанное ниже, может быть получено из уравнений Баддена–Кравцова, которое анализировалось в §7 [137]:

<sup>71</sup>В приближении малоуглового рассеяния этот эффект учтен в уравнении переноса, полученном в [199] для хаотически неоднородной среды.



$$\epsilon \frac{d}{dl} \left( \epsilon^{-1} I_{\alpha\beta} \right) = T_{\alpha\beta\gamma\delta} I_{\gamma\delta}. \quad (9.49)$$

Правая часть этого уравнения отличается от правой части уравнения (9.34) только зависимостью компонент тензора от пространственных координат. В левую часть входит диэлектрическая проницаемость изотропной плазмы  $\epsilon = n^2$  точно так же, как в уравнение переноса интенсивности в стационарном случае (ср. с (8.10)). Подчеркнем, что уравнение (9.49) справедливо не только в приближении геометрической оптики: оно включает в себя и эффекты линейного взаимодействия. Поэтому вместо исследования уравнений Баддена–Кравцова можно с тем же успехом решать уравнения переноса поляризации (9.49).

### 9.3. Решение уравнений переноса поляризации

Исследование уравнений переноса поляризации с тензором  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  в общем виде затруднительно: решения получаются весьма громоздкими и трудно обозримыми. Поэтому приходится обращаться к разного рода предельным случаям, среди которых важную роль играют квазипродольное и квазипоперечное приближения. В первом из них волны обоих типов (обыкновенные и необыкновенные) поляризованы по кругу, во втором — линейно. Квазипродольное приближение имеет широкую область применимости в астрофизической плазме (солнечная корона, оболочки сверхновых, межзвездная среда и пр.); случай линейно-поляризованных нормальных волн может представить интерес для некоторых специальных условий распространения радиоволн в солнечной короне, ионосфере Юпитера, а также в магнитосферах нейтронных звезд. В обоих указанных приближениях уравнение переноса поляризации (9.34) с тензором  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  в форме (9.35), (9.36) существенно упрощается.

Действительно, в случае циркулярно поляризованных необыкновенных и обыкновенных волн векторы поляризации соответственно равны

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + iy_0), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ix_0 + y_0), \quad (9.50)$$

( $x_0$  и  $y_0$  — единичные векторы координатных осей  $x$  и  $y$ , расположенных в плоскости, ортогональной  $k$ ). Внося эти значения  $e_1$ ,  $e_2$  в выражения для тензоров  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ,  $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$  (9.36), запишем уравнения

переноса поляризации (9.34) сразу через параметры Стокса (2.33):

$$\frac{dI}{dz} = S_I - (k_1'' + k_2'')I + (k_1'' - k_2'')V, \quad (9.51)$$

$$\frac{dV}{dz} = S_V - (k_1'' + k_2'')V + (k_1'' - k_2'')I,$$

$$\frac{dQ}{dz} = S_Q - (k_1'' + k_2'')Q + (k_1' - k_2')U, \quad (9.52)$$

$$\frac{dU}{dz} = S_U - (k_1'' + k_2'')U - (k_1' - k_2')Q.$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_I &= S_{xx} + S_{yy}, \\ S_V &= S_{xx} - S_{yy}, \\ S_Q &= i(S_{yx} - S_{xy}), \\ S_U &= S_{yx} + S_{xy}. \end{aligned}$$

Для квазипоперечного распространения векторы поляризации необыкновенных и обыкновенных волн равны соответственно

$$e_1 = x_0, \quad e_2 = y_0. \quad (9.53)$$

если магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  направлено вдоль оси  $y_0$ . В этом случае уравнения переноса поляризации (9.34)–(9.36) приобретают такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dz} &= S_I - (k_1'' + k_2'')I - (k_1'' - k_2'')Q, \\ \frac{dQ}{dz} &= S_Q - (k_1'' + k_2'')Q - (k_1'' - k_2'')I, \end{aligned} \quad (9.54)$$

$$\frac{dU}{dz} = S_U - (k_1'' + k_2'')U - (k_1' - k_2')V,$$

$$\frac{dV}{dz} = S_V - (k_1'' + k_2'')V + (k_1' - k_2')U,$$

где поляризация источников характеризуется параметрами

$$S_I = S_{xx} + S_{yy},$$

$$\begin{aligned} S_Q &= S_{xx} - S_{yy}, \\ S_V &= i(S_{yx} - S_{xy}), \\ S_U &= S_{yx} + S_{xy}. \end{aligned}$$

Поскольку квазипродольное распространение в условиях астрофизической плазмы представляет более широкий интерес, мы рассмотрим перенос поляризации излучения в этом случае подробнее [57]. Не представляет труда провести аналогичным образом и анализ уравнения переноса поляризации в квазипоперечном приближении (9.54) (в этой связи см., например, [193, 194]).

Итак, обращаясь к системе (9.51), (9.52), замечаем, что эффект Фарадея, определяемый сдвигом фаз между нормальными волнами (разностью  $k'_1 - k'_2$ ), на уравнениях (9.51) не сказывается. Это вполне естественно, поскольку вращение эллипса поляризации не меняет общей интенсивности излучения  $I$  и степени круговой поляризации  $\zeta_c = V/I$ . Однако эффект Фарадея, как видно из (9.52), может изменить степень линейной поляризации  $\zeta_l = \sqrt{Q^2 + U^2}/I$  и ориентацию эллипса  $\chi$  в соответствии с соотношением  $\operatorname{tg} 2\chi = U/Q$  (см. §2).

Если ввести понятие интенсивностей необыкновенного ( $I_1$ ) и обыкновенного ( $I_2$ ) излучений, связанных с параметрами Стокса соотношениями (см. (2.40)):

$$I = I_1 + I_2, \quad V = I_2 - I_1, \quad (9.55)$$

то после подстановки их в (9.51), сложения и вычитания этих уравнений получим

$$\frac{dI_1}{dz} = S_1 - 2k''_1 I_1, \quad \frac{dI_2}{dz} = S_2 - 2k''_2 I_2, \quad (9.56)$$

где  $S_I = S_1 + S_2$  и  $S_V = S_2 - S_1$ .

Формулы (9.56) демонстрируют то отмеченное в предыдущем разделе обстоятельство, что в случае ортогональности поляризаций нормальных волн излучение, содержащее волны одного типа (например, необыкновенные), описывается уравнением переноса интенсивности вида (9.39) независимо от наличия в среде волн другого типа.

Нетрудно написать общее решение системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами (9.51), (9.52), выразив константы в этом решении через значения параметров Стокса в начале слоя (при  $z = 0$ ; см. [57]). Если собственное излучение слоя плазмы несущественно ( $S_I = S_V = S_Q = S_U = 0$ ), то из этих решений следует, что

степень круговой поляризации <sup>72</sup>

$$\zeta_c = \frac{V}{I} = \frac{1 + \zeta_c^0 - (1 - \zeta_c^0)e^{-2(k_1'' - k_2'')z}}{1 + \zeta_c^0 + (1 - \zeta_c^0)e^{-2(k_1'' - k_2'')z}}, \quad (9.57)$$

а степень линейной поляризации

$$\zeta_l = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I} = \frac{2\zeta_l^0}{(1 - \zeta_c^0)e^{-(k_1'' - k_2'')z} + (1 + \zeta_c^0)e^{(k_1'' - k_2'')z}}. \quad (9.58)$$

Ориентация эллипса поляризации  $\chi$  при этом определяется соотношением

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{U}{Q} = \operatorname{tg} [2\chi^0 - (k_1' - k_2')z],$$

согласно которому (эффект Фарадея, ср. с (9.11), (9.12))

$$\Delta\chi = \chi - \chi^0 = \frac{1}{2}(k_2' - k_1')z = \frac{\omega}{2c}(n_2 - n_1)z. \quad (9.59)$$

Из приведенных формул ясно, что по мере распространения излучения в магнитоактивной плазме без источников эллипс поляризации равномерно вращается, причем степень линейной поляризации  $\zeta_l$  при условии

$$|k_1'' - k_2''|z \gg 1. \quad (9.60)$$

становится экспоненциально малой. Степень круговой поляризации  $\zeta_c$  в области (9.60) близка к  $\pm 1$  даже в том случае, если в начале слоя излучение не было поляризовано по кругу ( $\zeta_c^0 = 0$ ). Последнее обусловлено различным поглощением нормальных волн в плазме, поляризованных по правому и левому кругу. Соответственно знак  $\zeta_c$  определяется знаком разности  $k_1'' - k_2''$ .

Обсудим теперь характер изменения поляризации с учетом собственного излучения магнитоактивной плазмы, ограничиваясь сначала случаем, когда падающее на слой плазмы излучение отсутствует ( $I^0 = V^0 = Q^0 = U^0 = 0$ ), а слой плазмы столь тонок

$$|k_{1,2}''z| \ll 1, \quad (9.61)$$

что влияние поглощения можно не учитывать. Тогда из общего решения системы (9.51)–(9.52) вытекает, что  $I = S_I z$ ,  $V = S_V z$  и, следовательно, степень круговой поляризации не меняется:  $\zeta_c = V/I = \text{const}$ . В

<sup>72</sup> Здесь и ниже верхний индекс “нуль” указывает на то, что соответствующая величина относится к точке  $z = 0$ .

этом случае зависимость степени линейной поляризации от толщины однородного слоя плазмы  $z$  описывается формулой [189]:

$$\zeta_1 = \sqrt{U^2 + Q^2}/I = \zeta_1^S \left| \frac{\sin \left[ \frac{1}{2}(k'_1 - k'_2)z \right]}{\frac{1}{2}(k'_1 - k'_2)z} \right|, \quad (9.62)$$

в которой  $\zeta_1^S = \sqrt{S_U^2 + S_Q^2}/S_I$  — степень линейной поляризации источников излучения в этом слое. Из (9.62) получаем, что при условии

$$\frac{1}{2}(k'_1 - k'_2)z = \frac{\omega}{2c}(n_1 - n_2)z \gg 1. \quad (9.63)$$

степень линейной поляризации излучения из плазменного слоя резко убывает по сравнению с величиной  $\zeta_1^S$ . Далее, отношение параметров Стокса  $U$  и  $Q$  здесь равно

$$\frac{U}{Q} = \operatorname{tg} \left[ 2\chi^S - \frac{1}{2}(k'_1 - k'_2)z \right],$$

где  $\operatorname{tg} 2\chi^S = S_U/S_Q$ , и следовательно, ориентация эллипса поляризации  $\chi(z)$  меняется по закону

$$\chi = \chi^S + \frac{1}{4}(k'_2 - k'_1)z + \frac{\pi}{2}m. \quad (9.64)$$

Целое число  $m$  изменяется на единицу в точках  $z$ , где степень линейной поляризации (9.62) обращается в нуль (т.е. в точках, где  $(k'_1 - k'_2)z = 2\pi m$ ). При подходе к указанным точкам угол  $\chi$  приближается к  $\chi^S + \pi/2$  или  $\chi^S - \pi/2$  (в зависимости от знака разности  $k'_1 - k'_2$ ), в то время как после этих точек изменение  $\chi$  каждый раз начинается с  $\chi^S$ , т.е. с ориентации, характерной для источников излучения. При этом изменение  $\chi$  происходит вдвое медленнее, чем для излучения, падающего на слой плазмы извне (см. формулы (9.64) и (9.59)). Более медленное вращение эллипса поляризации обусловлено тем, что к излучению каждого элементарного источника, испытывающему по мере распространения в плазме обычное фарадеевское вращение (9.59), по пути добавляется излучение от других источников с фиксированной ориентацией эллипса поляризации [57].

Особое внимание в обсуждаемом случае оптически тонкого источника (9.61) надо обратить на условие (9.63), при котором происходит сильная деполаризация (уменьшение наблюдаемой величины  $\zeta_1$

по сравнению с  $\zeta_l^S$ ), делающая невозможной регистрацию линейной поляризации излучения даже в случае высоких значений  $\zeta_l^S$ . Из сопоставления (9.63) и (9.59) ясно, что деполяризация происходит, когда имеет место сильное фарадеевское вращение излучения в пределах области генерации ( $\Delta\chi \gg 1$ ). Благодаря этому обстоятельству ориентации эллипсов поляризации излучения, пришедшего в точку наблюдения от разных точек источника, лежащих на одном луче, будут заключены в широком интервале углов  $\Delta\chi \gg 1$ . При этом эллиптически поляризованное излучение источников наблюдается как циркулярно поляризованное, а излучение, поляризованное линейно, как хаотически поляризованное. Указанная деполяризация не происходит лишь при условии  $|\Delta\chi| \ll 1$ , которое, как нетрудно убедиться, налагает серьезные ограничения на размеры областей генерации линейно- или эллиптически поляризованного излучения. В самом деле, из (9.14) следует, что в пределах излучающей области с линейным размером  $L$  величина  $|\Delta\chi| \ll 1$ , если

$$L \ll f^2 / 2.35 \cdot 10^4 N B_0 |\cos \alpha|. \quad (9.65)$$

В солнечной короне с  $N \sim 10^8 \text{ см}^{-3}$  и  $B_0 |\cos \alpha| \sim 10 \text{ Гс}$  для радиоизлучения на частоте  $f \sim 10^{10} \text{ Гц}$  величина  $L$  должна быть меньше  $2 \cdot 10^6 \text{ см}$ , в метровом диапазоне еще на четыре порядка меньше. Поскольку размеры источников солнечного радиоизлучения обычно превышают указанные значения, деполяризация вследствие эффекта Фарадея в излучающей области будет практически полной. Создание линейно- или эллиптически поляризованного солнечного радиоизлучения возможно лишь за счет специальных условий выхода радиоизлучения за пределы солнечной короны, включая эффекты линейного взаимодействия волн (см. §7).

Рассмотрим теперь характер поляризации излучения из однородного оптически толстого источника ( $2k''_{1,2}z \gg 1$ ). В подобном источнике поглощение становится весьма существенным, а падающим на него излучением можно пренебречь. В этом случае из решения системы (9.51)–(9.52) следует, что степени линейной и круговой поляризации излучения  $\zeta_l$  и  $\zeta_c$  не зависят от координаты  $z$  и определяются лишь характером поляризации источников ( $\zeta_l^S$  и  $\zeta_c^S$ ) и поглощением ( $k''_{1,2}$ ). Вращение эллипса поляризации отсутствует: на расстояниях, где  $2k''_{1,2}z \gg 1$ , угол  $\chi$  принимает фиксированное значение, несмотря на эффект Фарадея. При этом угол  $\chi$  близок к  $\chi^S$ , если фарадеевское вращение несущественно по сравнению с эффектами поглощения:  $|k'_1 - k'_2| \ll k''_1 + k''_2$ . В случае сильного эффекта Фарадея, когда

$|k'_1 - k'_2| \gg k''_1 + k''_2$ , угол  $\chi \approx \chi^S \pm \pi/4$  (знак совпадает со знаком разности  $k'_2 - k'_1$ ). Указанные результаты не удивительны, если принять во внимание тот факт, что в каждой точке  $z$ , достаточно удаленной от начала слоя ( $2k''_{1,2}z \gg 1$ ), излучение создается источниками в слоях одинаковой протяженности  $\Delta z_{1,2} \sim (2k''_{1,2})^{-1}$ .

В предыдущем разделе отмечалось, что поляризация источников теплового излучения, действующих в равновесной плазме, — циркулярная (в квазипродольном приближении):  $S_U = S_Q = 0$  и  $\zeta_i^S = 0$ . Из (9.62) следует, что в указанных условиях собственное излучение, выходящее из слоя, не может содержать линейно-поляризованной компоненты [198]. Тот же вывод справедлив и для источника произвольной оптической толщины. Поэтому существование линейной поляризации радиоизлучения из тех областей, где в широких пределах выполнены условия квазипродольного распространения (например, в межзвездной среде или в оболочках сверхновых), служит веским аргументом, указывающим на нетепловой характер этого излучения.<sup>73</sup>

Отмеченное совпадение поляризации теплового излучения с поляризацией нормальных волн в плазме означает, что обыкновенная и необыкновенная компоненты в составе теплового излучения некогерентны между собой. Последний факт, разумеется, не зависит от угла между  $k_{1,2}$  и магнитным полем в плазме  $B_0$ . Поэтому и в общем случае — для произвольных ориентаций волновых векторов  $k_{1,2}$  по отношению к  $B_0$  — поляризация источников теплового излучения в плазме совпадает с поляризацией нормальных волн (если эти поляризации ортогональны).

Характер поляризации излучения резко меняется (по сравнению с рассмотренным выше), если в плазме реализуются условия, при которых становится возможным усиление нормальных волн:  $k''_{1,2} < 0$  (об этих условиях см. главу 7). Степень круговой поляризации  $\zeta_c$  в области  $-2k''_{1,2}z \gg 1$  оказывается постоянной и определяется характером поляризации источников и падающего излучения до тех пор, пока  $2|k''_1 - k''_2|z \ll 1$ . Однако на достаточно больших расстояниях  $z$ , удовлетворяющих противоположному неравенству,  $\zeta_c(z) \rightarrow \pm 1$  независимо от свойств источников и падающего излучения. Знак  $\zeta_c$  при этом определяется знаком разности  $k''_2 - k''_1$ . Поскольку полная степень поляризации  $\sqrt{\zeta_i^2 + \zeta_c^2} \leq 1$ , ясно, что при  $\zeta_c \rightarrow \pm 1$  степень линейной поляризации  $\zeta_l \rightarrow 0$ .

Здесь, на примере среды с круговой поляризацией обыкновенных и

<sup>73</sup> Если, конечно, такая поляризация не формируется по пути, например, за счет эффектов линейного взаимодействия волн.

необыкновенных волн мы встретились с обстоятельством, имеющим весьма важное значение для суждения о возможных поляризационных характеристиках излучения из тех космических объектов, в которых имеет место усиление волн. Из приведенного примера можно сделать общее утверждение о том, что в случае достаточно большого усиления в области генерации излучения ( $-2k''_{1,2}L \gg 1$ ;  $L$  — размер области генерации) и заметного различия в величине этого усиления для волн разных типов ( $2|k''_1 - k''_2|L \gg 1$ ) выходящее за пределы источника излучения будет принадлежать к одному типу волн — обыкновенным или необыкновенным, в зависимости от того, какой коэффициент усиления больше. Поляризация излучения полностью определяется поляризацией этого типа волн в космической плазме и не зависит от поляризации излучения, испускаемого отдельными частицами источника.

На этом мы закончим анализ решений уравнений переноса поляризации, по необходимости весьма ограниченный и неполный. Отметим лишь, что существует довольно обширная литература, посвященная переносу поляризации конкретных видов излучения, главным образом синхротронного (см. работы [66, 195–197, 200–203] и др.). Уравнения переноса поляризации оказались весьма полезными и при анализе влияния эффекта Зеемана на поляризацию спектральных линий в излучении Солнца и магнитных звезд [204], однако указанная проблема выходит за рамки этой книги. Проблемам распространения и поляризации излучения в астрофизических условиях посвящена монография [205].



## Глава 5

# Собственное излучение астрофизической плазмы

В этой главе мы рассмотрим различные процессы излучения заряженных частиц, из которых складывается излучательная способность астрофизической плазмы. Излучение частиц в плазме зависит от их энергии, условий движения в электрических и магнитных полях, а также от характеристик окружающей среды. Основную роль в создании излучения астрофизической плазмы (прежде всего в радиодиапазоне) играют тормозное, черенковское и магнитотормозное излучения; на них и будет сосредоточено основное внимание в этой главе. В формировании спектра наблюдаемого внеземного излучения эти процессы участвуют или непосредственно или в результате рассеяния волн, которое будет обсуждаться позднее — в главе 8. Указанные типы излучения, разумеется, не исчерпывают все богатство спектра космического радиоизлучения: достаточно сказать, что в радиодиапазоне регистрируются спектральные линии, возникающие при электронных переходах между дискретными уровнями атомов и молекул межзвездной среды — линии нейтрального водорода H I, гидроксила OH и пр., изучение которых стало мощным средством исследования межзвездной среды. Однако при таких процессах плазменные явления не играют, по-видимому, существенной роли, что лишает нас основной рассматривать указанный тип излучения в этой книге.<sup>74</sup>

---

<sup>74</sup> В этой связи см., впрочем, работы [206, 207], где обсуждается влияние эффектов индуцированного рассеяния в плазме на характер спектральных линий излучения.

## §10. Излучение волн отдельными заряженными частицами

### 10.1. Тормозное излучение

Тормозным обычно называют излучение, возникающее при пролете одной заряженной частицы мимо другой (столкновении двух частиц), если налетающая частица после соударения остается свободной — не захватывается второй частицей. Поэтому в астрофизике переходы, сопровождаемые испусканием квантов тормозного излучения, носят название свободно-свободных переходов, в отличие, например, от свободно-связанных (рекомбинационных) переходов, которые ведут к захвату электрона ионом.

При столкновениях частиц с существенно различной массой (электрона и иона) более тяжелую частицу можно считать неподвижной. Тогда тормозное излучение возникает за счет потери энергии электрона. Энергия испускаемого кванта  $\hbar\omega$  заведомо не превышает начальной кинетической энергии электрона  $\mathcal{E}_{\text{kin}}$ . Это ограничивает широкий спектр тормозного излучения максимальной частотой  $\omega_{\text{max}}$ :

$$\omega \leq \omega_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{kin}}}{\hbar}. \quad (10.1)$$

Максимальное изменение  $\Delta\mathcal{E}$  кинетической энергии электрона в кулоновском поле иона наступает в момент наибольшего сближения частиц на расстояние  $r_{\text{min}} \sim q$ , где  $q$  — прицельный параметр при столкновении.<sup>75</sup> На расстоянии  $r_{\text{min}}$  потенциальная энергия электрона в кулоновском поле иона с зарядом  $Ze$  составит  $Ze^2/r_{\text{min}}$ . Соответственно  $\Delta\mathcal{E} \sim Ze^2/r_{\text{min}}$  станет сравнимым с исходным значением кинетической энергии  $\mathcal{E}_{\text{kin}}$  для “эффективных” столкновений, в которых

$$q \sim r_{\text{min}} \sim \frac{Ze^2}{\mathcal{E}_{\text{kin}}} \sim 2 \frac{Ze^2}{m_e v^2} \quad (10.2)$$

(Последнее соотношение записано для нерелятивистского электрона с начальной скоростью  $v$ .)

<sup>75</sup> Прицельный параметр — наименьшее расстояние, на которое приблизились бы взаимодействующие частицы при условии сохранения прямолинейности своих траекторий.

Движение электрона в поле ядра допускает классическое (не квантовое) описание, если  $\bar{\lambda}_B \ll r_{\min}$  ( $\bar{\lambda}_B = \hbar/m_e v$  — длина волны де Бройля для частицы со скоростью  $v$ ). Для нерелятивистского электрона последнее неравенство (с учетом (10.2)) сводится к виду

$$v \ll \frac{2Ze^2}{\hbar}. \quad (10.3)$$

Тормозное излучение на частотах  $\omega \ll \omega_{\max}$  имеет классический характер, в то время как на высоких частотах  $\omega \sim \omega_{\max}$  (10.1) процесс излучения (да и движение частицы с учетом эффектов “отдачи” при излучении) приобретает квантовый характер.

Расчет тормозного излучения нерелятивистского электрона, движущегося по “классической” траектории со скоростью  $v$  (10.3), существенно упрощается на низких частотах, удовлетворяющих условию

$$\omega \ll \frac{m_e v^2 c}{2Ze^2}. \quad (10.4)$$

где тормозное излучение становится дипольным: длина электромагнитных волн этих частот велика по сравнению с характерными размерами системы “электрон-ион” в момент столкновения ( $r \sim r_{\min}$ ). В результате спектральная энергия, излученная в единичном интервале частот при одном столкновении, будет равна (см., например, [56])

$$\mathcal{E}_\omega = \frac{8\pi}{3c^3} |\ddot{d}_\omega|^2. \quad (10.5)$$

Здесь  $d_\omega$  — фурье-компонента разложения дипольного момента системы “электрон-ион”  $\mathbf{d} = -er_e(t) + Zer_i$ . Заметим, что в изотропной среде с показателем преломления  $n_{em}(\omega)$  энергия тормозного излучения в дипольном приближении на фактор  $n_{em}(\omega)$  отличается от заданной формулой (10.5). В магнитоактивной плазме выражения для  $\mathcal{E}_\omega$  становятся более сложными.

Из формулы (10.5) следует, что при столкновении двух одинаковых нерелятивистских частиц (скажем, двух электронов) дипольного тормозного излучения не возникает.<sup>76</sup> Здесь есть только квадрупольное излучение, энергия которого в  $(v/c)^2$  раз меньше дипольного излучения электрона при столкновении с неподвижной (тяжелой) частицей.

<sup>76</sup> Дипольный момент системы из двух электронов есть  $\mathbf{d} = e(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ , где  $\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \mathbf{R}$  — радиус-вектор центра масс системы. Если на последнюю внешние силы не действуют, то  $\ddot{\mathbf{R}} = 0$  и  $\ddot{\mathbf{d}} = 0$ .

Вот почему для нерелятивистских частиц имеет смысл говорить главным образом о тормозном излучении при столкновениях разных частиц и прежде всего — электронов и ионов (или ядер). В то же время тормозное излучение при взаимодействии тяжелых частиц тоже будет слабым — из-за малости ускорения, испытываемого ими при ударе.

Спектральная энергия тормозного излучения существенно зависит от величины прицельного параметра  $q$ . В то же время при решении конкретных проблем излучения космической плазмы обычно представляет интерес не излучение при соударениях двух частиц, а излучение целого ансамбля частиц, испытывающих соударения с различными прицельными параметрами. Поэтому с точки зрения приложений важно знать не  $\mathcal{E}_\omega$ , а эффективную спектральную мощность излучения — результат усреднения  $\mathcal{E}_\omega$  по различным значениям прицельного параметра:

$$\kappa_\omega = 2\pi \int_0^\infty \mathcal{E}_\omega q dq. \quad (10.6)$$

Нетрудно видеть, что  $\kappa_\omega$  представляет собой спектральную мощность тормозного излучения потока частиц (с единичной плотностью потока<sup>77</sup>) при соударениях с одной фиксированной частицей. Наряду с  $\kappa_\omega$  в теории тормозного излучения используется также эффективное дифференциальное сечение для тормозного излучения  $\sigma_\omega = \kappa_\omega / \hbar\omega$ , имеющее размерность произведения площади на время и характеризующее число фотонов в единичном интервале частот, излучаемых в единицу времени единичным потоком частиц при столкновениях с одной частицей.

Если кулоновский центр с зарядом  $Ze$  остается неподвижным (приближение, вполне допустимое при столкновениях электронов с ионами), то

$$\kappa_\omega = \frac{16e^6 Z^2}{3v^2 c^3 m_e^2} \ln \left( \frac{2m_e v^3}{\delta \omega e^2 Z} \right), \quad \omega \ll \frac{m_e v^3}{Ze^2}, \quad (10.7)$$

$$\kappa_\omega = \frac{16\pi e^6 Z^2}{3\sqrt{3}v^2 c^3 m_e^2}, \quad \omega \gg \frac{m_e v^3}{Ze^2}. \quad (10.8)$$

Коэффициент  $\delta = e^C \approx 1.781$ , где  $C \approx 0.577$  — постоянная Эйлера. Соответствующая процедура перехода от (10.5) к (10.6), которая приводит в результате к формулам (10.7), (10.8), указана в [56]. Напомним,

<sup>77</sup> Имеется в виду поток движущихся в одном направлении частиц с концентрацией, при которой в единицу времени через единицу площади проходит одна частица.

что обе формулы написаны в дипольном приближении (10.4). При этом выражение (10.7) справедливо для столкновений как одинаковых, так и противоположных зарядов, а выражение (10.8) — только для столкновений разноименных зарядов. В случае соударений частиц с зарядами одного знака вместо (10.8) имеет место выражение, согласно которому  $\kappa_\omega \propto \exp(-2\pi\omega e^2 Z/m_e v^3)$ .

Полные потери энергии частицы на тормозное излучение в единицу времени при прохождении через среду с концентрацией ионов  $N_+$ , очевидно, выражаются следующим образом:<sup>78</sup>

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_b = \int_0^{\omega_{\max}} \kappa_\omega d\omega N_+ v. \quad (10.9)$$

Эту величину можно приближенно оценить, подставив в (10.9) выражение (10.8) для  $\kappa_\omega$ :

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_b \sim \frac{8\pi e^6 Z^2 N_+ v}{3\sqrt{3}m_e c^3 \hbar} \quad (10.10)$$

(см., например, [208]). Неточность формулы (10.10) связана с экстраполяцией формулы (10.8) за пределы ее применимости в область низких частот и, что особенно существенно, на высокие частоты вплоть до  $\omega_{\max} = \mathcal{E}_{\text{kin}}/\hbar$ .

Когда условие (10.3) нарушено (для ионов с  $Z \sim 1$  это может произойти даже у нерелятивистских электронов, чья скорость  $v/c \gtrsim (e^2/\hbar c)Z = Z/137$ ), то процесс столкновений приобретает квантовый характер. Соответствующие формулы для тормозного излучения приведены в [210]. В случае, противоположном (10.3), но при условии  $v \ll c$ , величина

$$\kappa_\omega = \frac{16e^6 Z^2}{3v^2 c^3 m_e^2} \ln\left(\frac{2mv^2}{\hbar\omega}\right), \quad (10.11)$$

формула (10.11) справедлива на частотах  $\omega \ll \omega_{\max}$ , для которых остается малым относительное изменение скорости электрона за счет излучения при одном соударении. При получении (10.11) вероятность свободно-свободных переходов при соударениях вычислена в борновском приближении, а излучения — в дипольном.

<sup>78</sup> Величина  $P_\omega = \kappa_\omega N_+ v = \hbar\omega\sigma_\omega N_+ v$  определяет при этом спектральную мощность тормозного излучения частицы (т.е. энергию, излучаемую частицей в единицу времени в единичном интервале частот).

Полные (просуммированные по всем излучаемым частотам) потери энергии (10.9) для нерелятивистской частицы при движении в среде со скоростью  $v \gg 2e^2 Z/\hbar$  определяется выражением [211]:

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_b = \frac{16e^6 Z^2 N_+ v}{3m_e c^3 \hbar}. \quad (10.12)$$

Далее, если электрон релятивистский, то эффективная мощность его тормозного излучения, сосредоточенного при этом в узком угле  $\sim m_e c^2/\mathcal{E}$  вдоль скорости электрона, равна (для  $\omega \ll \omega_{\max}$ ) [208]

$$\kappa_\omega = \frac{16e^6 Z^2}{3m_e^2 c^5} \left[ \ln \left( \frac{2\mathcal{E}^2}{m_e c^2 \hbar \omega} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (10.13)$$

Тормозные потери релятивистского электрона в среднем составляют [211]

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_b = \frac{4e^6 Z^2 N_+ \mathcal{E}}{m_e^2 c^4 \hbar} \left[ \ln \left( \frac{2\mathcal{E}}{m_e c^2} \right) - \frac{1}{3} \right]. \quad (10.14)$$

Основной вклад в эту величину, однако, вносят потери на излучение квантов с энергией  $\hbar\omega \sim \hbar\omega_{\max} \sim \mathcal{E}$ . Поэтому фактическая убыль энергии частиц в каждый момент времени может существенно отличаться от (10.14).

Надо подчеркнуть, что во всех приведенных в этом разделе формулах не учитывалось влияние окружающей среды (плазмы) на тормозное излучение. Это влияние имеет двойкий характер. С одной стороны, присутствие плазмы меняет вид электростатического поля: потенциал иона (или ядра) существенно отличается от кулоновского и резко убывает по величине на расстояниях  $r > D$  от данного заряда (дебаевское экранирование, см. формулу (1.5)). Это экранирование, очевидно, не изменит приведенных результатов, если дебаевский радиус  $D \gg r_{\min}$ , определенного формулой (10.2). В случае  $r_{\min} > D$  оценку  $\kappa_\omega$  можно получить, положив верхний предел интегрирования по прицельным параметрам в (10.6) равным  $D$ . Для точного расчета тормозного излучения в этом случае необходимо заново рассчитать  $\mathcal{E}_a$  с учетом дебаевской формы потенциала заряженной частицы в плазме (1.5). С другой стороны, отличие показателя преломления в плазме от единицы меняет спектр тормозного излучения. Это изменение легко учесть, если плазма изотропна, а тормозное излучение имеет дипольный характер: спектр будет ограничен снизу ( $\omega > \omega_L$ ),<sup>79</sup> а мощность

<sup>79</sup>Поскольку при  $\omega < \omega_L$  квадрат показателя преломления  $n_{em}^2 < 0$ , и электромагнитные волны таких частот не могут распространяться в плазме (см. §5).

излучения  $\kappa_\omega$  равна вакуумному значению, умноженному на показатель преломления электромагнитных волн  $n_{em}(\omega)$  (5.2). Влияние магнитоактивной среды на мощность тормозного излучения будет более сложным. Кроме того, при учете теплового движения в плазме становится возможным тормозное излучение плазменных волн. Дополнительные сведения о тормозном излучении в плазме можно почерпнуть из работ [212–215].

О тормозном излучении астрофизической плазмы в радиодиапазоне будет идти речь в §12. Здесь лишь отметим, что приведенные формулы широко используются также для расчетов рентгеновского излучения солнечной короны, звездных корон, рентгеновских источников, входящих в состав двойных звезд, а также для оценок радиационных потерь энергичных частиц в межзвездной среде.

## 10.2. Черенковское излучение

Для излучения заряженной частицы в вакууме необходимо, чтобы она двигалась с ускорением. Примером этого служит формула дипольного (10.7) излучения. В среде, однако, возможны условия, при которых излучает заряд, движущийся равномерно. В однородной среде это явление называется эффектом Вавилова–Черенкова. Если среда неоднородна, то наряду с черенковским излучением появляется излучение другого типа — переходное. На нем мы останавливаться не станем (о переходном излучении см. [208, 209] приведенную там литературу).

Условия черенковского излучения можно получить, решая классическую задачу об электромагнитном поле, создаваемом движущимся в однородной среде зарядом. Однако к этому условию можно прийти значительно проще и нагляднее, используя законы сохранения импульса и энергии системы “электрон + излучение” в их квантовой форме [216]. Это служит иллюстрацией того факта, что элементарные квантовые представления нередко оказываются весьма полезными даже в тех случаях, когда задача является классической и постоянная Планка не входит в конечный результат.

Итак, пусть нерелятивистский электрон движется в среде с показателем преломления  $n_j(\omega)$  со скоростью  $v$  (энергия электрона  $m_e v^2/2$ , импульс  $m_e v$ ). Если он испустит фотон (соответствующий  $j$ -й нормальной волне) с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\hbar k_j$ , то энергия и импульс электрона примут новые значения,  $m_e v_1^2/2$  и  $m_e v_1$ . Указанный процесс излучения фотона отдельным электроном возможен лишь в том

случае, если выполнены законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{2}m_e v_1^2 + \hbar\omega, \quad (10.15)$$

$$m_e v = m_e v_1 + \hbar k_j. \quad (10.16)$$

Полагая  $v_1 = v + \Delta v$ , подставим эту величину в (10.15), (10.16):

$$m_e v \Delta v + \frac{1}{2}m_e (\Delta v)^2 + \hbar\omega = 0, \quad (10.17)$$

$$m_e \Delta v + \hbar k_j = 0. \quad (10.18)$$

Считая далее, что  $m_e v^2/2 \gg \hbar\omega$  (т.е. изменение скорости электрона при испускании фотона  $|\Delta v| \ll |v|$ ), пренебрежем вторым членом в (10.17) по сравнению с первым.<sup>80</sup> Исключив затем  $\Delta v$  из уравнений (10.17), (10.18), получим условие эффекта Вавилова–Черенкова:

$$\omega = kv. \quad (10.19)$$

Хотя для простоты считалось, что  $v \ll c$ , критерий (10.19) остается справедливым при любой скорости электрона.

Этот критерий можно записать в иной форме, положив  $k_j = n_j \omega/c$ ,  $v = \beta c$  и обозначив через  $\theta$  угол между  $k$  и  $v$ :

$$\beta n_j \cos \theta = 1. \quad (10.20)$$

Третья форма записи рассматриваемого критерия

$$v_{ph} = v \cos \theta, \quad (10.21)$$

получается из (10.20) с учетом выражения для фазовой скорости волн  $v_{ph} = c/n_j$ . При фиксированных значениях  $v$  и  $v_{ph}$  эти критерии определяют “черенковский конус” с осью вдоль  $v$  и углом  $2\theta$  при вершине. В направлениях, лежащих на этой конической поверхности, и происходит черенковское излучение (см. Рис. 36).

Равенства (10.19)–(10.21), очевидно, выполняются в среде и только для тех волн, показатель преломления которых  $n_j > 1$  или, что то же самое, фазовая скорость  $v_{ph} < c$  (поскольку скорость излучающих частиц  $v < c$  и  $\cos \theta \leq 1$ ). В изотропной плазме для электромагнитных (поперечных) волн  $n_j = n_{em} < 1$  (см. (5.2)), что препятствует

<sup>80</sup> Именно в пренебрежении “отдачей” при испускании фотона и состоит переход к классическому пределу при отыскании условия появления излучения Вавилова–Черенкова.



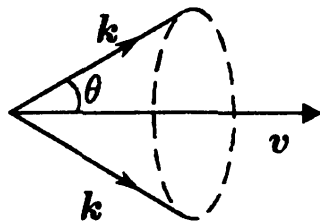


Рис. 36. Конус волновых векторов при эффекте Вавилова – Черенкова

появлению эффекта Вавилова – Черенкова. Однако показатель преломления плазменных (продольных) волн  $n_{pl}$  может принимать значения больше единицы на частотах, не слишком близких к  $\omega_L$  ((5.14) и Рис. 7). Вот на этих волнах и возможен эффект Вавилова–Черенкова в изотропной плазме. Из (10.21) следует, что электрон при движении в плазме излучает волны, фазовая скорость которых  $v_{ph} = \omega/k \leq v$ . С другой стороны, как будет показано в §12, плазменные волны сильно затухают, если  $v_{ph}$  становится порядка  $v_T = \sqrt{\kappa T/m_e}$  — тепловой скорости электронов в плазме. Поэтому в спектре черенковского излучения присутствуют плазменные волны с фазовой скоростью в пределах от  $v$  до  $v_T$  (при  $v \gg v_T$ ). Если же скорость электрона  $v \lesssim v_T$ , то он практически не излучает плазменных волн; при  $v \ll v_T$  его поле будет близко к электростатическому (см. (1.5)). Далее, поскольку  $n_{pl} = n_{pl}(\omega)$ , каждой частоте  $\omega$  при черенковском излучении будет соответствовать свое значение угла  $\theta$  (10.20). Величина  $n_{pl}(\omega)$  растет вместе с  $\omega$ , поэтому более высокие частоты излучаются под большими углами  $\theta$  к направлению скорости  $v$ . Для указанного выше интервала фазовых скоростей  $v_T < v_{ph} < v$  значения  $\cos \theta$  заключены в пределах от  $v_T/v$  до 1.

Спектральная мощность черенковского излучения электроном плазменных волн равна (см., например, [89])<sup>81</sup>

$$P_{\omega\Omega} = \frac{e^2 \omega k}{2\pi \epsilon(\omega)} \delta(\omega - kv). \quad (10.22)$$

где  $\delta(\omega - kv)$  — дельта-функция, указывающая на тот факт, что черенковское излучение возникает на частотах и в направлениях, удовлетворяющих критерию (10.19). Интегрируя (10.22) по всем телесным углам (для этого необходимо умножить  $P_{\omega\Omega}$  на  $2\pi \sin \theta$  и проинтегрировать по  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi$  с учетом дельта-функции от  $(\omega - kv)$ , получим спектральную мощность черенковского излуче-

<sup>81</sup> Определение понятия спектральной мощности излучения и используемой ниже мощности излучения в единичном интервале частот  $P_\omega$  см. в §3.

ния [217, 218]:

$$P_\omega = \int P_{\omega\Omega} d\Omega = \frac{e^2 \omega}{v \epsilon(\omega)}. \quad (10.23)$$

Здесь  $\epsilon(\omega)$  — диэлектрическая проницаемость изотропной плазмы (4.73).

Чтобы найти полную энергию, теряемую частицей в единицу времени на черенковское излучение плазменных волн, следует проинтегрировать (10.23) по всем излучаемым частотам:

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\text{Чер}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} P_\omega d\omega \approx \frac{e^2 \omega_L^2}{2v} \ln \left( \frac{2}{3} \frac{v^2}{v_T^2} \right). \quad (10.24)$$

Нижний предел в (10.24) находится из равенства  $\beta n_{pl}(\omega) = 1$  (см. (10.20)), а верхний — из условия  $v_{ph} \sim v_T$ , или, что то же самое,  $kD \approx kv_T/\omega_L \sim 1$  ( $D$  — дебаевский радиус, см. (1.4)). Указанное условие, как уже отмечалось, служит критерием сильного затухания Ландау для плазменных волн. Заметим, что потери энергии частицей с  $v \gg v_T$  на черенковское излучение сравнимы по порядку величины с потерями энергии вследствие столкновений (но не с потерями на тормозное излучение при соударениях, которое обычно значительно слабее).

До сих пор, говоря об эффекте Вавилова – Черенкова, мы имели в виду изотропную плазму. В присутствии постоянного магнитного поля плазма становится магнитоактивной, что приводит к существенному усложнению характера излучения заряженных частиц. При прямолинейном движении частицы в магнитоактивной плазме (скажем, вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ ) критерии черенковского излучения (10.19) – (10.21) сохраняются. Однако теперь наряду с плазменными волнами могут излучаться также электромагнитные волны на тех участках дисперсионных кривых, которым соответствуют значения  $n_{1,2}^2 > 1$ . Из Рис. 8-10 следует, что последнее имеет место преимущественно на частотах, для которых  $u = \omega_B^2/\omega^2 > 1$ . При этом в интервале  $0 < v = \omega_L^2/\omega^2 < 1$  могут излучаться необыкновенные волны, а в области  $v > 1$  — вистлеры. Соответствующие выражения для спектральной мощности черенковского излучения в магнитоактивной плазме приведены в [219, 220].

Черенковское излучение плазменных волн потоками быстрых частиц играет важную роль в плазменных механизмах радиоизлучения, широко используемых для объяснения некоторых типов солнечного спорадического радиоизлучения, пульсаров и пр. (см. §15). При этом

весьма существенно то, что черенковское излучение в плазме возможно лишь на тех ветвях дисперсионных кривых, которым соответствуют волны, непосредственно не выходящие из плазмы в вакуум со слабым магнитным полем. В этом легко убедиться, рассматривая рис. 16-19. Указанное обстоятельство нельзя забывать, если наблюдаемое радиоизлучение связывается с черенковским излучением частиц в астрофизической плазме: такое излучение выходит из плазмы только в результате процессов трансформации за счет линейного взаимодействия волн (§7) или эффектов рассеяния (§18, §21).

### 10.3. Магнитотормозное излучение

Когда электрон движется под углом к магнитному полю  $B_0$ , его траектория представляет собой винтовую линию с осью вдоль поля. Проекция этой винтовой линии на плоскость, ортогональную  $B_0$  есть окружность; частота вращения электрона по этой окружности совпадает с релятивистской гирочастотой  $\Omega_B$  (1.8). Характер излучения электрона при движении по винтовой линии радикально отличается от излучения при прямолинейном движении: черенковское излучение меняет свой характер, наряду с ним появляется магнитотормозное излучение, которое существует не только в среде (как черенковское), но и в вакууме. Как будет показано ниже, частоты излучения при движении по винтовой линии в однородном магнитном поле представляют собой бесконечную совокупность гармоник с номерами  $s = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . К магнитотормозному излучению классического электрона относятся все гармоники, определяемые формулой Доплера (10.34); частота модифицированного черенковского излучения находится из уравнения (10.32).

Если излучающая частица — нерелятивистская (точнее, слаборелятивистская), т.е. если  $\mathcal{E}_{kin} \ll m_e c^2$ , то ее магнитотормозное излучение называется циклотронным. Это излучение, как мы убедимся, имеет дипольный характер. Если же, наоборот, электрон релятивистский ( $\mathcal{E}_{kin} \gg m_e c^2$ ), то его излучение называют синхротронным. Точнее, этот термин применяется к излучению электрона, чья скорость  $v$  составляет с направлением поля  $B_0$  питч-угол  $\vartheta \gg m_e c^2 / \mathcal{E}$ . Излучение частиц с малыми питч-углами  $\vartheta \ll m_e c^2 / \mathcal{E}$  имеет другое название — релятивистское дипольное излучение. Случай  $\vartheta \ll m_e c^2 / \mathcal{E}$  выделен потому, что при переходе в систему отсчета  $A'$ , где скорость поступательного движения релятивистского электрона вдоль магнитного поля  $B_0$  обращается в нуль, частица перестает быть релятивистской. В вакууме ее излучение в системе  $A'$  не отличается от обычного ци-

клотронного; релятивистское дипольное излучение при этом выступает как циклотронное излучение, пересчитанное из  $A'$  в систему, движущуюся с релятивистской скоростью относительно последней. В промежуточной области умеренно-релятивистских энергий  $\mathcal{E} \sim m_e c^2$  магнитотормозное излучение называется гиротронным.

Выше речь шла об излучении электрона в однородном магнитном поле. Однако к магнитотормозному типу можно отнести и особый вид излучения, возникающего при движении (дрейфе) электрона вдоль изогнутых магнитных силовых линий. Это излучение, рассматриваемое обычно в применении к релятивистским частицам, получило название магнитодрейфового или изгибного (curvature radiation).

Найдем теперь частоты, излучаемые электроном в однородном магнитном поле. Для этого воспользуемся законами сохранения энергии и импульса при испускании электроном фотона с энергией  $\hbar\omega$  и продольным импульсом  $\hbar k_{\parallel} = \hbar(\omega/c)n_j \cos \alpha$  ( $k_{\parallel}$  — проекция волнового вектора  $\mathbf{k}$  на направление магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ ,  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ ). Эти законы представим в форме, справедливой и для релятивистских частиц [79, 221]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n &= \sqrt{m_e^2 c^4 + p_m^2 c^2} - \sqrt{m_e^2 c^4 + p_n^2 c^2} = \hbar\omega, \\ p_{m\parallel} - p_{n\parallel} &= \frac{\hbar\omega}{c} n_j \cos \alpha, \end{aligned} \quad (10.25)$$

где  $\mathcal{E}_m$ ,  $\mathcal{E}_n$  и  $p_m$ ,  $p_n$  — энергии и импульсы частицы до испускания фотона (состояние  $m$ ) и после (состояние  $n$ ). Закон сохранения импульса записан только для продольных компонент импульсов частицы и фотона, потому что в магнитном поле у электрона в квантовом состоянии с данной энергией  $\mathcal{E}$  поперечные компоненты импульса  $p_{\perp}$  (в отличие от  $p_{\perp}^2$  и от продольных компонент  $p_{\parallel}$ ) не имеют определенного значения.

Квадрат поперечного импульса  $p_{\perp}^2$  при движении электрона в магнитном поле принимает квантованные значения, соответствующие так называемым уровням Ландау [222]:

$$\frac{p_{\perp}^2}{2m_e} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_B. \quad (10.26)$$

( $n$  — целое число,  $\omega_B = eB/m_e c$  — гирочастота<sup>82</sup>). Отсюда следует,

<sup>82</sup> Несмотря на то, что в (10.26) фигурирует нерелятивистская гирочастота  $\omega_B$ , эта формула справедлива и для релятивистских электронов.

что

$$\begin{aligned} (p_{m\perp}^2 - p_{n\perp}^2)/2m_e &= s\hbar\omega_B, \\ s = m - n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \quad (10.27)$$

где  $s$  — номер гармоники,  $p_{m,n\perp}^2/2m_e$  имеют (для нерелятивистских частиц) смысл энергии поперечного движения до и после испускания фотона  $\hbar\omega$ . Из формул (10.25), (10.27) следует, что

$$\begin{aligned} \hbar\omega &= \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha}{1 - n_j^2 \cos^2 \alpha} \times \\ &\times \left[ 1 \pm \sqrt{1 - 2s\hbar\omega_B \frac{1-\beta^2}{m_e c^2} \frac{1 - n_j^2 \cos^2 \alpha}{(1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha)^2}} \right], \end{aligned} \quad (10.28)$$

где  $\beta = v/c$ ,  $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$ ;  $v$  и  $v_{\parallel}$  — полная скорость частицы и ее проекция на вектор  $B_0$  (в состоянии до испускания кванта  $\hbar\omega$ ). В случае, когда

$$2\hbar\omega_B \frac{1-\beta^2}{m_e c^2} \frac{|1 - n_j^2 \cos^2 \alpha|}{(1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha)^2} |s| \ll 1, \quad (10.29)$$

решение (10.28) со знаком “плюс” можно записать приближенно в виде

$$1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha \simeq \hbar\omega \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2m_e c^2} (1 - n_j^2 \cos^2 \alpha), \quad (10.30)$$

а решение со знаком “минус” — в форме

$$\omega \simeq \frac{s\omega_B \sqrt{1-\beta^2}}{1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha} + \hbar \left( \frac{s\omega_B \sqrt{1-\beta^2}}{1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha} \right)^2 \frac{\sqrt{1-\beta^2} (1 - n_j^2 \cos^2 \alpha)}{2m_e c^2 (1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha)}. \quad (10.31)$$

При  $s = 0$  соотношение (10.30) становится точным; в классическом пределе  $\hbar \rightarrow 0$  при любых  $s$  оно переходит в известное условие

$$1 - n_j(\omega) \beta_{\parallel} \cos \alpha = 0, \quad (10.32)$$

определяющее частоту черенковского излучения при движении электрона по винтовой траектории в магнитном поле. Решение (10.30) указывает на то, что при черенковском излучении переходы между уровнями Ландау мало влияют на частоту излучения. Нетрудно видеть, что условие (10.32), вообще говоря, отличается от критерия для эффекта Вавилова–Черенкова в изотропной среде (10.20) и не переходит в него при  $B_0 \rightarrow 0$  (поскольку  $\beta_{\parallel} \neq \beta$  и  $\alpha \neq \vartheta$ , еслиpitch-угол

электрона  $\nu$  между  $\nu$  и  $B_0$  отличен от нуля). Частота модифицированного черенковского излучения в диспергирующей среде (каковой является плазма) определяется из уравнения (10.32).

Решение (10.31) при  $s = 0$  отвечает нулевой частоте, то есть случаю, когда состояние электрона не меняется и испускания фотона не происходит. Если же  $s \neq 0$ , то это решение определяет набор гармоник магнитотормозного излучения. Для слабoreлятивистского электрона ( $\beta^2 \ll 1$ ) частота магнитотормозного излучения в пустоте ( $n_j = 1$ )

$$\omega \simeq \frac{s\omega_B + (\hbar\omega^2/2m_e c^2) \sin^2 \alpha}{1 - \beta_{\parallel} \cos \alpha}. \quad (10.33)$$

Энергия фотона  $\hbar\omega$ , испускаемого слабoreлятивистским электроном, должна быть мала по сравнению с  $m_e c^2$ ; поэтому квантовая поправка к частоте мала по сравнению с  $s\omega_B$ . Величина  $(\hbar\omega^2/2m_e c^2) \sin^2 \alpha$  в формуле (10.33) описывает так называемый “эффект отдачи” — изменение частоты излучения вследствие изменения продольного импульса и поперечной энергии электрона при испускании фотона. Заметим, что эффект отдачи в пустоте исчезает при излучении вдоль магнитного поля ( $\alpha = 0$ ; см. (10.33)) и становится наиболее заметным при излучении поперек магнитного поля ( $\alpha = \pi/2$ ).

На роль эффекта отдачи в условиях нейтронных звезд было обращено внимание в статье [223]. В сильных магнитных полях нейтронных звезд (например, в поле  $B \simeq 4 \cdot 10^{12}$  Гс в рентгеновском объекте Нег X-1 на частотах  $\omega \simeq \omega_B \simeq 7 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1}$ ) величина  $\hbar\omega/m_e c^2 \sim 0.1$ . Это означает, что сдвиг частоты из-за эффекта отдачи в циклотронной линии, наблюдаемой в спектре излучения Нег X-1, в общем сравним с величиной гравитационного красного смещения частоты на нейтронных звездах. При этом эффект отдачи увеличивает частоту, а гравитационный сдвиг ее уменьшает, так что оба явления частично компенсируют друг друга.

В классическом пределе  $\hbar \rightarrow 0$  эффект отдачи исчезает; в этом случае формула (10.33) переходит в следующую формулу для частоты магнитотормозного излучения:

$$\omega = \frac{s\omega_B \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha}. \quad (10.34)$$

Здесь  $\omega_B \sqrt{1 - \beta^2}$  — частота вращения электрона в магнитном поле, а число  $s$  называется номером гармоники в спектре магнитотормозного излучения. С квантовой точки зрения  $s$  представляет собой разность

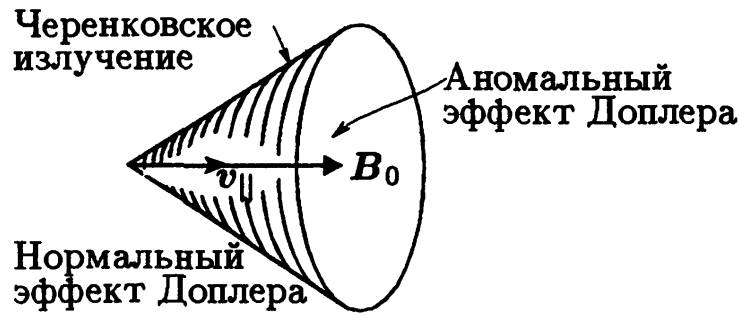


Рис. 37. Области аномального и нормального эффектов Доплера при магнитотормозном излучении электрона в среде. Коническая поверхность соответствует черенковскому излучению

между квантовыми числами (номераами уровней Ландау)  $m$  и  $n$  в состояниях до и после испускания кванта соответственно (см. (10.27)). В целом соотношение представляет собой релятивистскую формулу Доплера, определяющую спектр частот магнитотормозного излучения электрона. Если  $n_j = n_j(\omega)$ , то (10.34) следует рассматривать как уравнение относительно частоты  $\omega$ .

Заметим, что в формулу Доплера (10.34) постоянная Планка  $\hbar$  явно не входит, что указывает на ее классический характер. Вместе с тем не следует забывать, что в (10.34) частота  $\omega$ , определяющая энергию фотона  $\hbar\omega$ , не может быть отрицательной. Это обстоятельство позволяет сделать важные заключения об изменении состояния (направлении переходов) электрона при магнитотормозном излучении.

В самом деле, в области нормального эффекта Доплера, определяемой условием

$$n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha < 1, \quad (10.35)$$

для положительности частоты в формуле (10.34) необходимо, чтобы  $s = m - n > 0$ . Последнее означает, что излучение кванта  $\hbar\omega$  связано с переходом электрона из состояния  $m$  с "поперечной энергией"  $p_{m\perp}^2/2m_e$  в состояние  $n$  с меньшим значением  $p_{n\perp}^2/2m_e$ . Наоборот, в области аномального эффекта Доплера

$$n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha > 1, \quad (10.36)$$

соотношение (10.34) удовлетворяется при положительных  $\omega$  лишь в случае, когда  $s < 0$  и разность  $p_{m\perp}^2 - p_{n\perp}^2$  может быть отрицательной. В этом случае испускание фотона  $\hbar\omega$  сопровождается ростом  $\epsilon = p_{\perp}^2/2m_e$ ; необходимая для этого энергия черпается из кинетической энергии поступательного движения.<sup>83</sup> Из неравенства (10.36) сле-

<sup>83</sup> На своеобразии излучения в области аномального эффекта Доплера обращено

дует, что аномальный эффект Доплера может реализоваться только в среде с  $n_j(\omega) > 1$  и в направлениях  $\mathbf{k}$ , составляющих острый угол с продольной скоростью электрона (когда одновременно  $\beta_{\parallel}$  и  $\cos \alpha$  или оба положительны, или оба отрицательны). Интервалы углов с аномальным и нормальным эффектами Доплера расположены соответственно внутри и снаружи черенковского конуса, определяемого условием

$$n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha = 1 \quad (10.37)$$

(см. Рис. 37).

Поскольку направления переходов в областях с нормальным и аномальным эффектами Доплера противоположны, встает вопрос о результирующем изменении  $p_{\perp}^2$ . Соответствующий анализ, проведенный на примере движущегося осциллятора, показал, что в изотропной среде всегда происходит затухание “поперечных” колебаний при излучении; однако в анизотропной среде, в частности, в плазме с сильным магнитным полем может наступить и “раскачка” колебаний осциллятора за счет излучения в области аномального эффекта Доплера [226].

В вакууме, где черенковское излучение отсутствует, а магнитотормозное излучение относится к области нормального эффекта Доплера, изменение скорости электрона под влиянием радиационной силы, действующей со стороны поля излучения на частицу, происходит следующим образом: при  $t \rightarrow \infty$  поперечная компонента скорости  $v_{\perp}$  уменьшается до нуля, а продольная компонента  $v_{\parallel}$  остается неизменной. В сказанном легко убедиться, если перейти в инерциальную систему отсчета  $A'$ , движущуюся со скоростью  $v_{\parallel}$ . В системе  $A'$  траекторией электрона будет окружность, а диаграмма излучения окажется симметричной относительно плоскости окружности. Поэтому ускорение частиц вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  равно нулю, и излучение целиком происходит за счет уменьшения поперечного импульса частицы. Следовательно, и в лабораторной системе отсчета, где электрон обладает продольной скоростью  $v_{\parallel}$ , ускорение  $dv_{\parallel}/dt = 0$  и  $v_{\parallel} = \text{const}$ . Здесь излучение происходит за счет изменения как поперечного, так и продольного импульсов частицы. Поперечный импульс  $p_{\perp} = mv_{\perp}$  убывает вследствие уменьшения поперечной скорости  $v_{\perp}$  и релятивистской массы  $m$  частицы, продольный импульс  $p_{\parallel} = mv_{\parallel}$  — только вследствие уменьшения массы  $m$ .

Сказанное позволяет указать универсальное одномерное распределение частиц по импульсам  $f(p, t \rightarrow \infty)$ , которое устанавливается в

---

внимание (на примере движения двухуровневой системы в среде) в работе [225].



системе независимо излучающих частиц в магнитном поле в пределе при  $t \rightarrow \infty$ .<sup>84</sup> Можно убедиться, что вид  $f(\mathbf{p}, t \rightarrow \infty)$  не зависит от характера начальной функции распределения  $f_0(\mathbf{p})$ , лишь бы она была релятивистской ( $p \gg m_e c$ ) и изотропной ( $f_0(\mathbf{p}) = f_0(p)$ ). Действительно, в пространстве скоростей функция распределения исходной изотропной и релятивистской системы, очевидно, имеет вид

$$F(v) = Q\delta(v - c),$$

где  $Q$  — нормирующий множитель, определяемый из условия, что концентрация частиц в системе  $N = \int F(v) d^3v = 4\pi c^2 Q$ . Тогда функция распределения по продольным скоростям

$$F(v_{\parallel}) = 2\pi \int_0^c F(v) v_{\perp} dv_{\perp} = \frac{N}{2c}$$

в интервале  $0 \leq |v_{\parallel}| \leq c$ . После релаксации к одномерному распределению это выражение по-прежнему будет характеризовать распределение частиц по продольным скоростям (поскольку в процессе “высвечивания” частиц  $v_{\parallel}$  остается неизменной). Однако теперь  $v_{\perp} = 0$  и  $p_{\parallel} = m_e v_{\parallel} / \sqrt{1 - v_{\parallel}^2/c^2}$ . Поэтому функция распределения по продольным импульсам принимает такой вид:

$$f(p_{\parallel}, t \rightarrow \infty) = F(v_{\parallel}) \frac{dv_{\parallel}}{dp_{\parallel}} = \frac{N}{2m_e c} \left( 1 + \frac{p_{\parallel}^2}{m_e^2 c^2} \right)^{-3/2}.$$

Поскольку распределение по импульсам  $f(\mathbf{p}, t \rightarrow \infty)$  становится одномерным (все частицы движутся вдоль магнитного поля), в нем должна фигурировать дельта-функция  $\delta(p_{\perp})$  (точнее, фактор  $\delta(p_{\perp})/2\pi p_{\perp}$ , если учесть требования нормировки при интегрировании функции распределения по  $p_{\perp}$ ). Окончательно получаем, что [227]

$$f(\mathbf{p}, t \rightarrow \infty) = \frac{N}{m_e c} \left( 1 + \frac{p_{\parallel}^2}{m_e^2 c^2} \right)^{-3/2} \frac{\delta(p_{\perp})}{2\pi p_{\perp}}. \quad (10.38)$$

Это универсальное одномерное распределение было использовано в §5 при исследовании характера нормальных волн в релятивистской

<sup>84</sup>Такой системой частиц может быть релятивистская плазма, занимающая область с линейным размером  $L$ , если ее оптическая толщина  $\tau = \int_L \mu_j dl \ll 1$ . Благодаря последнему условию реабсорбция излучения в пределах указанной области несущественна, так что процесс “высвечивания” и потери импульса данной частицы происходит независимо от присутствия других частиц.

плазме. Оно быстро устанавливается в результате “высвечивания” изотропной релятивистской системы частиц, если последняя помещена в сильное магнитное поле, характерное, например, для ближайшей окрестности нейтронных звезд (потери энергии на излучение пропорциональны  $B_0^2$  (см. далее формулу (10.99)).

Возвращаясь к рассмотрению магнитотормозного излучения отдельной частицы, приведем общие формулы для излучаемой мощности при винтовом движении электрона в “холодной” магнитоактивной плазме с тензором  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (4.67), (4.68), которые были получены в [228, 229]. Мощность излучения на гармониках  $s \neq 0$  в единицу телесного угла определяется следующим выражением:

$$P_{\Omega j} = \frac{n_j e^2 \omega^2 \mathcal{T}_j^2 \{ \beta_{\perp} J'_s(\zeta) + [g_j s \beta_{\perp} \zeta^{-1} + h_j \beta_{\parallel}] J_s(\zeta) \}^2}{2\pi c |1 - \beta_{\parallel} \cos \alpha (n_j + \omega dn_j/d\omega)|}, \quad (10.39)$$

Здесь  $J_s(\zeta)$  и  $J'_s(\zeta)$  — функция Бесселя  $s$ -го порядка и ее производная по аргументу

$$\zeta = k_j r_B \sin \alpha = \frac{sn_j \beta_{\perp} \sin \alpha}{1 - \beta_{\parallel} n_j \cos \alpha}; \quad (10.40)$$

$r_B = v_{\perp}/\Omega_B$  — радиус вращения электрона в магнитном поле,  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$ ,  $k_j = (\omega/c)n_j$  — волновое число  $j$ -й нормальной волны (необыкновенной  $j=1$  или обыкновенной  $j=2$ ). Частота излучения  $\omega$  определяется уравнением Доплера (10.34). Параметры  $g_j$ ,  $h_j$  определены соотношениями (5.38), (5.34), показатель преломления  $n_j$  — выражением (5.19), а фактор

$$\mathcal{T}_j^2 = (1 + K_j^2)^{-1}, \quad (10.41)$$

где  $K_j$  задается формулой (5.34).

Приведенное выражение для мощности магнитотормозного излучения весьма сложно и неудобно для дальнейшего анализа. Более простые выражения получаются, если электрон движется по винтовой линии в плазме, которую можно считать изотропной. В магнитном поле это допустимо, если параметр  $\sqrt{u} = \omega_B/\omega \ll 1$  и  $v = \omega_L^2/\omega^2$  не слишком близок к единице (см. §5). Мощность излучения тогда находим из (10.39), переходя к пределу  $\sqrt{u} \rightarrow 0$  при  $r_B = \text{const}$ . При этом  $n_j^2 = 1 - v$ ,  $\mathcal{T}_j^2 = 1/2$ ,  $g_j = \pm \cos \alpha$ ,  $h_j = \mp \sin \alpha$ , и суммарная мощность для обеих нормальных волн

$$\begin{aligned} P_{\Omega} &= P_{\Omega 1} + P_{\Omega 2} \\ &= \frac{n_j e^2 \omega^2 [\beta_{\perp}^2 J_s'^2(\zeta) + (n_j \sin \alpha)^{-2} (\cos \alpha - n_j \beta_{\parallel})^2 J_s^2(\zeta)]}{2\pi c (n_j - \beta_{\parallel} \cos \alpha)}. \end{aligned} \quad (10.42)$$

При движении электрона в пустоте ( $v \equiv \omega_L^2/\omega^2 \rightarrow 0$ ); тогда из (10.43) следует, что

$$P_{\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c (1 - \beta_{\parallel} \cos \alpha)} [\beta_{\perp}^2 J_s'^2(\zeta) + \sin^{-2} \alpha (\cos \alpha - \beta_{\parallel})^2 J_s^2(\zeta)], \quad (10.43)$$

где  $\zeta = s\beta_{\perp} \sin \alpha (1 - \beta_{\parallel} \cos \alpha)^{-1}$ . Если электрон движется в пустоте по окружности ( $\beta_{\parallel} = 0$ ;  $\beta_{\perp} = \beta$ ), то (10.43) переходит в известную формулу Шотта:

$$P_{\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} [\beta^2 J_s'^2(\zeta) + \operatorname{ctg}^2 \alpha J_s^2(\zeta)]; \quad (10.44)$$

в ней  $\omega = s\omega_B \sqrt{1 - \beta^2}$  и  $\zeta = s\beta \sin \alpha$ .

Наряду с формулой (10.43) для мощности, излучаемой в единицу телесного угла, широко используется выражение для мощности в единицу телесного угла и единичный интервал частот, справедливое при тех же условиях, что и (10.43):

$$P_{\omega\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \sum_{s=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{\cos \alpha - \beta_{\parallel}}{\sin \alpha} \right)^2 J_s^2(\zeta) + \beta_{\perp}^2 J_s'^2(\zeta) \right] \delta(y) \quad (10.45)$$

(см., например, [85]). Эта формула содержит дельта-функцию  $\delta(y)$  с аргументом  $y = (1 - \beta^2)^{1/2} s\omega_B - \omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \alpha)$ , которая “автоматически” учитывает, что магнитотормозное излучение происходит только на частотах, определяемых (10.34) при  $n_j = 1$ .

Приведенные выше формулы характеризуют магнитотормозное излучение на гармониках  $s \neq 1$ . При винтовом движении электрона в “холодной” магнитоактивной плазме для мощности черенковского излучения в единичном интервале частот справедливо выражение [228, 229]

$$P_{\omega j} = \frac{\tau_j^2 e^2 \omega}{2v_{\parallel}} \frac{[\beta_{\perp} J_0'(\xi) + h_j \beta_{\parallel} J_0(\xi)]^2}{|1 - (\partial n_j / \partial \alpha) / n_j \sqrt{n_j^2 \beta_{\parallel}^2 - 1}|}, \quad (10.46)$$

где  $n_j \beta_{\parallel} \geq 1$ ,  $J_0(\xi)$  и  $J_0'(\xi)$  — функция Бесселя нулевого порядка и ее производная по аргументу  $\xi = (\omega r_B / v_{\parallel}) \sqrt{n_j^2 \beta_{\parallel}^2 - 1}$ . Частота излучения задается условием (10.37). Если электрон движется по прямой вдоль  $B_0$ , то  $v_{\perp} = 0$ ,  $v_{\parallel} = v$  и формула (10.46) упрощается:

$$P_{\omega j} = \frac{\tau_j^2 e^2 \omega}{2c^2} \frac{h_j^2 v}{|1 - (\partial n_j / \partial \alpha) / n_j \sqrt{n_j^2 \beta^2 - 1}|}. \quad (10.47)$$

Соответствующие выражения для излучения плазменных волн зарядом, движущимся в магнитоактивной плазме по винтовой траектории, при учете теплового движения получены в [220].

#### 10.4. Циклотронное излучение

Остановимся теперь более подробно на характеристиках магнитотормозного излучения слабoreлятивистского электрона. Будем считать параметр  $\beta = v/c$  настолько малым, что

$$\beta^2 \ll 1, \quad |n_j \beta_{\parallel}| \ll 1, \quad \left| \beta_{\parallel} \omega \frac{\partial n_j}{\partial \omega} \right| \ll 1, \quad (10.48)$$

$$|s n_j \beta_{\perp} \sin \alpha| \ll 1. \quad (10.49)$$

Совокупность этих неравенств обеспечивает циклотронный характер излучения электрона в магнитоактивной плазме. Частота циклотронного излучения близка к  $s\omega_B$  (см. (10.34)). Если же наряду с условиями (10.48) потребовать, чтобы

$$|2n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha| \gg \beta^2, \quad (10.50)$$

то разность  $\omega - s\omega_B$  может быть представлена в таком виде:

$$\omega - s\omega_B \approx s\omega_B n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha, \quad (10.51)$$

где  $s = 1, 2, \dots$ . Из второго неравенства (10.48) следует, что циклотронное излучение рассматривается здесь только в области нормального эффекта Доплера (10.35).

Далее примем во внимание неравенство (10.49), которое определяет дипольный характер излучения: оно требует, чтобы размер излучающей системы в направлении излучения (величина  $r_B \sin \alpha$  в нашем случае) был много меньше длины волны  $\bar{\lambda} \equiv \lambda/2\pi = c/\omega n_j$ . В сказанном легко убедиться, если учесть, что радиус вращения нерелятивистского электрона  $r_B = v_{\perp}/\omega_B$ , а частота циклотронного излучения  $\omega \approx s\omega_B$ . Поскольку при условии (10.49) параметр  $|\zeta| \ll 1$ , в формуле для мощности магнитотормозного излучения (10.39) можно ограничиться лишь первыми членами разложения функции Бесселя и ее производной в ряд по степеням  $\zeta$ . Учитывая вместе с тем неравенства (10.48) и полагая  $\omega \approx s\omega_B$ , получим мощность циклотронного излучения в магнитоактивной плазме [230]:

$$P_{\Omega j} = \frac{e^2 \omega_B^2 \beta_{\perp}^2}{2\pi c} \left[ \frac{n_j}{1 + K_j^2} (1 + g_j)^2 (s n_j \beta_{\perp} \sin \alpha)^{2s-2} \right]_{\omega=s\omega_B} 2^{-2s} s^4 (s!)^{-2}. \quad (10.52)$$

При переходе к выражению (10.52) было принято, что

$$1 + g_j + n_j h_j \beta_{\parallel} \sin \alpha \approx (1 + g_j)_{\omega = s\omega_B}, \quad (10.53)$$

Благодаря второму из неравенств (10.48) это вполне допустимо на гармониках  $s \geq 2$ ; исключением служит лишь излучение обыкновенных волн ( $j=2$ ) при поперечном распространении ( $\alpha = \pi/2$ ), где параметр  $h_j \rightarrow \infty$ . При малых значениях параметра  $v$  ( $v \ll 1$ ) формула (10.52) принимает следующий вид:

$$P_{\Omega j} = \frac{e^2 \omega_B^2 \beta_{\perp}^2}{2\pi c} \frac{(1 + K_j \cos \alpha)^2}{1 + K_j^2} 2^{-2s} s^6 (s!)^{-2} (s \beta_{\perp} \sin \alpha)^{2s-2}. \quad (10.54)$$

Здесь  $K_j$  задается соотношением (5.35), которое можно записать также в форме

$$K_j = \frac{2s \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \pm \sqrt{\sin^4 \alpha + 4s^2 \cos^2 \alpha}}. \quad (10.55)$$

На первой гармонике  $s=1$  ситуация совершенно иная. Дело в том, что  $(1 + g_j)_{\omega = s\omega_B} = 0$ ; последнее обусловлено отмеченным в §5 своеобразием поляризации нормальных волн на гирочастоте в холодной магнитоактивной плазме. Поэтому для  $s=1$  фактор

$$1 + g_j + n_j h_j \beta_{\parallel} \sin \alpha \approx \beta_{\parallel} \cos \alpha \left[ n_j \left( \omega \frac{\partial g_j}{\partial \omega} + h_j \operatorname{tg} \alpha \right) \right]_{\omega = s\omega_B} \quad (10.56)$$

и мощность циклотронного излучения близ гирочастоты  $\omega_B$  составляет

$$P_{\Omega j} = \frac{e^2 \omega_B^2 \beta_{\perp}^2}{8\pi c} \beta_{\parallel}^2 \cos^2 \alpha \left[ \frac{n_j^3}{1 + K_j^2} \left( \omega \frac{\partial g_j}{\partial \omega} + h_j \operatorname{tg} \alpha \right)^2 \right]_{\omega = s\omega_B}. \quad (10.57)$$

Применимость этой формулы при  $\alpha \approx \pi/2$  и  $n_j \approx 0$  ограничена неравенством  $|2n_j \beta_{\parallel} \cos \alpha| \gg \beta^2$ , которое обеспечивает возможность использования в (10.56) приближенной формулы (10.51) для излучаемой частоты вместо (10.34). Однако и в остальных случаях формула (10.57) справедлива лишь для достаточно быстрых частиц с продольной скоростью  $v_{\parallel} \gg v_T$ , где  $v_T$  — средняя тепловая скорость электронов плазмы. Дело в том, что на частотах, которые излучаются электронами с  $v_{\parallel} \sim v_T$ , тепловые поправки к коэффициентам поляризации

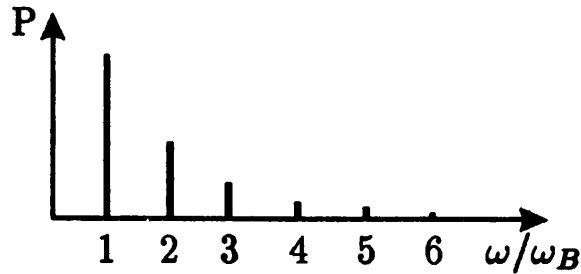


Рис. 38. Частотный спектр циклотронного излучения электрона в пустоте

обыкновенных и необыкновенных волн становятся достаточными для существенного изменения вида  $P_{\Omega j}$ .

Наконец приведем выражение для мощности циклотронного излучения в пустоте. Оно получается из формулы (10.44) при условиях  $\beta \ll 1$  и  $s\beta_{\perp} \sin \alpha \ll 1$ :

$$P_{\Omega} = \frac{e^2 \omega_B^2 \beta_{\perp}^2}{2\pi c} (1 + \cos^2 \alpha) 2^{-2s} s^6 (s!)^{-2} (s\beta_{\perp} \sin \alpha)^{2s-2}. \quad (10.58)$$

Из (10.58) ясно, что в направлении  $\alpha = 0$  циклотронное излучение происходит лишь на гирочастоте (гармоники  $s \geq 2$  не излучаются). Поляризация излучаемой волны — круговая, с вектором  $\mathbf{E}$ , вращающимся в ту же сторону, что и электрон в магнитном поле. Далее, под углами  $\alpha \neq 0$  излучаются волны, принадлежащие всем гармоникам, а излучение эллиптически поляризовано. При  $\alpha = \pi/2$  электроны с  $\beta_{\parallel} = 0$  излучают линейно поляризованные волны; вектор  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ , т.е. в плоскости движения электрона с  $\beta_{\parallel} = 0$ .

Благодаря простоте выражения для  $P_{\Omega}$  (10.58) его можно проинтегрировать по телесному углу, получив следующую формулу для полной мощности циклотронного излучения на  $s$ -й гармонике в пустоте:

$$P = \int P_{\Omega} d\Omega = \frac{2e^2 \omega_B^2 \beta_{\perp}^2 s^{2s+1} (s+1)}{c (2s+1)!}. \quad (10.59)$$

Мощность излучения  $P$  с ростом номера гармоники убывает в основном по закону  $\beta_{\perp}^{2s}$  (см. Fig. 38); это является следствием дипольного характера циклотронного излучения.

Сопоставление (10.57) и (10.58) показывает, что в магнитоактивной плазме мощность излучения электрона на гирочастоте резко уменьшается по сравнению с соответствующим значением в вакууме (грубо говоря, в  $\beta_{\parallel}^{-2}$  раз, если не учитывать множителей, содержащих  $n_j$ ,  $T_j$ ,  $g_j$ ,  $h_j$  и т.д.). В то же время мощность излучения на высших гармониках  $s \geq 2$  радикальным образом не меняется

(ср. (10.52) и (10.58)). Поэтому если в пустоте мощность циклотронного излучения на гармониках убывает с ростом  $s$  как  $\beta_{\perp}^{2s}$ , начиная с  $s = 1$ , то в магнитоактивной плазме указанное уменьшение фактически происходит лишь при  $s \geq 2$ . Благодаря малому фактору  $\beta_{\parallel}^2$  в выражении для мощности на первой гармонике (10.57) отношение  $P_{\Omega}(s=2)/P_{\Omega}(s=1) \sim \beta_{\perp}^2/\beta_{\parallel}^2$  и при  $\beta_{\perp} \sim \beta_{\parallel}$ , вообще говоря, становится порядка единицы.

Эффект депрессии первой гармоники циклотронного излучения, отмеченный в [231], связан с особенностями поляризации обыкновенных и необыкновенных волн в плазме на гирочастоте. Депрессия возникает потому, что на частоте  $\omega = \omega_B$  конец вектора  $\mathbf{E}$  в обеих модах описывает окружность (в плоскости, ортогональной магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ ), вращаясь в направлении, противоположном направлению кругового движения электрона. Подчеркнем, что этот эффект не имеет ничего общего с известным эффектом подавления синхротронного излучения в среде (плазме) с показателем преломления  $n < 1$  (см. следующий раздел).

Эффект депрессии циклотронного излучения на гирочастоте проявляется не всегда: он отсутствует в пустоте и при продольном распространении в плазме, поскольку фактор  $(1 + g_j)$  в (10.52) не обращается в нуль при  $\omega = \omega_B$ , если  $v = 0$  или  $\alpha = 0$ . Вместе с тем,  $(1 + g_j)|_{\omega=\omega_B} = 0$  при  $v \neq 0$ ,  $\alpha \neq 0$ . Отсюда следует, что переход к вакууму и к малым углам  $\alpha$  нетривиален. Однако корректным образом указанный переход может быть сделан лишь при учете теплового движения в плазме на основе тензора диэлектрической проницаемости в форме (4.98). Соответствующий анализ показывает [232], что депрессия на первой гармонике возникает лишь в достаточно плотной плазме, для которой параметр

$$v = \omega_L^2/\omega^2 \gg \beta_T n_j |\cos \alpha / w(Z_j)|. \quad (10.60)$$

Здесь  $w(Z_j)$  — функция Крампа (4.91) с аргументом

$$Z_j = (1 - \omega_B/\omega) / \sqrt{2} \beta_T n_j \cos \alpha$$

и  $\beta_T = v_T/c$ . Наоборот, в пределе разреженной плазмы, когда выполнено противоположное неравенство,

$$\omega_L^2/\omega^2 \ll \beta_T n_j |\cos \alpha / w(Z_j)| \quad (10.61)$$

Суммарная мощность циклотронного излучения (в обе моды) близка к определяемой по формуле (10.58) мощности в пустоте. Мощность

излучения в каждую моду (необыкновенную и обыкновенную) задается здесь на первой гармонике  $s=1$  формулой (10.52). Однако, в ней следует учесть другой характер поляризации мод на частотах  $\omega \approx \omega_B$  в разреженной плазме:

$$g_1 = \cos^2 \alpha, \quad h_1 = -\sin \alpha \cos \alpha, \quad K_1 = \cos \alpha \quad (10.62)$$

для необыкновенных волн и

$$g_2 = -1, \quad h_2 = \operatorname{tg} \alpha, \quad K_2 = -1/\cos \alpha \quad (10.63)$$

для обыкновенных волн. Из сказанного следует, что с принятой точностью вычисления поляризационных параметров  $g_j$  и  $h_j$  мощность циклотронного излучения на гирочастоте в необыкновенную моду описывается формулой (10.58), а на обыкновенных волнах она обращается в нуль. Однако, в приведенных выражениях для коэффициентов поляризации опущены члены порядка  $\beta_T$ . Их учет в выражениях (10.62) несуществен; однако, для обыкновенных волн учет тепловых поправок к поляризационным параметрам (10.63) в более строгой, нежели (10.52), формуле для мощности излучения,<sup>85</sup> приводит к появлению относительно слабого циклотронного излучения (порядка  $\beta_T^2$  по отношению к соответствующей мощности необыкновенного излучения).

Слабость излучения (а также поглощения и рассеяния) в сильно разреженной плазме на гирочастоте объясняется характером поляризации мод: в приближении (10.62), (10.63) поляризация необыкновенных волн совпадает, а обыкновенных — противоположна поляризации циклотронного излучения электрона в пустоте, движущегося по окружности с частотой  $\omega_B$ . Такой электрон поэтому излучает и поглощает только необыкновенные волны. Слабое излучение и поглощение обыкновенной волны появляется только благодаря присутствию в плазме электронов, движущихся с тепловыми скоростями порядка  $v_T$ ; они слегка меняют поляризацию обыкновенной волны по сравнению с (10.63). В результате возникает излучение и поглощение обыкновенной волны на первой гармонике  $s=1$ , сравнимое с эффектами на второй гармонике  $s=2$  и на фактор  $\beta_T^2$  меньшее, чем на необыкновенной моде на гирочастоте.

<sup>85</sup>Эта более строгая формула получается без условия (10.53), использованного при переходе к выражению (10.52). Формулы для поляризационных параметров с тепловыми поправками приведены в §13.



Приведенных выражений для мощности циклотронного излучения классического электрона в плазме вполне достаточно для использования в теории циклотронного излучения Солнца и Юпитера, а также циклотронных эффектов на магнитных белых карликах. Однако, для теории циклотронных линий в спектрах рентгеновских объектов (таких, как Her X-1 и 4U 0115+63) и в спектрах космических гамма-всплесков, связанных с нейтронными звездами, этих формул недостаточно по двум причинам.

Во-первых, сильные магнитные поля в окрестности нейтронных звезд меняют свойства вакуума, вызывая его поляризацию и намагничивание. Это приводит к изменению характера распространения (и излучения) электромагнитных волн. Речь об этом уже шла в §5, где были приведены критерии (5.85), (5.87), при выполнении которых поляризация и показатели преломления нормальных волн определяются не плазмой, а намагниченным вакуумом. В этих условиях мощность циклотронного излучения описывается формулой (10.52) как на высоких гармониках  $s \geq 2$ , так и на первой ( $s=1$ ). Однако, теперь в (10.52) следует учесть, что  $n_j \simeq 1$ ,  $\Gamma_j = 0$  и  $K_j = \infty$ , 0 в соответствии с иным характером мод в намагниченном вакууме. В результате мощность циклотронного излучения будет равна

$$\begin{aligned} P_{\Omega 1} &= \frac{e^2 \omega_B^2 \beta_{\perp}^2}{2\pi c} \cos^2 \alpha (s\beta_{\perp} \sin \alpha)^{2s-2} \frac{s^6}{2^{2s} (s!)^2}, \\ P_{\Omega 2} &= \frac{e^2 \omega_B^2 \beta_{\perp}^2}{2\pi c} (s\beta_{\perp} \sin \alpha)^{2s-2} \frac{s^6}{2^{2s} (s!)^2}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Мощность циклотронного излучения в сумме по обоим модам в намагниченном вакууме совпадает с мощностью циклотронного излучения в пустоте (10.58).

Второе обстоятельство — необходимость учета влияния квантового характера движения электрона в сильных магнитных полях на его циклотронное излучение. Дело в том, что приведенные выше выражения для  $P_{\Omega j}$  справедливы только в классическом случае, когда энергия поперечного движения электрона  $p_{\perp}^2/2m_e \gg \hbar\omega_B$ . В условиях нейтронных звезд с  $B_0 \sim 4 \cdot 10^{12}$  G и  $\hbar\omega_B/m_e c^2 \sim 0.1$  этот критерий может быть нарушен: там вероятен случай, когда  $p_{\perp}^2/2m_e \sim \hbar\omega_B$ . При этом электрон занимает один из нижних уровней Ландау (10.26) в магнитном поле и в процессе циклотронного излучения испускает фотоны с энергией  $\hbar\omega$ , сравнимой с энергией самого электрона. Как движение, так и излучение электрона приобретает существенно квантовый характер.

Квантовые состояния электрона на уровнях Ландау характеризуются, наряду с главным квантовым числом  $n$  (10.26), орбитальными и спиновыми числами  $l$  и  $\nu$ . При этом они связаны соотношением  $n = l + (\nu + 1)/2$ . При спин-спиновых переходах, когда изменяется только  $\nu$  ( $\nu = 1 \rightarrow \nu = -1$ ) появляется излучение на частоте  $\omega = \omega_B$  (магнитодипольный переход). Это излучение значительно слабее, чем циклотронное излучение, сопровождающее изменение орбитального числа  $l$  при постоянном  $\nu$  (электродипольный переход). Вероятность перехода из состояния  $(l, \nu)$  в состояние  $l' = l - s$ ,  $\nu' = \nu$ , сопровождаемое циклотронным излучением на частоте  $\omega \simeq s\omega_B$ , в нерелятивистском случае равна [223]

$$A_i^{l'} = \frac{2\pi^2 e^2 \omega_B}{m_e \omega} \frac{l!}{(l-s)!} \frac{|a_j|}{[(s-1)!]^2} \left[ \frac{\hbar \omega^2 \sin^2 \alpha}{2\omega_B m_e c^2} \right]^{s-1} \times \delta \left\{ \omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \alpha) - s\omega_B - \frac{\hbar \omega^2}{2m_e c^2} \sin^2 \alpha \right\}. \quad (10.65)$$

Эта вероятность относится к излучению в фазовом объеме  $d^3k/(2\pi)^3$ . Последний член в аргументе дельта-функции учитывает изменение частоты из-за эффекта отдачи (см. (10.33)). Фактор  $a_j$  учитывает поляризацию мод. В намагниченном вакууме  $a_1 = \cos^2 \alpha$  и  $a_2 = 1$ .

В намагниченном вакууме полная вероятность циклотронного излучения (с сохранением спина) получается путем интегрирования (10.65) по всему фазовому пространству волновых векторов и сложения результатов для обеих мод  $j=1$  и  $j=2$ :

$$A_s = \frac{e^2 \omega_B^2}{m_e c^3} \left( \frac{B}{2B_{cr}} \right)^{s-1} \frac{(2s)^{2s}}{(2s+1)!} \frac{(s+1)l!}{(l-s)!}. \quad (10.66)$$

Отсюда следует, что отношение мощностей излучения на первых двух гармониках<sup>86</sup>

$$\frac{P(s=2)}{P(s=1)} = 2 \frac{A_2}{A_1} = \frac{24}{5} \frac{B}{B_{cr}} (l-1). \quad (10.67)$$

Заметим, что дипольное приближение, в котором получены формулы (10.65)–(10.67), соответствует условию  $lB/B_{cr} \ll 1$ .

### 10.5. Синхротронное излучение

В последних разделах этого параграфа мы рассмотрим характеристики излучения релятивистских частиц в магнитном поле, начав с

<sup>86</sup> Фактор 2 появляется из-за учета величины энергии в фотонах  $\hbar\omega$ , излучаемых на первой и второй гармониках  $s$ .

синхротронного излучения. По определению, оно возникает при винтовом движении релятивистских частиц, чья скорость  $v$  составляет с  $B_0$ pitch-угол  $\vartheta \gg m_e c^2 / \mathcal{E}$ .

Синхротронное излучение занимает исключительное положение в астрофизике. Это связано прежде всего с его распространенностью: в солнечной короне и в магнитосфере Юпитера, в межзвездной среде и в оболочках сверхновых — везде, где есть магнитные поля и релятивистские частицы, эффективно действует синхротронный механизм радиоизлучения. Далее, указанный механизм позволил связать наблюдаемое распределенное радиоизлучение Галактики с космическими лучами в межзвездной среде [233, 234]. И, наконец, он стал первым механизмом, перенесенным из радиоастрономии в область, традиционно принадлежавшую классической астрофизике. Здесь имеется в виду интерпретация оптического излучения солнечных вспышек и Крабовидной туманности в непрерывном спектре на основе синхротронного излучения [235, 236]. Впоследствии оказалось, что рентгеновское излучение этой туманности, а возможно, оптическое и рентгеновское излучение пульсара в Крабе, также имеют синхротронное происхождение.

Об угловом и частотном спектрах синхротронного излучения заряженной частицы в пустоте можно судить, обратившись к потенциалам Лиенара–Вихерта (см., например, [56]):

$$A = \left[ \frac{ev}{c(R - Rv/c)} \right]_{t - \frac{R}{c}}, \quad \varphi = \left[ \frac{e}{R - Rv/c} \right]_{t - \frac{R}{c}}. \quad (10.68)$$

Последние определяют поле излучения точечного заряда  $E = -(1/c) \cdot \partial A / \partial t - \nabla \varphi$  и  $H = \text{rot } A$  через значения скорости  $v(t')$  и радиуса-вектора  $R(t')$  частицы в опережающий момент времени  $t' = t - R/c$ , когда частица излучила волны, пришедшие в момент  $t$  в точку, которая удалена на расстояние  $R(t')$  от нее.

Для направлений  $R$ , близких к мгновенному значению скорости  $v(t')$ , знаменатель потенциалов  $A$  и  $\varphi$  (10.68) можно представить в виде

$$R - \frac{Rv}{c} = R \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) \approx R \left( 1 - \beta + \beta \frac{\theta^2}{2} \right), \quad (10.69)$$

где  $\theta$  — угол между  $R$  и  $v$ , а  $\beta = v/c$ . Из (10.69) ясно, что величина знаменателя возрастает, а потенциалы  $A$  и  $\varphi$  резко уменьшаются в направлениях, для которых угол  $\theta \gg \sqrt{2(1 - \beta)} \approx \sqrt{1 - \beta^2}$ . Из сказанного следует, что основное излучение релятивистского электрона

сосредоточено в пределах угла

$$\theta \lesssim \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \ll 1 \quad (10.70)$$

около направления  $v(t')$ , т.е. мгновенная диаграмма излучения релятивистского электрона имеет ширину  $\Delta\theta \approx 2m_e c^2/\mathcal{E}$ . Более детальную картину углового спектра излучения релятивистского электрона см. в [237].

О характерной ширине частотного спектра синхротронного излучения можно судить по длительности наблюдаемых импульсов  $\Delta t$  от электрона, обладающего острой диаграммой направленности (10.70). Если электрон движется в магнитном поле по окружности ( $\beta_{\parallel} = 0$ ), то задача отыскания величины  $\Delta t$  фактически была решена в §3 на примере источника излучения, обращающегося по орбите вокруг звезды. Там было выяснено, что благодаря движению источника  $\Delta t$  меньше времени, в течение которого диаграмма излучения направлена в сторону наблюдателя, причем для источника с шириной диаграммы  $2\theta$  величина  $\Delta t$  определяется формулой (3.29). В нашем случае период вращения  $\tau = 2\pi/\Omega_B = 2\pi/\omega_B \sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $\theta \approx \sqrt{1 - \beta^2}$ , и при условии  $1 - \beta \ll 1$  получаем, что

$$\Delta t \sim \frac{1 - \beta^2}{\omega_B} \approx \frac{1}{\omega_B} \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2. \quad (10.71)$$

Указанные импульсы длительностью  $\Delta t$  следуют периодически, через промежутки  $2\pi/\Omega_B$ . Поэтому зависимость электромагнитного поля от времени  $E(t)$ ,  $H(t)$  в точке наблюдения представляет собой периодическую функцию, которая может быть разложена в ряд Фурье. Это разложение содержит гармоники

$$\omega = s\Omega_B = s\omega_B \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}}, \quad (10.72)$$

которые определяют спектр частот синхротронного излучения. Вполне естественно, что он совпадает со спектром частот магнитотормозного излучения (10.34) при  $\beta_{\parallel} = 0$ . Поскольку длительность отдельного импульса равна  $\Delta t$ , в этом разложении гармоники с большой амплитудой приходятся на частоты

$$\omega_{\max} \sim \frac{1}{\Delta t} \sim \omega_B \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2. \quad (10.73)$$

В области  $\omega \gg \omega_{\max}$  амплитуда гармоник и соответственно мощность синхротронного излучения будет мала. На частотах  $\omega \ll \omega_{\max}$  мощность излучения также падает. Последнее связано с тем, что импульсы излучения не имеют постоянной составляющей:  $\int_{-\infty}^{\infty} E(t) dt = 0$ ; поэтому и амплитуды низших гармоник стремятся к нулю.

Таким образом, спектр синхротронного излучения представляет собой дискретный набор частот, разделенных интервалами  $\Delta\omega = \omega_B m_e c^2 / \mathcal{E}$ , причем максимальный вклад в излучение приходится на частоты  $\omega \sim \omega_{\max}$  (10.73), которым соответствуют гармоники  $s \sim (m_e c^2 / \mathcal{E})^3$ . Спектр излучения должен спадать по обе стороны от  $\omega_{\max}$ .

Установленный выше качественный характер частотного спектра синхротронного излучения вполне подтверждается результатами расчетов, к изложению которых мы и перейдем. Мощность излучения электрона в вакууме на  $s$ -й гармонике можно получить, интегрируя формулу Шотта (10.44) по телесному углу:

$$P_s = \int P_{\Omega} d\Omega = \frac{2e^2 \omega_B^2}{c} \frac{1 - \beta^2}{\beta} \left[ s\beta^2 J'_{2s}(2s\beta) - s^2(1 - \beta^2) \int_0^{\beta} J_{2s}(2s\xi) d\xi \right]. \quad (10.74)$$

Для релятивистского электрона ( $1 - \beta \ll 1$ ) на высоких гармониках  $s \gg 1$  функции Бесселя можно заменить асимптотическими представлениями через функцию Макдональда  $K_{5/3}$ . В результате для  $P_s$  получаем следующее выражение (см., например, [238]):

$$P_s = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2 \omega_B^2}{c} \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx. \quad (10.75)$$

Здесь через  $\omega_c$  обозначена “критическая” частота

$$\omega_c = \frac{3}{2} \omega_B \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2. \quad (10.76)$$

В астрофизике вместо величины  $P_s$  обычно пользуются другой [239]:

$$P_{\omega}(\omega, \mathcal{E}) = P_s / \Delta\omega = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2 \omega_B}{c} \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx, \quad (10.77)$$

где  $\Delta\omega = \omega_B m_e c^2 / \mathcal{E}$  — расстояние между отдельными гармониками в спектре синхротронного излучения.  $P_{\omega}$  имеет смысл мощности излучения, отнесенной к единичному интервалу частот; ее применение оправдано тем, что спектр синхротронного излучения состоит из

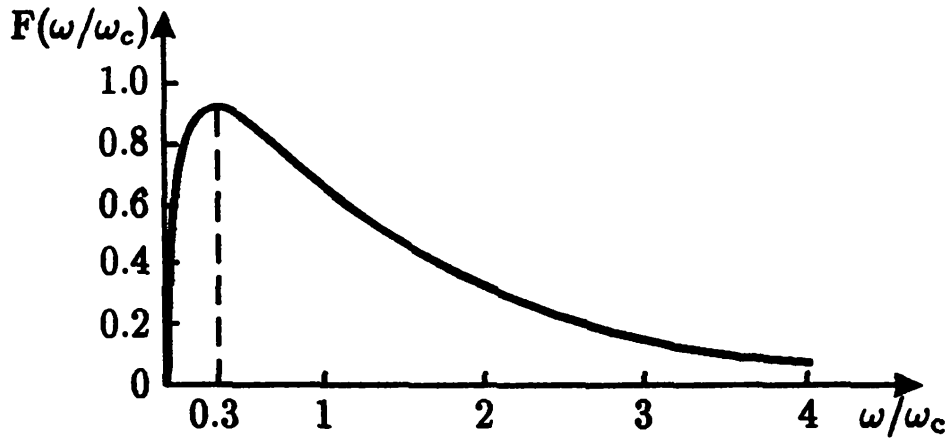


Рис. 39. Частотный спектр синхротронного излучения электрона в вакууме

близко расположенных дискретных линий и поэтому имеет квазине-прерывный характер. График функции

$$F(\omega/\omega_c) = (\omega/\omega_c) \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx,$$

отражающей частотный спектр синхротронного излучения, приведен на Рис. 39.

На низких частотах  $\omega \ll \omega_c$  мощность синхротронного излучения пропорциональна  $\omega^{1/3}$ :

$$P_\omega \approx \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2 \omega_B}{c} 2^{2/3} \Gamma(2/3) \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/3}, \quad (10.78)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Величина  $P_\omega$  достигает максимального значения

$$P_\omega^{\max} \approx \frac{1.6}{2\pi} \frac{e^2 \omega_B}{c} \quad (10.79)$$

на частоте

$$\omega_{\max} \approx 0.3 \omega_c \approx \frac{1}{2} \omega_B \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \quad (10.80)$$

и становится экспоненциально малой в области  $\omega \gg \omega_c$ :

$$P_\omega \approx \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2 \omega_B}{c} \sqrt{\frac{\pi \omega}{2 \omega_c}} e^{-\omega/\omega_c}. \quad (10.81)$$

Отметим, что в максимуме частотного спектра мощность синхротронного излучения не зависит от энергии частицы и определяется только величиной магнитного поля. От энергии частиц зависит, однако, положение максимума спектра  $\omega_{\max}$  и его характерная ширина по частоте  $\Delta\omega$ : обе эти величины пропорциональны  $\mathcal{E}^2$ .

При рассмотрении вопросов, связанных с реабсорбцией синхротронного излучения (см. §17), важную роль играет характер зависимости  $P_\omega(\omega, \mathcal{E})$  (10.77) от энергии частицы  $\mathcal{E}$ . Функция  $P_\omega$  от  $\mathcal{E}$  при  $\omega = \text{const}$  — кривая с максимумом при

$$\mathcal{E}_{\text{max}} \sim m_e c^2 \left( \frac{\omega}{\omega_B} \right)^{1/2} \quad (10.82)$$

(см. (10.73)), спадающая как в сторону низких, так и высоких энергий. Однако в области высоких энергий убывание  $P_\omega(\omega, \mathcal{E})$  — более слабое, чем с ростом частоты (ср. (10.81)): величина  $P_\omega(\omega, \mathcal{E})$  при  $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_{\text{max}}$  падает медленнее, чем  $\mathcal{E}^{-2}$ , т.е. произведение  $P_\omega \mathcal{E}^2$  монотонно растет вместе с  $\mathcal{E}$ .

Обсуждая зависимость  $P_\omega$  от  $\mathcal{E}$ , мы, конечно, не должны забывать, что речь идет о “сглаженном” по гармоникам распределении мощности излучения. Фактически же синхротронное излучение на фиксированной частоте  $\omega$  излучается частицами с “избранными” энергиями, образующими дискретный ряд значений (см. (10.72))

$$\mathcal{E} = s \frac{\omega}{\omega_B} m_e c^2. \quad (10.83)$$

Теперь несколько замечаний о поляризации синхротронного излучения. Исследование полей синхротронного излучения показывает [240], что в каждом заданном направлении  $\mathbf{k}$  на фиксированной частоте  $\omega$  излучение, вообще говоря эллиптически-поляризовано. При этом одна ось эллипса поляризации перпендикулярна к  $\mathbf{B}_0$ , а другая ориентирована вдоль проекции  $\mathbf{B}_0$  на плоскость, ортогональную волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Спектральные мощности линейно-поляризованных компонент синхротронного излучения (с векторами электрического поля  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{E}^{(2)}$ , направленными вдоль главных осей эллипса поляризации) будут соответственно равны

$$P_{\omega\Omega}^{(1)} = \frac{3}{8\pi^3} \frac{e^2 \omega_B}{c} \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^5 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \left[ \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \Theta^2 \right]^2 K_{2/3}^2(g_\omega),$$

$$P_{\omega\Omega}^{(2)} = \frac{3}{8\pi^3} \frac{e^2 \omega_B}{c} \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^5 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \left[ \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \Theta^2 \right] \Theta^2 K_{1/3}^2(g_\omega). \quad (10.84)$$

Здесь  $\Theta = \pi/2 - \alpha$  — угол, образованный вектором  $\mathbf{k}$  и плоскостью

орбиты электрона ( $\alpha$  — угол между  $k$  и  $B_0$ ),

$$g_\omega = \frac{\omega}{2\omega_c} \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^3 \left[ \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \Theta^2 \right]^{3/2} \quad (10.85)$$

— аргумент функции Макдональда. Отношение осей эллипса поляризации (степень эллиптичности  $p$ ) будет тогда равно

$$p = \sqrt{\frac{P_{\omega\Omega}^{(2)}}{P_{\omega\Omega}^{(1)}}} = \Theta \left[ \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \Theta^2 \right]^{-1/2} K_{1/3}(g_\omega) K_{2/3}^{-1}(g_\omega). \quad (10.86)$$

Из этой формулы следует, что поляризация синхротронного излучения в пределах диаграммы направленности неодинакова: она меняет знак при прохождении  $\Theta$  через нуль, становясь линейной при  $\Theta = 0$  (т.е. в плоскости электронной орбиты). При  $\Theta \gg m_e c^2 / \mathcal{E}$  поляризация близка к круговой, однако в этой области углов мощность излучения сильно уменьшается.

Далее можно найти мощность линейно-поляризованных компонент синхротронного излучения в целом по всем направлениям, если проинтегрировать формулы (10.84) по телесному углу. В результате получим [240]:

$$P_{\omega 1} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2 \omega_B}{c} \frac{\omega}{2\omega_c} \left[ \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx + K_{2/3} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right], \quad (10.87)$$

$$P_{\omega 2} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2 \omega_B}{c} \frac{\omega}{2\omega_c} \left[ \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx - K_{2/3} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right].$$

Сумма  $P_{\omega 1} + P_{\omega 2}$ , естественно, совпадает с полной мощностью синхротронного излучения  $P_\omega$  (10.77).

Среда, даже весьма разреженная, может радикально изменить характер излучения релятивистского электрона. Качественную сторону указанного влияния можно выяснить, обратившись к потенциалам Лиенара-Вихерта. В недиспергирующей среде, где  $n(\omega) = \text{const}$ , потенциалы имеют следующий вид [241]:

$$A = \left[ \frac{ev}{c(R - nRv/c)} \right]_{t - \frac{R}{c}}, \quad \varphi = \left[ \frac{e}{n^2(R - nRv/c)} \right]_{t - \frac{R}{c}}. \quad (10.88)$$



Отсюда следует, что для излучения в среде определяющим является отношение скорости частицы  $v$  к фазовой скорости волны  $v_{ph} = c/n$ . Поскольку скорость релятивистской частицы, будучи близкой к  $c$ , не может превышать ее, ясно, что характер влияния среды будет различным в зависимости от случая  $v_{ph} > c$  ( $n < 1$ ) или  $v_{ph} < c$  ( $n > 1$ ).

Если  $n > 1$ , то в потенциалах (10.88) знаменатель становится малым не в направлениях вдоль скорости частицы  $v$ , а в направлениях, близких к черенковскому конусу  $(v/c)n \cos \theta = 1$  (на котором  $R - nRv/c = 0$ ). Это обстоятельство определяет мгновенную диаграмму излучения электрона с максимумом на черенковском конусе. Если учесть движение электрона по окружности, то отмеченное обстоятельство приведет к перераспределению мощности синхротронного излучения. Последнее будет сосредоточено главным образом в направлениях, для которых угол  $\theta$  между  $v$  и  $B_0$  удовлетворяет условию  $\beta n \cos \alpha \lesssim 1$ , причем диаграмма будет иметь сложный многолепестковый характер [228, 229].

В среде с  $n < 1$ , но при  $1 - n \ll 1$ , характер синхротронного излучения существенно иной. В этом случае для малых углов  $\theta$  между  $R$  и  $v$  знаменатель в (10.88) приобретает вид

$$R - \frac{Rv}{c}n = R(1 - \beta n \cos \theta) \approx R \left( 1 - \beta n + \beta n \frac{\theta^2}{2} \right). \quad (10.89)$$

Отсюда ясно, что в присутствии среды диаграмма излучения релятивистской частицы будет иметь характерную ширину

$$\theta \sim \sqrt{1 - \beta n}. \quad (10.90)$$

Она практически совпадает с (10.70) (т.е. влияние среды несущественно), если

$$1 - n^2 \ll \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2. \quad (10.91)$$

Наоборот, в случае, когда

$$1 - n^2 \gg \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2, \quad (10.92)$$

ширина диаграммы увеличивается и целиком определяется характером среды:

$$\theta \sim \sqrt{1 - n}. \quad (10.93)$$

Из (10.88), (10.89) ясно, что при условии (10.91) влиянием среды можно пренебречь при любых углах  $\theta$  в пределах диаграммы излучения. Это означает, что при условии (10.91) присутствие среды не скажется на справедливости приведенных выше “вакуумных” формул (10.75)–(10.82) для мощности синхротронного излучения. Последние, однако, должны существенно измениться в случае (10.92), поскольку даже при  $\beta \rightarrow 1$  знаменатель потенциалов  $A$  и  $\varphi$  не становится бесконечно малым, как это было в вакууме, а стремится к конечному пределу, равному  $R(1-n)$  для  $R||v$ . Указанное обстоятельство приводит к резкому уменьшению (депрессии) мощности синхротронного излучения по сравнению с ее значением в вакууме.

Эффект депрессии синхротронного излучения, отмеченный в [224], сохранится и в диспергирующей среде. Здесь применение потенциалов Лиенара–Вихерта в форме (10.88) для расчета полей излучения становится незаконным. Однако критерии слабого и сильного влияния среды (10.91), (10.92) в достаточно разреженной изотропной плазме ( $\omega_L^2/\omega^2 \ll 1$  и  $\omega_B^2/\omega^2 \ll 1$ ) полностью сохраняет свою силу. Следует лишь помнить, что в ник теперь  $n = n_{em}(\omega) = \sqrt{1 - \omega_L^2/\omega^2}$ , и среда будет прежде всего сказываться на излучении в области достаточно низких частот.<sup>87</sup>

Мощность синхротронного излучения в изотропной диспергирующей среде определяется следующей формулой [245–247]:

$$P_\omega(\omega, \mathcal{E}) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2 \omega_B}{c} \left[ 1 + (1 - n^2) \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\omega}{\omega'_c} \int_{\omega/\omega'_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx, \\ \omega'_c = \omega_c \left[ 1 + (1 - n^2) \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (10.94)$$

Для того чтобы влиянием среды можно было пренебречь в основном интервале излучаемых частот  $\omega \sim \omega_{\max}$  (10.80), необходимо выполнить условие

$$\frac{\omega_L^2}{\omega_B^2} \ll \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2. \quad (10.95)$$

Тогда среда будет подавлять синхротронное излучение лишь на частотах  $\omega \ll \omega_{\max}$ .

<sup>87</sup> Физическая сторона эффекта депрессии синхротронного излучения в плазме была выяснена в [242–244].

В случае обратного неравенства

$$\frac{\omega_L^2}{\omega_B^2} \gg \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \quad (10.96)$$

депрессия синхротронного излучения становится шире, охватывая основную область излучаемых в вакууме частот  $\omega \sim \omega_{\max}$ . Это приводит к смещению максимума частотного спектра, который теперь будет приходиться на частоту

$$\omega'_{\max} \approx \sqrt{2} \omega_L \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \gg \omega_{\max}, \quad (10.97)$$

и к резкому уменьшению потерь энергии релятивистского электрона на синхротронное излучение [248]:

$$-\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\text{sync}} \approx -\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\text{sync}}^{(0)} \frac{3}{4} \delta e^{-\delta}. \quad (10.98)$$

Здесь параметр

$$\delta = \sqrt{3} \frac{\omega_L}{\omega_B} \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \gg 1.$$

а величина

$$-\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\text{sync}}^{(0)} = \frac{2e^2 \omega_B^2}{3c} \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \quad (10.99)$$

характеризует потери на синхротронное излучение в вакууме [56].

Как изменится в присутствии среды зависимость  $P_\omega$  от энергии  $\mathcal{E}$  на фиксированной частоте? Если в вакууме произведение  $\mathcal{E}^2 P_\omega$  монотонно увеличивалось вместе с  $\mathcal{E}$ , то в среде для энергий

$$\mathcal{E}^2 \gg \left( m_e c^2 \frac{\omega}{\omega_L} \right)^2, \quad (10.100)$$

получаемых из условия (10.92), характер зависимости  $\mathcal{E}^2 P_\omega$  от  $\mathcal{E}$  становится другим: величина  $\mathcal{E}^2 P_\omega$  сначала достигает максимума при

$$\mathcal{E}'_{\max} \approx m_e c^2 \omega_B \frac{\omega^2}{\omega_L^3}, \quad (10.101)$$

а затем экспоненциально уменьшается с ростом  $\mathcal{E}$ . Если же значение  $\mathcal{E}'_{\max}$  не попадает в интервал (10.100), экспоненциальное убывание  $\mathcal{E}^2 P_\omega$  происходит во всей области энергий, где существенно влияние

среды [312]. Как будет показано в §17, отмеченный спад  $\mathcal{E}^2 P_\omega$  при высоких энергиях делает возможной синхротронную неустойчивость в изотропной плазме.<sup>88</sup>

При оценках влияния астрофизической плазмы на наблюдаемое синхротронное излучение удобно несколько видоизменить критерий (10.95), учитывая, что излучение на частоте  $\omega$  создается в основном электронами с энергией  $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_{\max}$  (10.82). Подставив это значение  $\mathcal{E}$  в (10.95), получим следующее условие, при котором отличие показателя преломления плазмы от единицы практически не сказывается на синхротронном излучении [242, 243, 247]:

$$\omega \gg \frac{\omega_L^2}{\omega_B} \quad (10.102)$$

или, что то же самое,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \gg \frac{eNc}{B_0} \approx 30 \frac{N}{B_0} \quad (10.103)$$

(здесь  $f$  — в Гц,  $N$  — в  $\text{см}^{-3}$ ,  $B_0$  — в Гс).

В солнечной короне, в областях генерации радиоизлучения IV типа, одним из возможных источников которого является синхротронное излучение,  $N \sim 10^8 \text{ см}^{-3}$  и  $B_0 \sim 10 \text{ Гс}$ . При этом влиянием корональной плазмы на излучение можно пренебречь лишь на частотах выше 150 МГц. Поскольку радиоизлучение IV типа наблюдается и на меньших частотах, влияние короны на синхротронное излучение, вообще говоря, нельзя игнорировать. Сильная депрессия синхротронного излучения в случае, обратном (10.102), означает, что в реально наблюдаемых источниках интенсивного радиоизлучения IV типа должно реализоваться условие  $f > 30N/B_0$  [248].

В Галактике роль межзвездной среды в синхротронном излучении релятивистских электронов мало существенна. Например, в радиодиапазоне на частотах  $f \sim 10 \text{ МГц}$  и для полей  $B_0 \sim 10^{-6} \text{ Гс}$  условие (10.102) будет нарушено лишь при  $N > 1 \text{ см}^{-3}$ . Однако электронная концентрация в межзвездной среде на 1–2 порядка меньше. Поэтому депрессия синхротронного излучения может сказаться или на более низких частотах (порядка сотен килогерц) или в дискретных источниках типа остатков сверхновых, где величина электронной концентрации больше значений, характерных для межзвездной среды. Указанный эффект приводит к резкому уменьшению наблюдаемой интенсивности радиоизлучения (“завалу” спектра) в сторону низких частот.

<sup>88</sup> О влиянии на синхротронное излучение магнитоактивной плазмы см. [249].

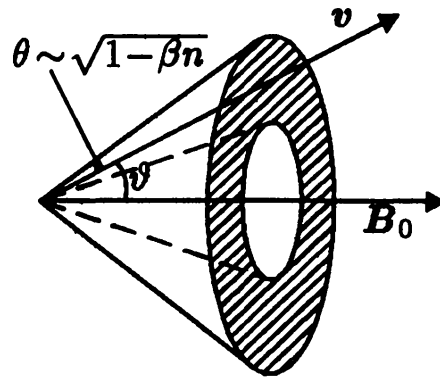


Рис. 40. Диаграмма направленности синхротронного излучения. Телесный угол, в котором сосредоточена основная часть излучения, заштрихован.

До сих пор при обсуждении синхротронного излучения мы рассматривали лишь случай плоского движения электрона, когда поступательная скорость отсутствует ( $\beta_{\parallel} = 0$ ) и траектория частицы представляет собой окружность радиуса  $r_B = c/\Omega_B$ . При этом синхротронное излучение было сосредоточено в плоскости движения частицы и под углами  $\theta \lesssim \sqrt{1 - \beta n}$  к этой плоскости (см. (10.70), (10.90)). Если же  $\beta_{\parallel} \neq 0$ , то синхротронное излучение будет, очевидно, “прижато” к конусу, который описывает вектор скорости электрона при движении в магнитном поле; занимаемый излучением характерный интервал углов при вершине этого конуса по-прежнему определяется формулами (10.70), (10.90) (Рис. 40). Все формулы для синхротронного излучения (10.77)–(10.102) (за исключением (10.83)) остаются справедливыми и при  $\beta_{\parallel} \neq 0$ , если в них заменить  $\omega_B$  на  $\omega_B \sin \vartheta$ , где  $\vartheta$  — питч-угол электрона (т.е. вместо  $B_0$  подставить проекцию  $B_0 \sin \vartheta$  магнитного поля на плоскость, перпендикулярную к  $v$ ). Эта операция, однако, законна лишь до тех пор, пока питч-угол  $\vartheta$  много больше интервала углов  $\Delta\theta \sim m_e c^2 / \mathcal{E}$  близ направления  $v$ , в котором сосредоточено синхротронное излучение.

В случае противоположного неравенства  $\vartheta \ll m_e c^2 / \mathcal{E}$ , т.е. при движении релятивистского электрона по сильно вытянутой вдоль  $B_0$  винтовой линии с поперечной скоростью  $\beta_{\perp} \ll (m_e c^2 / \mathcal{E}) \beta_{\parallel}$ , магнитотормозное излучение в вакууме приобретает дипольный характер.

Мощность релятивистского дипольного излучения в единичном телесном угле в пустоте можно получить из (10.39), устремив  $v = \omega_L^2 / \omega^2$  к нулю и разложив функцию Бесселя  $J_s(\zeta)$  и ее производную  $J'_s(\zeta)$  в ряд по степеням  $\zeta = s\beta_{\perp} \sin \alpha (1 - \beta_{\parallel} \cos \alpha)^{-1}$ . При  $\cos \alpha = \beta_{\parallel}$  функция  $\zeta(\alpha)$  достигает наибольшего значения, равного  $s\beta_{\perp} \mathcal{E} / m_e c^2$ . Отсюда следует, что  $\zeta \ll 1$  при любых  $\alpha$  на гармониках  $s \ll m_e c^2 / \mathcal{E} \beta_{\perp}$ . Оставляя для этих гармоник только первые члены разложения функций

Бесселя и ее производной, придем к следующей формуле:

$$P_{\Omega} = P_{\Omega 1} + P_{\Omega 2} = \frac{e^2 \omega^2}{2\pi c} \frac{\zeta^{2s-2}}{2^{2s} (s!)^2} \times \quad (10.104)$$

$$\times \frac{s^2 \beta_{\perp}^2 (1 + \cos^2 \alpha) + \zeta^2 \beta_{\parallel}^2 \sin^2 \alpha - 2s \beta_{\parallel} \beta_{\perp} \zeta \sin \alpha \cos \alpha}{1 - \beta_{\parallel} \cos \alpha}.$$

Поскольку  $\zeta \ll 1$ , мощность излучения быстро (примерно как  $\zeta^{2s-2}$ ) убывает с ростом номера гармоники  $s$ . Диаграмма направленности рассмотренного излучения в основном определяется фактором  $(1 - \beta_{\parallel} \cos \alpha)$  в знаменателе (10.104). Она направлена вдоль силовых линий магнитного поля и имеет характерную ширину  $\alpha \sim m_e c^2 / \mathcal{E}$  (в то время как питч-угол частицы  $\vartheta$  много меньше этой величины).

В среде релятивистское дипольное излучение реализуется, если параметр  $\zeta$  (10.40) много меньше единицы. Соответствующую формулу для  $P_{\Omega}$ ; в этом случае также можно получить из (10.39), удержав в ней первые члены разложения бесселевых функций.<sup>89</sup>

Выше были рассмотрены предельные случаи излучения слаборелятивистского и ультрарелятивистского электронов, когда общую формулу для мощности магнитотормозного излучения (10.39) можно заменить более простыми выражениями. Этого нельзя сделать в промежуточном случае гиротронного излучения заряженной частицы, соответствующей умеренно релятивистским энергиям  $\mathcal{E} \sim m_e c^2$ . Здесь более простые выражения получены только для излучательной способности системы части и коэффициента поглощения, связанного с гиротронным излучением; они будут приведены в §11 и §13, соответственно. Результаты численных расчетов угловых и частотных спектров гиротронного излучения отдельных частиц можно найти в [7, 251].

### 10.6. Магнитодрейфовое (изгибное) излучение

Выше рассматривалось магнитотормозное излучение частиц в однородном магнитном поле. В неоднородных магнитных полях у заряженной частицы появляется дополнительное ускорение, вызванное движением вдоль изогнутых силовых линий, и связанное с этим ускорением магнитодрейфовое (изгибное) излучение. Конечно, строго

<sup>89</sup> О различных аспектах теории синхротронного излучения, не затронутых в этом разделе, но важных для астрофизических приложений, см. [66, 201, 208, 247]. Особенности излучения заряженных частиц обсуждаются также в [208, 209].

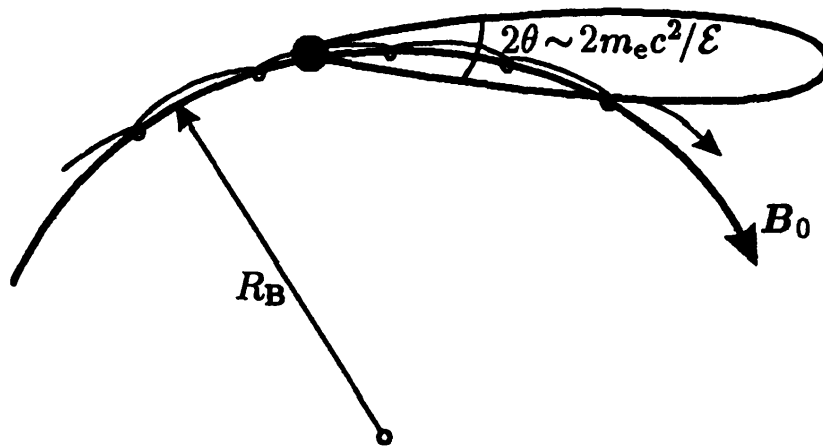


Рис. 41. Мгновенная диаграмма направленности изгибного излучения ( $R_B$  — радиус кривизны силовой линии)

вдоль искривленной силовой линии частица двигаться не может, поскольку сила Лоренца  $(e/c)[\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]$  тогда обратится в нуль. В действительности у частицы наряду со скоростью дрейфа вдоль  $\mathbf{B}_0$  есть компонента дрейфовой скорости, которая ортогональна плоскости, касательной к силовой линии. Эта компонента скорости обеспечивает появление силы Лоренца, искривляющей траекторию частицы в соответствии с формой силовой линии магнитного поля [202].

Излучение релятивистских частиц, о котором идет речь, во многом напоминает синхротронное излучение. Ширина углового спектра остается такой же, как в синхротронном излучении:  $\theta \sim m_e c^2 / \mathcal{E}$  (Рис. 41). Различия обусловлены тем, что здесь роль радиуса вращения электрона в магнитном поле  $r_B = v_{\perp} / \Omega_B$  играет радиус кривизны силовой линии  $R_B$ . Поэтому длительность наблюдаемого импульса  $\Delta t$  получается из (10.71) заменой  $r_B = \mathcal{E} / \omega_B m_e c \rightarrow R_B$ :

$$\Delta t \approx \frac{R_B}{c} \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^3. \quad (10.105)$$

Это дает следующую оценку ширины частотного спектра  $\Delta\omega$  и характерной частоты излучения  $\omega_{\max}$ , связанного с кривизной силовой линии:

$$\Delta\omega \sim \omega_{\max} \sim \frac{1}{\Delta t} \approx \frac{c}{R_B} \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^3. \quad (10.106)$$

Величину полных потерь на излучение из-за кривизны силовых линий можно получить из формулы для потерь на синхротронное излучение

(10.104) путем той же замены  $r_B \rightarrow R_B$ :

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\text{curv}}^{(0)} = \frac{2e^2c}{3R_B^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_e c^2}\right)^4. \quad (10.107)$$

Отметим, что теперь  $\omega_{\text{max}}$  и величина радиационных потерь быстрее растут с увеличением энергии частицы  $\mathcal{E}$ , чем для синхротронного излучения. Это обстоятельство связано с тем, что при движении частиц по силовой линии радиус кривизны траектории не зависит от энергии и определяется величиной  $R_B$ . Наоборот, при вращении электрона в магнитном поле траектория “выпрямляется” (ее радиус кривизны  $r_B$  увеличивается) с ростом  $\mathcal{E}$ .

Поскольку движение вдоль кривой силовой линии неперiodическое, частотный спектр магнитодрейфового излучения будет непрерывным – исчезнет система отдельных дискретных линий, характерная для синхротронного излучения. Однако в отношении огибающей частотного спектра здесь не следует ожидать существенных отличий от синхротронного излучения.

Если кривизна силовых линий достаточно мала:  $R_B \gg r_B$ , то характерная частота магнитодрейфового излучения будет существенно меньше частоты синхротронного излучения (для частиц одной энергии). Это обстоятельство открывает возможность единого объяснения [253] оптического и радиоизлучения пульсара в Крабе излучением электронов, движущихся в магнитном поле близ светового цилиндра (на расстоянии  $R \sim 10^8$  см от нейтронной звезды). Например, в случае, когда электроны с энергией  $\mathcal{E}/m_e c^2 \sim 10^2$  движутся вдоль силовых линий с радиусом кривизны  $R_B \sim 10^8$  см, характерная частота магнитодрейфового излучения (10.106) попадает в радиодиапазон:  $\omega_{\text{max}} \sim 3 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ . Вместе с тем при движении в магнитном поле  $B_0 \sim 10^4 - 10^5$  Гс частиц той же энергии, но с большими значениями питч-углов ( $\vartheta \sim 1$ ), возникает синхротронное излучение, частота которого приходится на оптическую часть спектра ( $\omega \sim \omega_{\text{max}} \sim 10^{15} - 10^{16} \text{ с}^{-1}$ , где  $\omega_{\text{max}}$  определяется формулой (10.80)).

## §11. Излучательная способность плазмы

Начиная с этого параграфа, изложение будет связано с отысканием и анализом двух величин, входящих в уравнение переноса интенсивности излучения и в его решения: излучательной способности  $a_\omega$  и



коэффициента поглощения (или рассеяния)  $\mu_j$  (см. §8). Это вполне естественно, так как, с одной стороны, именно эти величины в конечном счете определяют интенсивность наблюдаемого внеземного излучения, а с другой, — они сами зависят от характера элементарных процессов излучения и рассеяния в плазме и от распределения частиц плазмы по импульсам. Поэтому их исследование позволит судить об эффективности и относительном вкладе различных процессов в излучение космической плазмы.

Ниже речь будет идти об излучательной способности плазмы  $a_\omega$ , которая, по определению, представляет собой спектральную мощность излучения, испускаемого единичным объемом среды в единицу телесного угла. Мы найдем излучательную способность системы заряженных частиц, связанную с различными элементарными процессами излучения — тормозным, черенковским, циклотронным и синхротронным, оставляя рассмотрение вопроса о вкладе в величину  $a_\omega$  процессов рассеяния до главы 8. Для отыскания величины  $a_\omega$  следует использовать выражения для спектральной мощности излучения отдельной заряженной частицы  $P_{\omega\Omega}$ , полученные в §10. Они позволяют рассчитать  $a_\omega$  путем суммирования излучения от частиц плазмы с учетом их распределения по импульсам. Если функция распределения  $f_0(p, r, t)$  известна, то излучательная способность системы частиц (среды) в точке  $r$  в момент  $t$  будет, очевидно, равна

$$a_\omega = \int P_{\omega\Omega} f_0(p, r, t) d^3p. \quad (11.1)$$

### 11.1. Тормозная излучательная способность

При вычислении  $a_\omega$  для тормозного излучения нам нельзя использовать непосредственно формулу (11.1), поскольку в §10 были приведены выражения для другой величины  $\kappa_\omega$  — спектральной мощности излучения единичного потока частиц при столкновениях с одной частицей. Излучательная способность  $a_\omega$  связана с  $\kappa_\omega$  соотношением

$$\int a_\omega d\Omega = N_+ \int \kappa_\omega v f_0(p) d^3p, \quad (11.2)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, если учесть, что  $f_0(p)$  — функция распределения электронов по импульсам,  $v f_0(p) d^3p$  есть поток электронов, обладающих импульсом  $p$ , в элементе объема  $d^3p$  пространства импульсов, а  $N_+$  — концентрация частиц, с которыми

сталкиваются электроны. Слева в (11.2) стоит интеграл от  $a_\omega$  по телесным углам, поскольку  $\kappa_\omega$  включает в себя излучение в единичном интервале частот по всем направлениям. Если распределение  $f_0(p)$  изотропно, то излучательная способность не будет зависеть от направления, так что

$$a_\omega = N_+ \int_{p_{\min}}^{\infty} \kappa_\omega v f_0(p) p^2 dp. \quad (11.3)$$

Нижний предел  $p_{\min}$  получается из условия  $\mathcal{E}_{\text{kin}} = \hbar\omega$  (поскольку электрон с кинетической энергией  $\mathcal{E}_{\text{kin}} < \hbar\omega$  не в состоянии излучить квант  $\hbar\omega$ ). Для нерелятивистских частиц  $\mathcal{E}_{\text{kin}} = p^2/2m_e$  и  $p_{\min} = \sqrt{2\hbar\omega m_e}$ . В случае анизотропного распределения излучающих частиц для вычисления  $a_\omega$  необходимо знать угловую зависимость мощности тормозного излучения (см., например, [56, 210, 211]).

Для системы нерелятивистских электронов с максвелловским распределением по импульсам  $f_0(p) = m_e^{-3} F_0(v)$ , где  $F_0(v)$  — функция распределения по скоростям, заданная формулой (4.87). Излучательная способность тогда может быть найдена после подстановки в (11.3) выражений для  $F_0(v)$  (4.87) и для  $\kappa_\omega$  (10.7), (10.8), (10.11). В результате получаем следующие формулы.

В нерелятивистской плазме, температура которой <sup>90</sup>

$$T \ll \frac{\pi e^4 Z^2 m_e}{2\kappa \hbar^2} \sim 4 \cdot 10^5 Z^2 \text{ К}, \quad (11.4)$$

излучательная способность на частотах

$$\omega \ll \frac{(8\kappa T)^{3/2}}{\pi^{3/2} m_e^{1/2} e^2 Z} \quad (11.5)$$

равна ([71], § 37)

$$a_\omega \approx \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^6 Z^2 N N_+}{(\kappa T)^{1/2} m_e^{3/2} c^3} \ln \left[ \frac{2(2\kappa T)^{3/2}}{\delta^{5/2} e^2 Z m_e^{1/2} \omega} \right], \quad (11.6)$$

где  $\delta = e^C$  и  $C = 0.577$  — постоянная Эйлера. Эта излучательная способность представляет интерес главным образом в радиодиапазоне,

<sup>90</sup>Здесь и ниже ограничения на электронную температуру и частоту тормозного излучения нерелятивистской плазмы получены из неравенств (10.3), (10.4), (10.7) и (10.8) заменой  $\bar{v}$  на “среднюю арифметическую” скорость электронов  $\bar{v} = \int v F_0(v) d^3 v = \sqrt{8\kappa T / \pi m_e}$ .

где неравенство (11.5) выполнено (для частот  $\omega \ll 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ) при температурах  $T \gtrsim 10^2 \text{ К}$ , т.е. практически во всем интервале температур, характерных для космической плазмы. Далее, в интервале частот

$$\frac{(8\kappa T)^{3/2}}{\pi^{3/2} m_e^{1/2} e^2 Z} \ll \omega \ll \frac{4\kappa T}{\pi e^2 Z} \quad (11.7)$$

излучательная способность

$$a_\omega \approx \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{e^6 Z^2 N N_+}{(\kappa T)^{1/2} m_e^{3/2} c^3}. \quad (11.8)$$

В плазме с температурой

$$T \gg \pi e^4 Z^2 m_e / 2\kappa \hbar^2 \quad (11.9)$$

имеем

$$a_\omega \approx \frac{4}{3\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^6 Z^2 N N_+}{(\kappa T)^{1/2} m_e^{3/2} c^3} \ln \left[ \frac{4\kappa T}{\delta \hbar \omega} \right]. \quad (11.10)$$

Следует подчеркнуть, что все формулы для тормозной излучательной способности приведены здесь в расчете на две противоположные поляризации (т.е.  $a_\omega = a_{\omega 1} + a_{\omega 2}$ ). Поскольку тормозное излучение равновесной системы частиц в отсутствие магнитного поля  $B_0$  неполяризовано, излучательная способность на одну поляризацию (на одну нормальную волну) вдвое меньше  $a_\omega$ . Заметим также, что формулы (11.6), (11.8), и (11.10) справедливы лишь в области Рэлея-Джинса  $\hbar\omega \ll \kappa T$ , для которой  $p_{\min} = m_e v_{\min} \ll m v_T$ . Последнее обстоятельство позволило при интегрировании в (11.3) положить  $p_{\min} = 0$ . Если  $\hbar\omega \gtrsim \kappa T$ , в выражениях для излучательной способности  $a_\omega$  появится дополнительный множитель  $g(\omega, T) e^{-\hbar\omega/\kappa T}$  (см., например, [208]). Экспонента здесь обязана существенному отличию от нуля величины  $p_{\min}$ , а функция  $g(\omega, T)$  (так называемый фактор Гаунта [254]) — влиянию квантовых эффектов при тормозном излучении частиц с  $p \sim p_{\min}$ , вклад которых в  $a_\omega$  при  $\hbar\omega \gtrsim \kappa T$  становится весьма заметным. Хотя обычно  $g(\omega, T) \sim 1$ , его нужно учитывать при детальных расчетах тормозного излучения.

В борновском приближении

$$v_T \gg \frac{2Ze^2}{\hbar} \quad (11.11)$$

тормозная излучательная способность

$$a_{\omega} = \frac{4}{3} \frac{e^6 Z^2 N N_+}{m_e^2 c^3} \left( \frac{m_e}{2\pi\kappa T} \right)^{1/2} g(\omega, T) e^{-\hbar\omega/\kappa T}, \quad (11.12)$$

где фактор Гаунта

$$g(\omega, T) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} K_0(\hbar\omega/2\kappa T) e^{\hbar\omega/2\kappa T}. \quad (11.13)$$

Здесь  $K_0$  — модифицированная функция Ганкеля (функция Макдональда) нулевого порядка с аргументом  $\hbar\omega/2\kappa T$ . В пределе  $\hbar\omega/2\kappa T \ll 1$  фактор Гаунта (11.13) равен

$$g(\omega, T) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} e^{\hbar\omega/2\kappa T} \ln \left( \frac{4\kappa T}{\delta\hbar\omega} \right) \quad (11.14)$$

и формула (11.12) сводится к выражению для излучательной способности (11.10). На высоких частотах  $\hbar\omega/2\kappa T \gg 1$  фактор Гаунта

$$g(\omega, T) = \sqrt{\frac{3}{\pi} \frac{\kappa T}{\hbar\omega}}, \quad (11.15)$$

и тормозная излучательная способность

$$a_{\omega} = \frac{4}{\sqrt{6}\pi} \frac{e^6 Z^2 N N_+}{m_e^2 c^4} \left( \frac{m_e c^2}{\hbar\omega} \right)^{1/2} e^{-\hbar\omega/\kappa T} \quad (11.16)$$

(см., например, [85]). Эта формула широко используется при расчетах рентгеновского излучения нерелятивистской плазмы солнечной короны, звездных корон и других рентгеновских источников.

Мы не выписываем здесь выражений для тормозной излучательной способности релятивистской плазмы прежде всего из-за неопределенности в выборе функции распределения частиц  $f_0(p)$ . Мало вероятно, что в космических условиях (например, в магнитосферах нейтронных звезд) эта функция будет равновесной. Для других же распределений в случае необходимости величину  $a_{\omega}$  можно найти с помощью формул (10.13), (11.3), а также выражений для мощности тормозного излучения, приведенных в [1, 208, 255], где обсуждается проблема рентгеновского и гамма-излучения частиц в астрофизических условиях.

### 11.2. Черенковская излучательная способность

Имея в виду дальнейшие приложения к задаче о поглощении плазменных волн в равновесной плазме (§12) и усилении (черенковской неустойчивости) этих волн в потоках частиц (§15), найдем в этом разделе излучательную способность  $a_\omega$  системы частиц, обладающих следующей функцией распределения по скоростям:

$$F_S(v) = N_S \left( \frac{m_e}{2\pi\kappa T_S} \right)^{3/2} \exp[-m_e(v - v_S)^2/2\kappa T_S] \quad (11.17)$$

Эта функция описывает поток частиц, имеющих максвелловское распределение в системе отсчета, движущейся со скоростью  $v_S$  (вместе с потоком). При  $v_S = 0$ ,  $T_S = T$ , и  $N_S = N$  функция  $F_S(v)$  (11.17) совпадает с распределением электронов в равновесной плазме (4.87). Пусть этот поток частиц пронизывает изотропную плазму с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1 - \omega_L^2/\omega^2$ . При этом с каждой частицей потока связано черенковское излучение на частотах  $\omega = kv$ , спектральная мощность которого  $P_{\omega\Omega}$  определяется выражением (10.22). Подставляя (10.22) и (11.17) в (11.1), получим (см. подробнее [217]):

$$a_\omega = \frac{e^2\omega N_S}{(2\pi)^{3/2}v_{T_S}\epsilon(\omega)} \exp\left[-\frac{m_e}{2\kappa T_S}(v_{ph} - v_S \cos\theta)^2\right], \quad (11.18)$$

где  $v_{T_S} = \sqrt{\kappa T_S/m_e}$ ,  $v_{ph} = c/n_{pl}(\omega)$ , а  $n_{pl}(\omega)$  определено формулой (5.14). Согласно (11.18) под углом  $\theta$  к скорости  $v_S$  поток излучает в основном те плазменные волны, фазовая скорость которых сосредоточена в интервале  $\Delta v_{ph} \sim 2\sqrt{2}v_{T_S}$  близ  $v_{ph} = v_S \cos\theta$ . Из (11.18) нетрудно также получить излучательную способность для черенковского излучения электронов равновесной плазмы (без потока). Для этого достаточно положить в ней  $v_S = 0$ ,  $T_S = T$ ,  $v_{T_S} = v_T$  и  $N_S = N$ :

$$a_\omega = \frac{e^2\omega N}{(2\pi)^{3/2}v_T\epsilon(\omega)} \exp\left[-\frac{m_e v_{ph}^2}{2\kappa T}\right], \quad (11.19)$$

Обе формулы для  $a_\omega$  были найдены в предположении, что черенковское излучение происходит в непоглощающей плазме. Это означает, что они корректны лишь при условии  $v_{ph} \gg v_T = \sqrt{\kappa T/m_e}$ , когда затухание Ландау в плазме становится слабым (см. §12). Для справедливости (11.18) необходимо также, чтобы концентрация частиц в потоке была достаточно мала по сравнению с концентрацией электронов в основной плазме; дело в том, что при вычислении  $P_{\omega\Omega}$  (10.22) не учитывался вклад частиц потока в величину диэлектрической проницаемости плазмы.

### 11.3. Циклотронная излучательная способность

Для расчета излучательной способности с помощью (11.1) следует записать выражение для спектральной мощности циклотронного излучения  $P_{\omega\Omega}$  на гармонике  $s$ . Поскольку направление излучения (угол  $\alpha$ ) и частота  $\omega$  связаны между собой соотношением (10.51), величина  $P_{\omega\Omega}$  должна содержать дельта-функцию от  $\delta[\omega - s\omega_B(1 + n_j\beta_{\parallel} \cos \alpha)]$  (аналогично  $P_{\omega\Omega}$  для черенковского излучения; см. (10.22)). Однако в §10 представлены формулы для другой величины — мощности циклотронного излучения в единичном телесном угле в одну нормальную волну  $P_{\Omega j}$  (см. (10.52), (10.57), (10.58)). Эти формулы можно использовать для отыскания  $a_{\omega}$  следующим образом. Проинтегрируем обе части равенства (11.1) по частоте, замечая, что  $P_{\Omega} = \int P_{\omega\Omega} d\omega$ :

$$\int a_{\omega j} d\omega = \int P_{\Omega j} f_0(p) d^3 p.$$

Отметим далее, что стационарная функция распределения электронов в магнитном поле не может зависеть от угла в плоскости, перпендикулярной к этому полю. Благодаря этому  $f_0(p) = f_0(p_{\perp}, p_{\parallel})$  и  $d^3 p = 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel}$ , где  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  — проекции импульса электрона соответственно на направление магнитного поля и на указанную плоскость. Далее, при магнитотормозном излучении на данной гармонике  $s$  частота  $\omega$  связана с  $p_{\perp}$  и  $p_{\parallel}$  формулой Доплера (10.34). Совершив замену переменной интегрирования  $p_{\parallel} \rightarrow \omega$ , получаем

$$\int a_{\omega j} d\omega = 2\pi \int_{\omega} \int_0^{\infty} P_{\Omega j} f_0(p_{\perp}, p_{\parallel}) \left| \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \omega} \right| p_{\perp} dp_{\perp} d\omega, \quad (11.20)$$

откуда следует, что излучательная способность на  $j$ -й волне

$$a_{\omega j} = 2\pi \int_0^{\infty} P_{\Omega j} f_0(p_{\perp}, p_{\parallel}) \left| \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \omega} \right| p_{\perp} dp_{\perp}. \quad (11.21)$$

Для циклотронного излучения  $p_{\parallel} = p_{\parallel}(\omega)$  в соответствии с приближенным соотношением

$$\omega = s\omega_B \left( 1 + \frac{n_j p_{\parallel}}{m_e c} \cos \alpha \right), \quad (11.22)$$

полученным из формулы Доплера (10.34). Из (11.22) следует, что

$$\left| \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \omega} \right| \approx \frac{m_e c}{\omega n_j |\cos \alpha|}. \quad (11.23)$$

Далее, для равновесной (максвелловской) плазмы

$$f_0(p_{\perp}, p_{\parallel}) = \frac{N_0}{(2\pi\kappa T m_e)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2}{2m_e\kappa T} \right] \quad (11.24)$$

(ср. (4.87)). Подставив (11.23), (11.24) и (10.52) в выражение для  $a_{\omega j}$  (11.21) и выполнив интегрирование по поперечным импульсам, получаем, что излучательная способность равновесной плазмы, обусловленная циклотронным излучением на  $s$ -й гармонике в волны  $j$ -го типа, равна (для  $s \geq 2$ ) [230]:

$$a_{\omega j} \approx \frac{s^{2s}}{2^s (2\pi)^{3/2} s!} \frac{e^2 \omega N_0}{c^{2s}} v_T^{2s-1} \frac{\sin^{2s-2} \alpha}{|\cos \alpha|} \times [n_j^{s-1} \mathcal{T}_j(1+g_j)]_{\omega=s\omega_B}^2 \exp \left[ -\frac{(\omega - s\omega_B)^2}{2k_{\parallel}^2 v_T^2} \right]. \quad (11.25)$$

Здесь  $v_T = \sqrt{\kappa T/m_e}$ ,  $k_{\parallel} = (\omega/c)n_j \cos \alpha$  и  $\mathcal{T}_j$  — из (10.41). На первой гармонике  $s=1$  излучательную способность можно найти, подставив в (11.21) выражение для  $P_{\Omega j}$  в форме (10.57) [230]:

$$a_{\omega j} \approx \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{e^2 \omega N_0 v_T}{c^2 |\cos \alpha|} \left( \frac{\omega}{\omega_B} - 1 \right)^2 \times \left[ \mathcal{T}_j \left( \omega \frac{\partial g_j}{\partial \omega} + h_j \operatorname{tg} \alpha \right) \right]_{\omega=\omega_B}^2 \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_B)^2}{2k_{\parallel}^2 v_T^2} \right]. \quad (11.26)$$

Критерии справедливости приведенных выше выражений для излучательной способности  $a_{\omega j}$  совпадают с условием применимости использованных при выводе (11.25), (11.26) формул (10.48)–(10.50) для циклотронного излучения (см. §10) с заменой величин  $\beta$ ,  $\beta_{\parallel}$  и  $\beta_{\perp}$  на  $\beta_T = v_T/c$ :

$$\beta_T^2 \ll 1, \quad n_j \beta_T \ll 1, \quad \beta_T \left| \omega \frac{\partial n_j}{\partial \omega} \right| \ll 1, \quad (11.27)$$

$$sn_j \beta_T |\sin \alpha| \ll 1, \quad 2n_j |\cos \alpha| \gg \beta_T.$$

Из последнего условия, в частности, следует неприменимость выражений для  $a_{\omega j}$  в направлениях  $\alpha \approx \pi/2$ . Кроме того, подчеркнем, что на первой гармонике формула (11.26) верна лишь в крыльях линии излучения — на частотах, не слишком близких к  $\omega_B$ :

$$(\omega - s\omega_B)^2 \gg 2k_{\parallel}^2 v_T^2 \quad (11.28)$$

Последнее объясняется тем, что формула для  $P_{\Omega j}$  (10.57) справедлива лишь для частиц со скоростью  $v_{\parallel} \gg v_T$ , которые излучают частоты в области (11.28) (см. §10). Весь контур линии циклотронного излучения на первой гармонике можно, однако, получить иначе — с помощью закона Кирхгофа и корректного выражения для коэффициента циклотронного поглощения, найденного кинетическим методом (§13).

Наконец, для плазмы, в которой  $v \ll 1$ , в соответствии с (10.54) имеем

$$a_{\omega j} \approx \frac{s^{2s}}{2^s (2\pi)^{3/2} s!} \frac{e^2 \omega N_0 v_T^{2s-1}}{c^{2s}} \frac{\sin^{2s-2} \alpha}{|\cos \alpha|} \times \frac{(1 + K_j \cos \alpha)^2}{1 + K_j^2} \exp[-(\omega - s\omega_B)^2 / 2k_{\parallel}^2 v_T^2], \quad (11.29)$$

где  $K_j$  определено (10.55). В сумме по обеим поляризациям формула (11.29) дает следующую величину излучательной способности:

$$a_{\omega} = a_{\omega 1} + a_{\omega 2} \approx \frac{s^{2s+1}}{2^{s-1} (2\pi)^{3/2}} \frac{e^2 \omega N_0 v_T^{2s-1}}{c^{2s}} \times \frac{\sin^{2s-2} \alpha}{|\cos \alpha|} (1 + \cos^2 \alpha) \exp[-(\omega - s\omega_B)^2 / 2k_{\parallel}^2 v_T^2]. \quad (11.30)$$

При переходе к (11.30) учтено, что  $K_1 K_2 = -1$ . Выражения (11.29), (11.30) справедливы на гармониках  $s \geq 2$  также и в пределе разреженной плазмы, где наряду с неравенством  $v \ll 1$  выполнен критерий (5.42). Формула (11.29) может быть использована и на первой гармонике для расчета излучательной способности необыкновенной волны. Однако в этом случае следует учесть другой характер поляризации волн на частотах  $\omega = \omega_B$ , где  $K_1 = \cos \alpha$  (см. (10.62)):

$$a_{\omega 1} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_B \omega_L^2 \frac{m_e}{c} \beta_T \frac{1 + \cos^2 \alpha}{|\cos \alpha|} \exp[-(\omega - \omega_B)^2 / 2k_{\parallel}^2 v_T^2]. \quad (11.31)$$

Для обыкновенной волны положение сложнее, поскольку на первой гармонике  $K_2 = 1/\cos \alpha$  (10.63) и, согласно (11.29), величина  $a_{\omega 2}$  обращается в нуль. Это означает, что для отыскания  $a_{\omega 2}$  на гармонике  $s = 1$  необходим более строгий расчет, учитывающий поправки к поляризационному коэффициенту  $K_j$ , связанный с тепловым движением электронов. В результате для  $a_{\omega 2}$  получаем следующее выражение [183]

$$a_{\omega 2} = \frac{\omega_B \omega_L^2 m_e}{(2\pi)^{7/2} c} \beta_T^3 \times \quad (11.32)$$



$$\times \frac{\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha (3 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{|W(Z_2)|^2 |\cos \alpha| (1 + \cos^2 \alpha)^3} \exp[-(\omega - \omega_B)^2 / 2k_{\parallel}^2 v_T^2],$$

где  $W(Z_2)$  — функция Крампа (4.91) с аргументом

$$Z_2 = (\omega - \omega_B) / \sqrt{2} \omega \beta_T \cos \alpha.$$

Заметим, что в сильных магнитных полях, когда поляризация мод определяется намагниченным вакуумом, выражение для излучательной способности на всех гармониках может быть получено из формулы (11.29), если положить в ней  $K_1 = \infty$  и  $K_2 = 0$  (см. §5):

$$a_{\omega 1} = \frac{s^{2s}}{2^s (2\pi)^{3/2} s!} \frac{e^2 \omega N_0 v_T^{2s-1}}{c^{2s}} \times \sin^{2s-2} \alpha |\cos \alpha| \exp[-(\omega - s\omega_B)^2 / 2k_{\parallel}^2 v_T^2], \quad (11.33)$$

$$a_{\omega 2} = \frac{s^{2s}}{2^s (2\pi)^{3/2} s!} \frac{e^2 \omega N_0 v_T^{2s-1}}{c^{2s}} \times \frac{\sin^{2s-2} \alpha}{|\cos \alpha|} \exp[-(\omega - s\omega_B)^2 / 2k_{\parallel}^2 v_T^2], \quad (11.34)$$

Разумеется, эти формулы можно получить также с помощью выражений (11.21), (11.23), исходя из выражения для мощности циклотронного излучения в намагниченном вакууме (10.64).

При исследовании процессов взаимодействия излучения с плазмой в сильных магнитных полях существенную роль играют выражения для излучательной способности (а также коэффициентов поглощения и рассеяния) в плазме с анизотропией температуры (см. §13, §19). В этом случае функция распределения электронов

$$f_0(p_{\perp}, p_{\parallel}) = \frac{N_0 \exp(-p_{\perp}^2 / 2m_e \kappa T_{\perp} - p_{\parallel}^2 / 2m_e \kappa T_{\parallel})}{(2\pi m_e \kappa T_{\perp})(2\pi m_e \kappa T_{\parallel})^{1/2}}, \quad (11.35)$$

где  $T_{\perp}$  и  $T_{\parallel}$  — поперечная к магнитному полю  $B_0$  и продольная температуры соответственно. Поскольку интегрирование в (11.21) выполняется только по поперечным импульсам  $p_{\perp}$ , фактор  $T_{\parallel}^{-1/2} e^{-p_{\parallel}^2 / 2m_e \kappa T_{\parallel}}$  в (11.35) переходит без изменений в выражение для  $a_{\omega j}$ . Продольный импульс  $p_{\parallel}$  по-прежнему связан с частотой  $\omega$  доплеровским соотношением (11.22). Эти обстоятельства позволяют найти выражения для излучательной способности в разреженной плазме с анизотропной

температурой, используя соответствующие формулы для  $a_{\omega j}$ , полученные при условии  $T_{\perp} = T_{\parallel} = T$ :

$$a_{\omega 1} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_B \omega_L^2 \frac{m_e \beta_{T_{\perp}}^2}{c \beta_{T_{\parallel}}} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{|\cos \alpha|} \times \exp[-(\omega - \omega_B)^2 / 2k_{\parallel}^2 v_{T_{\parallel}}^2] \quad (s = 1), (11.36)$$

$$a_{\omega 2} = \frac{\omega_B \omega_L^2 m_e}{(2\pi)^{7/2} c} \beta_{T_{\perp}}^2 \beta_{T_{\parallel}} \frac{\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha (3 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{|W(Z_2)|^2 |\cos \alpha| (1 + \cos^2 \alpha)^3} \times \exp[-(\omega - \omega_B)^2 / 2k_{\parallel}^2 v_{T_{\parallel}}^2] \quad (s = 1), (11.37)$$

$$a_{\omega j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_B \omega_L^2 \frac{m_e \beta_{T_{\perp}}^{2s}}{c \beta_{T_{\parallel}}} \frac{s^{2s+1}}{2^s s!} \frac{\sin^{2s-2} \alpha (1 + K_j \cos \alpha)^2}{|\cos \alpha| (1 + K_j^2)} \times \exp[-(\omega - s\omega_B)^2 / 2k_{\parallel}^2 v_{T_{\parallel}}^2] \quad (s \geq 2), (11.38)$$

Здесь  $\beta_{T_{\perp}} = (\kappa T_{\perp} / m_e c^2)^{1/2}$ ,  $\beta_{T_{\parallel}} = (\kappa T_{\parallel} / m_e c^2)^{1/2}$ ,  $v_{T_{\parallel}} = (\kappa T_{\parallel} / m_e)^{1/2}$ , а коэффициенты  $K_j$  — из (10.55). И, наконец, в намагниченном вакууме выражение для циклотронной излучательной способности можно получить на всех гармониках  $s$  из формулы (11.38), положив в ней  $K_1 = \infty$  и  $K_2 = 0$  для необыкновенной и обыкновенной моды, соответственно.

Обсудим теперь вопрос о вкладе гармоник с разными значениями номера  $s$  в излучение на данной фиксированной частоте  $\omega$ . Из (11.29) ясно, что на  $s$ -й гармонике ширина линии излучения  $\Delta\omega \sim \sqrt{2} |k_{\parallel}| v_T = \sqrt{2} s \omega_B \beta_T |\cos \alpha|$ . Поскольку расстояние между центрами линий двух соседних гармоник равно  $\omega_B$ , ясно, что линии циклотронного излучения не перекрываются, если <sup>91</sup>

$$s < \frac{1}{\sqrt{2} \beta_T |\cos \alpha|}. \quad (11.39)$$

В то же время дипольный характер циклотронного излучения обеспечивается неравенством (10.49), которое для излучения равновесной разреженной плазмы с  $n_j \approx 1$  имеет такой вид:  $s \beta_T \sin \alpha \ll 1$ . Из сопоставления двух указанных неравенств ясно, что для углов  $\alpha \sim 1$  “перекрывание” линий излучения начинается на гармониках  $s$ , для которых одновременно нарушается и дипольный характер излучения. Поэтому

<sup>91</sup> Имеется в виду излучение в однородном магнитном поле. Если же поле неоднородно, то излучение, соответствующее различным гармоникам гирочастоты, не перекрывается лишь при дополнительных условиях, указанных в §13.

излучение на частотах, соответствующих значениям  $s \gtrsim 1/\sqrt{2}\beta_T$ , требует специальных расчетов с учетом вклада различных гармоник в излучение с данной частотой  $\omega$ . Такого рода расчеты проведены в работах [256, 257]. Излучение системы слаборелятивистских электронов на “перекрывающихся” гармониках гирочастоты было использовано [258] при интерпретации излучения рентгеновских пульсаров Cen X-3 и Her X-1, входящих в состав двойных звезд. По предположению, оно представляет собой магнитотормозное излучение высокотемпературной плазмы на гармониках  $s \gtrsim 5$ . В результате аккреции эта плазма попадает в область магнитных полюсов нейтронной звезды, где сильные магнитные поля  $B_0 \sim 10^{10} - 10^{12}$  Гс обеспечивают необходимое смещение частотного спектра излучения в рентгеновский диапазон.

#### 11.4. Гиротронная излучательная способность

Познакомимся теперь с выражениями для излучательной способности в более сложном для вычислений случае умеренно-релятивистских электронов с энергиями  $\mathcal{E}_{\text{kin}} \sim m_e c^2$ . Магнитотормозное излучение таких электронов называется гиротронным. Излучательная способность может быть получена подстановкой мощности магнитотормозного излучения  $P_\Omega$  (10.42) или (10.43) в формулу (11.21). Однако, можно поступить и иначе, если исходить из общего выражения для излучательной способности (11.1) и формулы для мощности  $P_{\omega\Omega}$  (10.45), содержащей дельта-функцию, как было сделано в статье [259] (этой статье мы следуем при дальнейшем изложении в этом разделе). Тогда суммарная излучательная способность в обе моды при  $n_j^2 = 1$  может быть представлена в виде:

$$a_\omega = a_{\omega 1} + a_{\omega 2} = \frac{e^2 \omega^2}{(2\pi)^2 c \sin^2 \alpha} \sum_{s=1}^{\infty} \int_1^{\infty} d\gamma \int_{-1}^{+1} d\mu f_0(\gamma, \mu) \delta(y) \times \left\{ (\cos \alpha - \beta\mu)^2 J_s^2(\zeta) + (1 - \beta\mu \cos \alpha)^2 \left[ \frac{\zeta}{s} J_s'(\zeta) \right]^2 \right\}, \quad (11.40)$$

Где

$$y = \frac{s\omega_B}{\gamma} - \omega(1 - \beta\mu \cos \alpha), \quad \zeta = \frac{\omega\gamma}{\omega_B} \beta \sin \alpha (1 - \mu^2)^{1/2},$$

$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \equiv \mathcal{E}/m_e c^2$  — Лоренц-фактор,  $f_0(\gamma, \mu)$  — функция распределения электронов по энергиям  $\gamma$  иpitch-углам  $\mu = \cos \vartheta$ .

В отличие от слаборелятивистского предела  $\gamma - 1 \ll 1$ , когда вклад высоких гармоник  $s$  мал по сравнению с циклотронным излучением на первой и, возможно, на нескольких следующих гармониках, для более энергичных электронов вклад высоких гармоник становится более существенным. Интересуясь именно излучением на  $s \gg 1$ , т.е. на частотах  $\omega \gg \omega_B$ , мы видим, что расстояние между соседними гармониками  $\Delta\omega \sim \omega_B \ll \omega$ . В этом случае суммирование по номерам  $s$  можно заменить интегралом, который может быть легко вычислен с помощью дельта-функции. Далее, при больших  $s$  функцию Бесселя и ее производную можно аппроксимировать следующими выражениями [260]:

$$\begin{aligned} J_s(\zeta) &\simeq (2\pi s)^{-1/2} (1-z)^{-1/4} L^s, \\ \zeta J'_s(\zeta) &\simeq (1-z^2)^{1/2} J_s(sz), \end{aligned} \quad (11.41)$$

где

$$L = \frac{z \exp[(1-z^2)^{1/2}]}{1 + (1-z^2)^{1/2}}, \quad z = \frac{\zeta}{s} = \frac{\beta \sin \alpha (1-\mu^2)^{1/2}}{1 - \beta \mu \cos \alpha}.$$

Эта аппроксимация справедлива для

$$\gamma^2 \ll \omega/\omega_B. \quad (11.42)$$

В ультрарелятивистском пределе  $\gamma = \mathcal{E}/m_e c^2 \gg 1$  гиротронное излучение сменяется синхротронным; частоты последнего  $\omega \sim \omega_B \gamma^2$ , так что неравенство (11.42) будет нарушено. Соответствующие выражения для синхротронной излучательной способности приведены в следующем разделе.

Возвращаясь к гиротронному излучению и используя аппроксимацию (11.41), из (11.40) получим, что его излучательная способность

$$a_\omega(\alpha) = \frac{e^2 \omega}{(2\pi)^2 c \sin^2 \alpha} \int_1^\infty d\gamma \int_{-1}^{+1} d\mu f_0(\gamma, \mu) Y L^{2s}, \quad (11.43)$$

где

$$Y = \frac{(\cos \alpha - \mu\beta)^2 + (1-z^2)(1 - \beta\mu \cos \alpha)^2}{(1-z^2)^{1/2}(1 - \beta\mu \cos \alpha)}, \quad (11.44)$$

$$s = \frac{\omega\gamma}{\omega_B} (1 - \beta\mu \cos \alpha).$$

Функция  $Y(\mu)$  под интегралом в (11.43) медленно меняется по сравнению с содержащей экспоненту  $L^{2s}$ . Последняя быстро убывает от

своего максимального значения  $\mu_{\max}$  при увеличении  $|\mu - \mu_{\max}|$ ; это является отражением того факта, что диаграмма направленности гиротронного излучения на каждой гармонике  $s \gg 1$  обладает довольно высокой направленностью. При этом максимум излучаемой мощности приходится на угол  $\alpha$ , который при  $\omega \gg \omega_B$  связан со значением  $\mu_{\max}$  уравнением

$$\cos \alpha = \mu_{\max} / \beta. \quad (11.45)$$

Если вместе с тем функция распределения электронов  $f_0(\gamma, \mu)$  изотропна или мало меняется на ширине диаграммы направленности излучения, так что  $d \ln f_0 / d\mu \ll \omega / \omega_B$ , то интеграл по  $\mu$  в (11.43) можно вычислить методом скорейшего спуска. В результате получаем

$$a_\omega(\alpha) = \frac{e^2 \omega_B}{(2\pi)^2 c} \left( \frac{\pi \omega}{\omega_B} \right)^{1/2} \int_0^\infty d\gamma f_0(\gamma, \mu_{\max}) \gamma^{-1} \times \left[ (1 + 2\gamma^{-2} \operatorname{ctg}^2 \alpha) (1 - \beta^2 \cos^2 \alpha)^{1/4} \right] L_{\max}^{2s}, \quad (11.46)$$

где

$$L_{\max} = \frac{t \exp[(1 + t^2)^{-1/2}]}{1 + (1 + t^2)^{1/2}}, \quad s = \frac{\omega}{\gamma \omega_B} (1 + t^2), \quad t = \beta \gamma \sin \alpha. \quad (11.47)$$

Для изотропного распределения частиц с моноэнергетическим спектром  $f_0 \propto \delta(\gamma - \gamma_0)$  излучательная способность в направлении  $\alpha = \pi/2$  приобретает простой вид [256] — она пропорциональна

$$\left( \frac{\omega}{\omega_B} \right)^{1/2} e^{2\omega/\omega_B} \left( \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} \right)^{\gamma_0 \omega / \omega_B}, \quad (11.48)$$

поскольку выражение в квадратных скобках в (11.46) равно единице и  $1 + t^2 = \gamma^2$ .

В случае достаточно широкого распределения частиц по энергиям (типа максвелловского или степенного) для вычисления гиротронной излучательной способности снова можно использовать метод скорейшего спуска. При этом мы примем во внимание, что под интегралом в (11.46) выражение в квадратных скобках медленно меняется с изменением  $\gamma$ , величина  $L^{2s}$  быстро растет с ростом  $\gamma$  (как  $(\gamma - 1)^{2s}$  при  $\gamma - 1 \ll 1$  и стремится к единице при  $\gamma \rightarrow 1$ ), тогда как реальное распределение частиц обычно быстро убывает с ростом энергии. Поэтому основной вклад в излучательную способность дает область

значений  $\gamma$  близ максимума функции  $f_0 L^{2s} \gamma^{-1}$ . В результате получаем, что

$$a_\omega(\alpha) = \frac{e^2 \omega}{4\pi c} \left( \frac{\omega}{\omega_B} \right)^{1/2} (1 + 2\gamma_0^{-2} \operatorname{ctg}^2 \alpha) (1 - \beta_0^2 \cos^2 \alpha)^{1/4} \quad (11.49)$$

$$\times f_0(\beta_0 \cos \alpha, \gamma_0) L_{\max}^{2s}(t_0) X.$$

Здесь  $s = (\omega/\gamma\omega_B)(1 + t_0^2)$ ,  $L_{\max}$  определяется формулой (11.47), а значение  $\gamma_0$  (вместе с  $\beta_0 = (1 + \gamma_0^{-2})^{1/2}$  и  $t_0 = \beta_0 \gamma_0 \sin \alpha$ ) находится из уравнения

$$\frac{1}{t^2(1 + t^2)^{1/2}} + \left( 1 - \frac{\beta^2 \cos^2 \alpha}{t^2} \right) \ln L_{\max} =$$

$$-\frac{\omega_B}{2\omega \sin^2 \alpha} \frac{d \ln(f_0 \gamma^{-1})}{d\gamma}. \quad (11.50)$$

В этом уравнении функция  $X$  определяется выражением

$$X^{-2} = -\gamma_0^2 \frac{d^2 \ln(f_0 \gamma^{-1})}{2d\gamma^2} \Big|_{\gamma=\gamma_0} - \frac{d \ln(f_0 \gamma^{-1})}{d \ln \gamma} \Big|_{\gamma=\gamma_0} \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{\gamma_0^2 - 1} \right). \quad (11.51)$$

Выражения для излучательной способности (11.50) упрощаются в двух предельных случаях больших и малых по сравнению с единицей значений параметра

$$\psi = \frac{\omega_B}{2\omega \sin^2 \alpha} \frac{d \ln(f_0 \gamma_0^{-1})}{d\gamma}, \quad (11.52)$$

а именно

$$a_\omega(\alpha) = \frac{e^2 \omega_B}{4\pi c} \left( \frac{\omega}{\omega_B} \right)^{1/2} f_0(\beta_0 \cos \alpha, \gamma_0) X$$

$$\times \begin{cases} \sin^{1/2} \alpha \exp\{d^2 \ln(f_0 \gamma^{-1})/d \ln \gamma^2|_{\gamma=\gamma_0}\} & \psi \ll 1, \\ \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{e \beta_0 \sin \alpha}{2} \right)^{2\omega/\omega_B} & \psi \gg 1. \end{cases} \quad (11.53)$$

Здесь и далее величина  $e = 2.718 \dots$  обозначает основание натуральных логарифмов. Выражение (11.53) для  $\psi \ll 1$  справедливо при не слишком малых углах  $\alpha \gg \alpha_c$ , где  $\alpha_c$  удовлетворяет условию  $t_0 \equiv \beta_0 \gamma_0 \sin \alpha_c = 1$ .

Изотропное максвелловское распределение широко используется при интерпретации гиротронного радиоизлучения солнечных микроволновых всплесков, радиоизлучения звездных корон и вещества, аккрецируемого на белые карлики [261–263]. Это распределение для произвольного отношения  $\kappa T/m_e c^2$  имеет вид

$$f_0(\gamma, \mu) = N C e^{-\gamma m_e c^2 / \kappa T} (\gamma^2 - 1)^{1/2}, \quad (11.54)$$

где нормирующий множитель (для  $\kappa T \ll m_e c^2$ )

$$C = \frac{1}{2} \left[ 2\pi \left( \frac{\kappa T}{m_e c^2} \right)^3 \right]^{-1/2} \left( 1 - \frac{15\kappa T}{8m_e c^2} \right) e^{m_e c^2 / \kappa T} \quad (11.55)$$

и  $N$  — концентрация излучающих электронов. Для умеренно-релятивистских температур, для которых  $m_e c^2 / \kappa T \ll \omega / \omega_B$ , параметр  $\psi$  (11.52) мал во всех случаях, за исключением углов  $\alpha$ , для которых

$$\sin \vartheta \ll \omega_B m_e c^2 / \omega \kappa T.$$

При этом

$$\beta_0 \simeq 1, \quad \gamma_0 \simeq \left( \frac{4\omega \kappa T}{3\omega_B m_e c^2 \sin \alpha} \right)^{1/3}, \quad X \simeq \left( \frac{2\kappa T}{3\gamma_0 m_e c^2} \right)^{1/2},$$

и, следовательно, излучательная способность определяемая первым выражением в (11.53), сводится к виду

$$a_\omega(\alpha) \simeq \frac{e^2 \omega_B N C}{3\sqrt{2}\pi c} \frac{\omega \kappa T}{\omega_B m_e c^2} \exp \left\{ -\frac{\omega}{\omega_B} \left[ \frac{4.5}{\sin \alpha} \left( \frac{\omega_B m_e c^2}{\omega \kappa T} \right)^2 \right]^{1/3} \right\}. \quad (11.56)$$

Для нерелятивистского газа ( $\kappa T \ll m_e c^2$ ) на частотах, для которых  $\omega / \omega_B \ll m_e c^2 / \kappa T$ , параметр  $\psi \gg 1$  и величина

$$\gamma_0 \simeq 1, \quad \beta_0^2 \simeq \frac{2\omega \kappa T}{\omega_B m_e c^2}, \quad X = \left( 2 \frac{\omega}{\omega_B} \right)^{1/2}.$$

Тогда из второго выражения (11.53) получаем

$$a_\omega(\alpha) = \frac{2e^2 \omega_B N C}{\pi c e^{3/2}} \times (1 + \cos^2 \alpha) (\sin \alpha)^{2\omega / \omega_B - 2} \left( \frac{e \omega \kappa T}{2\omega_B m_e c^2} \right)^{\omega / \omega_B + 3/2} \quad (11.57)$$

Заметим, что гиротронное излучение в направлении  $\alpha = \pi/2$  от системы электронов с изотропным максвелловским распределением было ранее рассчитано в [256, 264]. Формулы (11.56), (11.57) переходят в формулы этой статьи при  $\alpha \rightarrow \pi/2$ . Численные расчеты гиротронного излучения [259, 265, 266] показывают, что формулы (11.56), (11.57) хорошо (с точностью до нескольких процентов) соответствуют результатам этих расчетов даже на низких гармониках, где точность метода скорейшего спуска должна резко уменьшаться.

В заключение этого раздела приведем также (по-прежнему следуя результатам [259]) выражения для излучательной способности системы частиц со спектром вида

$$f_0(\gamma, \mu) = Ng(\mu)C \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma_c - 1}\right)^{-\delta}, \quad (11.58)$$

где

$$C = \frac{\delta - 1}{\gamma_c - 1} \quad (11.59)$$

— нормирующий фактор; угловое распределение  $g(\mu)$  нормировано на единицу:  $\int_{-1}^{+1} g(\mu) d\mu = 1$ , и величина  $\gamma_c \neq 1$  обеспечивает сходимость спектра при малых энергиях  $\gamma \rightarrow 1$ . Спектр (11.58) становится степенным ( $f_0 \propto \gamma^{-\delta}$ ) при  $\gamma_c \gg |\gamma_c - 2|$  и  $f_0 \simeq \text{const}$  при  $\gamma - 1 \ll \gamma_c - 1$ . Если угловой спектр имеет достаточно слабую анизотропию:

$$\frac{d \ln g(\mu)}{d\mu} \ll \frac{\omega}{\omega_B}, \quad (11.60)$$

то расчеты излучательной способности аналогичны выполненным для теплового распределения (11.54). На частотах  $\omega \gg \omega_B \delta$  релятивистский фактор  $\gamma_0 \gg 1$ . При этом

$$\beta_0 \simeq 1, \quad \gamma_0^2 = \frac{4\omega}{3\omega_B(1 + \delta) \sin \alpha}, \quad X = (1 + \delta^2)^{-1/2},$$

и из первого уравнения (11.53) получаем

$$a_\omega(\alpha) \simeq \frac{\sqrt{3}e^2\omega_B NC}{4\pi c} (\gamma_c - 1)g(\mu_0) \sin \alpha e^{-(\delta+1)/2} \times \left[ \frac{3\omega_B(\gamma_c - 1)^2(\delta + 1) \sin \alpha}{4\omega} \right]^{(\delta-1)/2}, \quad (11.61)$$



где  $\mu_0 = \beta_0 \cos \alpha$ . Зависимость  $a_\omega$  от  $\omega$ ,  $\omega_B$  и  $\alpha$  здесь такая же, как в соответствующих формулах для синхротронного излучения (11.78)–(11.80), полученных с использованием других приближенных методов расчета и степенного энергетического спектра. В целом же это совпадение (вплоть до численного коэффициента порядка 2 в величине  $a_\omega(\alpha)$ ) неудивительна, так как формула (11.61) также относится к ультрарелятивистскому пределу  $\gamma_0 \gg 1$ , в котором распределение (11.58) становится также степенным.

В случае, когда  $\gamma_c - 1 \ll 1$ , излучательная способность на частотах, для которых  $\omega/\omega_B \ll \delta(\gamma_c - 1)^{-1}$ , имеет вид (11.57) с заменой  $\kappa T/m_e c^2$  на  $(\gamma_c - 1)/\delta$ :

$$a_\omega = \frac{2e^2\omega_B NC}{\pi c e^{3/2}} (1 + \cos^2 \alpha) (\sin \alpha)^{2\omega/\omega_B - 2} \left[ \frac{e\omega(\gamma_c - 1)}{2\omega_B \delta} \right]^{\omega/\omega_B + 3/2}. \quad (11.62)$$

Здесь учтено, что в рассматриваемом пределе параметры

$$\gamma_0 \simeq 1, \quad \beta_0^2 \simeq 2\omega(\gamma_c - 1)/\omega_B \delta.$$

В промежуточном случае  $\gamma_c - 1 \sim 1$  простых аналитических формул для гиротронной излучательной способности получить не удается.

Как уже отмечалось, приведенные в этом разделе конкретные выражения для  $a_\omega$  относятся к случаю слабой анизотропии распределения излучающих электронов по питч-углам. Если же скорости излучающих электронов сосредоточены в узком интервале питч-углов  $\vartheta$  близ значения  $\mu_0 = \cos \vartheta_0$  и функция распределения имеет вид

$$f_0(\mu, \gamma) = \frac{2}{1 - \mu_0^2} \exp \left\{ -\frac{1 - \mu^2}{1 - \mu_0^2} \right\} f_0(\gamma), \quad (11.63)$$

где  $1 - \mu_0^2 \ll \omega_B/\omega$ , то наибольший вклад в излучательную способность дадут частицы с

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \cos \vartheta_0 & \alpha &\neq \pi/2, \\ \beta_0^2 &= 2 \left[ \ln \frac{\omega_B}{\omega(1 - \mu_0^2)} \right]^{-1} & \alpha &= \pi/2. \end{aligned}$$

Гиротронная излучательная способность примет вид:

$$a_\omega = \frac{e^2\omega N}{2\pi c} f_0(\gamma_0) A, \quad (11.64)$$

где Лоренц-фактор  $\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ , а функция

$$A = \operatorname{ctg} \alpha \left[ \ln \frac{4\omega_B \operatorname{tg} \alpha}{e\omega(1 - \mu_0^2) \cos \alpha} \right]^{-1/2} \left( \frac{4\omega_B \operatorname{tg} \alpha}{e\omega(1 - \mu_0^2) \cos \alpha} \right)^{-\omega \sin \alpha / \omega_B} \quad (11.65)$$

если  $\alpha \neq \pi/2$  и

$$A = \sqrt{2} \left[ \ln \frac{4\omega_B}{e\omega(1 - \mu_0^2)} \right]^{-1/2} \left( \frac{2\omega_B}{e\omega(1 - \mu_0^2)} \right)^{-\omega / \omega_B} \quad (11.66)$$

для  $\alpha = \pi/2$ . Приведенные формулы справедливы для умеренно-релятивистских частиц; в случае максвелловского распределения это соответствует температурам, для которых  $\kappa T / m_e c^2 \gtrsim \omega_B / \omega$ .

Приведенные выше аналитические выражения для гиротронной излучательной способности достаточно сложны. Более простые эмпирические формулы для гиротронного излучения получены в [266] путем интерполяции результатов численного расчета для изотропного распределения поpitch-углам и степенного энергетического спектра электронов вида

$$f_0(\mathcal{E}) = N C \mathcal{E}^{-\delta}, \quad C = (\delta - 1) \mathcal{E}_0^{\delta-1}. \quad (11.67)$$

Излучательная способность в необыкновенную моду с ошибкой менее 25 % в интервале частот  $\omega / \omega_B \geq 10$ , углов  $\alpha \geq 20^\circ$  и показателей спектра  $2 \leq \delta \leq 7$  можно представить в форме

$$a_{\omega 1} \approx \frac{B_0 N}{2\pi} \cdot 3.3 \cdot 10^{-24} 10^{-0.52\delta} (\sin \alpha)^{-0.43+0.65\delta} (\omega / \omega_B)^{1.22-0.90\delta}. \quad (11.68)$$

Здесь предполагается, что плазма достаточно разрежена ( $\omega_L^2 \ll \omega^2$ ) и поляризация мод близка к круговой (для этого необходимо соблюдение квазипродольного приближения, которое нарушается при углах  $|\pi/2 - \alpha| \lesssim \omega_B / 2\omega$  (см. §5). Степень круговой поляризации

$$\zeta_c = \frac{a_{\omega 1} - a_{\omega 2}}{a_{\omega 1} + a_{\omega 2}} \approx 0.20 \cdot 10^{0.05\delta} 10^{1.93 \cos \alpha - 1.16 \cos^2 \alpha} (\omega / \omega_B)^{-0.21 - 0.37 \sin \alpha} \quad (11.69)$$

Аналитические формулы для гиротронной излучательной способности в каждую отдельную моду при условии  $\omega \gg \omega_L, \omega_B$ , справедливые при всех углах  $\alpha$ , были получены в [267]. Авторы использовали другие аппроксимации функций Бесселя и их производных,

приведенные в [268], что позволило получить корректные формулы не только для гиротронного излучения, но и в ультрарелятивистском пределе для синхротронного излучения. В соответствующих предельных случаях результаты [267] переходят в формулы, полученные в [256, 259, 265] для умеренно релятивистского случая.

### 11.5. Синхротронная излучательная способность. Синхротронный механизм космического радиоизлучения

Прежде всего отметим, что при исследовании излучения релятивистских частиц наряду с функцией распределения по импульсам  $f_s(p)$  широко используется функция распределения по энергиям (или, как принято говорить, энергетический спектр)  $N(\mathcal{E})$ . При этом  $N(\mathcal{E})d\mathcal{E}$  определяет число частиц в единичном объеме пространства, имеющие скорость в единичном телесном угле и энергию в интервале от  $\mathcal{E}$  до  $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ . Поскольку в релятивистском пределе  $\mathcal{E} = pc$ , из сказанного ясно, что  $N(\mathcal{E})d\mathcal{E} = f_s(p)p^2 dp$  и

$$N(\mathcal{E}) = \frac{f_s(p)p^2}{c}. \quad (11.70)$$

Данное определение энергетического спектра частиц не исключает его зависимость от направления. Если такая зависимость существует, спектр называют анизотропным. Мы в этом разделе для простоты (и учитывая, в частности, такой факт, как высокая степень изотропии космических лучей) будем рассматривать лишь системы частиц с изотропным энергетическим спектром. Концентрация частиц в такой системе

$$N_s = 4\pi \int N(\mathcal{E})d\mathcal{E}. \quad (11.71)$$

Приведенные ниже формулы, однако, имеют более широкую область применимости: они останутся справедливыми, если вид анизотропного энергетического спектра  $N(\mathcal{E})$  не меняется в пределах характерной ширины диаграммы синхротронного излучения.

Ранее уже отмечалось, что вычислять величину излучательной способности для равновесной функции распределения релятивистских частиц в космической плазме особого смысла не имеет из-за нереальности такого распределения. Существование систем релятивистских частиц с моноэнергетическим спектром вида

$$N(\mathcal{E}) = \frac{N_s}{4\pi} \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) \quad (11.72)$$

в указанных условиях тоже весьма проблематично. Однако благодаря своей простоте этот спектр нередко оказывается полезным при предварительной оценке возможности привлечь синхротронный механизм для интерпретации наблюдаемого излучения космических источников.

Благодаря высокой направленности синхротронного излучения (с узкой диаграммой, направленной вдоль скорости частиц  $v$ ) излучательную способность (11.1) можно представить в виде

$$a_{\omega} = \int P_{\omega}(\omega, \mathcal{E}) N(\mathcal{E}) d\mathcal{E}. \quad (11.73)$$

Здесь учтено, что в величину  $a_{\omega}$ , отнесенную к единичному телесному углу, дают вклад все электроны со скоростями, которые содержатся в этом телесном угле. Поскольку  $a_{\omega}$  отнесена также к единичному интервалу частот, вклад от каждого электрона в  $a_{\omega}$  равен мощности излучения  $P_{\omega}$  в этом интервале (просуммированной по всем направлениям излучения, сосредоточенного в узком телесном угле вдоль скорости  $v$ ).

Для изотропного моноэнергетического спектра (11.72)

$$a_{\omega} = P_{\omega}(\omega, \mathcal{E}_0) \frac{N_S}{4\pi}, \quad (11.74)$$

где в вакууме  $P_{\omega}(\omega, \mathcal{E}_0)$  задается формулой (10.77), а в изотропной среде — выражением (10.94).

Аналогичные (11.74) соотношения будут, разумеется, иметь место и для обеих линейно-поляризованных компонент синхротронного излучения (с векторами электрического поля  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{E}^{(2)}$ , ориентированными вдоль главных осей эллипса поляризации)<sup>92</sup>

$$a_{\omega 1} = \frac{P_{\omega 1} N_S}{4\pi}, \quad a_{\omega 2} = \frac{P_{\omega 2} N_S}{4\pi}. \quad (11.75)$$

Здесь  $P_{\omega 1}$  и  $P_{\omega 2}$  — заданные формулами (10.87) мощности синхротронного излучения одной частицы, просуммированные по всем направлениям излучения в линейно-поляризованные компоненты 1 и 2. С помощью (11.75) и (10.87) можно определить степень линейной поляризации синхротронного излучения системы частиц с изотропным

<sup>92</sup> Об ориентации этих осей в случае синхротронного излучения сказано в тексте данной книги после формулы (10.84).

моноэнергетическим спектром [269]:

$$\zeta_l = \frac{a_{\omega 1} - a_{\omega 2}}{a_{\omega 1} + a_{\omega 2}} = \frac{K_{2/3}(\omega/\omega_c)}{\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx}. \quad (11.76)$$

Отсюда следует, что излучение рассматриваемой системы частиц будет обладать высокой степенью линейной поляризации: на низких частотах  $\omega \ll \omega_c$  величина  $\zeta_l \approx 1/2$ ; на высоких частотах  $\omega \gg \omega_c$  значение  $\zeta_l \approx 1$ .

В астрофизических приложениях важную роль играет синхротронное излучение электронов со степенным энергетическим спектром

$$N(\mathcal{E}) = \mathcal{K} \mathcal{E}^{-\gamma}, \quad \mathcal{K} = \frac{N_S}{4\pi} \left[ \int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} \mathcal{E}^{-\gamma} d\mathcal{E} \right]^{-1}, \quad (11.77)$$

где нормировочный множитель  $\mathcal{K}$  выражен через число частиц  $N_S$ , содержащихся в интервале энергий от  $\mathcal{E}_1$  до  $\mathcal{E}_2$ . Эта роль объясняется прежде всего степенным характером энергетического спектра частиц в составе космических лучей, включая релятивистские электроны, ответственные за создание нетеплового распределенного радиоизлучения Галактики (см. ниже). С другой стороны, частотные спектры многих дискретных источников допускают аппроксимацию в виде степенной зависимости от частоты; это обстоятельство, как мы сейчас убедимся, снова приводит к степенному энергетическому спектру излучающих частиц в случае синхротронной природы их излучения.

В однородном магнитном поле релятивистские частицы с изотропным степенным спектром имеют излучательную способность, которая может быть получена подстановкой выражений (10.77) и (11.77) в формулу (11.73). В результате получаем, что частотный спектр  $a_\omega(\omega)$  в вакууме будет иметь следующий вид [1]:

$$a_\omega = \tilde{\mathcal{K}} \omega^{-\alpha}. \quad (11.78)$$

Здесь индекс спектра

$$\alpha = \frac{\gamma - 1}{2}, \quad (11.79)$$

а коэффициент

$$\tilde{\mathcal{K}} = b(\gamma) \mathcal{K} \frac{e^3}{m_e c^2} \left( \frac{3e}{m_e^3 c^5} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} (B_0 \sin \alpha)^{\frac{\gamma+1}{2}}, \quad (11.80)$$

где

$$b(\gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi(\gamma+1)} \Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+19}{12}\right)$$

и  $\Gamma$  обозначает гамма-функцию. Степень линейной поляризации при этом можно найти, зная излучательные способности  $a_{\omega 1}$  и  $a_{\omega 2}$  линейно-поляризованных компонент по главным осям эллипса поляризации. Их получаем подстановкой в (11.73) выражений (10.87) вместо (10.77). Тогда оказывается, что степень линейной поляризации зависит только от индекса спектра и не меняется с частотой [270]:

$$\zeta_l = \frac{a_{\omega 1} - a_{\omega 2}}{a_{\omega 1} + a_{\omega 2}} = \frac{\gamma + 1}{\gamma + 7/3}. \quad (11.81)$$

Если движение релятивистских электронов происходит в хаотическом магнитном поле с линейными размерами области квазигоднородного поля  $l_0$ , то для характеристики синхротронного излучения системы этих частиц можно ввести излучательную способность

$$\bar{a}_\omega = L^{-1} \int_L a_\omega dl. \quad (11.82)$$

Она представляет собой усредненную по всем направлениям магнитного поля (т.е. по углу  $\alpha$ ) величину  $a_\omega$  (11.78)-(11.80), полученную для однородного магнитного поля. При этом интервал усреднения  $L$  должен быть много больше  $l_0$ . Соответствующее выражение для  $\bar{a}_\omega$  может быть представлено в форме (11.78), (11.79); однако теперь величина  $\tilde{\mathcal{K}}$  другая [1]:

$$\tilde{\mathcal{K}} = a(\gamma) \mathcal{K} \frac{e^3}{m_e c^2} \left( \frac{3e}{2m_e^3 c^5} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} B_0^{\frac{\gamma+1}{2}}. \quad (11.83)$$

В качестве  $B_0^{\frac{\gamma+1}{2}}$  здесь фигурирует некоторое среднее значение этой величины в области с хаотическим магнитным полем, и

$$a(\gamma) = \frac{2^{\frac{\gamma-1}{2}} \sqrt{3}}{(\gamma+1)4\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma+5}{4}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{\gamma+7}{4}\right).$$

Зависимость  $a(\gamma)$  сравнительно слабая; численные значения для некоторых индексов энергетического спектра представлены в таблице 1. Линейная поляризация синхротронного излучения при усреднении в хаотическом магнитном поле, очевидно, исчезает.

Таблица 2

$\gamma$	1	1.5	2	2.5	3	4	5
$a(\gamma)$	0.566	0.294	0.206	0.170	0.148	0.145	0.184

При получении формул (11.78)–(11.83) интегрирование по энергиям  $\mathcal{E}$  в исходном выражении для  $a_\omega$  (11.73) велось в пределах от 0 до  $\infty$ . Такое расширение интервала интегрирования не дает значительной ошибки при расчете  $a_\omega$  на частоте  $\omega$ , если отклонения энергетического спектра частиц от степенного становятся заметными лишь при энергиях<sup>93</sup>

$$\mathcal{E} \ll m_e c^2 \left( \frac{\omega}{\omega_B} \right)^{1/2} \quad \text{от} \quad \mathcal{E} \gg m_e c^2 \left( \frac{\omega}{\omega_B} \right)^{1/2}. \quad (11.84)$$

Сказанное становится понятным, если учесть, что основной вклад в синхротронное излучение на частоте  $\omega$  дают частицы с энергией  $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_{\max}$  (см. (10.82)), в то время как роль электронов из области (11.84) мало существенна.

Из приведенных выражений для излучательной способности синхротронного излучения ясно, что ее частотный спектр имеет степенной характер, если энергетический спектр излучающих частиц является степенным. При этой индексы спектров как в однородном, так и в хаотическое магнитном поле связаны между собой соотношением (11.79). Это соотношение, установленное в [271], играет важную роль при интерпретации излучения космических источников на основе синхротронного механизма: оно позволяет установить характер энергетического распределения релятивистских частиц по наблюдаемому частотному спектру космического излучения благодаря тому, что для многих объектов, в которых действует указанный механизм, спектр излучения в широком интервале частот с достаточной точностью может быть аппроксимирован степенной функцией.

Надо отметить, что соотношение (11.79) между спектральными индексами было представлено выше как результат формальных расчетов функции  $a_\omega(\omega)$ . Однако его смысл нетрудно уяснить из следующих простых соображений. Поскольку, как уже отмечалось, основной вклад в синхротронное излучение на частоте  $\omega$  дают частицы с энергией  $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_{\max} \sim m_e c^2 (\omega/\omega_B)^{1/2}$ , занимающие интервал  $\Delta\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_{\max}$ , то

<sup>93</sup> Более детальные критерии указаны в [247].

излучательная способность (11.73) на частоте  $\omega$  по порядку величины будет равна  $a_\omega \sim P_\omega(\omega, \mathcal{E}_{\max})N(\mathcal{E}_{\max})\Delta\mathcal{E}$ . Однако  $P_\omega(\omega, \mathcal{E}_{\max})$  для синхротронного излучения зависит только от величины магнитного поля  $B_0$ .<sup>94</sup> Учитывая вместе с тем, что  $\Delta\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_{\max} \propto \omega^{1/2}$  и что для степенного энергетического спектра  $N(\mathcal{E}_{\max}) \propto \mathcal{E}_{\max}^{-\gamma} \propto \omega^{-\gamma/2}$ , получаем частотный спектр вида:  $a_\omega \propto \omega^{-(\gamma-1)/2}$ .

Все эти результаты справедливы на тех частотах, где влиянием среды на синхротронное излучение можно пренебречь. Если электроны имеют широкий энергетический спектр, например, степенной в достаточно большом интервале энергий, то влияние среды становится существенным только в случае, когда будет нарушено неравенство (10.102), т.е. когда  $\omega \lesssim \omega_L^2/2\omega_B$ . Депрессия синхротронного излучения приведет здесь к резкому “завалу” степенного спектра излучения — смене знака у спектрального индекса  $\alpha$  и экспоненциальному убыванию  $a_\omega$  по мере уменьшения частоты [245, 246]:

$$a_\omega \propto \omega^{1-\gamma} \exp\left(\frac{-\sqrt{3}\omega_L^2}{\omega\omega_B}\right). \quad (11.85)$$

Указанный закон изменения  $a_\omega(\omega)$  соответствует экспоненциальному изменению полной мощности синхротронного излучения отдельного электрона, которое отмечалось в §10 (см. (10.98)).

Приведенные в этом разделе формулы для излучательной способности системы релятивистских электронов в магнитном поле служат той основой, на которой проводятся исследования синхротронного механизма космического радиоизлучения. При этом наблюдаемая интенсивность излучения от космического источника будет связана с  $a_\omega$  соотношением

$$I_\omega = \int a_\omega dl \quad (11.86)$$

(в пренебрежении поглощением вдоль луча и при стационарном распределении  $a_\omega$ ; см. §8). В хаотическом магнитном поле и без учета влияния среды система релятивистских электронов, обладающая изотропным степенным спектром, создаст (с учетом  $a_\omega$  в форме (11.78),

<sup>94</sup> Согласно (10.79), максимальное значение  $P_\omega(\omega, \mathcal{E})$  в функции от частоты не зависит от энергии  $\mathcal{E}$ . Отсюда ясно, что  $P_\omega(\omega, \mathcal{E})$ , рассматриваемая как функция от  $\mathcal{E}$ , достигает максимального значения (10.79) на любой фиксированной частоте  $\omega$ .



(11.79), (11.82)) интенсивность синхротронного излучения

$$I_f \approx 8.57 \cdot 10^{-22} a(\gamma) L K B_0^{\frac{\gamma+1}{2}} \left( \frac{6.47 \cdot 10^{18}}{f} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}}, \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \text{ с стер Гц}}. \quad (11.87)$$

Здесь  $I_f = 2\pi I_\omega$  — интенсивность (в сумме по обеим поляризациям), отнесенная к единичному интервалу частот  $f = \omega/2\pi$ ; линейный размер источника  $L$  выражен в см,  $B_0$  — в Гс,  $f$  — в Гц, коэффициент  $K$  (11.77) соответствует энергии в эргах. Формула (11.87) справедлива в условиях, когда можно пренебречь влиянием среды. Об особенностях синхротронного излучения см. также монографию [208].

Применим полученные формулы к нетепловой компоненте распределенного радиоизлучения Галактики,<sup>95</sup> предполагая, что это излучение создается релятивистскими электронами, движущимися в межзвездных магнитных полях. Эта компонента обладает спектром, который при аппроксимации степенным законом имеет спектральный индекс  $\alpha \approx 0.3 - 0.4$  на частотах  $f \sim 10$  МГц. Индекс  $\alpha$  постепенно увеличивается с ростом частоты, достигая 0.8 на высоких частотах ( $f \gtrsim 300$  МГц). Наблюдаемая интенсивность радиоизлучения  $I_f$  существенно меняется в зависимости от галактической широты и долготы; со стороны антицентра (направления, противоположного направлению на центр нашей Галактики) она составляет примерно  $1.5 \cdot 10^{-18}$  эрг/(см<sup>2</sup> с Гц стер) для  $f = 400$  МГц [272]. Считая, что магнитное поле в межзвездной среде хаотическое, а поглощение радиоволн на размерах Галактики несущественно,<sup>96</sup> обратимся к формуле (11.87), определяющей интенсивность синхротронного излучения в указанных условиях. Согласно этой формуле, наблюдаемый степенной частотный спектр с  $\alpha \approx 0.8$  может быть создан синхротронным излучением частиц со степенным энергетическим спектром, имеющим индекс  $\gamma = 2\alpha + 1 \approx 2.6$ . Эта величина хорошо согласуется со значением спектрального индекса, установленного при исследованиях электронной компоненты первичных космических лучей [272].

Далее, в соответствии с (11.87), ожидаемая величина интенсивности составит (с учетом  $\gamma \approx 2.6$ )

$$I_f \approx 1.6 \cdot 10^{-7} L K B_0^{1.8} f^{-0.8} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \text{ с стер Гц}}. \quad (11.88)$$

<sup>95</sup> В состав распределенного радиоизлучения Галактики входит также тепловая компонента, представляющая собой тормозное излучение областей ионизованного водорода (областей H II); см. об этом §12.

<sup>96</sup> Пренебрежение поглощением вполне допустимо на волнах  $\lambda < 10$  м, если луч не проходит через плотные облака H II; см. §12, §17.

Параметры, фигурирующие в выражении для  $I_f$ , известны (по крайней мере по порядку величины). В самом деле, положим эффективную длину луча в Галактике  $L$  равной  $5 \text{ кпк} = 1.5 \cdot 10^{22} \text{ см}$ , т.е. трети радиуса галактического диска. Величина магнитного поля  $B_0 \sim 5 \cdot 10^{-6} \text{ Гс}$  в межзвездной среде определяется из независимых измерений (в частности, по эффекту Зеемана в линии излучения нейтрального водорода  $\lambda = 21 \text{ см}$ ). Наконец коэффициент  $K$  в энергетическом спектре релятивистских электронов примем равным  $1.2 \cdot 10^{-17}$ . Судя по данным измерений, приведенным в [272], именно такое значение  $K$  характерно для электронной компоненты космических лучей.

Подставив указанные значения  $L$ ,  $K$  и  $B_0$  в (11.88), найдем, что на частоте  $f = 400 \text{ МГц}$  величина  $I_f \sim 1.1 \cdot 10^{-18} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \text{ с Гц стер})$ . Учитывая неопределенность выбора величины  $L$  и отсутствие сведений о средних значениях  $B_0$  и  $K$  в масштабах Галактики, мы можем признать вполне удовлетворительным соответствие между оцененной величиной  $I_f$  и наблюдаемым значением интенсивности  $I_f \sim 1.5 \cdot 10^{-18} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \text{ с стер Гц})$  на частоте  $f = 400 \text{ МГц}$ . Указанное соответствие величин  $I_f$ , равно как измеренных и ожидаемых значений индексов энергетического спектра электронов  $\gamma$ , служит веским аргументом в пользу синхротронной теории нетеплового распределенного радиоизлучения Галактики [233, 234, 271].

Итак, формула (11.87) позволяет проверить гипотезу о синхротронной природе нетеплового галактического радиоизлучения, благодаря тому, что все входящие в нее величины получены из независимых измерений. В случае дискретных источников (таких, как оболочки сверхновых, радиогалактики и др.), радиоизлучение которых также объясняется на основе синхротронного механизма, формула (11.87) приводит к более скромным результатам. В этом случае значения  $B_0$  и  $K$  в источнике обычно неизвестны (известен лишь размер  $L$ ), поэтому по измеренному спектральному индексу  $\alpha$  и интенсивности радиоизлучения  $I_f$  на фиксированной частоте с помощью (11.87) могут быть найдены лишь индекс энергетического спектра релятивистских частиц  $\gamma$  и комбинация двух величин  $K B_0^{\frac{\gamma+1}{2}}$ . Для того чтобы найти в отдельности  $K$  и  $B_0$ , требуется еще одно независимое соотношение между ними. В рамках синхротронного механизма такое соотношение может быть установлено, если частотный спектр дискретного источника на низких частотах имеет “завал”, обусловленный реабсорбцией излучения в самом источнике<sup>97</sup> или депрессией излучения, вызванной

<sup>97</sup> Об эффектах реабсорбции синхротронного излучения см. §17.

влиянием среды (плазмы). В последнем случае, как ясно из (10.102), по известной частоте  $\omega_{\text{сг}} \sim \omega_L^2 / 2\omega_B$ , на которой начинается депрессия спектра радиоизлучения, можно найти магнитное поле  $B_0$ . Однако для этого необходимо знать  $N$  — электронную концентрацию “холодной” плазмы в источнике, оценка которой также представляет собой далеко не простую задачу. Поэтому в большинстве дискретных источников дополнительную связь между  $\mathcal{K}$  и  $B_0$  получают, задав отношение плотности энергии релятивистских электронов  $W_e$  к плотности энергии магнитного поля в источнике  $W_B$ . Для динамической устойчивости системы из заряженных частиц и магнитного поля необходимо, чтобы  $W_e < W_B$ . Обычно полагают  $W_e/W_B \sim 10^{-1} - 10^{-2}$ , в основном по аналогии с нашей Галактикой, где  $W_e/W_B \sim 10^{-2}$ .<sup>98</sup>

Мы рассмотрели механизм распределенного радиоизлучения Галактики в качестве примера применения теории синхротронного механизма излучения в астрофизических условиях. На самом деле сфера применения этой теории в астрофизике значительно шире: этот механизм используется для интерпретации излучения радиогалактик и галактических джетов, остатков сверхновых и т.д. В качестве недавнего примера можно указать работу [273], где синхротронный механизм микроволнового излучения в рентгеновском источнике 1E 1740.7-2942, расположенном в районе Галактического центра, был использован (вместе с данными рентгеновских наблюдений в континууме и в аннигиляционной линии 511 кэВ) для установки существенных ограничений на возможные параметры плазмы и релятивистских частиц (электронов и позитронов) в этом объекте.

Следует подчеркнуть, что синхротронный механизм стал первым механизмом, который был перенесен из радиоастрономии в оптическую и рентгеновскую астрономию. Мы имеем в виду работу [274], где оптическое излучение Крабовидной туманности (остатка сверхновой 1054 г.) в континууме объясняется синхротронным излучением релятивистских электронов, движущихся в магнитных полях этой туманности. Важным аргументом в пользу этой интерпретации явилось открытие линейной поляризации оптического излучения Краба, которое было предсказано (на основе синхротронного механизма) в [235, 275].

<sup>98</sup> О проблеме определения отношения  $W_e/W_B$  вдали от Земли см. [208].

## Глава 6

# Поглощение излучения в равновесной астрофизической плазме

Из содержания предыдущей главы ясно, что в излучательную способность плазмы вносят вклад все элементарные процессы излучения отдельных частиц, так что  $a_\omega = a_\omega^b + a_\omega^{\text{Cer}} + a_\omega^{\text{magn}} + \dots$ . С другой стороны, в равновесной плазме (т.е. в плазме с равновесным распределением частиц) справедлив закон Кирхгофа (8.36)  $a_{\omega j} = \mu_j I_\omega^{(0)}$ , связывающий излучательную способность  $a_\omega$  с коэффициентом поглощения  $\mu_j$ . Это позволяет утверждать, что в плазме каждый элементарный процесс излучения вносит свой вклад в коэффициент поглощения. Если излучательные способности, относящиеся к разным видам излучения, складываются, то и результирующий коэффициент поглощения на данной частоте  $\omega$  будет представлять собой сумму коэффициентов тормозного, магнитотормозного и других типов поглощения.

Конечно, разделить компоненты излучения отдельных частиц можно не всегда. Так, например, в нерелятивистской магнитоактивной плазме, где  $\omega_B \sim \nu_{\text{eff}}$  ( $\nu_{\text{eff}}$  — эффективное число столкновений электронов), период вращения частицы в магнитном поле  $2\pi/\omega_B$  сравним со временем свободного пробега  $1/\nu_{\text{eff}}$ . При этом излучение из-за столкновений и циклотронное излучение на частотах  $\omega \approx \omega_B \sim \nu_{\text{eff}}$  тесно связаны между собой, так как характер траектории частицы в магнитном поле существенно меняется под действием столкновений. Другим примером может служить синхротронное и магнитодрейфовое излучения в случае, когда радиус вращения электрона в магнитном поле  $r_B$  сравним с радиусом кривизны силовых линий  $R_B$ . Здесь также нельзя разделить оба вида излучения (т.е. их мощности излучения, а следовательно, излучательные способности и коэффициенты поглощения). В астрофизической плазме это обстоятельство обычно несущественно благодаря такому сочетанию параметров, при котором в хорошем приближении излучательные способности и соответствующие

щие коэффициенты поглощения для разных элементарных процессов излучения входят аддитивно в выражения для  $a_\omega$  и  $\mu_j$ . Последнее и будет предполагаться в дальнейшем.

Наряду с коэффициентом поглощения  $\mu_j$ , фигурирующим в законе Кирхгофа и в уравнениях переноса интенсивности, существует также показатель поглощения  $\eta_j$  (см. (4.55)); в случае  $\eta_j \neq 0$  амплитуда  $j$ -й нормальной волны меняется вдоль направления волнового вектора  $\mathbf{k}_j$  по закону  $\exp(-\omega\eta_j z/c)$ . Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, и, следовательно, изменяется как  $\exp(-2\omega\eta_j z/c)$ . В анизотропной среде, однако, вектор  $\mathbf{v}_{gr}$  не совпадает по направлению с  $\mathbf{k}_j$ , образуя с последним угол  $\vartheta_j$ . Поэтому изменение интенсивности вдоль  $\mathbf{v}_{gr}$  будет происходить по закону  $\exp(-2\omega\eta_j l \cos \vartheta_j/c)$ ; относительное изменение интенсивности на единицу длины вдоль луча, вызванное поглощением излучения, составит  $2\omega\eta_j \cos \vartheta_j/c$ . Однако указанное изменение интенсивности определяется коэффициентом поглощения  $\mu_j$ ; поэтому

$$\mu_j = 2\frac{\omega}{c}\eta_j \cos \vartheta_j.$$

В радиоастрономии наряду с исследованием поглощения излучения в пространстве представляет интерес и другая постановка задачи — о затухании во времени некоторого начального электромагнитного возмущения, состоящего из волн с действительными значениями  $\mathbf{k}_j$ . Этот процесс характеризуется декрементом  $\gamma_j$ ; уменьшение интенсивности во времени происходит по закону  $e^{-2\gamma_j t}$ . Величина  $\gamma_j$  связана с  $\eta_j$  соотношением (4.57). Из него и из приведенного выше выражения для  $\mu_j$  следует, что

$$2\gamma_j = \mu_j v_{gr}.$$

Для отыскания величины  $\mu_j$  и  $\gamma_j$  в равновесной среде существуют два пути. Первый основан на законе Кирхгофа: коэффициент поглощения находится по известной излучательной способности  $a_\omega$  и равновесной интенсивности  $I_\omega^{(0)}$ . Этот путь прост и нагляден, но он ограничен условием слабости поглощения: оно должно быть достаточно малым, чтобы не изменить выражение для равновесной интенсивности  $I_\omega^{(0)}$  (2.22) и, в частности, входящие в него значения показателя преломления  $n_j$  и угла  $\vartheta_j$  по сравнению с непоглощающей средой. Второй путь — более формальный, но имеющий широкую область применимости — это расчет  $\eta_j$  путем решения дисперсионного уравнения для нормальных волн (4.41). Здесь необходимо знать тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ ; последний вычисляется (в

зависимости от условий задачи и предъявляемых требований к точности ее решения) на основе элементарной теории, в квазигидродинамическом приближении или посредством кинетического уравнения (см. §4). В физике космической плазмы обычно используются оба подхода к вычислению  $\mu_j$ , причем в общей области применимости выбор диктуется соображениями большей простоты и удобства.

## §12. Поглощение в изотропной плазме

### 12.1. Поглощение из-за соударений. Тормозной механизм излучения

В отсутствие постоянного магнитного поля, когда нет магнитотормозного излучения, диссипация в плазме обусловлена тормозным и черенковским поглощением. Последнее, очевидно, имеет место только для плазменных волн, так как в изотропной плазме эффект Вавилова-Черенкова для электромагнитных волн отсутствует (см. §10)). Тормозное поглощение существует для обоих типов волн; соответствующий коэффициент поглощения может быть найден с помощью закона Кирхгофа.

Так, в разреженной ( $v = \omega_L^2/\omega^2 \ll 1$ ) изотропной плазме коэффициент тормозного поглощения электромагнитных волн равен [71]

$$\mu_{em} = \frac{a_\omega}{I_\omega^{(0)}} \approx \frac{32\pi^2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{e^6 N^2}{(\kappa T m_e)^{3/2} c \omega^2} \ln \left[ \frac{2(2\kappa T)^{3/2}}{\delta^{5/2} e^2 m_e^{1/2} \omega} \right], \quad (12.1)$$

при  $T \ll 4 \cdot 10^5$  К. Если  $4 \cdot 10^5$  К  $\ll T$ , но плазма еще нерелятивистская ( $T \ll 10^{10}$  К), коэффициент поглощения  $\mu_{em}$  отличается лишь видом логарифмического множителя [71]:

$$\mu_{em} \approx \frac{32\pi^2}{3\sqrt{2\pi}} \frac{e^6 N^2}{(\kappa T m_e)^{3/2} c \omega^2} \ln \left[ \frac{4\kappa T}{\delta \hbar \omega} \right]. \quad (12.2)$$

(параметр  $\delta = 1.781$ ). Величина  $a_\omega$  здесь определена формулами (11.6) и (11.10) соответственно. В них предположено, что  $N = N_+$  и  $Z = 1$ .<sup>99</sup> Равновесная интенсивность  $I_\omega^{(0)}$  определяется формулой (2.16); чтобы перейти к случаю изотропной плазмы с  $v \ll 1$ , в ней следует положить

<sup>99</sup> Это означает, что число электронов равно числу однократно ионизованных атомов. Поскольку в состав астрофизической плазмы входит главным образом водород, это предположение хорошо выполняется.

$n = n_{em} = 1$  и  $\cos \vartheta_j = 1$ . При подстановке  $I_\omega^{(0)}$  в выражения для  $\mu_j$  величина  $I_\omega^{(0)}$  (отнесенная к одной поляризации) удвоена с учетом того, что тормозная излучательная способность  $a_\omega$  у нас везде записана в сумме по двум поляризациям.

Поскольку тормозное излучение в плазме возникает в процессе столкновений заряженных частиц, соответствующий коэффициент поглощения может быть найден, если учесть наличие соударений в выражении для диэлектрической проницаемости плазмы. В рамках элементарной теории (см. о ней §4) такой учет проводится на основе следующих соображений.

Обозначим через  $\nu_{\text{eff}}$  частоту “эффективных” столкновений электрона с другими частицами, в результате которых он существенно меняет свою скорость, “забывая” при этом о величине того упорядоченного импульса  $m_e v$ , который он приобрел в поле волны до столкновения. Тогда в единицу времени потеря импульса составит  $m_e \nu_{\text{eff}} v$ ; она может быть учтена подстановкой члена  $-m_e \nu_{\text{eff}} v$  в правую часть уравнения движения электрона (4.62). В результате поперечная диэлектрическая проницаемость “холодной” изотропной плазмы примет вид

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon' = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega(\omega + i\nu_{\text{eff}})}, \quad (12.3)$$

а дисперсионное уравнение для электромагнитных волн (4.46) запишется в форме

$$\omega^2 = \frac{\omega_L^2}{1 + i\nu_{\text{eff}}/\omega} + c^2 k^2. \quad (12.4)$$

Продольная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{\parallel}(\omega, k)$  в кинетическом приближении определяется (без учета столкновений) формулой (4.88). Влияние столкновений будет учтено, если в (4.88) аргумент  $Z = \omega/\sqrt{2}kv_T$  заменить на  $Z' = (\omega + i\nu_{\text{eff}})/\sqrt{2}kv_T$ .<sup>100</sup> В области  $|Z'| \gg 1$  (при значениях  $\omega$ , близких к действительным, это соответствует высокой фазовой скорости  $v_{\text{ph}} \approx \omega/k \gg v_T$ ) дисперсионное уравнение  $\epsilon_{\parallel}(\omega, k) = 0$  (4.47) для плазменных волн примет вид

$$(\omega + i\nu_{\text{eff}})^2 = \omega_L^2 + 3k^2 v_T^2 \quad (12.5)$$

(ср. с (5.13)). В высокочастотном случае  $\omega \gg \nu_{\text{eff}}$  (вариант, представляющий для физики космической плазмы наибольший интерес)

<sup>100</sup> Необходимость такой замены может быть установлена, если получить выражение для  $\epsilon_{\parallel}(\omega, k)$  заново, отправляясь от кинетического уравнения (4.79) с интегралом столкновений в форме  $J' = \nu_{\text{eff}} f'$  (см. §4).

из дисперсионных уравнений (12.4) и (12.5) следует, что показатели преломления электромагнитных ( $n_{em}$ ) и плазменных ( $n_{pl}$ ) волн с достаточной точностью определяются выражениями (5.2) и (5.14). Однако теперь показатели поглощения отличны от нуля и равны соответственно

$$\eta_{em} \approx \frac{\omega_L^2}{2\omega^3 n_{em}} \nu_{eff} \quad (12.6)$$

для электромагнитной и

$$\eta_{pl} \approx \frac{1}{3\omega \beta_T^2 n_{pl}} \nu_{eff} \quad (12.7)$$

для плазменной волн. Соответственно коэффициенты поглощения  $\mu_j = 2\omega\eta_j/c$  запишутся так:

$$\mu_{em} \approx \frac{\omega_L^2 \nu_{eff}}{\omega^2 c \sqrt{\epsilon}}, \quad \mu_{pl} \approx \frac{2\nu_{eff}}{\sqrt{3}\epsilon v_T} \simeq \frac{2v_{ph} \nu_{eff}}{3v_T^2}. \quad (12.8)$$

Здесь  $\epsilon = 1 - \omega_L^2/\omega^2$  и в последнем выражении для  $\mu_{pl}$  учтено, что фазовая скорость плазменных волн  $v_{ph} = \sqrt{3}v_T\sqrt{\epsilon}$  (5.15).

Выражения для декремента  $\gamma_j = \mu_j v_{gr}/2$  имеют следующий вид:

$$\gamma_{em} \approx \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \frac{\nu_{eff}}{2}, \quad \gamma_{pl} \approx \frac{\nu_{eff}}{2}. \quad (12.9)$$

На частотах  $\omega \approx \omega_L$  значение  $\gamma_{em}$  близко к  $\gamma_{pl}$ . Формулы (12.9) справедливы при условии  $\omega \gg \nu_{eff}$ ; формулы (12.6), (12.7) и (12.8) верны лишь при более жестком условии  $\omega\epsilon \gg \nu_{eff}$  в области  $\epsilon > 0$ . Эффективная частота столкновений  $\nu_{eff}$  здесь может быть представлена в форме

$$\nu_{eff} = \nu_{ei} + \nu_{ea}, \quad (12.10)$$

где первый член описывает электронно-ионные столкновения, а второй — соударения электронов с нейтральными атомами (молекулами). Электрон-электронные столкновения сюда не входят, так как при соударениях двух одинаковых частиц их суммарный импульс (включая упорядоченную компоненту, приобретенную под действием поля излучения) не меняется.

Оценку величины  $\nu_{ei}$  можно получить из следующих простых соображений. При эффективном соударении, которое сопровождается существенным изменением скорости электрона, последний должен подойти к иону на расстояние  $r \lesssim r_s$ , где его потенциальная энергия в



кулоновском поле иона  $e^2/r_s$  сравнивается с кинетической энергией  $\kappa T$  или станет больше последней. Отсюда следует, что  $r_s \sim e^2/\kappa T$ ; величина  $\pi r_s^2 \sim \pi e^2/(\kappa T)^2$  называется эффективным сечением соударения. При движении электрона со скоростью  $v$  за время  $\Delta t$  он столкнется со всеми ионами, которые содержатся в цилиндре с основанием  $\pi r_s^2$  и высотой, равной  $v\Delta t$ . Число таких ионов составляет  $\pi r_s^2 N v \Delta t$ ; эффективное число столкновений за единицу времени мы получим, положив в этом выражении  $v \sim v_T$  и разделив его на  $\Delta t$ . Учитывая величину приведенного выше сечения  $\pi r_s^2$ , находим, что

$$\nu_{ei} \sim \pi \frac{e^4}{(\kappa T)^2} v_T N, \quad (12.11)$$

Поскольку  $v_T = \sqrt{\kappa T/m_e}$ , ясно, что эффективная частота электронно-ионных столкновений в плазме убывает с ростом кинетической температуры по закону  $T^{-3/2}$ .

Корректный расчет (см. [71]) приводим к более сложным выражениям для  $\nu_{ei}$ :

$$\nu_{ei} = \pi \frac{e^4}{(\kappa T)^2} \bar{v} N A \approx \frac{5.5 N}{T^{3/2}} A, \quad (12.12)$$

где логарифмический фактор

$$A = \ln \left[ 0.37 \frac{\kappa T}{e^2 N^{1/3}} \right] \approx \ln \left[ 220 \frac{T}{N^{1/3}} \right] \quad (12.13)$$

или

$$A = \ln \left[ \delta \left( \frac{m_e e^4}{\hbar^2 \kappa T} \right)^{1/3} \frac{\kappa T}{e^2 N^{1/3}} \right] \approx \ln \left[ 10^4 \frac{T^{2/3}}{N^{1/3}} \right] \quad (12.14)$$

в зависимости от того, меньше или больше, чем  $4 \cdot 10^5$  К, кинетическая температура электронов плазмы  $T$ . В области  $T \sim 4 \cdot 10^5$  К обе формулы дают примерно одинаковый результат. В (12.12)-(12.14) предполагается, что число ионов  $N_+ = N$ ; "средняя арифметическая" скорость электронов  $\bar{v} = \sqrt{8\kappa T/\pi m_e}$ ; фактор  $\delta \sim 1$ . Электронная температура может отличаться от температуры ионов (неизотермическая плазма); однако поправки в (12.12)-(12.14) из-за этого обстоятельства войдут под знак логарифма и лишь незначительно изменят величину  $\nu_{ei}$ . Появление логарифмического фактора в (12.12) происходит благодаря учету многочисленных из-за большого сечения дальних соударений в интервале от  $r \simeq r_s$  до  $r \simeq D$  (где  $D$  — дебаевский радиус;

см. (1.4)); влияние пролета электрона на расстояниях  $r > D$  становится несущественным из-за экспоненциального ослабления (дебаевской экранировки) кулоновского поля иона.

Выражения (12.12)–(12.14) для  $\nu_{ei}$  получены на основе кинетического уравнения с интегралом столкновений  $J_{st}$ , учитывающим парные соударения между частицами.<sup>101</sup> Представление кинетического уравнения в такой форме допустимо, если время столкновения  $\Delta t$  много меньше периода высокочастотного поля  $1/\omega$ . В плазме  $\Delta t \sim D/v_T$ , где  $D \sim v_T/\omega_L$  — дебаевский радиус (см. (1.4)). Отсюда следует, что формулы для  $\nu_{ei}$  справедливы, строго говоря, лишь в области  $\omega_L \gg \omega$ , не играющей существенной роли в распространении волн в изотропной плазме (там  $n_{em}^2$  и  $n_{pl}^2$  отрицательны). В этой же области будут справедливы и приведенные выражения для коэффициентов поглощения и декрементов (12.6)–(12.9), если в них  $\nu_{eff} = \nu_{ei}$ . С другой стороны, формулы (12.1), (12.2), справедливые в области  $\omega_L \ll \omega$ , можно представить в форме (12.8) с  $\nu_{eff} = \nu_{ei}$ , где  $\nu_{ei}$  — из (12.12). Однако теперь величина  $A$  отличается от (12.13), (12.14): она равна  $2/3$  от логарифмических факторов в формулах (12.1), (12.2). Экстраполяция новой величины  $A' \equiv \frac{2}{3}A$  в область  $\omega \sim \omega_L$  дает значения, близкие к (12.13), (12.14). Это означает, что если не стремиться к высокой точности, то в области  $\omega \sim \omega_L$  вполне можно использовать формулы для  $\nu_{eff}$  (12.12) с фактором (12.13), (12.14) или с логарифмическим множителем, экстраполированным из области  $\omega_L \ll \omega$ .

Указанные ограничения на применимость формул (12.6) – (12.9) практически снимаются, если  $\nu_{eff} \approx \nu_{ea}$ , так как при соударениях с нейтральными атомами длительность столкновения резко уменьшается до величины  $\Delta t \sim a/v_T$  ( $a$  — радиус атома). При этом для столкновений с нейтральными атомами (молекулами)

$$\nu_{ea} = \frac{4\pi}{3} a^2 \bar{v} N_a = 8.3 \cdot 10^5 \pi a^2 T^{1/2} N_a, \quad (12.15)$$

где  $N_a$  — концентрация нейтральных частиц,  $\pi a^2$  — эффективное сечение столкновений. В атомарном водороде  $\pi a^2 \sim 10^{-16} \text{ см}^2$ . Частота столкновений с нейтральными частицами растет по мере увеличения электронной температуры как  $T^{1/2}$ . В космической плазме столкновения с атомами и молекулами по большей части несущественны

<sup>101</sup> Формулы (12.8) с  $\nu_{eff} = \nu_{ei}$ , где  $\nu_{ei}$  — из (12.12)–(12.14), конечно, можно получить и с помощью закона Кирхгофа, рассматривая поглощение из-за соударений как эффект, обратный тормозному излучению. При этом следует исходить из выражений для мощности тормозного излучения частиц в среде; замечания об этих выражениях см. в §10.

( $\nu_{ea} \ll \nu_{ei}$ ), хотя их следует учитывать в холодных областях солнечной хромосферы и в ионосферах планет (например, в  $D$ -слое земной ионосферы).

Учет парных столкновений между частицами плазмы при вычислении тормозного излучения и поглощения становится достаточным на высоких частотах в разреженной плазме ( $\nu \ll 1$ ), когда длина волны мала по сравнению с дебаевским радиусом и влияние дебаевской экранировки оказывается несущественным. В этом случае коэффициент тормозного поглощения может быть получен из выражения для излучательной способности (11.12) с помощью закона Кирхгофа (8.36)

$$\mu_{em} = \frac{\pi^3}{\sqrt{6}\pi} \frac{32}{3} \frac{e^6 Z^2 N N_+}{m_e^2 c^2 \kappa T \omega^2} \left( \frac{m_e c^2}{\kappa T} \right)^{1/2} g(\omega, T) \frac{1 - e^{-\hbar\omega/\kappa T}}{\hbar\omega/\kappa T}, \quad (12.16)$$

где фактор Гаунта  $g(\omega, T)$  определяется формулой (11.13) (см. также [85]). В области Рэля-Джинса  $\hbar\omega \ll \kappa T$  это выражение сводится к форме

$$\mu_{em} = \frac{32\pi^2}{3\sqrt{2}\pi} \frac{e^6 Z^2 N N_+}{(\kappa T m_e)^{3/2} c \omega^2} \left( \ln \frac{4\kappa T}{\delta \hbar\omega} \right), \quad (12.17)$$

которая при  $Z = 1$  и  $N = N_+$  совпадает с выражением (12.2), а в виновском пределе  $\hbar\omega \gg \kappa T$  — к формуле

$$\mu_{em} = \frac{32\pi^2}{3\sqrt{2}\pi} \frac{e^6 Z^2 N N_+}{(\hbar\omega m_e)^{3/2} c \omega^2}. \quad (12.18)$$

Отметим, что выражения для коэффициентов поглощения (12.16) — (12.18) справедливы для плазмы с показателем преломления  $n_j$ , близким к единице. В случае, если  $n_j \neq 1$ , приведенные коэффициенты поглощения  $\mu_{em}$  следует умножить на фактор  $\epsilon^{-1/2}$ .

Чтобы судить о характере частотного спектра тормозного излучения с учетом поглощения в источнике, рассмотрим простейший случай изотермического слоя разреженной плазмы. Эффективная температура теплового излучения из слоя, нагретого до температуры  $T$ , равна  $T_b = T(1 - e^{-\tau})$ , где оптическая толщина  $\tau = \int \mu_{em} dl$  (см. §8). Для тормозного поглощения в разреженной плазме  $\mu_{em}$  определяется формулами (12.1), (12.2), так что величину  $\tau$  можно представить в форме

$$\tau = \frac{\int N^2 dl}{\omega^2 T^{3/2}} B, \quad (12.19)$$

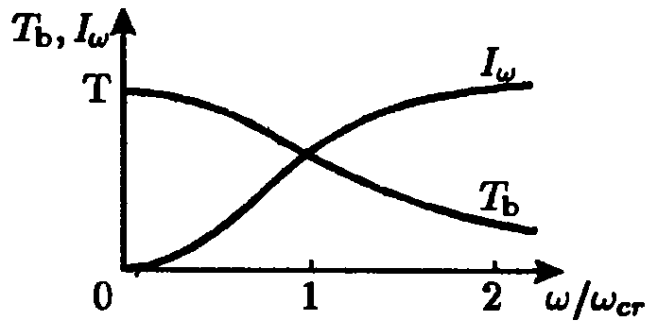


Рис. 42. Частотный спектр теплового тормозного излучения из изотермического слоя разреженной плазмы ( $\omega_L \ll \omega_{cr}$ )

где

$$B = \frac{16\pi^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^6}{(\kappa m_e)^{3/2} c} A', \quad (12.20)$$

причем  $A'$  равен  $2/3$  от логарифмов в формулах (12.1), (12.2). Фактор  $A'$  медленно меняется с частотой и его можно считать постоянным, положив для определенности частоту  $\omega$  в логарифмических факторах равной

$$\omega_{cr} = \left( \frac{B}{T^{3/2}} \int N^2 dl \right)^{1/2}, \quad (12.21)$$

Значение критической частоты  $\omega_{cr}$  соответствует оптической толщине  $\tau = 1$ .

Зависимость яркостной температуры  $T_b$  от частоты  $\omega$  для тормозного теплового излучения из слоя разреженной плазмы имеет вид, представленный на Рис. 42. На частотах  $\omega \ll \omega_{cr}$  величина  $\tau \gg 1$  и  $T_b \approx T$  — кинетической температуре плазмы. В области  $\omega \gg \omega_{cr}$  значения  $\tau \ll 1$  и  $T_b \approx T\tau \propto \omega^{-2}$ . Частотный спектр для интенсивности излучения  $I_\omega(\omega)$  в области Рэлея–Джинса можно получить из  $T_b(\omega)$ , если учесть, что  $I_\omega$  связана  $T_b$  формулой  $I_\omega = \omega^2 \kappa T_b / (2\pi)^3 c^2$  (см. (2.17); в разреженной изотропной плазме  $n_j = 1$  и  $\vartheta = 0$ ). Кривая  $I_\omega(\omega)$  также изображена на Рис. 42. Интенсивность растет по мере увеличения частоты (на низких частотах  $\omega \ll \omega_{cr}$  — по закону  $\omega^2$ ); в области  $\omega \gg \omega_{cr}$  она стремится к постоянному значению.

Какую роль играют тормозное поглощение и излучение в космической плазме? Оценки с помощью формулы (12.1) показывают, что в областях Н I межзвездной среды поглощение в радиодиапазоне несущественно, поскольку оптическая толщина  $\tau \ll 1$  на размерах Галактики. В более плотных областях Н II ситуация меняется, и на низких частотах поглощение становится значительным. Благодаря указанному обстоятельству области Н II, экранирующие дискретный источник со степенным спектром радиоизлучения  $I_\omega = \tilde{K}\omega^{-\alpha}$ , деформируют

последний так, что

$$I_{\omega} = \tilde{\mathcal{K}} \omega^{-\alpha} e^{-\tau(\omega)}. \quad (12.22)$$

Этот эффект приводит к “завалу” спектров некоторых дискретных источников на частотах  $\omega \lesssim \omega_{\text{cr}}$ .

Из областей Н II также регистрируется собственное излучение, частотный спектр которого близок к изображенному на Рис. 42. Так, например, для области ионизованного водорода, известной под названием Туманности Ориона,  $T_b$  на низких частотах около  $10^4$  К, а  $\omega_{\text{cr}} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$  ( $\lambda_{\text{cr}} \approx 60 \text{ см}$ ). Это позволяет утверждать, что кинетическая температура водорода в туманности  $10^4$  К, что близко к значениям  $T$  для Ориона, найденным из оптических наблюдений по относительной интенсивности линий излучения кислорода. Отмеченная близость температур и форма частотного спектра туманности свидетельствуют о том, что ее радиоизлучение (равно как и радиоизлучение других областей Н II) можно объяснить действием теплового тормозного механизма. Это позволяет по наблюдаемой величине  $\omega_{\text{cr}}$  определить из (12.21) величину  $EM = \int N^2 dl$ , называемую мерой эмиссии (при этом температура  $T$  считается известной хотя бы по данным о яркостной температуре на частотах  $\omega \ll \omega_{\text{cr}}$ ). Для  $\omega_{\text{cr}} = 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$  и  $T_b \sim 10^4$  К получаем, что  $EM \sim 2 \cdot 10^{24} \text{ см}^{-5}$ . В предположении об однородном распределении ионизованного водорода по туманности с линейным размером  $L \sim 10^2 \text{ пк} \sim 3 \cdot 10^{20} \text{ см}$  величина  $EM \sim N^2 L$ , следовательно,  $N \sim 10^2 \text{ см}^{-3}$ . Это — усредненная оценка электронной концентрации по источнику. Более детальное распределение меры эмиссии по туманности можно получить, исследуя угловое распределение интенсивности радиоизлучения по источнику на частотах  $\omega \gg \omega_{\text{cr}}$  (где  $I_{\omega} \propto T^{-1/2} \int N^2 dl$ ).

В условиях солнечной короны и хромосферы пренебрегать отличием показателя преломления  $n_{\text{em}}$  от единицы, как это делалось выше, уже нельзя. Поэтому расчет коэффициента тормозного поглощения  $\mu_{\text{em}}$  и соответствующих значений оптической толщины  $\tau = \int \mu_{\text{em}} dl$  нужно проводить по формулам (12.8), (12.12) с логарифмическим фактором  $A$  в форме (12.13) для хромосферы (где  $T \sim 10^4$  К) и в форме (12.14) для короны (где  $T \sim 10^6$  К). Результаты соответствующих расчетов  $\nu_{\text{eff}}$  и  $\tau$  изложены в [3, 71].

Эффективная частота столкновений  $\nu_{\text{eff}} = \nu_{ei}$  в короне составляет около  $1-10 \text{ с}^{-1}$  на расстояниях  $R \leq 1.5 R_{\odot}$  от центра Солнца ( $R_{\odot}$  — оптический радиус Солнца). Зависимость оптической толщины короны  $\tau(R) = \int_R^{\infty} \mu_{\text{em}} dR$ , рассчитанная для  $T = 10^6$  К и распределения электронной концентрации  $N(R)$ , удовлетворяющего формуле

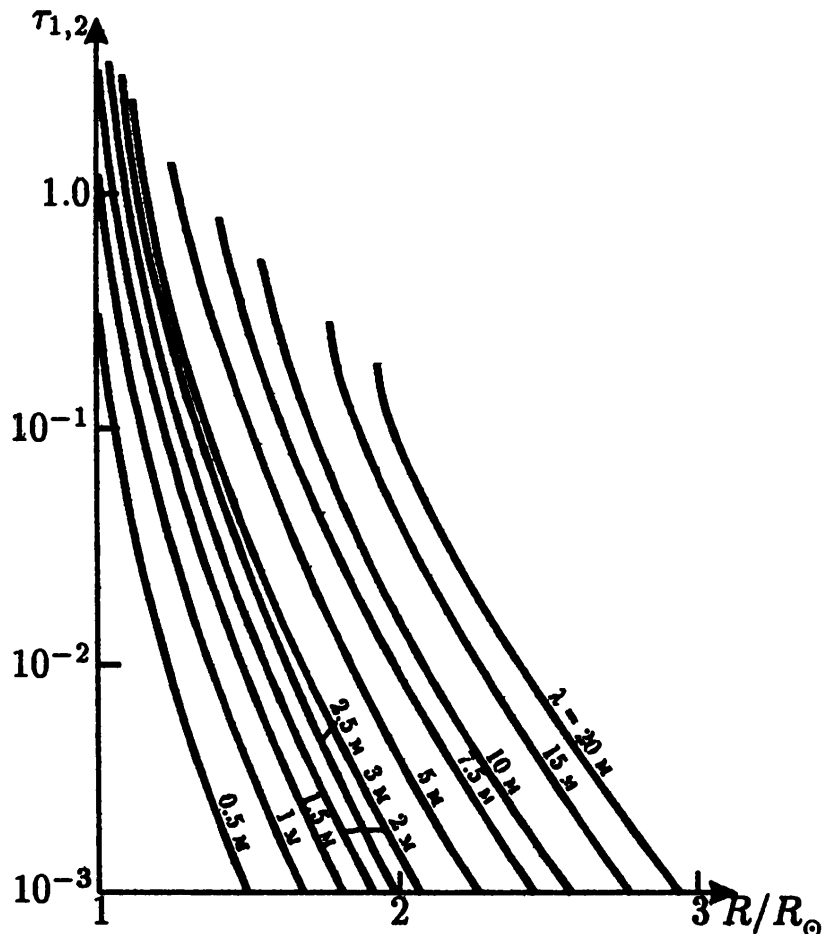


Рис. 43. Оптическая толщина солнечной короны в случае радиального распространения радиоволн (для различных длин волн)

Баумбаха–Аллена (1.16), представлена на Рис. 43. Графики продолжаютя до значений  $R = R^*$ , где показатель преломления  $n_{em} = 0$ . Согласно Рис. 43 оптическая толщина короны, отсчитываемая от точки поворота  $R^*$ , возрастает с уменьшением длины волны.

Что касается тормозного поглощения плазменных волн в корональной плазме, то его можно оценить, исходя из выражения (12.8) для  $T \approx 10^6$  К. В слоях короны, где  $\nu_{eff} \sim 5 \text{ с}^{-1}$  и  $v_T \simeq 4 \cdot 10^8 \text{ см/с}$  (это соответствует кинетической температуре  $T \approx 10^6$  К) величина  $\mu_{pl} \simeq 10^{-7} \text{ см}^{-1}$  для плазменных волн с фазовой скоростью  $v_{ph} \approx 10v_T$ . Это означает, что интенсивность волны уменьшится в  $e$  раз на расстоянии порядка  $10^7$  см, т.е. на расстоянии, весьма малом по сравнению с размерами активных областей и источников радиоизлучения на Солнце. Отсюда можно заключить, что плазменные волны, созданные в области генерации, затухают в той же области. Характерное время затухания составляет  $1/2\gamma_{pl}$ ; для  $\nu_{eff} \sim 5 \text{ с}^{-1}$  оно равно 0.2 с (см. (12.9)).

По оптической толщине солнечной короны и хромосферы (а также их температуре) можно судить о характере теплового тормозного излучения этих объектов. Последнее, в соответствии с представлениями, выдвинутыми еще в первые годы развития радиоастрономии [160, 276–278], отождествляется с радиоизлучением “спокойного” Солнца. К главным особенностям этого радиоизлучения следует отнести частотный спектр с подъемом  $T_b$  от  $10^4$  К до  $10^6$  К при переходе из сантиметрового в метровый диапазон, и “уярчение” на лимбе Солнца, т.е. наличие областей с повышенной яркостной температурой на краях солнечного диска. Анализ [279] теплового тормозного механизма радиоизлучения даже в рамках простейшей модели солнечной атмосферы позволяет понять причины указанных особенностей излучения “спокойного” Солнца.

Пусть распределение электронной концентрации в солнечной атмосфере обладает сферической симметрией и описывается формулой Баумбаха–Аллена (1.16), а хромосфера и корона имеют постоянную кинетическую температуру  $T_{ch} = 3 \cdot 10^4$  К и  $T_c = 10^6$  К соответственно. Форма луча в такой атмосфере представлена на Рис. 20. Оптическая толщина  $\tau = \int \mu dl$  отрезка луча, идущего из бесконечности до сферы радиуса  $R$ , определяется выражением  $\tau = \int_R^\infty \mu(1 - r^2/R^2n^2)^{-1/2} dR$ , в котором учтена связь (6.26) между элементами длины  $dl$  и  $dR$ . Постоянство температуры хромосферы и короны позволяет применить для анализа эффективной температуры выражения, полученные в §8 для термически однородного плазменного слоя (см. (8.42)–(8.44)). Тогда для луча с точкой поворота в короне

$$T_b = T_c(1 - e^{-2\tau_c^*}), \quad (12.23)$$

где

$$\tau_c^* = \int_{R^*}^\infty \mu(1 - \frac{r^2}{R^2n^2})^{-1/2} dR \quad (12.24)$$

— оптическая толщина половины луча в короне (от точки поворота  $R^*$  до бесконечности). Если же точка поворота расположена в хромосфере, то эффективная температура на выходе из короны

$$T_b = T_c(1 - e^{-\tau_c}) + T_{ch}e^{-\tau_c}. \quad (12.25)$$

Здесь

$$\tau_c = \int_{R_{ch}}^\infty \mu(1 - \frac{r^2}{R^2n^2})^{-1/2} dR \quad (12.26)$$

— оптическая толщина той части луча, которая лежит в короне ( $R_{\text{ch}}$  — радиус верхней границы хромосферы). Расчеты показывают, что в принятой модели оптическая толщина хромосферы для тормозного поглощения становится больше единицы, если точка поворота  $R^*$  опускается на глубину более 100 км от верхней границы хромосферы  $R_{\text{ch}}$  (общая протяженность хромосферы в сотни раз больше). Именно для таких лучей и написана формула (12.25). В ней можно также учесть, что оптическая толщина короны (тоже для тормозного поглощения)  $\tau_c \ll 1$ , если луч заходит в хромосферу ( $R^* < R_{\text{ch}}$ ). Тогда<sup>102</sup>

$$T_b \approx T_c \tau_c + T_{\text{ch}}. \quad (12.27)$$

и вклад короны в величину яркостной температуры наблюдаемого радиоизлучения будет несуществен, если  $\tau \ll T_{\text{ch}}/T_c \sim 3 \cdot 10^{-2}$ . Для тормозного поглощения в короне  $\tau_c \propto \omega^{-2} \propto \lambda^2$  (см., например, (12.6)) и по оценкам  $\tau_c \ll 3 \cdot 10^{-2}$  на волнах длиной  $\lambda \ll 10 - 20$  см.

Отсюда следует, что в сантиметровом диапазоне радиоизлучение “спокойного” Солнца создается главным образом в хромосфере, причем  $T_b \approx T_{\text{ch}} \sim 3 \cdot 10^4$  К. На более длинных волнах роль короны повышается, благодаря чему  $T_b$  (12.27) растет с длиной волны. В метровом диапазоне  $R^* > R_{\text{ch}}$ , величина  $2\tau_c^* > 1$ , и яркостная температура радиоизлучения  $T_b$  (12.23) достигает температуры короны  $T_c \sim 10^6$  К. Так объясняется частотный спектр излучения “спокойного” Солнца на сантиметровых – метровых волнах. Для интерпретации частотного спектра в миллиметровом диапазоне принятая модель изотермической хромосферы становится неудовлетворительной.

“Уярчение” на лимбе не может возникнуть, если  $\tau_c$  в центре солнечного диска (при  $r = 0$ ) больше единицы: в этом случае  $T_b(r = 0)$  достигает своего максимального значения и с ростом  $r$  может только уменьшаться. Такая ситуация имеет место на метровых волнах. В дециметровом диапазоне  $\tau_c < 1$  лучи заходят в хромосферу и  $T_b$  определяется формулами (12.27), (12.26). Здесь с ростом расстояния от центра диска оптическая толщина короны  $\tau_c$  возрастает (фактически за счет увеличения длины луча в короне); вместе с  $\tau_c$  растет и  $T_b$ . Указанное повышение яркостной температуры радиоизлучения происходит до значений  $r \lesssim R_{\text{ch}}$ . При  $r > R_{\text{ch}}$  точка поворота  $R^*$  выходит из хромосферы в корону. Здесь  $T_b$  определяется соотношениями (12.23), (12.24), согласно которым величина  $\tau_c^*$ , а вместе с ней и  $T_b$ , быстро падают при увеличении  $R^*$  (из-за сокращения интервала интегриро-

<sup>102</sup>В (12.27) уже учтено, что  $T_{\text{ch}} \ll T_c$  (ср. с формулой (8.44)).



вания в выражении для  $\tau_c^*$ ). Таким образом, уярчение на лимбе в дециметровом диапазоне связано с изменением относительного вклада короны и хромосферы в наблюдаемое радиоизлучение в зависимости от расстояния до центра солнечного диска. На более коротких волнах, где влияние короны становится несущественным, “уярчение” обусловлено неизотермичным характером хромосферы. Этот вопрос вместе с другими аспектами проблемы происхождения радиоизлучения “спокойного” Солнца подробно обсуждается в [3].

## 12.2. Черенковское поглощение плазменных волн. Затухание Ландау

В начале этого параграфа уже отмечалось, что для плазменных волн наряду с тормозным поглощением существует и черенковское поглощение. Оно непосредственно связано с черенковским излучением отдельных заряженных частиц в плазме и представляет собой (с точки зрения этой связи) обратный эффект Вавилова–Черенкова.

Величину коэффициента поглощения плазменных волн  $\mu^{\text{Чер}}$  трудно найти с помощью закона Кирхгофа, используя полученное в §11 выражение (11.19) для черенковской излучательной способности  $a_\omega$ . Тогда получим [217], что в равновесной изотропной плазме коэффициент поглощения

$$\mu^{\text{Чер}} = \frac{a_\omega}{I_\omega^{(0)}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_L^2 \omega^3}{k^4 v_T^5} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2v_T^2 k^2}\right), \quad (12.28)$$

а соответствующий декремент

$$\gamma^{\text{Чер}} = \mu^{\text{Чер}} \frac{v_{\text{гр}}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_L^2 \omega^2}{k^3 v_T^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2v_T^2 k^2}\right). \quad (12.29)$$

Здесь принято во внимание, что равновесная интенсивность для плазменных волн  $I_\omega^{(0)} = n_{\text{pl}}^2 \omega^2 \kappa T / (2\pi)^3 c^2$  (где  $n_{\text{pl}}^2 = \epsilon / 3\beta_T^2$ ), декремент  $\gamma$  связан с  $\mu$  соотношением, представленным во введении к этой главе, а групповая скорость плазменных волн  $v_{\text{гр}} = 3v_T^2 k / \omega$  (см. (5.15)). Выражение (12.29) совпадает с формулой [238], характеризующей не связанное с соударениями затухание продольных волн в равновесной изотропной плазме (так называемое затухание Ландау). Она была получена путем решения дисперсионного уравнения для плазменных волн (4.47) с  $\epsilon_{\parallel}$  в форме (4.88) (т.е. на основе кинетического рассмотрения). Однако данный выше вывод более нагляден и подчеркивает тесную связь затухания Ландау с эффектом Вавилова–Черенкова. Эта связь

стала ясной благодаря работам [280–282]; в [283] уже определенно указывалось, что черенковское затухание и затухание Ландау представляют собой один и тот же эффект; различны лишь способы его исследования.<sup>103</sup>

Полученные выше формулы для  $\mu^{\text{Сег}}$  и  $\gamma^{\text{Сег}}$  справедливы лишь в случае слабого поглощения, когда  $\mu^{\text{Сег}} \ll k$  и  $\gamma^{\text{Сег}} \ll \omega$ . Это следует хотя бы из того, что использованные выражения для  $I_{\omega}^{(0)}$  и  $a_{\omega}$  справедливы лишь в прозрачной (слабо поглощающей) среде. Из вида  $\mu^{\text{Сег}}$  и  $\gamma^{\text{Сег}}$  ясно, что условие слабого поглощения будет выполнено, если  $\omega^2/2k^2v_T^2 = v_{\text{ph}}^2/2v_T^2 \gg 1$ . При этом же условии была найдена формула (12.29) в работе Ландау. Заметим, что в рассматриваемой области слабого затухания плазменных волн их частота  $\omega$  близка к  $\omega_L$ . Если же  $v_{\text{ph}} \sim v_T$ , то использованный нами способ отыскания  $\mu^{\text{Сег}}$  и  $\gamma^{\text{Сег}}$  становится непригодным, в отличие от метода кинетического уравнения, которое сохраняет силу и в этой области. Соответствующее исследование [83] дисперсионного соотношения (4.47), (4.88) показало, что в этой области  $\gamma \sim \omega$ , т.е. волны затухают за время  $t \sim 1/\gamma \sim 1/\omega$ , или на расстоянии  $l \sim \lambda/2\pi$ . Последнее означает, что плазменные волны с  $v_{\text{ph}} \sim v_T$  (т.е.  $kD \sim 1$ ) практически не могут распространяться из-за сильного затухания в плазме. Наглядные физические соображения, приводящие к этому результату, изложены в §5.

Вследствие затухания Ландау плазменная волна не может выйти из области  $\omega \approx \omega_L$  в область разреженной плазмы (например, из солнечной короны в межпланетную среду). Действительно, при распространении волн частоты  $\omega$  в неоднородной плазме их фазовая скорость  $v_{\text{ph}} = \sqrt{3}v_T/\sqrt{\epsilon}$  (см. (5.15)) уменьшается вместе с  $\omega_L$  (поскольку  $\epsilon = 1 - \omega_L^2/\omega^2$ ). Поэтому в слоях, где  $v_{\text{ph}}$  опускается до значений, сравнимых с  $v_T$ , наступает сильное затухание Ландау, ведущее к полному поглощению плазменной волны.

### §13. Поглощение в магнитоактивной плазме

В присутствии постоянного магнитного поля формулы для тормозного (связанного со столкновениями) и черенковского поглощения

<sup>103</sup> Мы не останавливаемся здесь на классической трактовке затухания Ландау, учитывающей, что электрическое поле плазменной волны ускоряет электроны, движущиеся со скоростью  $v < v_{\text{ph}}$ , и замедляет электроны с  $v > v_{\text{ph}}$ . Преобладание частиц с  $v < v_{\text{ph}}$  в максвелловской плазме приводит к отбору энергии от волны, т.е. к затуханию последней (см. [280, 281] и любую монографию по физике плазмы).

становятся сложнее. Кроме того, в нерелятивистской плазме (где  $kT \ll m_e c^2$ ) возникает еще один вид поглощения — циклотронный.

### 13.1. Поглощение электромагнитных волн из-за столкновений между частицами

В элементарной теории это поглощение по-прежнему учитывается введением члена  $-m_e \nu_{\text{eff}} v$  в правую часть уравнения движения электрона (4.62). В результате выражение для квадрата показателя преломления обыкновенных и необыкновенных волн  $n_{1,2}^2$  (5.19) заменяется следующей формулой [71]:

$$(n + i\eta)_j^2 = 1 - \frac{2v(1 - v + i\nu)}{2(1 + i\nu)(1 - v + i\nu) - u \sin^2 \alpha \mp G}, \quad (13.1)$$

где

$$v = \omega_L^2 / \omega^2, \quad u = \omega_B^2 / \omega^2, \quad \nu = \nu_{\text{eff}} / \omega,$$

$$G = \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1 - v + i\nu)^2 \cos^2 \alpha},$$

$\alpha$  — угол между волновым вектором  $k_j$  и магнитным полем  $B_0$ . Знак “минус” отвечает необыкновенной волне ( $j=1$ ), знак “плюс” — обыкновенной ( $j=2$ ). В космической плазме на радиочастотах обычно хорошо выполняется неравенство  $\nu \ll 1$ . Разлагая (13.1) в ряд по степеням  $\nu$ , убеждаемся, что показатель преломления  $n_{1,2}$  близок к значениям, определяемым формулой (5.19), а показатель тормозного поглощения имеет вид [284, 285]

$$\eta_{1,2} \simeq \frac{v\nu}{n_{1,2}} \times \quad (13.2)$$

$$\left\{ \mp \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1 - v)^2 \cos^2 \alpha} [u \sin^2 \alpha + 2(1 - v)^2] - u^2 \sin^4 \alpha \right\} \\ \times \frac{\left[ 2(1 - v) - u \sin^2 \alpha \mp \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1 - v)^2 \cos^2 \alpha} \right]^{-2}}{\pm \sqrt{u^2 \sin^4 \alpha + 4u(1 - v)^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Критерием применимости этого выражения для  $\eta_{1,2}$  при малых  $\nu$  служит неравенство

$$|1 - u - v + uv \cos^2 \alpha| \gg \nu |3 - 2v - u|. \quad (13.3)$$

Согласно (13.3) показатель поглощения в магнитоактивной плазме резко возрастает по мере приближения к резонансным частотам (5.23), на которых в отсутствие столкновений  $n_{1,2} \rightarrow \infty$ .

Выражение для  $\eta_{1,2}$  упрощается в практически весьма важных случаях квазипродольного и квазипоперечного распространения волн относительно магнитного поля. В квазипродольном приближении

$$\eta_{1,2} = \frac{v\nu}{2n_{1,2}(1 \mp |\sqrt{u} \cos \alpha|)^2}, \quad (13.4)$$

а показатель преломления  $n_{1,2}$  описывается формулой (5.26). Соответственно в квазипоперечном приближении значения  $n_{1,2}$  будут заданы выражениями (5.27), показатель поглощения необыкновенной волны

$$\eta_1 = \frac{v\nu[(1-v)^2 + u \sin^2 \alpha]}{2n_1(1-v-u \sin^2 \alpha)}, \quad (13.5)$$

а величина  $\eta_2$  для обыкновенной волны совпадает с (12.6). Отметим, что условия справедливости квазипродольного и квазипоперечного приближений в случае  $\nu \ll 1$  практически не отличаются от (5.24), (5.25).

В достаточно разреженном слое плазмы ( $v \ll 1$ ) со слабым магнитным полем ( $|\sqrt{u} \cos \alpha| \ll 1$ ) и в широком интервале углов  $\alpha$ , где реализуется случай квазипродольного распространения, оптическая толщина

$$\tau_{1,2} \approx \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{\omega^2} \left( 1 \pm 2 \frac{\omega_B}{\omega} |\cos \alpha| \right). \quad (13.6)$$

Здесь  $\omega_{\text{ср}}^2 = VT^{-3/2}N^2L$ , где  $L$  — толщина слоя (см. (12.21)). При написании формулы (13.6) учтено, что  $\tau_{1,2} = \mu_{1,2}L \simeq 2(\omega/c)\eta_{1,2}L$  и величина  $\eta_{1,2}$  получена путем разложения в ряд по степеням  $|\sqrt{u} \cos \alpha|$  выражения (13.4). Яркостная температура теплового тормозного излучения из слоя  $T_{\text{б}1,2} = T(1 - e^{-\tau_{1,2}})$  и на частотах  $\omega^2 \ll \omega_{\text{ср}}^2$  будет равна  $T$  для обоих типов волн. Степень поляризации излучения на этих частотах равна нулю. В области  $\omega^2 \gg \omega_{\text{ср}}^2$ , где слой становится оптически тонким,  $T_{\text{эф}1,2} \simeq T\tau_{1,2}$ . Поскольку  $\tau_1 > \tau_2$  (см. (13.6)), отсюда заключаем, что наложение магнитного поля на плазму увеличивает интенсивность тормозного излучения на необыкновенной волне, снижая одновременно излучение обыкновенной компоненты. Суммарная интенсивность  $I_\omega \propto T_{\text{б}1} + T_{\text{б}2}$  при этом не меняется (точнее, она возрастает в более высоком приближении по степеням  $|\sqrt{u} \cos \alpha|$ ). Поэтому частотный спектр излучения  $I_\omega(\omega)$  отличается от представленного на графике Рис. 42. Степень круговой поляризации излучения, выходящего за пределы источника, равна [3]:

$$\zeta_c = \frac{T_{\text{б}1} - T_{\text{б}2}}{T_{\text{б}1} + T_{\text{б}2}} \approx \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \approx 2 \frac{\omega_B}{\omega} |\cos \alpha|. \quad (13.7)$$

Эта формула позволяет оценить продольную компоненту магнитного поля  $B_0 |\cos \alpha|$  в источнике теплового тормозного излучения по измеренной степени круговой поляризации  $\zeta_c$ . Измерения при этом должны проводиться в той области частотного спектра  $\omega^2 \gg \omega_{cr}^2$ , где источник — оптически тонкий.<sup>104</sup>

Наложение более сильного магнитного поля на плазму ( $|\sqrt{u} \cos \alpha| \geq 1$ ) может заметно изменить характер выходящего за ее пределы теплового тормозного излучения, Здесь, однако, нельзя обойтись без численных расчетов оптической толщины источника, интенсивности и поляризации излучения. Для конкретных условий короны и хромосферы над пятнами такие расчеты были проведены в [284, 285].

В сильных магнитных полях белых карликов и нейтронных звезд становится весьма существенным также влияние этих полей на характер межчастичных столкновений и, как следствие, на величину эффективной частоты столкновений  $\nu_{ei}$ . Этим влиянием можно пренебречь при условии

$$r_B \gg D \gg r_s, \quad (13.8)$$

т.е. при

$$\omega_B \ll \omega_L. \quad (13.9)$$

Здесь  $r_s \simeq e^2/\kappa T$  — эффективный прицельный параметр для электрона в кулоновском поле иона (см. раздел 12.1),  $r_B = v_{\perp}/\omega_B \simeq v_T/\omega_B$  — гирорадиус тепловых электронов,  $D \simeq v_T/\omega_L$  — дебаевский радиус (1.4),  $v_T = \sqrt{\kappa T/m_e}$  — тепловая скорость электронов. Условие (13.8) становится очевидным, если принять во внимание, что дебаевский радиус в плазме играет роль максимального прицельного параметра для электрона, сталкивающегося с экранированным ионом: на больших расстояниях  $r \gg D$  электрическое поле иона становится экспоненциально слабым (см. §1). Вклад в  $\nu_{ei}$  от далеких столкновений (в пределах дебаевского радиуса) учитывается появлением в  $\nu_{ei}$  логарифмического фактора (см. (12.13), (12.14)).

С ростом магнитного поля — в интервале

$$D \gg r_B \gg r_s, \quad (13.10)$$

где  $r_s \simeq e^2/\kappa T$  по-прежнему определяет величину эффективного сечения столкновения  $\pi r_s^2$  в плазме, — роль максимального прицельного

<sup>104</sup> Тепловое излучение из оптически толстого источника в вакуум будет неполяризовано ( $T_{b1} = T_{b2}$  и  $I_{\omega 1}^{(0)} = I_{\omega 2}^{(0)}$ ). Однако в самом источнике степень поляризации может отличаться от нуля за счет различия равновесных интенсивностей обыкновенных и необыкновенных волн в магнитоактивной плазме ( $T_{b1} = T_{b2}$ , но  $I_{\omega 1}^{(0)} \neq I_{\omega 2}^{(0)}$ ; см. (2.17)).

параметра переходит от  $D$  к гирорадиусу  $r_B$ . Неравенства (13.10) можно представить в виде

$$\omega_L \ll \omega_B \ll \frac{v_T}{r_s} = \frac{(\kappa T)^{3/2}}{e^2 m_e^{1/2}}. \quad (13.11)$$

В этом интервале эффективная частота столкновений имеет вид [286]:

$$\nu_{ei} = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{e^4 N A}{m_e^{1/2} (\kappa T)^{3/2}}, \quad (13.12)$$

где фактор

$$A = \ln(r_B/r_s) = \ln \left[ \frac{(\kappa T)^{3/2}}{\omega_B e^2 m_e^{1/2}} \right]. \quad (13.13)$$

И, наконец, в еще более сильных магнитных полях, где

$$D \gg r_s \gg r_B, \quad (13.14)$$

т.е. при

$$\omega_B \gg \frac{v_T}{r_s} = \frac{(\kappa T)^{3/2}}{e^2 m_e^{1/2}}, \quad (13.15)$$

величина  $\nu_{ei}$  радикально меняется. Здесь роль эффективного прицельного параметра играет то расстояние  $r_p$ , расположенное в интервале  $r_s \gg r_p \gg r_B$ , на котором электрон проходит мимо иона за время  $r_p/v_{\parallel}^{\max}$ , сравнимое с периодом вращения электрона в магнитном поле  $1/\omega_B$ . В этом случае при прохождении электрона на расстоянии  $r_{\min} \lesssim r_p$  около иона электрическое поле последнего существенно изменяется (в системе, связанной с поступательным движением электрона вдоль поля  $B_0$ ) за время меньше или порядка периода вращения электрона. Это ведет к существенному изменению поперечной компоненты скорости электрона, то есть к эффективному столкновению с ионом. При отыскании  $r_p$  следует учесть отличие продольной скорости  $v_{\parallel}^{\max}$  близ иона от величины  $v_{\parallel} \simeq v_T$  вдали от него. Из условия сохранения энергии

$$\frac{3}{2} \kappa T + \frac{e^2}{r_p} = \frac{m_e (v_{\parallel}^{\max})^2}{2}$$

следует, что  $(v_{\parallel}^{\max})^2 = 2e^2/m_e r_p$  (первым членом слева можно пренебречь благодаря неравенству  $r_p \ll r_s = e^2/\kappa T$ ). Тогда из условия

$1/\omega_B = r_p/v_{\parallel}^{\max}$  получаем:

$$r_p = \left( \frac{2e^2}{m_e \omega_B^2} \right)^{1/3}; \quad (13.16)$$

это дает оценку величины эффективной частоты столкновений в области (13.14), (13.15):

$$\nu_{ei} \sim \pi r_p^2 v_T N = \pi \left( \frac{2e^2}{m_e \omega_B^2} \right)^{2/3} \left( \frac{\kappa T}{m_e} \right)^{1/2} N. \quad (13.17)$$

Оценку  $\nu_{ei}$  можно сделать более корректно, экстраполируя формулы (13.12), (13.13) и (13.17) в область  $r_B \simeq r_s$ , где они выходят из областей их применимости (соответственно из области  $r_B \gg r_s$  и  $r_B \ll r_s$ ) и потребовав, чтобы кривые  $\nu_{ei}(B_0)$ , определяемые функциями (13.12), (13.13) и (13.17), пересекались при значении  $r_B/r_s$ , где логарифмический фактор  $A \simeq 1$ . Это можно сделать подбором численного множителя в оценочной формуле (13.17). Тогда получим уточненную по сравнению с (13.17) формулу для  $\nu_{ei}$  в сильных магнитных полях:

$$\nu_{ei} \simeq \frac{4\sqrt{2\pi}}{3e^{4/3}} \left( \frac{e^2}{m_e \omega_B^2} \right)^{2/3} \left( \frac{\kappa T}{m_e} \right)^{1/2} N. \quad (13.18)$$

( $e \simeq 2.7$  — основание натуральных логарифмов).

### 13.2. Циклотронное поглощение. Механизм теплового циклотронного излучения

Черенковское поглощение (затухание Ландау) в магнитоактивной плазме исследовано в [287] методом кинетического уравнения. Здесь мы не станем на этом останавливаться; отметим лишь, что соответствующие критерии слабости черенковского поглощения, основанные на простых физических соображениях, приведены в §5. Там речь шла о возможности пренебречь затуханием Ландау на плазменных волнах; те же критерии остаются справедливыми и для других типов волн в магнитоактивной плазме.

Циклотронное поглощение рассматривалось кинетически в работах [94, 288] (путем решения дисперсионного уравнения (4.41) с тензором (4.98)). Однако в большинстве случаев для расчета этого вида поглощения, непосредственно связанного с циклотронным излучением заряженных частиц, можно применить более простой способ, основан-

ный на законе Кирхгофа. Следуя ему, получим коэффициент резонансного поглощения на гармониках  $s \geq 2$  [230]:

$$\mu_{js} \approx \frac{a_{\omega j}}{I_{\omega}^{(0)}} = B_{js} \frac{s^{2s}}{2^s s!} \frac{\omega}{c} \beta_T^{2s-3} \exp(-Z_{js}^2), \quad (13.19)$$

где

$$B_{js} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} v \left[ n_j^{2s-4} \mathcal{T}_j^2 (1 + g_j)^2 \cos \vartheta_j \right]_{\omega=s\omega_B} \frac{\sin^{2s-2} \alpha}{|\cos \alpha|},$$

$$Z_{js} = \frac{\omega - s\omega_B}{\sqrt{2\omega n_j \beta_T \cos \alpha}}, \quad (13.20)$$

$$\beta_T = v_T/c = \sqrt{\kappa T/m_e c^2},$$

$\alpha$  — угол между волновым вектором  $k_j$  и магнитным полем  $B_0$ ,  $\vartheta_j$  — угол между  $k_j$  и групповой скоростью  $v_{gr} = d\omega/dk_j$ . Параметры  $g_j$ ,  $\mathcal{T}_j$  заданы формулами (5.38), (10.41), показатель преломления  $n_j$  — формулой (5.19). При переходе к (13.19) были использованы формулы (11.25) и (2.16). Условиями применимости полученного выражения для  $\mu_{js}$  на гармониках  $s \geq 2$  служат неравенства (11.27).

Благодаря экспоненциальному фактору величина  $\mu_{js}(\omega)$  становится весьма малой на частотах, не слишком близких к  $s\omega_B$  (при условии  $Z_{js}^2 \gg 1$ , т.е. в крыльях линии поглощения). Поэтому спектр эффективно поглощаемых частот образует ряд дискретных линий с центрами на частоте  $\omega = s\omega_B$ .

Выражение для  $\mu_{js}$  упрощается в достаточно разреженной плазме ( $v \ll 1$ ). При этом  $a_{\omega j}$  описывается формулой (11.29); коэффициент циклотронного поглощения  $\mu_{js}$  сохраняет вид (13.19), но теперь [230]

$$B_{js} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} v \left[ \frac{(1 + K_j \cos \alpha)^2}{1 + K_j^2} \right]_{\omega=s\omega_B} \frac{\sin^{2s-2} \alpha}{|\cos \alpha|}, \quad (13.21)$$

$$Z_{js} \equiv Z_s = \frac{\omega - s\omega_B}{\sqrt{2\omega \beta_T \cos \alpha}}.$$

Параметр  $K_j$  задан формулой (10.55); в случае квазипродольного распространения (5.24)  $K_j = \pm 1$ . Формулы (13.19), (13.21) по-прежнему справедливы лишь на гармониках  $s \geq 2$ . На первой гармонике  $s = 1$  ситуация иная. С помощью закона Кирхгофа и выражения для излучательной способности (11.26) нетрудно записать соответствующий коэффициент циклотронного поглощения на частоте  $\omega \simeq \omega_B$ . Однако



он будет справедлив лишь в крыльях линии поглощения (при  $Z_{j_1}^2 \gg 1$ ). Весь контур линии может быть получен методом кинетического уравнения, который приводит к следующему выражению для  $\mu_{j_1}$  [289]:

$$\mu_{j_1} = \Lambda_{j_1} \frac{\omega \beta_T}{c} |w(Z_{j_1})|^{-2} \exp(-Z_{j_1}^2), \quad (13.22)$$

где  $w(Z_{j_1})$  — функция Крампа (4.91) с аргументом

$$Z_{j_1} = (\omega - \omega_B) / \sqrt{2} \omega \beta_T n_j \cos \alpha,$$

а фактор

$$\begin{aligned} \Lambda_{j_1} = & \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{n_j}{v} (2n_j^2 \sin^2 \alpha + 2v - 2 - \sin^2 \alpha)^{-1} \\ & \times \left\{ n_j^4 (1 - v + \frac{7}{4} v \sin^2 \alpha) + n_j^2 \left[ (1 + v) \left( \frac{v}{2} - 1 \right) \sin^2 \alpha \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{v^2}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) - (1 - v) \left( 1 - \frac{v}{4} \right) (1 + \cos^2 \alpha) \right] \right. \\ & \left. + (1 - v) \left( 1 - \frac{v}{2} \right) + \frac{v^2}{4} (v - 2) \operatorname{tg}^2 \alpha \right\} \cos \alpha \cos \vartheta_j. \quad (13.23) \end{aligned}$$

При известной настойчивости можно убедиться, что в области  $Z_{j_1}^2 \gg 1$  кинетическое выражение для  $\mu_{j_1}$  совпадает с выражением для коэффициента поглощения, найденным с помощью закона Кирхгофа.

Приведенное выражение для  $\mu_{j_1}$  существенно упрощается для обыкновенной волны ( $j = 2$ ) в достаточно разреженной плазме, где  $\Lambda_{21}$  имеет вид<sup>105</sup>

$$\Lambda_{21} = \frac{v \sin^4 \alpha (1 + 2 \cos^2 \alpha)^2}{\sqrt{2\pi} (1 + \cos^2 \alpha)^3 |\cos \alpha|}, \quad (13.24)$$

При этом величина  $Z_{21}$  в (13.22) равна  $(\omega - \omega_B) / \sqrt{2} \beta_T \omega \cos \alpha$ . Выражение для коэффициента поглощения необыкновенной волны на первой гармонике в плазме с  $v \ll 1$  будет сложнее, так как для нее здесь  $n_1^2 \rightarrow \infty$  (без учета теплового движения). Характер поглощения обыкновенных и необыкновенных волн на гирочастоте при квазипоперечном и строго поперечном распространении в плотной плазме исследован в [290].

<sup>105</sup> Предполагается, что  $v \ll 1$ , но критерий (10.60) еще выполнен.

Выше речь шла о циклотронном поглощении обыкновенных и необыкновенных волн. Однако в случае, когда частоты плазменного резонанса  $\omega_\infty$  (см. (5.23)) совпадают с одной из гармоник  $\omega = s\omega_B$  (т.е. наступает двойной плазменный резонанс), становится возможным циклотронное поглощение продольных плазменных волн, существующих в области  $\omega \approx \omega_\infty$ . Показатель преломления этих волн  $n_3$  определяется выражением (5.51), а коэффициент циклотронного поглощения — формулой (13.19), в которой теперь [72]

$$B_{js} = B_{3s} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} v (1-u) n_3^{2s-2} \frac{\sin^{2s} \alpha}{|\cos \alpha|} (1-u-v+uv \cos^2 \alpha)^{-1}, \quad (13.25)$$

$$Z_{js} = Z_{3s} = (\omega - s\omega_B) / \sqrt{2} \omega \beta_T n_3 \cos \alpha.$$

На всех гармониках, исключая самые низкие,  $s^2 \gg 1$ , и выражение для  $B_{3s}$  упрощается:

$$B_{3s} = \sqrt{\frac{\pi}{18}} \frac{n_{pl}^{2s-4}}{\beta_T^2} \frac{\sin^{2s} \alpha}{|\cos \alpha|}. \quad (13.26)$$

Здесь учтено, что при  $s^2 \gg 1$  параметр  $u \ll 1$  и показатель преломления плазменных волн  $n_3$  (5.51) сводится к выражению  $n_{pl} \approx \sqrt{1-v}/\sqrt{3}\beta_T$ , описывающему плазменные волны в изотропной среде. Для этих волн можно пренебречь сильным черенковским поглощением (затуханием Ландау), если величина  $1-v \ll 1$ . Последнее неравенство также принято во внимание при переходе от (13.19) к (13.26).

Все формулы, приведенные выше в этом разделе, справедливы в пределе плотной плазмы (10.60), который может быть выполнен и в случае, когда  $v \ll 1$ . В сильно разреженной плазме, где наряду с условием  $v \ll 1$  выполнено также неравенство (10.61), показатели преломления  $n_j \simeq 1$ . При этом циклотронное поглощение необыкновенной волны на первой гармонике определяется формулой

$$\mu_{11} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega}{c} \frac{\omega_L^2 (1 + \cos^2 \alpha)}{\omega^2 \beta_T |\cos \alpha|} e^{-Z_1^2}, \quad (13.27)$$

$$Z_1 = (\omega - \omega_B) / \sqrt{2} \omega \beta_T \cos \alpha,$$

которая может быть получена с помощью закона Кирхгофа из выражения (10.52) с учетом (10.62). Для обыкновенных волн при отыскании коэффициента циклотронного поглощения на гирочастоте следует учесть поправки к поляризационным коэффициентам (10.63), связанные с тепловым движением частиц плазмы. После этой операции

снова с помощью закона Кирхгофа получаем:

$$\mu_{21} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega}{c} \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \beta_T \frac{\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha (3 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{|W(Z_1)|^2 |\cos \alpha| (1 + \cos^2 \alpha)^3} e^{-Z_1^2}, \quad (13.28)$$

где  $W(Z_1)$  — функция Крампа (4.91). Справедливость формул (13.27) и (13.28) подтверждается также расчетами на базе кинетического уравнения, учитывающего вклад членов порядка  $b\beta_T^2$  в тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  (5.43) (см. подробнее [104, 291]). На гармониках  $s \geq 2$  в разреженной плазме по-прежнему можно использовать формулы (13.19), (13.21) с коэффициентами поляризации  $K_j$  в форме (10.55).

Далее, в плазме с анизотропией температур, где  $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$  и функция распределения электронов по импульсам определяется формулой (11.35), коэффициенты циклотронного поглощения имеют вид:

$$\mu_{11} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_L^2}{\omega_{Bc}} \beta_{T_{\parallel}}^{-1} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{|\cos \alpha|} e^{-Z_1^2}, \quad (13.29)$$

$$\mu_{21} = \frac{\omega_L^2}{\sqrt{2\pi}\omega_{Bc}} \beta_{T_{\parallel}} \frac{\sin^4 \alpha \cos^4 \alpha (3 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{|W(Z_1)|^2 |\cos \alpha| (1 + \cos^2 \alpha)^3} e^{-Z_1^2} \quad (13.30)$$

$$\mu_{js} (s \geq 2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_L^2}{\omega_{Bc}} \frac{\beta_{T_{\perp}}^{2s-2}}{\beta_{T_{\parallel}}} \frac{s^{2s-1}}{2^s s!} \frac{\sin^{2s-2} \alpha (1 + K_j \cos \alpha)^2}{|\cos \alpha| (1 + K_j^2)} e^{-Z_1^2}. \quad (13.31)$$

В термически изотропной плазме ( $T_{\perp} = T_{\parallel} = T$ ) эти формулы переходят в (13.27), (13.28) и (13.21) соответственно. Они могут быть получены из выражений для циклотронной излучательной способности в плазме с  $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$ , приведенных в §11 (см. (11.36)-(11.38)). Однако, теперь закон Кирхгофа в форме (8.36) неприменим; его следует заменить эквивалентным соотношением

$$a_{\omega j} = \mu_{js} \frac{\omega^2 \kappa T_{\perp}}{(2\pi)^3 c^2},$$

полученным в следующем §14 для  $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$  (см. (14.50)). Здесь (как и в (14.50)) учтено, что в разреженной плазме показатель преломления  $n_j \simeq 1$ , а угол между фазовой и групповой скоростью  $\vartheta_j = 0$ .

Сопоставляя формулы (13.27) и (13.28), мы видим, что в сильно разреженной плазме на гирочастоте (в области  $Z^2 \lesssim 1$ ) циклотронное поглощение обыкновенных волн значительно меньше, чем необыкновенных:  $\mu_{21} \sim \mu_{11} \beta_T^2$ . Слабость поглощения обыкновенных волн по

сравнению с необыкновенными объясняется отмеченным в §10 характером поляризации нормальных волн. В приближении (10.62), (10.63) поляризация необыкновенных волн совпадает, а поляризация обыкновенных волн противоположна поляризации циклотронного излучения электрона, движущегося по окружности в пустоте. Такой электрон излучает и поглощает, очевидно, только необыкновенные волны. Слабое излучение и поглощение обыкновенной моды, сравнимое с соответствующими эффектами на второй гармонике  $s = 2$ , появляется только благодаря тепловому движению электронов в плазме, наличие которого несколько меняет поляризацию обыкновенной моды по сравнению с (10.63).

При переходе к пределу плотной плазмы (10.60) поляризация обеих мод на гирочастоте резко меняется: они становятся непоперечными (появляется компонента электрического поля  $\mathbf{E}$  вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ ), причем в обеих модах вектор  $\mathbf{E}$  в плоскости, ортогональной магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ , описывает окружность, вращаясь в направлении, противоположном движению электрона. Это обстоятельство приводит к депрессии циклотронного излучения электрона на гирочастоте (см. §10), которая в результате снижает и циклотронное поглощение обеих мод на первой гармонике до уровня, характерного для второй гармонике гирочастоты [230].

Если разреженная плазма помещена в настолько сильное магнитное поле, что поляризация мод определяется на плазмой, а намагниченным вакуумом (это имеет место при условиях (5.85), (5.87)), то формулы для циклотронного поглощения существенно упрощаются. В этом случае коэффициенты циклотронного поглощения принимают вид [104]:

$$\mu_{1s} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{s^{2s}}{2^s s!} \frac{\omega}{c} \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \beta_T^{2s-3} \sin^{2s-2} \alpha |\cos \alpha| e^{-Z_s^2}, \quad (13.32)$$

$$\mu_{2s} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{s^{2s}}{2^s s!} \frac{\omega}{c} \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \beta_T^{2s-3} \frac{\sin^{2s-2} \alpha}{|\cos \alpha|} e^{-Z_s^2}, \quad (13.33)$$

где  $Z_s = (\omega - s\omega_B) / \sqrt{2}\omega\beta_T \cos \alpha$ . Приведенные формулы справедливы на всех гармониках  $s$ , начиная с первой, если мы имеем дело с равновесной плазмой, в которой  $\hbar\omega_B \ll \kappa T$ . Для произвольного отношения  $\hbar\omega_B / \kappa T$  формула для циклотронного поглощения получена в [223]:

$$\mu_{js} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_L^2 \omega_B a_j}{\omega^2 \beta_T c |\cos \alpha|} \frac{s^2}{s!} \left( \frac{\hbar\omega^2 \sin^2 \alpha}{2m_e c^2 \omega_B} \right)^{s-1} \frac{\text{sh}(\hbar\omega/2\kappa T)}{[\exp(\hbar\omega_B/\kappa T) - 1]^s}$$

$$\times \exp \left[ \frac{s\hbar\omega_B}{2\kappa T} - \frac{(\omega - s\omega_B)^2 - (\omega - s\omega_B)\hbar\omega^2/m_e c^2}{2\beta_T^2 \omega^2 \cos^2 \alpha} \right]. \quad (13.34)$$

Здесь  $a_j$  — поляризационный коэффициент; в намагниченном вакууме он равен  $\cos^2 \alpha$  для необыкновенной волны ( $j=1$ ) и единице для обыкновенной волны ( $j=2$ );  $\beta_T = \sqrt{\kappa T/m_e c^2}$  — параметр, характеризующий дисперсию электронов по продольным скоростям в магнитном поле  $B_0$  (и по поперечным скоростям в пределе  $\hbar\omega_B \ll \kappa T$ ). В классическом пределе  $\hbar\omega_B \ll \kappa T$  формула (13.34) переходит в (13.32), (13.33); в пределе квантованной плазмы  $\hbar\omega_B \gg \kappa T$  она приобретает следующий вид:

$$\mu_{js} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_L^2 \omega_B a_j}{\omega^2 \beta_T c |\cos \alpha|} \frac{s^2}{s!} \left( \frac{\hbar\omega^2 \sin^2 \alpha}{2m_e c^2 \omega_B} \right)^{s-1} \exp \left[ -\frac{(\omega - s\omega_B)^2 - (\omega - s\omega_B)(1 + \cos^2 \alpha)\hbar\omega^2/m_e c^2}{2\beta_T^2 \omega^2 \cos^2 \alpha} \right]. \quad (13.35)$$

Второй член в показателе экспоненты учитывает влияние эффекта отдачи на форму линии циклотронного поглощения. Для случая  $s=1$  аналогичная формула была получена в [293].

В плазме с  $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$  коэффициент резонансного циклотронного поглощения в системе “плазма + намагниченный вакуум” также описывается формулой (13.34). Однако теперь в ней параметр  $\beta_T = \sqrt{\kappa T_{\parallel}/m_e c^2}$  описывает дисперсию электронов по продольным скоростям, а величина  $T$  имеет смысл поперечной температуры  $T_{\perp}$  (см. также [54]).

Следует отметить, что в условиях, когда при переносе излучения циклотронное поглощение заменяется циклотронным рассеянием (этот вариант будет подробно проанализирован ниже в разделе 19.1), приведенные выше выражения для коэффициентов циклотронного поглощения в термически анизотропной плазме играют роль коэффициентов резонансного циклотронного рассеяния.

Сопоставим коэффициенты циклотронного и тормозного поглощения электромагнитных волн в космической плазме. Коэффициент циклотронного поглощения обыкновенных ( $s \geq 1$ ) и необыкновенных ( $s \geq 2$ ) волн в плазме с  $v \ll 1$  и под углами  $\alpha \sim 1$  ориентировочно можно оценить, считая

$$\mu_{2,s=1} \sim \frac{\omega}{c} v \beta_T, \quad \mu_{j,s \geq 2} \sim \frac{s^{2s}}{2^s s!} \frac{\omega}{c} v \beta_T^{2s-3} \quad (13.36)$$

(см. (13.19), (13.21) и (13.22), (13.24)). При этом  $\mu_{2,s=1} \sim \mu_{j,s=2}$  вследствие слабого излучения электронов на гирочастоте в магнитоактивной плазме (см. §10). Приведенные оценки  $\mu_{j,s}$  относятся к области частот в пределах линий поглощения  $Z_{j,s}^2 \leq 1$ ; в крыльях линий  $Z_{j,s}^2 \gg 1$  коэффициенты циклотронного поглощения становятся экспоненциально малыми. Далее, коэффициент тормозного поглощения при  $v \ll 1$  и  $|\sqrt{u} \cos \alpha| \ll 1$  равен

$$\mu_j^b = 2 \frac{\omega}{c} \eta_j \sim \frac{v \nu_{\text{eff}}}{c} \quad (13.37)$$

(см. (13.4)). Этих оценочных формул достаточно, чтобы убедиться в значении эффектов циклотронного поглощения в астрофизических условиях. Например, для первой и второй гармоник  $\mu_{j,s} \sim \omega v \beta_T / c$  и, следовательно,

$$\frac{\mu_{j,s=1,2}}{\mu_j^b} \sim \frac{\omega \beta_T}{\nu_{\text{eff}}} \quad (13.38)$$

В солнечной короне  $\beta_T \sim 10^{-2}$ ,  $\nu_{\text{eff}} \sim 10 \text{ с}^{-1}$  и на частотах  $\omega \sim 2\pi \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$  ( $\lambda \sim 30 \text{ см}$ ) это отношение порядка  $6 \cdot 10^6$ . Таким образом, в корональной плазме коэффициент циклотронного поглощения близ частот  $\omega \approx \omega_B$ ,  $2\omega_B$  в миллионы раз превышает коэффициент поглощения из-за соударений [116, 256].

Циклотронное поглощение плазменных волн еще сильнее: оно примерно в  $\beta_T^{-2s+2}$  раз превышает соответствующее поглощение электромагнитных волн. В этом нетрудно убедиться, обратившись к формулам (13.19), (13.20) и (13.26); из них следует, что при  $u \ll 1$  и  $1 - v \ll 1$  коэффициент циклотронного поглощения электромагнитных волн

$$\mu_{1,2} \sim (s^{2s} / 2^s s!) (\omega/c) n_{1,2}^{2s-4} \beta_T^{2s-3},$$

а коэффициент для плазменных волн

$$\mu_3 \sim (s^{2s} / 2^s s!) (\omega/c) (\beta_T n_{\text{pl}})^{2s-4} \beta_T^{-1}.$$

Однако в плазме с  $u \ll 1$  величина  $\beta_T n_{\text{pl}} \approx n_{1,2} = 1 - v$  и, следовательно, отношение  $\mu_3 / \mu_{1,2} \sim \beta_T^{-2s+2} \gg 1$ . Указанное обстоятельство связано с резонансными свойствами плазмы, благодаря которым излучение плазменных волн частицами происходит более эффективно, чем излучение электромагнитных волн. Циклотронное затухание плазменных волн в корональной плазме было привлечено в [292] для объяснения некоторых особенностей быстродрейфующих всплесков III типа,

а именно — полос поглощения на динамических спектрах этих всплесков.

Для того чтобы более определенно судить о влиянии циклотронного поглощения на генерацию и распространение электромагнитных волн в астрофизической плазме, следует учесть неоднородный характер магнитного поля. Если в однородном поле спектр циклотронного поглощения (зависимость  $\mu_{j_s}(\omega)$ ) состоит из последовательности отдельных “линий” на частотах  $\omega = s\omega_B$ , то в достаточно неоднородном поле спектр поглощения сглаживается. При этом циклотронное поглощение (и излучение) на данной частоте  $\omega$  будет происходить не во всем объеме, занятом плазмой (как это было в однородном случае), а в локальных слоях, где величина магнитного поля удовлетворяет соотношению  $\omega \approx s\omega_B = seB_0/m_e c$ . Оптическая толщина такого гирорезонансного слоя  $\tau_{j_s} = \int \mu_{j_s} dl$ . Аппроксимируя зависимость  $\omega_B(l)$  в пределах этого слоя линейной функцией, запишем разность  $\omega - s\omega_B(l)$  в виде

$$\omega - s\omega_B(l) = \frac{\omega l}{L_B}, \quad (13.39)$$

где  $L_B = \omega_B |dl/d\omega_B|$  — характерное расстояние, на котором существенно меняется магнитное поле вдоль луча. Интегрируя (с учетом (13.39)) коэффициент циклотронного поглощения  $\mu_{j_s}$  (13.19) по  $l$ , найдем оптическую толщину гирорезонансного слоя [230]:

$$\tau_{j_s} = \sqrt{2\pi} \frac{s^{2s}}{2^s s!} \frac{\omega}{c} \beta_T^{2s-2} n_j B_{j_s} L_B |\cos \alpha|, \quad (13.40)$$

где на гармониках  $s \geq 2$  фактор  $B_{j_s}$  по-прежнему задан выражением (13.20). В разреженной плазме  $v \ll 1$  этот фактор записывается в форме (13.21), причем в “вакуумном” приближении, т.е. в случае (10.61), формулу (13.21) можно применять и на первой гармонике. Если же критерий (10.60) не нарушен, оптическая толщина первого гирорезонансного слоя получается интегрированием (13.22) по  $l$ . Тогда, учитывая (13.39), получаем

$$\tau_{j_1} = \sqrt{2} \Lambda_{j_1} \frac{\omega L_B}{c} \beta_T^2 n_j |\cos \alpha| \int_{-\infty}^{\infty} |w(Z)|^{-2} \exp(-Z^2) dZ, \quad (13.41)$$

где интеграл равен  $\pi^{3/2}/2$ .

Размеры гирорезонансного слоя (по толщине вдоль  $l$ ) нетрудно оценить, учитывая, что величина  $\mu_{j_s}$  (13.19), (13.22) на фиксированной частоте  $\omega$  экспоненциально мала в тех областях плазмы, где  $Z_{j_s}^2 \gg$

1. Поэтому основной вклад в  $\tau_{js}$  вносит тонкий слой, расположенный близ поверхности, на которой  $\omega = s\omega_B$ ; в этом слое  $Z_{js}^2 = [(\omega - \omega_B)/\sqrt{2}\omega\beta_T n_j \cos \alpha]^2 \leq 1$ . Из соотношения (13.39) ясно, что последнее условие выполнено, если  $l \leq \sqrt{2}L_B\beta_T n_j |\cos \alpha|$ , т.е. линейная толщина слоя

$$L_{js} \approx 2\sqrt{2}L_B\beta_T n_j |\cos \alpha|. \quad (13.42)$$

Величина  $L_{js}$  не зависит от номера гирорезонансного слоя (номера гармоники)  $s$ , причем  $L_{js} \ll L_B$  за счет малости  $\beta_T n_j$  (см. (11.27)). Согласно (13.39) соседние гирорезонансные слои с номерами  $s$  и  $s+1$  располагаются на расстояниях порядка  $L_B/s$ ; поэтому слои не перекрываются, если  $L_{js} \ll L_B/s$ , т.е. при условии

$$2\sqrt{2}s\beta_T n_j |\cos \alpha| \ll 1. \quad (13.43)$$

Характер частотного спектра циклотронного поглощения в плазме с линейными размерами  $L$ , помещенной в неоднородное магнитное поле, будет зависеть от соотношения между  $L$ ,  $L_B$  и  $L_{js}$ . Если  $L \ll L_{js}$ , то спектр поглощения имеет “линейчатый” характер, отличающий плазму в однородном магнитном поле. В случае, когда  $L_{js} \ll L \ll L_B/s$ , “изрезанность” спектра  $\tau_j(\omega)$  сохраняется, хотя форма отдельных линий будет существенно зависеть от распределения магнитного поля по источнику. И, наконец, при условии  $L \gg L_B/s$ , когда в плазме на любой частоте располагается несколько гирорезонансных слоев, зависимость  $\tau_j(\omega)$  приобретает плавный характер. Конечно, в случае, когда гармоники перекрываются (т.е. при условии, обратном (13.43)), “линейчатость” спектра поглощения пропадает при любых соотношениях между  $L$ ,  $L_B$  и  $L_{js}$ .

Астрофизические аспекты циклотронного механизма излучения стали обсуждаться (если не говорить о еще более ранних попытках) в начале 50-х годов [294] в связи с обнаружением дециметрового радиоизлучения Юпитера, а также в [69]. Гипотеза о циклотронной природе дециметрового радиоизлучения Юпитера нуждалась в существовании довольно сильных магнитных полей на этой планете. В те годы величина магнитного поля Юпитера еще была неизвестна. Позднее было установлено, что его магнитное поле составляет лишь десятки гаусс (см. §1). Это обстоятельство сделало нереальным предположение о циклотронном механизме дециметрового излучения Юпитера. Однако, вполне возможно, что этот механизм (в его когерентной форме) эффективно действует на Юпитере, создавая более низкочастотное (а именно, декаметровое) радиоизлучение, хотя деталь-



ная картина процессов генерации декаметрового излучения Юпитера остается неясной. Активные исследования в этом направлении продолжают до сих пор [295, 296]. Что касается теории солнечного радиоизлучения, то здесь использование циклотронного механизма оказалось вполне успешным. Сначала была установлена существенная роль теплового циклотронного механизма в создании микроволнового радиоизлучения локальных источников на Солнце [116, 299–301]. Затем был оценен возможный вклад этого механизма в радиоизлучение магнитных Ар-звезд (которое до сих пор так и не обнаружено) и в радиоизлучение вспыхивающих звезд типа UV Кита [37, 297, 298]. Последующие исследования позволили судить о роли циклотронных эффектов в формировании частотных спектров астрономических объектов, обладающих сильным магнитным полем (оптических спектров магнитных белых карликов, спектров рентгеновских пульсаров и космических гамма-всплесков). Эти эффекты, однако, тесно связаны с циклотронным рассеянием, и их обсуждение мы отложим до главы 8.

Переходя более подробно к обсуждению теплового циклотронного механизма солнечного радиоизлучения, прежде всего отметим, что в активных областях короны и хромосферы, расположенных над солнечными пятнами, реализуется скорее всего условие  $L \gg L_B/s$ , где  $L$  — линейный размер плазмы,  $L_B$  — масштаб неоднородности магнитного поля,  $s$  — номер циклотронной гармоники. В соответствии со сказанным ранее, в этом случае в плазме на любой фиксированной частоте  $\omega$  располагается несколько гирорезонансных слоев, благодаря чему спектр циклотронного излучения приобретает, вообще говоря, плавный, сплошной характер.

Гирорезонансные уровни  $\omega = \omega_B, 2\omega_B, 3\omega_B \dots$  в магнитном поле униполярного пятна схематически изображены на Рис. 44. Из него ясно, что для заданной частоты  $\omega$  уровни, соответствующие меньшим гармоникам, располагаются ниже, в областях с более сильным магнитным полем. По мере уменьшения частоты  $\omega$  вся система уровней смещается вверх, где магнитное поле слабее.

Оптическую толщину гирорезонансных слоев, локализованных близ указанных уровней, нетрудно оценить, умножив коэффициент циклотронного поглощения  $\mu_{js}$  (13.36) на эффективную толщину слоя  $L_{js} \sim L_B \beta_T$  (см. (13.42)):

$$\tau_{2,s=1} \sim \frac{\omega}{c} v \beta_T^2 L_B, \quad \tau_{j,s \geq 2} \sim \frac{s^{2s}}{2^s s!} \frac{\omega}{c} v \beta_T^{2s-2} L_B. \quad (13.44)$$

Во внутренней короне  $N \sim 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $L_B \sim 10^9 \text{ см}$ ,  $\beta_T \sim 10^{-2}$  и на частоте

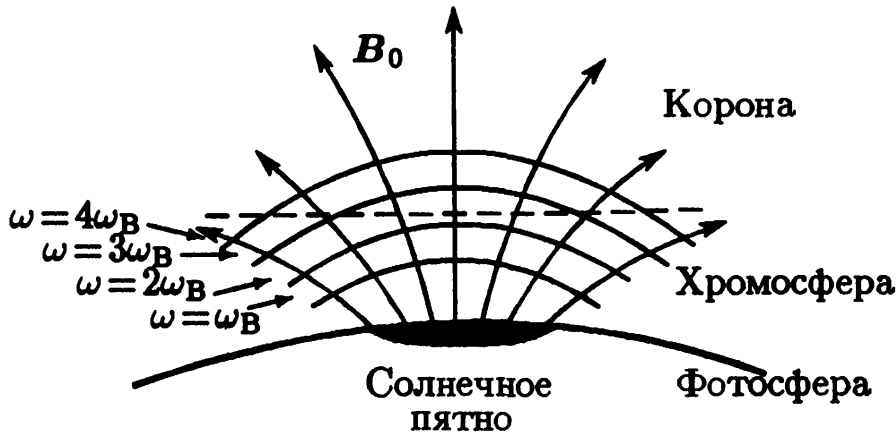


Рис. 44. Расположение гирорезонансных уровней в униполярном магнитном поле

тах  $\omega \sim 2 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  ( $\lambda \sim 10 \text{ см}$ ) получаем следующие оценки оптической толщины гирорезонансных слоев:  $\tau_{2,s=1} \sim 5 \cdot 10^2$ ,  $\tau_{j,s=2} \sim 10^3$ ,  $\tau_{j,s=3} \sim 1$ ,  $\tau_{j,s=4} \sim 10^{-3}$  и т.д. Хотя эти оценки очень грубые, они не оставляют сомнений в том, что гирорезонансное поглощение в короне вызывает резкое ослабление излучения, проходящего через слой  $\omega = \omega_B$ ,  $\omega = 2\omega_B$  и  $\omega = 3\omega_B$ , тогда как уровни  $s \geq 4$  остаются прозрачными для радиоволн. Это ослабление, конечно, сказывается лишь в областях с сильным магнитным полем: гармоникам  $s = 1, 2, 3$  на частотах  $\omega \sim 2 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  соответствуют магнитные поля  $B_0 \sim 3 \cdot 10^2 - 10^3 \text{ Гс}$ .

Заключение о роли первых трех гирорезонансных слоев на Солнце в общем подтверждается корректными расчетами оптической толщины  $\tau_{j,s}$  короны и хромосферы, основанными на формулах (13.40), (13.41) (см. в этой связи [284, 285, 299]). Эти расчеты показали, что в условиях солнечной короны и хромосферы для широкого интервала длин волн, включающего сантиметровой, дециметровый и метровый диапазоны, циклотронное поглощение необыкновенных волн сказывается главным образом при прохождении через слои, где  $\omega = 2\omega_B$  и  $\omega = 3\omega_B$ ; в этих слоях  $\tau_{j,s} \gtrsim 1$ . Напомним, что роль слоев  $\omega = \omega_B$  в поглощении необыкновенных волн незначительна, поскольку излучение на частотах  $\omega = \omega_B$  не выходит за пределы короны (см. раздел 6.2). Поглощение обыкновенных волн в областях  $\omega = s\omega_B$  происходит менее эффективно, чем необыкновенных, что в конечном счете связано с преобладанием последних в циклотронном излучении электронов (см. §10). Поэтому поглощение обыкновенной волны существенно только в слоях, где  $\omega \simeq \omega_B$  и  $\omega \simeq 2\omega_B$ ; на третьем гирорезонансном уровне, в отличие от поглощения необыкновенной компоненты, оно становится относительно слабым ( $\tau_{j,s} < 1$ ). Следует оговориться, что циклотронное поглощение играет столь существенную роль в слоях, отвечающих

низким гармоникам, лишь при не слишком малых углах  $\alpha$  между  $k_j$  и  $B_0$  (поскольку  $\tau_{j,s} \propto \sin^{2s-2}\alpha$  и для  $s \geq 2$  величина  $\tau_{j,s}$  резко уменьшается вместе с  $\alpha$ ). Зависимость  $\tau_{j,s}$  от угла  $\alpha$  приводит к тому, что при достаточно больших значениях  $\alpha$  слой  $\omega \approx 3\omega_B$  становится оптически толстым и для обыкновенных волн. Это обстоятельство не следует упускать из вида при детальном анализе циклотронного поглощения (и излучения) в короне и хромосфере (см. [3]). Мы в дальнейшем для простоты зависимость  $\tau_{j,s}$  от  $\alpha$  учитывать не станем.

Существование оптически толстых гирорезонансных слоев в активных областях над солнечными пятнами с сильным магнитным полем служит основой теории [299–301], объясняющей главные спектральные и поляризационные характеристики медленно меняющейся компоненты ( $S$ -компоненты) солнечного радиоизлучения действием теплового циклотронного механизма.

Яркостная температура излучения из гирорезонансных слоев легко находится благодаря малой протяженности  $L_{j,s}$  этих слоев вдоль луча (по сравнению с характерными расстояниями, на которых меняется кинетическая температура). Поэтому значения  $T_b$  определяются простыми формулами (8.42)–(8.44); из них следует, что с оптически толстым ( $\tau_{j,s} > 1$ ) гирорезонансным слоем связано излучение, яркостная температура которого совпадает с кинетической температурой  $T$  плазмы в этом слое. На высших гармониках, где уровни оптически тонкие  $\tau_{j,s} \ll 1$ , величина  $T_b \approx T\tau_{j,s} \ll T$ .

Из Рис. 44 и сказанного ранее ясно, что вклад слоев  $\omega \approx s\omega_B$ , где  $s = 2$  и  $s > 4$ , в необыкновенное излучение, выходящее из области короны и хромосферы над пятном, несуществен. Необыкновенные волны с уровня  $\omega \approx 2\omega_B$  не выходят за пределы короны, поглощаясь в расположенном выше, в области более слабого магнитного поля, оптически толстом слое  $\omega \approx 3\omega_B$ . Необыкновенное излучение из оптически тонких слоев  $\omega \approx 4\omega_B, 5\omega_B, \dots$  имеет низкую яркостную температуру  $T_b \ll T$ . Таким образом, при приближенном анализе механизма циклотронного излучения локальных источников над солнечными пятнами можно считать, что необыкновенная компонента создается в основном третьим гирорезонансным слоем, причем ее  $T_b$  близка к кинетической температуре этого слоя. Для обыкновенной компоненты будет несущественным (по тем же причинам, что и для необыкновенных волн) циклотронное излучение из слоев  $\omega \approx \omega_B, \omega \approx 3\omega_B, 4\omega_B, \dots$ , так что роль эффективно излучающего слоя здесь играет область, где  $\omega \approx 2\omega_B$ . Яркостная температура излучения при этом близка к кинетической температуре второго гирорезонансного слоя.

Частотный спектр теплового циклотронного излучения определяется распределением температуры  $T$  и магнитного поля  $B_0$  над солнечными пятнами. В интересующем нас плане существенным является то обстоятельство, что магнитное поле убывает с высотой, а кинетическая температура плазмы резко возрастает при переходе от хромосферы к короне. Над крупными пятнами с сильным магнитным полем эффективно излучающие уровни  $\omega \approx 2\omega_B$ ,  $3\omega_B$  в дециметровом диапазоне волн лежат в короне, в областях с примерно одинаковой температурой  $T_c \simeq (1 - 3) \cdot 10^6$  К. Поэтому яркостная температура локальной области над пятном в этом диапазоне  $T_b \approx T_c$ , а интенсивность излучения  $I_\omega(\omega) \propto \omega^2 T_b$ . В сантиметровом диапазоне рост интенсивности  $I_\omega$  с частотой сменяется ее уменьшением. Последнее связано с тем, что на высоких частотах указанные уровни переместятся в более холодную хромосферу. Соответственно  $T_b$  излучения резко уменьшается (быстрее, чем  $\omega^{-2}$ ); в результате интенсивность  $I_\omega(\omega) \propto \omega^2 T_b$  падает с ростом частоты. Указанный характер частотного спектра теплового циклотронного излучения (с максимумом интенсивности на волнах  $\lambda \sim 5 - 10$  см и постоянной яркостной температурой  $T_b \sim (1 - 3) \cdot 10^6$  К на более длинных волнах) соответствует спектру наблюдаемого радиоизлучения типичных локальных областей над солнечными пятнами — источников  $S$ -компоненты.

В рамках теплового циклотронного механизма хорошо объясняется значительная поляризация  $S$ -компоненты (с преобладанием необыкновенного излучения) на сантиметровых волнах и ее отсутствие в дециметровом диапазоне. Действительно, в сантиметровом диапазоне излучающие уровни  $\omega \approx 2\omega_B$  и  $\omega \approx 3\omega_B$  расположены в переходной области от хромосферы к короне с высоким градиентом кинетической температуры. Поскольку слой  $\omega \approx 3\omega_B$  локализован выше, чем  $\omega \approx 2\omega_B$ , яркостная температура его излучения будет больше, нежели  $T_b$  из второго гирорезонансного слоя. Поэтому в сантиметровом диапазоне излучения  $S$ -компоненты станет поляризованным, с преобладанием необыкновенных волн, испускаемых более “горячим” слоем  $\omega \approx 3\omega_B$ , в то время как обыкновенная составляющая излучения связана с более “холодным” уровнем  $\omega \approx 2\omega_B$ . По мере увеличения длины волны температуры уровней  $\omega \approx 2\omega_B$  и  $\omega \approx 3\omega_B$  выравниваются, так как оба они переходят в изотермическую корону. Благодаря этому происходит сильное уменьшение степени поляризации излучения локального источника в дециметровом диапазоне волн.<sup>106</sup>

<sup>106</sup> Подробнее о проблеме происхождения  $S$ -компоненты солнечного радиоизлучения см. [3, 284, 285].

Выше речь шла о микроволновом излучении с относительно гладким частотным спектром. Ясно, однако, что в сложных структурах магнитных полей на Солнце частотные спектры могут быть значительно сложнее и обнаруживать тонкую структуру, в частности, обеспечить появление отдельных циклотронных линий и высокочастотных уступов ("завалов" спектра в сторону высоких частот) на этих гармониках [302–304]. Обнаружение и исследование таких особенностей может служить эффективным способом диагностики плазмы в центрах активности на Солнце и прежде всего, величины магнитных полей и значений кинетической температуры корональной плазмы.

Данные рентгеновских наблюдений солнечных вспышек свидетельствуют о том, что в некоторых случаях интенсивное рентгеновское излучение возникает в малых ядрах, существующих короткое время (десяток секунд) и расположенных в вершинах вспышечных петель в корональной плазме, заполняющей магнитные силовые трубки. По современным представлениям, такие ядра могут служить областями энерговыделения, обеспечивающего весь последующий сценарий развития солнечной вспышки. Маленькие ядра горячей плазмы (в случае, если они занимают область с достаточно однородным магнитным полем), представляют собой наиболее простой объект, чье тепловое циклотронное излучение должно содержать хорошо дифференцированные линии на гармониках гирочастоты. При этом излучение в оптически толстых линиях с  $\tau_s > 1$  будет совпадать с интенсивностью равновесного излучения при температуре  $T$ , равной кинетической температуре плазмы в ядре. Таким образом, изучение радиоспектра этой плазмы позволит установить величину магнитного поля, температуру и плотность плазмы. Вместе с тем нет оснований ожидать, что частотный спектр интегрального излучения от всей горячей вспышечной петли содержит тонкую структуру типа циклотронных линий (из-за существенных вариаций магнитного поля вдоль петли). Однако и в этом случае при соответствующей методике наблюдений можно зарегистрировать циклотронные линии. Для этого необходимо принимать не все излучение петли в целом, а только излучение малого отрезка петли с квазиоднородным магнитным полем, вырезанное узкой диаграммой направленности приемной антенны.

Согласно одной из версий происхождения солнечных вспышек, мощное выделение энергии в начальной фазе вспышки может быть вызвано освобождением энергии магнитного поля в области нейтральных токовых слоев. Поэтому проблема обнаружения таких слоев особенно актуальна в физике Солнца. В этом отношении существенную

роль могут сыграть исследования спектров микроволнового излучения из горячих токовых слоев, так как это излучение также может содержать циклотронные линии. Появление тонкой структуры спектра в этом случае нетривиально, поскольку магнитное поле в токовом слое сильно изменяется от некоторого максимального значения  $B_0^{\max}$  на краю слоя до нуля в центре, а затем, изменив направление, снова нарастает до максимума на другом краю токового слоя. В указанных условиях дискретный спектр с линиями возникает за счет циклотронного излучения на периферии токового слоя, где магнитное поле сравнительно однородно. Циклотронное излучение из внутренней части слоя, где магнитное поле  $|B_0| < B_0^{\max}$  и существенно неоднородно, не может выйти за его пределы. Дело в том, что плазменный уровень  $\omega = \omega_L$ , ограничивающий возможность выхода излучения и распространения волн частоты  $\omega > \omega_L$  в плазме, располагается на периферии нейтрального токового слоя (см. подробнее [302]).

Обнаружение и исследование циклотронных линий в солнечном радиоизлучении требует совершенной спектрографической аппаратуры, объединенной с антенными системами высокой направленности. Некоторые свидетельства об обнаружении циклотронных линий на Солнце были получены в [305]; анализ и возможная интерпретация этих наблюдений содержатся в [306]. Однако, уверенное обнаружение циклотронных особенностей и использование их для диагностики корональной плазмы в активных областях на Солнце остается делом будущего.

В заключение этой главы сделаем замечание о гиросинхротронном поглощении в равновесной плазме. Соответствующие коэффициенты поглощения можно найти с помощью закона Кирхгофа (8.36), зная гиросинхротронную излучательную способность. Однако, формулы (11.56) и (11.57) характеризуют излучательную способность в обе моды. С их помощью можно найти только некий “суммарный” коэффициент поглощения, который фактически можно использовать только для ориентировочных оценок роли реабсорбции при расчетах гиросинхротронного излучения из протяженного источника. Корректные выражения для коэффициента гиросинхротронной реабсорбции  $\mu_j$  в равновесной плазме можно получить с помощью закона Кирхгофа, используя выражения для гиросинхротронной излучательной способности в каждую моду  $a_{\omega j}$ , полученные в [267].

## Глава 7

### Реабсорбция и усиление излучения в неравновесной плазме

Если распределение частиц в плазме отличается от равновесного, то изменение интенсивности излучения в большинстве случаев по-прежнему описывается уравнением переноса (8.2). При этом интенсивность излучения из однородного слоя толщиной  $L$  равна

$$I_{\omega} = \frac{a_{\omega}}{\mu_j} (1 - e^{-\mu_j L}) + I_{\omega 0} e^{-\mu_j L}.$$

Отличие от равновесной плазмы заключается в том, что теперь отношение  $a_{\omega}/\mu_j$  не совпадает с равновесной интенсивностью  $I_{\omega}^{(0)}$  (нарушен закон Кирхгофа) и, вообще говоря, может стать отрицательным за счет изменения знака коэффициента поглощения  $\mu_j$ . Если в неравновесной системе  $\mu_j < 0$ , то проходящее через нее излучение усиливается по закону  $I_{\omega} \propto e^{|\mu_j L|}$ , а собственное излучение слоя плазмы достигает величины

$$I_{\omega} \approx a_{\omega} L \frac{e^{|\mu_j L|}}{|\mu_j L|}.$$

(при условии, что оптическая толщина по модулю достаточно велика:  $|\mu_j L| \gg 1$ ). Указанная интенсивность значительно превосходит  $a_{\omega} L$  — суммарную мощность собственного излучения частиц, расположенных вдоль рассматриваемого луча. В соответствии с определениями, данными в §3, это означает, что в плазме действует когерентный механизм излучения. Последний следует отнести к мазерному типу, поскольку указанное повышение интенсивности осуществляется за счет усиления излучения (отрицательной реабсорбции<sup>107</sup>) в источнике. Для эффективного действия мазерного механизма необхо-

<sup>107</sup> Поглощение излучения принято называть реабсорбцией, если оно вызывается системой тех же частиц, которые создают это излучение.

димо, чтобы наряду с критерием  $\mu_j < 0$  было выполнено неравенство  $|\mu_j L| \gg 1$ .

Условия реализации критерия  $\mu_j < 0$  и величина коэффициента усиления  $(-\mu_j)$  существенным образом зависят от вида функции распределения частиц  $f_0(\mathbf{p})$  в неравновесной системе. Из сказанного ясно, что исследование мазерных механизмов излучения, которым посвящена настоящая глава, сводится прежде всего к расчету коэффициентов реабсорбции (затухания) в неравновесной плазме и к установлению критериев, обеспечивающих усиление излучения. Следующий этап состоит в изучении обратного воздействия усиливаемого излучения на системы излучающих частиц, которое проводится в дальнейшем на основе так называемой квазилинейной теории волновых процессов.

## §14. Метод кинетического уравнения и метод коэффициентов Эйнштейна

В физике плазмы исследование мазерных механизмов генерации ведется в основном двумя способами: классическим методом кинетического уравнения и элементарным квантовым методом коэффициентов Эйнштейна. В этом параграфе мы познакомимся с обоими указанными методами в общей форме, а в §15-§17 с их конкретными приложениями к мазерным механизмам в астрофизической плазме.

### 14.1. Метод кинетического уравнения. Усиление и конвективная неустойчивость

Метод основан на решении и исследовании совместной системы уравнений поля (4.19)-(4.22) и кинетического уравнения (4.76) (или, как принято говорить, на решении кинетического уравнения с самосогласованным полем). Его возможности были продемонстрированы в §4, посвященном линейной теории волн в стационарной однородной плазме. В этой теории, справедливой, строго говоря, для волн исчезающе малой амплитуды, предполагается, что невозмущенная (не зависящая от высокочастотных полей) часть функции распределения  $f_0(\mathbf{p})$  постоянна во времени и пространстве, а быстро осциллирующая часть  $f'_0(\mathbf{p})$  столь мала, что кинетическое уравнение может быть линеаризовано. Тогда задача отыскания коэффициента поглощения  $\mu_j$  и декремента  $\gamma_j$  сводится к решению дисперсионного уравнения (4.41), которое служит условием нетривиальности линейной системы уравнений поля (4.25), (4.26); в последнюю входит тензор диэлектрической



проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  (4.84), найденный с помощью кинетического уравнения в форме (4.79). Дисперсионное соотношение определяет (для волны, распространяющейся в заданном направлении  $\mathbf{k}/k$ ) связь между двумя комплексными величинами  $\omega$  и  $k_j$ . Однако, в зависимости от конкретной постановки задачи, обычно предполагается, что или  $k_j$  или  $\omega$  — действительное. В первом случае находят комплексную частоту

$$\omega \equiv \Omega - i\gamma = \varphi_1(k_j) \quad (14.1)$$

по действительному  $k_j$ , во втором — комплексное волновое число

$$k_j \equiv \frac{\omega}{c}(n_j + i\eta_j) = \varphi_2(\omega) \quad (14.2)$$

по действительной  $\omega$  (см. (4.55) и (4.56)).

Когда мы интересуемся проблемой устойчивости электромагнитных возмущений (т.е. проблемой изменения энергии этих возмущений во времени  $W(t)$ ), следует оперировать действительными значениями  $k_j$ , считая  $\text{Im } k_j = 0$ . Допустим, что в начальный момент  $t = 0$  в плазме возникло локальное возмущение (флуктуационного характера, например). Разложим электрическое поле в этом возмущении в интеграл Фурье по действительным значениям  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t = 0) = \int \mathbf{g}_1(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k}. \quad (14.3)$$

В последующие моменты времени каждая фурье-составляющая будет представлять собой нормальную волну, в которой  $\omega$  связана с  $\mathbf{k}$  соотношением (14.1). Тогда

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{g}_1(\mathbf{k}_j) \exp(i\mathbf{k}_j\mathbf{r} - i\omega t) d^3\mathbf{k}, \quad \omega = \varphi_1(\mathbf{k}_j), \quad (14.4)$$

причем, как следует из теории интегралов Фурье [307],

$$\int |\mathbf{E}|^2 dV = \int |\mathbf{g}_1|^2 e^{-2\gamma_j t} d^3\mathbf{k}. \quad (14.5)$$

Замечая, что интеграл слева пропорционален полной энергии возмущения  $W$ , приходим к выводу, что характер зависимости  $W(t)$  полностью определяется величиной и знаком декремента  $\gamma_j$ . Именно,  $W(t) \rightarrow 0$ , когда  $t \rightarrow \infty$ , если при всех  $\mathbf{k}_j$ , для которых  $\mathbf{g}_1(\mathbf{k}_j) \neq 0$ , декремент положителен:  $\gamma_j > 0$ . Это означает, что плазма устойчива

относительно возмущений, содержащих нормальные волны с указанными значениями  $k_j$ . Наоборот,  $W(t)$  будет неограниченно нарастать при  $t \rightarrow \infty$ , если среди значений  $k_j$ , для которых  $g_1(k_j) \neq 0$ , можно выделить область, где  $\gamma_j < 0$ . Последнее неравенство служит критерием неустойчивости плазмы относительно высокочастотных возмущений. Неограниченное возрастание  $W(t)$ , конечно, сохраняется только в линейном приближении, фактически же оно будет ограничено разного рода нелинейными эффектами (см. §15, §18).

По характеру поведения поля во времени и пространстве неустойчивость делится на два типа — конвективный и абсолютный [308]. Классификация проводится следующим образом. Пусть функция  $g_1(k_j) \exp(-i\varphi_1(k_j)t)$  ограничена при любых  $k_j$ . Тогда поле (14.4) описывает “пакет” в пространстве, в том смысле, что для всех бесконечно больших  $r$  поле  $E$  обращается в нуль.<sup>108</sup> Если пакет в пространстве является вместе с тем пакетом во времени, т.е.  $E(r, t) \rightarrow 0$  при  $r = \text{const}$  и  $t \rightarrow \pm\infty$ , то мы, по определению, имеем дело с конвективной неустойчивостью; в противном случае неустойчивость будет абсолютной. Если в системе реализуется конвективная неустойчивость (Рис. 45,а), то в каждой точке поле остается ограниченным и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к нулю (поскольку малые возмущения, возрастая, “выносятся” из области их появления). При абсолютной неустойчивости положение иное: энергия любого возмущения будет экспоненциально увеличиваться в той области, где оно возникло; возможно также, что по мере развития неустойчивости возмущение постепенно охватит всю систему (см. Рис. 45,б).

При исследовании усиления и поглощения в пространстве постановка задачи меняется. Теперь  $\text{Im} \omega = 0$ ; при этом условие находится коэффициент поглощения  $\mu_j = 2(\omega/c)\eta_j \cos \vartheta$  (см. (14.2)). Здесь снова пространственно-временное поведение одной нормальной волны не совпадает с характером изменения возмущения, представляющего собой набор нормальных волн вида

$$E(r, t) = \int g_2(\omega) \exp(ik_j r - i\omega t) d\omega, \quad k_j = \varphi_2(\omega). \quad (14.6)$$

Пусть  $g_2(\omega)$  — функция, ограниченная вместе с  $k_j = \varphi_2(\omega)$  при всех значениях  $\omega$ . Тогда в соответствии с леммой Римана поле  $E(r, t)$  (14.6) будет представлять собой временной пакет ( $E(r, t) \rightarrow 0$  при

<sup>108</sup> Это утверждение о поведении функции  $E(r, t)$  на бесконечности составляет содержание леммы Римана [307].

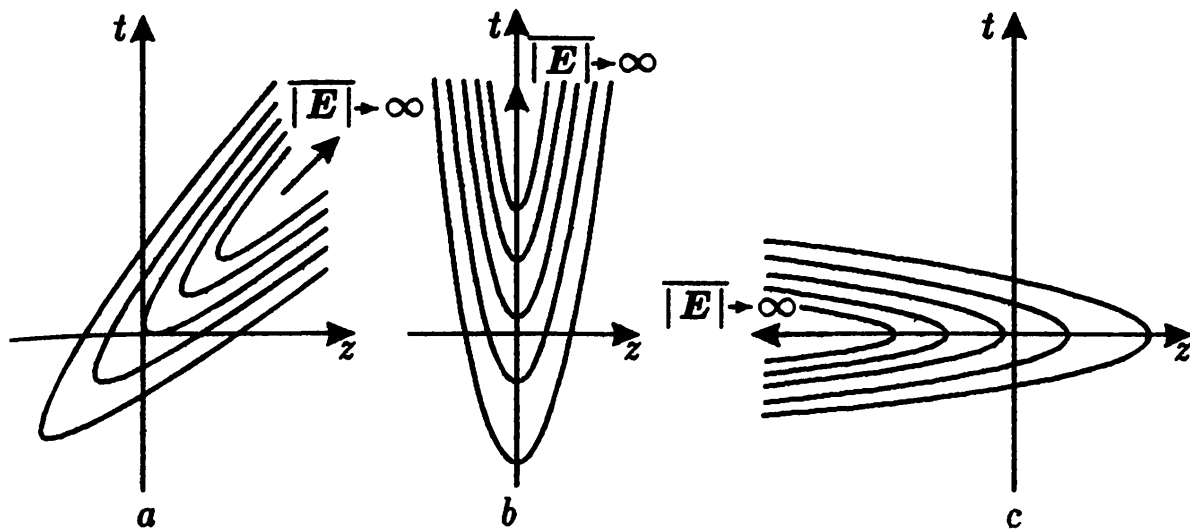


Рис. 45. Контуры равной напряженности электрического поля, усредненной по высокочастотным осцилляциям (“огibaющая” пакета  $|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|$ ) в случае: а, конвективной неустойчивости и усиления; б, абсолютной неустойчивости; с, “непропускания” волн

$r = \text{const}$  и  $t \rightarrow \pm\infty$ ). Если  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  является также пакетом в пространстве (т.е. если  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  стремится к нулю на бесконечности при  $t = \text{const}$ ), излучение называется усиливаемым или поглощаемым. Последнее зависит от того, возрастает или убывает величина  $|\mathbf{E}|^2$  в направлении вектора групповой скорости  $\mathbf{v}_{gr} = d\omega/d\mathbf{k}_j$ , характеризующего скорость перемещения пространственно-временного пакета (см. Рис. 45,а). Если же рассматриваемый временной пакет не является вместе с тем пакетом в пространстве, в системе имеет место “непропускание” волн ((Рис. 45,с)); примером служит временной пакет, содержащий частоты, для которых квадрат показателя преломления в плазме отрицателен:  $n_j^2(\omega) < 0$ .

Из данных определений и Рис. 45,а ясна тесная связь усиления с конвективной неустойчивостью (соответственно — поглощения с конвективной устойчивостью): оба эффекта описывают поведение одних и тех же пространственно-временных пакетов. Лишь к таким пакетам применимо понятие групповой скорости  $\mathbf{v}_{gr} = d\omega/d\mathbf{k}_j$  и коэффициента поглощения  $\mu_j$ ; вместе с тем только излучение в усиливающих (поглощающих) системах может быть описано уравнениями переноса интенсивности, представленными в §8.

Классификация нормальных волн в неравновесной плазме по характеру неустойчивости требует специального исследования дисперсионного уравнения, от вида которого зависит возможность (или невозможность) представления поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  сразу в виде временного и пространственного пакетов (14.4), (14.6). Соответствующие критерии

рии, позволяющие определить характер неустойчивости по форме дисперсионных кривых, были сначала предложены в [309]. Мы не станем излагать эти результаты, отсылая читателя к статье [309] и к монографии [72]. Здесь мы лишь отметим, что в неограниченной однородной плазме реализация конвективной и абсолютной неустойчивостей зависят от выбора системы отсчета. Рассматривая Рис. 45, нетрудно понять, что переход в систему отсчета, движущуюся со скоростью  $v_{gr}$ , превращает конвективную неустойчивость в абсолютную. При этом изменение плотности энергии в пространстве нельзя трактовать как усиление, что делает невозможным применять в новой системе отсчета уравнения переноса излучения. Однако все неустойчивости, которые будут обсуждаться в дальнейшем (см. §15-§17), рассматриваются в системах отсчета, которые обеспечивают их конвективный характер.

В ограниченной плазме разделение неустойчивостей на конвективную и абсолютную становится более определенным, поскольку выделяется привилегированная система отсчета, в которой границы плазмы неподвижны.<sup>109</sup> Если в указанной системе отсчета неустойчивость абсолютная, то плотность энергии высокочастотных колебаний в каждой точке плазмы неограниченно возрастает (без учета нелинейных эффектов). На языке физической электроники такое устройство называется генератором. Если же в ограниченной плазме имеет место конвективная неустойчивость, то система выступает в качестве усилителя. В ней коэффициент усиления отрицателен и плазма усиливает как падающее на нее, так и собственное излучение (“шумы”) отдельных частиц; плотность энергии излучения в каждой точке плазмы остается конечной даже в линейном приближении. В локальных источниках космического излучения обычно реализуется конвективная неустойчивость, обеспечивающая усиление излучения от отдельных частиц источника. Поэтому указанные источники можно рассматривать как сильно шумящие усилители; по терминологии, принятой в теоретической радиоастрономии, в этих объектах действует когерентный механизм излучения мазерного типа (см. §3). Отсюда, конечно, не следует, что системы с абсолютной неустойчивостью в космических условиях не представляют интереса.

Все сказанное ранее относилось к линейной теории усиления и неустойчивости в плазме, справедливой лишь при достаточно малых амплитудах высокочастотного поля. Это обстоятельство позволяет пре-

<sup>109</sup> В источнике с плавно неоднородным распределением концентрации выделяется система отсчета, в которой это распределение становится стационарным.

небредь влиянием амплитуды поля на невозмущенную часть функции распределения частиц  $f_0(p)$  и взаимодействием полей разных частот. Учет обратного влияния высокочастотного поля на неосциллирующую часть функции распределения  $\bar{f}(p)$  проводится в рамках квазилинейной теории. Согласно этой теории изменение  $\bar{f}(p, t)$  в пространстве импульсов имеет характер диффузии, “скорость” которой определяется плотностью энергии высокочастотных колебаний. В свою очередь инкремент и коэффициент усиления определяются по формулам линейной теории, в которой вместо фиксированной функции распределения  $\bar{f}(p)$  фигурирует теперь  $\bar{f}(p, t)$ . Нелинейное взаимодействие волн в квазилинейном приближении по-прежнему не учитывается.

Уравнения квазилинейной теории были получены путем усреднения кинетического уравнения и уравнений поля по высокочастотным осцилляциям. Соответствующая процедура довольно сложна (см., например, [72, 310]). Поэтому мы приходим к квазилинейным уравнениям, используя элементарный квантовый метод, основанный на схеме коэффициентов Эйнштейна; в этой схеме квазилинейные уравнения выступают как уравнения баланса населенностей квантовых состояний.

## 14.2. Метод коэффициентов Эйнштейна

Начиная с работ [283, 311], для исследования усиления и неустойчивости электромагнитных и плазменных волн в астрофизической плазме наряду с классическим методом кинетического уравнения широко используется также элементарный квантовый метод, основанный на схеме коэффициентов Эйнштейна. Этот метод оказался весьма полезным даже в той области, где задача о неустойчивости является, по существу, классической и не нуждается в квантовом рассмотрении. Хотя метод коэффициентов Эйнштейна и не обладает той общностью, которую обеспечивает метод кинетического уравнения, он благодаря своей простоте и наглядности позволил обнаружить новые виды неустойчивости волн в неравновесной плазме: кинетическую неустойчивость электромагнитных волн на гармониках гирочастоты [311], пучковую неустойчивость электромагнитных волн в области аномального доплер-эффекта [79] и синхротронную неустойчивость [312, 313].

Метод коэффициентов Эйнштейна основан на представлении о квантах излучения (в среде) с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\hbar k = \hbar(\omega/c) \cdot n_j s$ , где  $n_j$  — показатель преломления  $j$ -й нормальной волны, распространяющейся в направлении волнового вектора  $k_j = k_j s$ . Кванты излучения, относящиеся к электромагнитным волнам  $j = 1, 2$ , называют фотонами, кванты, соответствующие плазменным волнам  $j = 3$  —

плазмонами. Согласно квантовой теории Эйнштейна взаимодействие поля излучения и системы, состоящей из некогерентно излучающих центров с двумя состояниями ( $m$ ) и ( $n$ ),<sup>110</sup> характеризуется тремя элементарными процессами: спонтанным излучением, истинным поглощением и индуцированным излучением. Спонтанным излучением называется самопроизвольный (в отсутствие окружающего излучения) переход квантовой системы из “верхнего” состояния ( $m$ ) в “нижнее” состояние ( $n$ ), сопровождаемый испусканием кванта  $\hbar\omega$ . Классическим аналогом спонтанного излучения является процесс собственного излучения частицы. Спонтанное излучение характеризуется вероятностью  $A_m^n$ , определяемой так, чтобы величина  $N_m A_m^n d\omega d\Omega$  была равна числу квантов с частотами в интервале  $d\omega$  и волновыми векторами в элементе телесного угла  $d\Omega$ , испущенных из единичного объема в единицу времени ( $N_m$  — число частиц в единице объема, находящихся в “верхнем” квантовом состоянии ( $m$ )). Если частица совершает квазиклассическое движение, то согласно принципу соответствия [211] введенная только что квантовомеханическая вероятность спонтанного излучения связана с рассмотренной в §10 классической спектральной мощностью излучения  $P_{\omega\Omega}$  соотношением

$$P_{\omega\Omega} = \hbar\omega A_m^n. \quad (14.7)$$

Если система находится в поле излучения, то под воздействием последнего появляется дополнительная вероятность перехода ( $m$ )  $\rightarrow$  ( $n$ ) с испусканием кванта  $\hbar\omega$ , характеризующая процесс индуцированного излучения. Если же система находится в “нижнем” состоянии ( $n$ ), то, поглотив квант  $\hbar\omega$ , она может перейти в состояние ( $m$ ) (истинное поглощение). Индуцированное излучение и истинное поглощение характеризуются коэффициентами  $B_m^n$  и  $B_n^m$ , определяемыми так, чтобы величины  $N_m B_m^n I_\omega d\omega d\Omega$  и  $N_n B_n^m I_\omega d\omega d\Omega$  характеризовали число квантов в интервале частот  $d\omega$  в элементе телесных углов  $d\Omega$ , излученных или поглощенных в единицу времени под действием излучения с интенсивностью  $I_\omega$ .

Соотношение между коэффициентами Эйнштейна можно установить из условий баланса между указанными процессами в состоянии полного термодинамического равновесия. Стационарность системы излучающих частиц при этом будет обеспечена, если среднее число

<sup>110</sup>Говоря о двух состояниях ( $m$ ) и ( $n$ ), мы имеем в виду лишь те квантовые состояния, между которыми совершаются переходы с излучением и поглощением на данной частоте  $\omega$ .

переходов “вверх”  $(n) \rightarrow (m)$  и “вниз”  $(m) \rightarrow (n)$  будет одинаковым:

$$N_n B_n^m I_\omega = N_m A_m^n + N_m B_m^n I_\omega. \quad (14.8)$$

Однако в равновесном состоянии интенсивность  $I_\omega = I_\omega^{(0)}$ , где  $I_\omega^{(0)}$  определяется в области  $\hbar\omega \ll \kappa T$  формулой (2.16), а отношение населенностей  $N_n/N_m$  — формулой Больцмана

$$N_n/N_m = \exp[(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n)/\kappa T], \quad (14.9)$$

в которой  $\mathcal{E}_m$  и  $\mathcal{E}_n$  — энергии частиц в состояниях  $(m)$  и  $(n)$  соответственно. Для рассматриваемых нами состояний  $\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_n = \hbar\omega$ . В области Рэлея–Джинса  $\hbar\omega \ll \kappa T$  отношение населенностей

$$N_n/N_m = 1 + \hbar\omega/\kappa T. \quad (14.10)$$

Поскольку при  $T \rightarrow \infty$  равновесная интенсивность неограниченно увеличивается, из (14.8) следует, что  $N_n B_n^m = N_m B_m^n$ . Однако при  $T \rightarrow \infty$  населенности выравниваются:  $N_n = N_m$  (см. (14.10)) и, следовательно,

$$B_n^m = B_m^n. \quad (14.11)$$

Принимая во внимание (2.16), (14.10), (14.11), из (14.8) получаем

$$A_m^n = \frac{n_j^2 \hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2 |\cos \vartheta_j|} B_m^n. \quad (14.12)$$

Установленные Эйнштейном соотношения (14.11), (14.12) достаточно универсальны. Будучи непосредственными характеристиками отдельных излучающих частиц, они сохраняются и в тех случаях, когда и система частиц, и излучение перестают быть равновесными, несмотря на то, что предположение о термодинамическом равновесии между полем и частицами и условие  $\hbar\omega \ll \kappa T$  привлекалось для отыскания связи между  $A_m^n$ ,  $B_m^n$  и  $B_n^m$ . Это предположение не является необходимым, и та же связь между коэффициентами Эйнштейна в принципе может быть установлена для каждой конкретной излучающей системы путем соответствующих квантовомеханических расчетов (см. [211]). Однако такой способ сложен и практически не всегда может привести к цели.

Уменьшение интенсивности на отрезке луча единичной длины, вызванное переходами под действием излучения, равно, очевидно,

$$-\Delta I_\omega = \hbar\omega (N_n B_n^m - N_m B_m^n) I_\omega.$$

Коэффициент поглощения  $\mu_j$  определяется как относительное уменьшение интенсивности на единичной длине:

$$\mu_j = -\frac{\Delta I_\omega}{I_\omega} = \hbar\omega(N_n B_n^m - N_m B_m^n). \quad (14.13)$$

Отсюда ясно, что  $\mu_j$  зависит от разности числа переходов, сопровождаемых процессами “истинного” поглощения и индуцированного испускания. Принимая во внимание соотношения Эйнштейна (14.11), (14.12), из (14.13) получаем

$$\mu_j = \frac{8\pi^3 c^2 |\cos \vartheta_j|}{n_j^2 \omega^2} A_m^n N_m \left( \frac{N_n}{N_m} - 1 \right). \quad (14.14)$$

Следовательно, коэффициент поглощения в неравновесной системе пропорционален интенсивности спонтанного излучения (14.7) и фактору  $(N_n/N_m - 1)$ , зависящему от отношения числа частиц (“населенностей”) в верхнем ( $m$ ) и нижнем ( $n$ ) квантовых состояниях. В этих состояниях разность энергии частиц  $\mathcal{E}_m$  и  $\mathcal{E}_n$  равна энергии кванта излучения  $\hbar\omega$ . Применение формулы (14.14) к случаю равновесной системы, где отношение населенностей  $N_n/N_m$  определяется формулой (14.10), приводит к следующему выражению для коэффициента поглощения:

$$\mu_j = \frac{8\pi^3 c^2 |\cos \vartheta_j|}{n_j^2 \omega^2 \kappa T} \hbar\omega A_m^n N_m. \quad (14.15)$$

Однако в этом выражении справа стоит не что иное, как излучательная способность  $a_\omega = \hbar\omega A_m^n N_m$ , деленная на равновесную интенсивность  $I_\omega^{(0)}$ , т.е.  $\mu_j = a_\omega / I_\omega^{(0)}$ . Таким образом, при переходе к равновесным системам (с больцмановским распределением населенностей частиц) формула для  $\mu_j$  сводится, как и следовало ожидать, к выражению, основанному на законе Кирхгофа (8.36).

Формула (14.14) учитывает лишь переходы между двумя состояниями излучающих частиц. В случае большого числа подобных состояний, переходы между которыми сопровождаются испусканием и поглощением излучения на частоте  $\omega$  в направлении  $\mathbf{k}_j$ , для получения коэффициента поглощения следует просуммировать (14.14) по всем указанным переходам  $(m) \leftrightarrow (n)$ :

$$\mu_j = \frac{8\pi^3 c^2 |\cos \vartheta_j|}{n_j^2 \omega^2} \sum_{(m) \leftrightarrow (n)} A_m^n N_m \left( \frac{N_n}{N_m} - 1 \right). \quad (14.16)$$



Соответствующая излучательная способность системы будет равна

$$a_\omega = \hbar\omega \sum_{(m) \leftrightarrow (n)} A_m^n N_m. \quad (14.17)$$

Если

$$\sum_{(m) \leftrightarrow (n)} A_m^n N_m \left( \frac{N_n}{N_m} - 1 \right) > 0, \quad (14.18)$$

то коэффициент поглощения положителен и происходит реабсорбция излучения; в случае

$$\sum_{(m) \leftrightarrow (n)} A_m^n N_m \left( \frac{N_n}{N_m} - 1 \right) < 0, \quad (14.19)$$

величина  $\mu_j$  отрицательна, что соответствует отрицательной реабсорбции излучения в неравновесной системе.

Таким образом, при условии (14.19) проходящее через систему или испускаемое системой излучение усиливается (интенсивность нарастает в пространстве). Если вместе с тем учесть, что коэффициент поглощения связан с коэффициентом затухания во времени  $\gamma_j$ , соотношением  $\gamma_j = \mu_j v_{gr}/2$  (см. вступление к главе 6), становится ясным, что в случае (14.19) начальные электромагнитные возмущения в системе окажутся конвективно неустойчивыми (энергия этих возмущений нарастает со временем).

С элементарной квантовой точки зрения физический смысл усиления заключается в следующем. Поскольку коэффициент  $\mu_j$  пропорционален разности между интенсивностями “истинного” поглощения и индуцированного испускания, в случае  $\mu_j < 0$  последний процесс превалирует над “истинным” поглощением. Благодаря этому система частиц в среднем не отнимает энергию от излучения, а наоборот, добавляет ее. Сказанное обусловлено особым характером распределения излучающих частиц при условии (14.19), когда основной вклад в сумму по всем переходам, отвечающим излучению и поглощению на частоте  $\omega$ , дают переходы между теми состояниями, для которых имеет место “инверсия населенностей”: число частиц  $N_m$  в состоянии до испускания кванта больше соответствующего значения  $N_n$  в состоянии, куда переходит частица после испускания кванта  $\hbar\omega$ .

Из формул (14.7), (14.16) следует, что в неравновесной плазме каждому элементарному процессу излучения, характеризуемому определенной величиной  $A_m^n$ , может быть поставлен в соответствие опре-

деленный тип поглощения (реабсорбции). В частности, черенковскому, циклотронному и синхротронному излучениям отвечают черенковское, циклотронное и синхротронное поглощения, которые при определенных условиях, обеспечивающих выполнение критерия (14.19), становятся отрицательными. Поскольку коэффициент поглощения  $\mu_j$  связан с декрементом  $\gamma_j$  соотношением  $\gamma_j = \mu_j v_{gr}/2$ , каждому типу отрицательной реабсорбции соответствует свой тип неустойчивости, характеризуемый инкрементом  $-\gamma_j$ . Поэтому в неравновесной плазме существуют, вообще говоря, черенковская, циклотронная и синхротронная неустойчивости. Подобную классификацию неустойчивостей по типу элементарного процесса излучения отдельных частиц, имеющую глубокий физический смысл, мы положим в основу дальнейшего изложения проблемы неустойчивости и усиления в плазме. Эта общая классификация не зависит от вида функции распределения, обеспечивающей появление неустойчивости, и от типа нарастающих волн — двух характеристик, которые, тем не менее, включаются в наименование того или иного вида неустойчивости. Последнее вполне оправдано разнообразием форм и условий возникновения неустойчивостей. В качестве примера укажем на “пучковую” и “конусную” неустойчивости плазменных волн. Первое название определяет возбуждение волн в системе, которая состоит из потока частиц, пронизывающих равновесную плазму, второй термин относится к случаю, когда неустойчивость возникает в системе с функцией распределения по скоростям, характерной для частиц в магнитной ловушке (отсутствуют частицы с малыми пичч-углами в пределах конуса потерь).

Полученные выражения для коэффициента поглощения  $\mu_j$  (14.16) и излучательной способности  $a_\omega$  (14.17) позволяют найти (с помощью уравнения переноса (8.30)) изменение интенсивности излучения  $I_\omega$  вдоль луча в неравновесной плазме с заданным распределением ‘населенностей’ излучающих частиц по квантовым состояниям. Вместо уравнения переноса интенсивности (8.30), конечно, можно применять уравнение переноса для плотности энергии (8.28):

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} + v_{gr} \frac{dW_{\mathbf{k}}}{dl} = \alpha_{\mathbf{k}} - \beta_j W_{\mathbf{k}}, \quad (14.20)$$

в котором

$$\alpha_{\mathbf{k}} = a_\omega v_{gr} |\cos \vartheta_j| k_j^{-2}, \quad \beta_j = \mu_j v_{gr} = 2\gamma_j. \quad (14.21)$$

С учетом (14.16), (14.17) выражения для излучательной способности  $\alpha_{\mathbf{k}}$ , отнесенной к единичному объему в пространстве волновых

векторов, и для декремента  $\gamma_j$  примут следующий вид:

$$\alpha_{\mathbf{k}} = \hbar\omega \frac{v_{\text{gr}} |\cos \vartheta_j|}{k_j^2} \sum_{(m) \leftrightarrow (n)} A_m^n N_m, \quad (14.22)$$

$$\beta_j = \frac{8\pi^3 c^2 |\cos \vartheta_j| v_{\text{gr}}}{n_j^2 \omega^2} \sum_{(m) \leftrightarrow (n)} A_m^n N_m \left( \frac{N_n}{N_m} - 1 \right). \quad (14.23)$$

Здесь  $v_{\text{gr}} |\cos \vartheta_j| = |v_{\text{gr}, \mathbf{k}}| = c |\partial(\omega n_j) / \partial \omega|^{-1}$ .

### 14.3. Уравнение баланса населенностей

В случае, если населенности  $N_m$ ,  $N_n$  достаточно медленно меняются во времени и достаточно плавно — в пространстве (по сравнению с периодом  $2\pi/\omega$  и длиной волны  $2\pi/k_j$  соответственно), уравнение переноса (14.20) с  $\alpha_{\mathbf{k}}$  и  $\mu_j$  в форме (14.22), (14.23) можно по-прежнему использовать для определения спектральной плотности энергии излучения  $W_{\mathbf{k}}(l, t)$ . Распределение населенностей при этом может поддерживаться или изменяться по причинам, не имеющим непосредственного отношения к рассматриваемому излучению (например, за счет инжекции частиц в систему с заданным распределением по скоростям или вследствие воздействия на частицы квазистационарных электромагнитных полей). Однако наличие в плазме излучения с плотностью  $W_{\mathbf{k}}$  также меняет распределение частиц по состояниям благодаря процессам “истинного” поглощения и индуцированного испускания, вероятность которых пропорциональна  $W_{\mathbf{k}}$  (или  $I_{\omega}$ ; см. выше). Указанное изменение населенностей в плазме можно описать следующим образом [310].

Рассмотрим изменение населенности  $N_m$  состояния под действием излучения частоты  $\omega$ . Оно будет происходить за счет ухода частиц “вверх”, в состояние  $(q)$  при поглощении квантов  $\hbar\omega$  с импульсом  $\hbar\mathbf{k}_j$  (число таких переходов в единицу времени составит  $N_m B_m^q I_{\omega}$ ) и за счет ухода частиц “вниз”, в состояние  $(n)$  вследствие индуцированного излучения (число переходов  $N_m B_m^n I_{\omega}$ ). Вместе с тем населенность состояния  $(m)$  будет пополняться при индуцированном излучении с уровня  $(q)$  (число переходов  $N_q B_q^m I_{\omega}$ ) и истинного поглощения с уровня  $(n)$  (число переходов  $N_n B_n^m I_{\omega}$ ). В результате, с учетом (14.11), имеем

$$\frac{\partial N_m}{\partial t} = A_q^m N_q + B_q^m (N_q - N_m) I_{\omega} - [A_m^n N_m + B_m^n (N_m - N_n) I_{\omega}]. \quad (14.24)$$

Правая часть уравнения дополнена членом  $A_q^m N_q - A_m^n N_m$ , представляющим собой изменение населенности состояния  $(m)$  при спонтан-

ных переходах  $(q) \rightarrow (m)$  и  $(m) \rightarrow (n)$ . В величину  $\partial N_m / \partial t$ , конечно, вносят вклад все переходы с уровня  $(m)$  и на уровень  $(m)$ , сопровождаемые излучением или поглощением квантов с разной энергией  $\hbar\omega$  и направлениями импульса  $\hbar\mathbf{k}_j$ . Поэтому правую часть уравнения баланса (14.24) следует проинтегрировать по всем излучаемым частотам и направлениям волновых векторов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_m}{\partial t} = & \int \left[ A_q^m N_q + B_q^m (N_q - N_m) I_\omega \right] d\omega d\Omega \\ & - \int \left[ A_m^n N_m + B_m^n (N_m - N_n) I_\omega \right] d\omega d\Omega. \end{aligned} \quad (14.25)$$

Если распределение населенностей  $N_m$  в пространстве неоднородно, то в левую часть уравнения (14.25) вместо  $\partial N_m / \partial t$  следует подставить  $\partial N_m / \partial t + \mathbf{v} \partial N_m / \partial \mathbf{r}$  (ср. кинетическое уравнение для функции распределения частиц (4.76)). Приняв во внимание это обстоятельство и заменив коэффициенты Эйнштейна  $B_q^m$ ,  $B_m^n$  на  $A_q^m$ ,  $A_m^n$  с помощью соотношения (14.12), приходим окончательно к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_m}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial N_m}{\partial \mathbf{r}} = & \int (A_q^m N_q - A_m^n N_m) d\omega d\Omega \\ & + \int [A_q^m (N_q - N_m) - A_m^n (N_m - N_n)] \frac{8\pi^3 W_{\mathbf{k}}}{\hbar\omega} d\omega d\Omega, \end{aligned} \quad (14.26)$$

или, в несколько иной форме, к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_m}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial N_m}{\partial \mathbf{r}} = & \int \{ A_q^m [N_q (1 + N_{\mathbf{k}}) - N_m N_{\mathbf{k}}] \\ & - A_m^n [N_m (1 + N_{\mathbf{k}}) - N_n N_{\mathbf{k}}] \} d\omega d\Omega. \end{aligned} \quad (14.27)$$

В (14.26) учтено (в согласии с (2.13)), что интенсивность  $I_\omega$  равна  $W_{\mathbf{k}} k_j^2 |\cos \vartheta_j|^{-1}$ . Далее, в уравнении (14.27) фигурирует величина

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{8\pi^3 W_{\mathbf{k}}}{\hbar\omega}, \quad (14.28)$$

равная числу квантов излучения, приходящихся на одну нормальную волну (одну моду). Последнее следует из того, что  $W_{\mathbf{k}}$  и  $1/(2\pi)^3$  — соответственно энергия и число мод в единичном фазовом пространстве (единичном объеме координатного пространства и пространства волновых векторов; см. (2.2) и (2.14)), а их отношение  $W_{\mathbf{k}} (2\pi)^3$  характеризует энергию, приходящуюся на одну моду. Из (14.27) ясно, что

во многих случаях влиянием спонтанных процессов в перераспределении электронов по населенностям можно пренебречь по сравнению с индуцированным излучением, если число квантов  $N_k \gg 1$ .

Расчет распределения плотности энергии или интенсивности на основе уравнений переноса, в которых фигурируют коэффициент поглощения  $\mu_j$  и декремент  $\gamma_j$ , вычисленные по формулам (14.16), (14.23) для фиксированного распределения населенностей  $N_n$ ,  $N_m$ , соответствует линейной теории распространения волн в плазме с заданной стационарной функцией распределения частиц  $f_0(p)$ . Система (14.20), (14.26), описывающая изменение плотности энергии излучения  $W_k$  и перераспределение населенностей  $N_m$  под действием этого излучения, является основой теории, которая в физике плазмы известна под названием квазилинейной теории волновых процессов [317–319]. Конечно, в классической плазме пользоваться уравнениями, содержащими населенности и вероятности спонтанного излучения, не очень удобно; лучше записать их в форме, где вместо указанных величин фигурируют функция распределения по импульсам  $f_0(p)$  и мощность собственного излучения частиц  $P_{\omega\Omega}$ . Подобная операция будет проведена в следующих разделах этой главы при обсуждении различных типов усиления и неустойчивости неравновесной плазмы.

В случае локального термодинамического равновесия в плазме реализуется принцип детального равновесия (ср. с (14.8))

$$\begin{aligned} A_m^n N_m + B_m^n N_m I_\omega &= B_n^m N_n I_\omega, \\ A_q^m N_q + B_q^m N_q I_\omega &= B_m^q N_m I_\omega. \end{aligned} \quad (14.29)$$

Эти равенства приводят к обращению в нуль правой части уравнения (14.25) и, следовательно, к стационарности равновесной системы “плазма + излучение” ( $\partial N_m / \partial t = 0$ ).

Если излучение — неравновесное (его частотный спектр отличается от планковского, а угловой спектр неизотропен в изотропной среде с  $n_j \simeq 1$ ), то принцип детального равновесия (14.29) будет нарушен, и система станет нестационарной, т.е. излучение вместе с населенностями квантовых состояний будет меняться во времени. Однако при фиксированных внешних условиях система может эволюционировать к стационарному состоянию, в котором интегральное соотношение

$$\int \left[ A_q^m N_q + B_q^m (N_q - N_m) I_\omega \right] d\omega d\Omega = 0 \quad (14.30)$$

будет удовлетворено для любой пары квантовых состояний, между

которыми возникают радиационные переходы  $(q) \leftrightarrow (m)$ . Таким образом, аналогичное (14.30) равенство также должно быть выполнено для переходов  $(m) \leftrightarrow (n)$  в (14.25). Этого достаточно для обращения в нуль правой части уравнения (14.25) и, следовательно, для реализации стационарного состояния  $\partial N_m / \partial t = 0$ .

С учетом связи между коэффициентами Эйнштейна

$$B_q^m = A_q^m \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar \omega_{qm}^3}, \quad B_m^n = A_m^n \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar \omega_{mn}^3}.$$

в среде с  $n_j \simeq 1$  и  $\cos \vartheta_j \simeq 1$  (см. (14.12)) достаточное условие стационарного состояния (14.30) можно представить в виде

$$\frac{N_m}{N_q} = 1 + \left[ \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar \omega_{qm}^3} \int A_q^m I_\omega d\omega d\Omega \right]^{-1} \int A_q^m d\omega d\Omega. \quad (14.31)$$

Это отношение населенностей состояний  $(m)$  и  $(q)$  можно описать в рамках понятия об эффективной температуре  $T_{\text{eff}}$  излучающих частиц, если определить ее соотношением, аналогичным (14.10):

$$\frac{N_m}{N_q} = 1 + \frac{\hbar \omega_{qm}}{\kappa T_{\text{eff}}(q, m)}. \quad (14.32)$$

Тогда из (14.31) получаем, что

$$T_{\text{eff}}(q, m) = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega_{qm}^2 \kappa} \frac{\int A_q^m I_\omega d\omega d\Omega}{\int A_q^m d\omega d\Omega}, \quad (14.33)$$

или, что то же самое,

$$T_{\text{eff}}(q, m) = \frac{1}{\omega_{qm}^2} \frac{\int A_q^m T_b \omega^2 d\omega d\Omega}{\int A_q^m d\omega d\Omega}. \quad (14.34)$$

При переходе от было использовано соотношение (2.17) для яркостной температуры излучения  $T_b$  (при  $n_j \simeq 1$  и  $\cos \vartheta_j \simeq 1$ ). И, наконец, выражение для  $T_{\text{eff}}(q, m)$ , которое определяет отношение населенностей излучающих частиц в состояниях  $(q)$  и  $(m)$ , можно представить также в виде [183]

$$T_{\text{eff}}(q, m) = \frac{\oint_{4\pi} P_\Omega T_b d\Omega}{\oint_{4\pi} P_\Omega d\Omega}, \quad (14.35)$$

если мы примем во внимание, что вероятность спонтанного излучения  $A_q^m$  отличается от нуля (в заданном направлении  $\Omega$ ) только на

частоте  $\omega = \omega_{qm}$ , то есть  $A_q^m \propto \delta(\omega - \omega_{qm})$ , где  $\delta$  — дельта-функция, и мощность спонтанного излучения  $P_\Omega = \int \hbar \omega A_q^m d\omega$ .

Выражение (14.35) для эффективной температуры  $T_{\text{эфф}}$  получено в квазиклассическом пределе (14.32), когда  $\hbar \omega_{qm} \ll \kappa T_{\text{эфф}}$ . Для произвольного соотношения между  $\hbar \omega_{qm}$  и  $\kappa T_{\text{эфф}}$  понятие эффективной температуры следует вводить прямо для распределения Больцмана (14.9), не разлагая его в ряд (14.10):

$$\frac{N_m}{N_q} = \exp(\hbar \omega_{qm} / \kappa T_{\text{эфф}}). \quad (14.36)$$

В этом случае вместо (14.34), (14.35) мы получим более общую формулу для  $T_{\text{эфф}}$  [41]:

$$\kappa T_{\text{эфф}} = \frac{\hbar \omega_{qm}}{\ln(1 + x^{-1})}, \quad (14.37)$$

где

$$x = \frac{\oint_{4\pi} N_k \Psi(\Omega) d\Omega}{\oint_{4\pi} \Psi(\Omega) d\Omega}, \quad (14.38)$$

функция  $\Psi(\Omega)$  определяет диаграмму спонтанного излучения и  $N_k$  определяется формулой (14.28) с  $\omega = \omega_{qm}$ . При  $x \ll 1$  полученная формула для  $T_{\text{эфф}}$  переходит в прежнее выражение (14.34).

Пусть излучающая система имеет набор состояний  $(q)$  и  $(m)$  с эквидистантным энергетическим спектром (т.е. с постоянной разностью энергий  $\mathcal{E} = \hbar \omega_{qm}$  между соседними уровнями). Переходы между этими состояниями дают вклад в излучение и поглощение на одной и той же частоте  $\omega = \mathcal{E}/\hbar$ . Предположим, что мощность излучения на этой частоте при переходе  $(q) \rightarrow (m)$  может быть представлена как

$$P_\Omega = \varphi_{qm} \Psi(\Omega), \quad (14.39)$$

где фактор  $\Psi(\Omega)$  по-прежнему определяет диаграмму спонтанного излучения, которая одна и та же для всех переходов между соседними состояниями эквидистантного спектра. В этом случае распределение населенностей по состояниям описывается больцмановской формулой (14.9) с эффективной температурой

$$T_{\text{эфф}} = \frac{\oint_{4\pi} T_b(\omega, \Omega) \Psi(\Omega) d\Omega}{\oint_{4\pi} \Psi(\Omega) d\Omega}, \quad (14.40)$$

общей для всего эквидистантного спектра. Иными словами, распределение частиц по состояниям, которые активно взаимодействуют с

излучением на частоте  $\omega$ , имеет квазиравновесный характер с температурой  $T_{\text{eff}}$ , определяемой яркостной температурой  $T_b(\omega, \Omega)$  и диаграммой направленности излучения этих частиц  $\Psi(\Omega)$ . Для изотропной диаграммы  $\Psi(\Omega) = \text{const}$

$$T_{\text{eff}} = \frac{1}{4\pi} \oint_{4\pi} T_b(\Omega) d\Omega. \quad (14.41)$$

Так, например, если излучение от фотосферы звезды падает на расположенный вблизи нее тонкий плазменный слой, в котором интенсивность излучения мало меняется по мере прохождения сквозь слой, то в любой точке слоя

$$\oint_{4\pi} T_b(\Omega) d\Omega = \int_{2\pi} T_{\text{ph}} d\Omega = 2\pi T_{\text{ph}},$$

и, следовательно, величина  $T_{\text{eff}} = T_{\text{ph}}/2$ , где  $T_{\text{ph}}$  есть яркостная температура фотосферного излучения.

Применим теперь полученные соотношения к случаю взаимодействия излучения с разреженной нерелятивистской плазмой в магнитном поле (при  $n_j \simeq 1$  и без учета межчастичных столкновений). Циклотронное поглощение и излучение в такой плазме возникает на частотах (см. (11.22))

$$\omega = \frac{s\omega_B}{1 - \beta_{\parallel} \cos \alpha} \simeq s\omega_B, \quad (14.42)$$

где  $s = 1, 2, \dots$  — номер гармоники,  $\beta_{\parallel} = v_{\parallel}/c$ ,  $v_{\parallel}$  — скорость электрона вдоль поля  $\mathbf{B}_0$ , и  $\alpha$  — угол между направлением излучения  $\Omega$  и  $\mathbf{B}_0$ . Как отмечалось в §11, излучение при условии (5.42) возникает преимущественно на первой гармонике  $s = 1$  в необыкновенную моду. Мощность этого излучения

$$P_{\Omega_1}(s = 1) = \frac{e^2 \omega_B^2 \beta_{\perp}^2}{8\pi c} (1 + \cos^2 \alpha) \quad (14.43)$$

(см. формулу (10.58) и замечания к ней). Поскольку мощность излучения в обыкновенную моду на  $s = 1$  составляет  $P_{\Omega_2}(s = 1) \simeq \beta_{\perp}^2 P_{\Omega_1}(s = 1)$ , а на высших гармониках также мала по сравнению с  $P_{\Omega_1}(s = 1)$  (14.43) и быстро убывает с ростом номера гармоники  $s$ . мы пренебрегаем влиянием этих радиационных процессов на функцию распределения электронов. Возвращаясь к необыкновенному циклотронному излучению на первой гармонике, заметим, что в соответствии с (14.43),



диаграмма направленности одинакова для всех электронов

$$\Psi(\Omega) = 1 + \cos^2 \alpha. \quad (14.44)$$

Поэтому распределение электронов по состояниям, между которыми возникают радиационные переходы под действием необыкновенного излучения на частоте (14.42) при  $s = 1$ , является квазиравновесным (больцмановским) с эффективной температурой

$$T_{\text{эфф}} = \frac{\oint_{4\pi} T_b(\Omega)(1 + \cos^2 \alpha) d\Omega}{\oint_{4\pi} (1 + \cos^2 \alpha) d\Omega}. \quad (14.45)$$

Заметим, что циклотронные процессы испускания и поглощения фотонов сопровождаются изменением как поперечного ( $\Delta p_{\perp}$ ), так и продольного ( $\Delta p_{\parallel}$ ) импульсов (см. (10.25), (10.26)). Однако, в классическом пределе (при переходах между верхними уровнями Ландау) их отношение для нерелятивистских частиц

$$\frac{\Delta p_{\parallel}}{\Delta p_{\perp}} = \frac{p_{\perp}}{m_e c} \cos \alpha \ll 1. \quad (14.46)$$

Это позволяет пренебречь изменением продольного (вдоль  $\mathbf{B}_0$ ) распределения электронов при взаимодействии с излучением, если это распределение достаточно широкое ( $T_{\parallel} \gtrsim T_{\perp}$ ) [314]. В соответствии с (14.46), только распределение по поперечным скоростям формируется при циклотронных переходах: оно становится максвелловским с поперечной температурой  $T_{\perp}$ , определяемой выражением (14.45) для  $T_{\text{эфф}}$ :

$$T_{\perp} = \int_0^{\pi} T_b(\omega, \alpha)(1 + \cos^2 \alpha) \sin \alpha d\alpha. \quad (14.47)$$

Здесь имеется в виду яркостная температура  $T_b(\omega, \alpha)$  излучения, взаимодействующего с электронами, имеющими один и тот же импульс  $p_{\parallel}$ . Поэтому при интегрировании по  $\alpha$  частота меняется по закону (14.42) при  $s = 1$  и  $\beta_{\parallel} = \text{const}$ .

Формула (14.47) справедлива при условии  $\hbar\omega_B \ll \kappa T_{\perp}$ . Выражение для  $T_{\perp}$ , свободное от этого ограничения, может быть получено из (14.37):

$$\kappa T_{\perp} = \frac{\hbar\omega_B}{\ln(1 + x_1^{-1})}, \quad (14.48)$$

где

$$x_1 = \int_0^{\pi} \frac{3}{8}(1 + \cos^2 \alpha) N_{\mathbf{k}}^{(1)} \sin \alpha d\alpha \quad (14.49)$$

— усредненное по диаграмме циклотронного излучения число фотонов в необыкновенной моде  $N_{\mathbf{k}}^{(1)} = (2\pi)^3 W_{\mathbf{k}} / \hbar\omega$  ( $W_{\mathbf{k}}^{(1)}$  — плотность излучения в необыкновенной моде; см. (14.28)).

В случае, когда  $T_{\parallel} \neq T_{\perp}$ , закон Кирхгофа в форме (8.36), очевидно, будет нарушен. Однако, выражения для коэффициента поглощения (14.16) и излучательной способности (14.17) можно использовать для отыскания нового соотношения между ними, если учесть, что при  $T_{\parallel} \neq T_{\perp}$  отношение населенностей определяется формулой (14.32), в которой величина  $T_{\text{eff}} = T_{\perp}$  определяется излучением (см. (14.45)). В результате мы получаем формулу

$$a_{\omega} = \mu_j \frac{\omega^2 \kappa T_{\perp}}{(2\pi)^3 c^2}, \quad (14.50)$$

которая в плазме с  $n_j \simeq 1$  и  $\cos \vartheta_j \simeq 1$  аналогична прежней, но с заменой равновесной температуры  $T$  на  $T_{\perp}$ .

Выше мы рассматривали разреженную плазму, в которой влияние намагниченного вакуума на поляризацию мод несущественно. В случае, когда это влияние становится определяющим (см. критерий (5.85)), населенности уровней Ландау будут определяться не только необыкновенным излучением на гармонике  $s = 1$ , но и обыкновенной компонентой излучения на той же гармонике (влиянием высших гармоник в нерелятивистской плазме остается слабым при сравнимых уровнях излучения на первой и высших гармониках гирочастоты). В этом случае поперечная температура электронов определяется интенсивностью обеих мод на первой гармонике:

$$\kappa T_{\perp} = \frac{\hbar\omega_B}{\ln \left[ 1 + (x_1 + x_2)^{-1} \right]}, \quad (14.51)$$

где

$$\begin{aligned} x_1(p_{\parallel}) &= \int_0^{\pi} \frac{3}{8} N_{\mathbf{k}}^{(1)}(p_{\parallel}, \alpha) \sin \alpha d\alpha \\ x_2(p_{\parallel}) &= \int_0^{\pi} \frac{3}{8} N_{\mathbf{k}}^{(2)}(p_{\parallel}, \alpha) \cos^2 \alpha \sin \alpha d\alpha \end{aligned} \quad (14.52)$$

— усредненные по диаграмме направленности числа фотонов на первой гармонике для необыкновенной и обыкновенной мод, соответственно [54, 315].

Больцмановское распределение по поперечным скоростям электронов в поле излучения было получено выше без учета влияния межча

стичных столкновений на вид функции распределения (т.е. на распределение электронов по уровням Ландау). Влияние столкновительных переходов между этими уровнями можно описать в “приближении времени релаксации”, предполагая, что благодаря столкновениям

$$\left(\frac{\partial N_m}{\partial t}\right)_{\text{ст}} = -\nu_{\text{eff}}(N_m - N_m^{(0)}). \quad (14.53)$$

Здесь  $\nu_{\text{eff}}$  — эффективное число столкновений, выражения для которого приведены в главе 6,

$$N_m^{(0)} = N \left(1 - e^{-\hbar\omega_B/\kappa T_{\parallel}}\right) e^{-m\hbar\omega_B/\kappa T_{\parallel}} \quad (14.54)$$

— населенности, соответствующие равновесному распределению по поперечным скоростям с  $T_{\perp} = T_{\parallel}$ ,<sup>111</sup> а  $N = \sum_{m=0}^{\infty} N_m$  — концентрация электронов в плазме. Если включить в правую часть уравнения (14.25) (и соответственно в уравнение стационарного состояния (14.30)) член вида (14.53), то можно получить следующее стационарное (но неравновесное) распределение населенностей по уровням Ландау под действием столкновений и излучения в необыкновенной моде на гирочастоте [41]:

$$N_m = \frac{N}{1+x_1} \left\{ 1 - \epsilon \ln \frac{1 + \kappa T_{\parallel} / \hbar \omega_B}{1 + x_1} \right\} \left( \frac{x_1}{x_1 + 1} \right)^m + \frac{\epsilon}{x_1 + 1} \sum_{q=1}^m \left( \frac{x_1}{x_1 + 1} \right)^{m-q} \frac{1}{q} \left[ e^{-q\hbar\omega_B/\kappa T_{\parallel}} - \left( \frac{x_1}{x_1 + 1} \right)^q \right]. \quad (14.55)$$

Здесь  $m$  и  $q$  — номера уровней Ландау, частота перехода  $\omega_{mq} \simeq \omega_B$  и параметр

$$\epsilon = \nu_{\text{eff}}/A, \quad (14.56)$$

где

$$A = \frac{A_m^{m-1}}{m} = A_1^0 = \frac{4}{3} \frac{e^2 \omega_B^2}{m_e c^3} \quad (14.57)$$

— вероятность спонтанного перехода между низшими уровнями Ландау, сопровождаемого циклотронным излучением. Таким образом,

<sup>111</sup> Предполагается, что величина продольной температуры  $T_{\parallel}$  остается постоянной. Она фиксирована, например, вследствие столкновений с ионами и продольного ускорения (нагрева) электронов.

параметр  $\epsilon$  представляет собой отношение характерного времени циклотронного излучения к времени свободного пробега электрона; в численном выражении этот важный параметр равен

$$\epsilon = 1.25 \cdot 10^{10} N B_0^{-2} T_{\parallel}^{-3/2}. \quad (14.58)$$

В этой формуле использовано выражение для  $\nu_{\text{eff}} = \nu_{ei}$  в форме (12.12) с кулоновским логарифмом (12.14), справедливым при  $T \gg 4 \cdot 10^5$  К. При этом величина логарифма была принята равной 10, что приблизительно справедливо при  $T \sim 10^7$  К и  $N \sim 10^9 - 10^{13} \text{ см}^{-3}$ . В сильных магнитных полях следует учитывать их влияние на величину  $\nu_{\text{eff}}$  (см. §13); в формуле (14.58) это обстоятельство не принималось во внимание). Отметим также, во избежание недоразумений, отличие параметра  $\epsilon$  (14.56) от диэлектрической проницаемости изотропной плазмы  $\epsilon$  (см. (4.17)).

Формула (14.55) получена при условиях, когда  $\epsilon \ll 1$  и влияние столкновений на вид функции распределения по поперечным скоростям относительно мало (предел “бесстолкновительной плазмы”). В случае  $\epsilon \gg 1$  роль столкновений становится определяющей; в этом случае присутствие излучения с  $T_b \lesssim T$  не искажает вид функции распределения, которая станет близка к равновесной:  $T_{\perp} \simeq T_{\parallel} = T$  (предел “столкновительной плазмы”). Случай произвольного  $\epsilon$  проанализирован в [316]; соответствующее распределение приведено в главе 8.

В активных областях солнечной короны (при  $T_{\parallel} \simeq T \sim 10^6$  К,  $N \simeq 10^9 \text{ см}^{-3}$  и  $B_0 \simeq 10^2$  Гс) параметр  $\epsilon \simeq 10^6$  много больше единицы и, следовательно, излучение на гирочастоте не приводит к существенной анизотропии функции распределения электронов:  $T_{\perp} \simeq T_{\parallel}$ . Та же ситуация реализуется и на магнитных Ар-звездах в полях  $B_0 \simeq 10^4$  Гс. Однако, на магнитных белых карликах и нейтронных звездах условия иные. Так, для  $T_{\parallel} \sim 10^6$  К и  $B_0 \sim 10^8$  Гс (магнитные белые карлики) параметр  $\epsilon \ll 1$  в плазме с электронной концентрацией  $N \ll 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , а для плазмы на нейтронных звездах с  $T_{\parallel} \sim 10^6$  К и  $B_0 \sim 10^{12}$  Гс параметр  $\epsilon \ll 1$  при электронной концентрации  $N \ll 10^{23} \text{ см}^{-3}$ . В соответствии со сказанным ранее, в плазменных образованиях на этих звездах роль столкновений в формировании поперечного распределения электронов по скоростям существенно меньше, чем излучения на гирочастоте. Это обстоятельство в стационарных условиях приводит, вообще говоря, к появлению анизотропии температур:  $T_{\parallel} \neq T_{\perp}$  (см. подробнее [41, 183]). Приведенные оценки  $\epsilon$  с помощью формулы (14.58) не учитывают влияния магнитного поля на величину  $\nu_{ei}$ . Однако оно может быть существенным на магнитных белых карликах

и нейтронных звездах, расширяя интервал параметров, при которых  $\epsilon \ll 1$ .

Полученные в этом разделе выражения для поперечной температуры электронов (14.48), (14.51) и распределения электронов по уровням Ландау (14.55), равно как и аналогичные выражения для произвольного  $\epsilon$ , будут использованы в главе 8 при обсуждении процессов переноса излучения в плазме с учетом резонансного циклотронного рассеяния.

Заметим, что выше при отыскании величины  $T_{\perp}$  мы пренебрегли пространственным переносом излучающих частиц в плазме. Этот перенос не учитывался в исходном уравнении (14.25), из которого было получено выражение (14.45) для  $T_{\text{eff}}$ . При неоднородно  $m$  распределении в пространстве это допустимо, если

$$l_{\perp} \gg v_{T_{\parallel}} t_c. \quad (14.59)$$

Здесь  $l_{\perp}$  — характерный размер неоднородности в распределении  $T_{\text{eff}}$ , величина  $v_{T_{\parallel}}$  есть тепловая скорость электронов вдоль магнитного поля,

$$t_c = A^{-1} \simeq 5.1 \cdot 10^8 B_0^{-2} \text{ s} \quad (14.60)$$

— характерное время циклотронных потерь. С учетом (14.60) условие (14.59) трансформируется в неравенство

$$l_{\perp} \gg 2 \cdot 10^4 T_{\parallel}^{1/2} B_0^{-2} \text{ см.} \quad (14.61)$$

В заключение сделаем несколько замечаний о пределах применимости схемы коэффициентов Эйнштейна и уравнений баланса населенностей (т.е. квазилинейной теории) к исследованию волновых процессов в классической плазме. При расчете коэффициента  $\mu_j$  и декремента  $\gamma_j$  следует помнить, что они относятся к системе, где реализуется усиление (реабсорбция) и тесно связанная с этими процессами неустойчивость (затухание) конвективного типа. Далее, указанные формулы для  $\mu_j$ ,  $\gamma_j$  вместе с вероятностью спонтанного излучения  $A_m^n$  относятся к одному определенному типу волн в системе. Поэтому в уравнении баланса населенностей (14.27) для отыскания  $\partial N_m / \partial t + v \partial N_m / \partial r$  следует просуммировать правую часть по всем типам нормальных волн, взаимодействующих с частицами в данном состоянии ( $m$ ).

В схеме коэффициентов Эйнштейна предполагается также, что все процессы излучения и поглощения происходят в системе (плазме) с заданными дисперсионными характеристиками, включая показатель

преломления  $n_j$ , групповую скорость  $v_{gr} = d\omega/dk_j$  и вектор поляризации  $e_j$  нормальных волн. Для этого необходимо, чтобы число “резонансных” частиц (т.е. частиц, совершающих переходы под действием излучения в системе) было мало по сравнению с числом остальных, “нерезонансных” частиц, формирующих указанные дисперсионные характеристики плазмы. В результате примесь резонансных частиц рассматривается как возмущение, приводящее к появлению поглощения (усиления) излучения.<sup>112</sup> Малость  $\mu_j$ ,  $\gamma_j$  по сравнению с  $k_j$  и  $\omega$  служит одним из критериев, определяющих допустимое содержание “резонансных” частиц в системе. Недостаточность указанного критерия ясна из того, что при большой ширине частотного спектра излучения в системе слишком много частиц станут “резонансными”, их перераспределение по состояниям под действием излучения может привести к заметному изменению дисперсионных характеристик системы. Последнее ограничивает допустимую ширину спектра излучения. Наконец, последним условием независимости дисперсионных характеристик служит требование достаточной малости плотности энергии излучения  $W = \int W_k d^3k$  по сравнению с плотностью кинетической энергии частиц плазмы. Это условие позволяет пренебречь энергией осцилляторного движения частиц в поле излучения при расчете дисперсионных характеристик плазмы.

Важной особенностью метода коэффициентов Эйнштейна вообще и уравнений баланса населенностей (квазилинейной теории) в частности является суммирование мощностей излучения при переходах разных частиц. Необходимым условием такой операции служит “некогерентность” начального состояния системы из частиц и излучения: хаотичность фаз нормальных волн разных частот и направлений и хаотичность фаз собственного (спонтанного) излучения разных частиц (последнее обеспечивается соответствующим выбором начальной невозмущенной функции распределения частиц в фазовом пространстве). Если ширина спектра излучения достаточно велика и каждая частица взаимодействует со многими некогерентными нормальными волнами в составе этого излучения, хаотичность фаз спонтанного излучения сохранится в процессе дальнейшей эволюции системы. Иными словами, указанные условия обеспечивают отсутствие группировки частиц в фазовом пространстве и выделения узкой группы нормальных волн в пространстве векторов  $k$  — эффектов, которые

<sup>112</sup> В этом отношении расчет  $\mu_j$  и  $\gamma_j$  по схеме коэффициентов Эйнштейна эквивалентен решению дисперсионного уравнения для нормальных волн методом возмущений (с действительными значениями  $\omega$  и  $k_j$  в качестве нулевого приближения).

вывели бы систему за пределы применимости квазилинейной теории.

Отметим, наконец, что в рассмотренной схеме учитывалось только квазилинейное взаимодействие излучения с частицами, но не принималось во внимание нелинейное взаимодействие между волнами. Возможность такого подхода оправдывается тем, что при достаточно малой плотности энергии излучения эффекты взаимодействия волна-частица пропорциональны  $W_k$ , тогда как взаимодействие волна-волна появляется лишь в более высоком приближении по степеням  $W_k$ . Здесь имеются в виду эффекты взаимодействия типа слияния и распадов волн, рассмотренные в §21, их вероятности пропорциональны квадрату плотности энергии излучения. Влияние этих эффектов на квазилинейную эволюцию системы с достаточно малой плотностью излучения  $W_k$  будет слабым. Соответствующие ограничения на величину  $W_k$  зависят от конкретного характера системы.

## §15. Черенковская неустойчивость

Среди различных мазерных механизмов, которые действуют (или могут действовать) в космической плазме, важную роль играет механизм усиления, связанного с черенковской неустойчивостью. Последняя служит эффективным способом возбуждения плазменных волн, что весьма существенно для “плазменного механизма” генерации космического радиоизлучения. Условия черенковской неустойчивости зависят от типа волн и вида функции распределения частиц в неравновесной системе. Мы начнем рассмотрение этой неустойчивости с простейшего варианта возбуждения плазменных волн в системе, состоящей из равновесной изотропной плазмы, пронизываемой потоком заряженных частиц.

### 15.1. Неустойчивость и усиление в системе “поток – плазма”

Если концентрация частиц в потоке  $N_S$  достаточно мала по сравнению с концентрацией основной плазмы  $N$ , то дисперсионные характеристики волн, распространяющихся в такой системе, будут определяться равновесной плазмой. Согласно §5 в такой плазме существуют поперечные электромагнитные и продольные плазменные волны. Однако для поперечных волн показатель преломления  $n_{el} < 1$  и эффект Вавилова-Черенкова отсутствует (см. §10); поэтому для этих волн

нет черенковского усиления и неустойчивости.<sup>113</sup> Последняя может реализоваться, однако, на плазменных волнах в области  $n_{\text{pl}}(\omega) > 1$ .

Для отыскания соответствующих критериев усиления и неустойчивости и конкретных выражений для коэффициента усиления  $(-\mu_j)$  и инкремента  $(-\gamma_j)$  применим метод коэффициентов Эйнштейна, изложенный в §14.

Согласно условию (10.21) плазменные волны в направлении  $\mathbf{k}$  излучаются частицами, проекция скорости которых на  $\mathbf{k}$  равна фазовой скорости волн:  $v_{\mathbf{k}} = v_{\text{ph}} = \omega/k$ . Если в состоянии до испускания плазмона с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\hbar\mathbf{k} = \hbar(\omega n_{\text{pl}}/c)(\mathbf{k}/k)$  проекция скорости частицы была  $v_{\mathbf{k}}^{(m)}$ , то после излучения частица перейдет в состояние  $v_{\mathbf{k}}^{(n)} = v_{\mathbf{k}}^{(m)} - \hbar\mathbf{k}/m$ . При этом поперечная (по отношению к направлению  $\mathbf{k}$ ) компонента скорости  $\mathbf{v}_{\perp}$  не изменится. Если ввести функцию распределения частиц потока по скоростям  $F_{\text{S}}(\mathbf{v}_{\perp}, v_{\mathbf{k}})$ , то населенности состояний  $(m)$  и  $(n)$  будут  $N_m = F_{\text{S}}(\mathbf{v}_{\perp}, v_{\mathbf{k}}^{(m)})$  и  $N_n = F_{\text{S}}(\mathbf{v}_{\perp}, v_{\mathbf{k}}^{(n)})$ . В случае, когда  $F_{\text{S}}$  мало меняется при изменении скорости  $v_{\mathbf{k}}$  на величину  $\hbar\mathbf{k}/m_e$ , разность населенностей  $N_m - N_n$  можно представить в виде

$$N_m - N_n \approx \frac{\partial F_{\text{S}}}{\partial v_{\mathbf{k}}} \frac{\hbar\mathbf{k}}{m_e}. \quad (15.1)$$

Подставив (15.1) и (14.7) в выражение для  $\mu_j$  (14.16) и заменив суммирование по всем переходам интегрированием по скоростям, получим

$$\mu = -\frac{8\pi^3}{\omega k m_e} \int P_{\omega\Omega} \frac{\partial F_{\text{S}}}{\partial v_{\mathbf{k}}} d^3v. \quad (15.2)$$

С учетом выражения для мощности черенковского излучения  $P_{\omega\Omega}$  (10.22) коэффициент поглощения примет такой вид:

$$\mu = -\frac{4\pi^2 e^2}{m_e \epsilon(\omega)} \int \frac{\partial F_{\text{S}}}{\partial v_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3v. \quad (15.3)$$

Однако интеграл по поперечным скоростям  $\int (\partial F_{\text{S}}/\partial v_{\mathbf{k}}) d^2v_{\perp}$  равен  $dF(v_{\mathbf{k}})/dv_{\mathbf{k}}$ , где  $F(v_{\mathbf{k}}) = \int F_{\text{S}}(\mathbf{v}_{\perp}, v_{\mathbf{k}}) d^2v_{\perp}$  — функция распределения по проекциям скорости  $v_{\mathbf{k}}$  на направление  $\mathbf{k}$ . В результате мы приходим к следующей формуле для коэффициента черенковского погло-

<sup>113</sup> В магнитоактивной плазме ситуация меняется: там показатель преломления электромагнитных волн может превышать единицу и черенковская неустойчивость становится возможной (для вистлеров, например).



щения в потоке частиц, пронизывающих плазму: (см. [283]).

$$\mu = - \frac{4\pi^2 e^2 v_{ph}^3}{3\omega m_e v_T^2} \left. \frac{dF(v_{\mathbf{k}})}{dv_{\mathbf{k}}} \right|_{v_{\mathbf{k}}=v_{ph}}. \quad (15.4)$$

Соответствующее выражение для декремента имеет вид

$$\gamma = \frac{1}{2} \mu v_{gr} = -2\pi^2 \frac{e^2 v_{ph}^2}{\omega m_e} \left. \frac{dF(v_{\mathbf{k}})}{dv_{\mathbf{k}}} \right|_{v_{\mathbf{k}}=v_{ph}}. \quad (15.5)$$

Здесь учтена связь между  $\mu$  и  $\gamma$ , указанная во введении к главе 6, и то обстоятельство, что для плазменных волн  $v_{gr} = 3v_T^2/v_{ph}$ .

Согласно (15.4), поток заряженных частиц в плазме будет поглощать продольные волны с фазовыми скоростями, для которых

$$v_{ph} \left. \frac{dF(v_{\mathbf{k}})}{dv_{\mathbf{k}}} \right|_{v_{\mathbf{k}}=v_{ph}} < 0 \quad (15.6)$$

и усиливать волны в том интервале фазовых скоростей, где

$$v_{ph} \left. \frac{dF(v_{\mathbf{k}})}{dv_{\mathbf{k}}} \right|_{v_{\mathbf{k}}=v_{ph}} > 0. \quad (15.7)$$

Вместе с тем рассматриваемая система останется устойчивой относительно возмущений типа плазменных волн в области (15.6), и станет неустойчивой в интервале фазовых скоростей (15.7).

Пусть теперь для определенности функция распределения  $F_S(v)$  имеет вид (11.17). Тогда

$$F(v_{\mathbf{k}}) = N_S \left( \frac{m_e}{2\pi\kappa T_S} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{-m_e (v_{\mathbf{k}} - v_S \cos \theta)^2}{2\kappa T_S} \right] \quad (15.8)$$

и при условии  $v_S \cos \theta \gg v_T$ , которое позволяет пренебречь черенковским затуханием в основной плазме, коэффициент поглощения (15.4) сводится к виду [217]

$$\mu = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\omega_{LS})^2 v_{ph}^3}{\omega v_T^2 v_{T_S}^3} (v_{ph} - v_S \cos \theta) \exp \left[ \frac{-(v_{ph} - v_S \cos \theta)^2}{2v_{T_S}^2} \right]. \quad (15.9)$$

Здесь

$$\omega_{LS}^2 = 4\pi e^2 N_S / m_e, \quad v_{T_S}^2 = \kappa T_S / m_e,$$

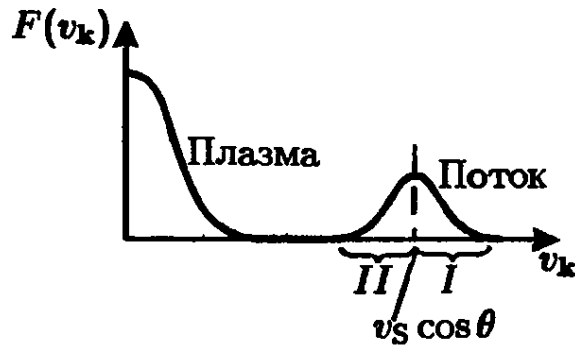


Рис. 46. Функции распределения по скоростям  $F(v_k)$  в системе “равновесная плазма + корпускулярный поток”: I – область поглощения, II – область усиления плазменных волн

через  $\theta$  обозначен угол между  $k$  и направлением потока  $v_S$ . Соответствующая черенковская излучательная способность для плазменных волн описывается формулой (11.18). Функция  $F(v_k)$  для потока и основной плазмы изображена на Рис. 46. В интервале I (для  $v_{ph} > v_S \cos \theta$ ) имеет место поглощение, а в интервале II (где  $v_{ph} < v_S \cos \theta$ ) — усиление плазменных волн. Последнее объясняется преобладанием процессов индуцированного излучения над истинным поглощением, что вполне естественно, так как благодаря положительному знаку производной  $dF/dv_k$  в этой области реализуется инверсия населенностей: число электронов в состоянии до испускания кванта  $\hbar\omega$  больше числа электронов в состоянии, куда переходит частица после акта излучения.

Посмотрим теперь, к каким результатам приводит исследование системы поток–плазма классическим методом — на основе дисперсионного уравнения для плазменных волн  $\epsilon_{\parallel}(\omega, k) = 0$  (4.47). Вид продольной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\parallel}(\omega, k)$  зависит от полноты описания движения частиц. Квазигидродинамический метод (см. §4) приводит к следующему выражению для  $\epsilon_{\parallel}$ :

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - k^2 v_T^2} - \frac{\omega_{LS}^2}{(\omega - kv_S)^2 - k^2 v_{TS}^2}. \quad (15.10)$$

Здесь первые два члена определяют  $\epsilon_{\parallel}$  неподвижной плазмы, а последний член — вклад в  $\epsilon_{\parallel}$ , вносимый потоком, движущимся со скоростью  $v_S \parallel k$ ; присутствие в (15.10) тепловых скоростей  $v_T$  и  $v_{TS}$  учитывает электронное давление в неподвижной плазме и в потоке соответственно. Электронным давлением частиц потока пренебрежем, считая, что  $(\omega - kv_S)^2 \gg k^2 v_{TS}^2$ ; в результате получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega_L^2}{\omega^2 - k^2 v_T^2} + \frac{\omega_{LS}^2}{(\omega - kv_S)^2} = 1, \quad (15.11)$$

в котором  $\omega_L$  и  $\omega_{LS}$  — собственные частоты плазмы и потока частиц. Чтобы исследовать неустойчивость рассматриваемой системы, найдем явное выражение для частоты  $\omega$  при действительных  $k$ , положив  $\omega = \Omega + \delta$ , где  $\Omega$  одновременно удовлетворяет черенковскому условию  $\Omega = kv_S$  и дисперсионному уравнению  $\Omega^2 = \omega_L^2 + k^2 v_T^2$  (5.9) в основной плазме. После подстановки  $\omega = \Omega + \delta$  в уравнение (15.11) последнее сводится к соотношению

$$2\Omega\delta^3 + \delta^4 = \omega_{LS}^2[\Omega^2 + 2\delta\Omega + \delta^2 - k^2 v_T^2].$$

Считая поправку к частоте  $\delta$  малой величиной вместе с  $\omega_{LS}^2$ , отсюда найдем, пренебрегая высшими степенями по  $\delta$ , что  $\delta^3 \approx \omega_{LS}^2 \omega_L^2 / 2\Omega$ . Если скорость потока  $v_S \gg v_T$ , то  $k^2 v_T^2 \ll k^2 v_S^2 = \Omega^2$  и, следовательно,  $\Omega$  близка к  $\omega_L$ . Тогда частота плазменной волны

$$\omega = kv_S + \sqrt[3]{1}(\omega_{LS}^2 \omega_L / 2)^{1/3}. \quad (15.12)$$

В этом выражении  $\sqrt[3]{1} = 1; -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ , так что из трех решений для плазменных волн с частотой  $\omega \approx kv_S$  одно отвечает нарастающей во времени волне с инкрементом<sup>114</sup>

$$-\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\omega_{LS}^2 \omega_L}{2} \right)^{1/3} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_L \left( \frac{N_S}{N} \right)^{1/3}. \quad (15.13)$$

Неустойчивость системы, описываемой дисперсионным уравнением (15.11), не ограничивается волнами с инкрементом (15.13). Оно имеет также неустойчивые решения на частотах  $\Omega = kv_S$ , которые не подчиняются уравнению  $\Omega^2 = \omega_L^2 + v_T^2 k^2$ . Такие решения возможны, если при малых  $\omega_{LS}$  поправка  $\delta$  стремится к нулю, оставляя конечным член  $\omega_{LS}^2 / (\omega^2 - kv_S)^2 = \omega_{LS}^2 / \delta^2$  в уравнении (15.11). Тогда из последнего уравнения нетрудно найти, что  $\delta^2 = \omega_{LS}^2 k^2 v_S^2 / (k^2 v_S^2 - \omega_L^2)$ . (Здесь по-прежнему предполагается, что скорость потока  $v_S \gg v_T$ ). Из двух решений для  $\delta$  одно будет неустойчивым, с инкрементом, равным

$$-\gamma = \frac{\omega_{LS} kv_S}{(\omega_L^2 - k^2 v_S^2)^{1/2}} = \frac{\omega_L \Omega}{(\omega_L^2 - \Omega^2)^{1/2}} \left( \frac{N_S}{N} \right)^{1/2}, \quad (15.14)$$

если частота плазменной волны  $\Omega = kv_S < \omega_L$ . Таким образом, продольные волны с фазовой скоростью  $v_{ph} = \Omega/k$ , равной скорости потока  $v_S$ , нарастают в системе поток-плазма, причем их инкременты

<sup>114</sup>Существование пучковой неустойчивости с инкрементом в форме (15.13) было установлено в [280, 281, 320, 321].

пропорциональны  $(N_S/N)^{1/3}$  и  $(N_S/N)^{1/2}$ . Граница по частоте  $\Omega = kv_S$ , разделяющая области, в которых существуют инкременты (15.13) и (15.14), определяется из условия равенства последних:

$$1 - \frac{\Omega}{\omega_L} \approx \left( \frac{N_S}{N} \right)^{1/3}. \quad (15.15)$$

На частотах, близких к  $\omega_L$ , разность  $1 - \Omega/\omega_L \ll (N_S/N)^{1/3}$  и справедливо выражение (15.13); вдали от  $\omega_L$ , где  $1 - \Omega/\omega_L \gg (N_S/N)^{1/3}$ , инкремент описывается формулой (15.14). Поскольку рассмотренные неустойчивости получаются на основе квазигидродинамических уравнений движения частиц, они называются гидродинамическими, в отличие от кинетической неустойчивости, к рассмотрению которой мы сейчас перейдем.

Продольная диэлектрическая проницаемость системы поток – плазма, найденная методом кинетического уравнения, имеет следующий вид:

$$\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{\omega_L^2}{k^2 v_T^2} [1 + i\sqrt{\pi} Z w(Z)] + \frac{\omega_{LS}^2}{k^2 v_{TS}^2} [1 + i\sqrt{\pi} Z_S w(Z_S)]. \quad (15.16)$$

Здесь  $w(Z)$  и  $w(Z_S)$  — функции Крампа (4.91) с аргументами  $Z = \omega/\sqrt{2}kv_T$  и  $Z_S = (\omega - kv_S)/\sqrt{2}kv_{TS}$ . Первые два члена в (15.16) характеризуют  $\epsilon_{\parallel}$  равновесной плазмы, а последний член определяет вклад в продольную проницаемость от потока заряженных частиц с функцией распределения по скоростям (11.17) и средней скоростью потока  $v_S \parallel \mathbf{k}$  (см. в этой связи формулу (4.88) и замечания после нее). Считая далее поток достаточно разреженным ( $\omega_{LS}$  малой), возьмем в качестве нулевого приближения к решению  $\omega = \Omega - i\gamma$  дисперсионного уравнения  $\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 0$  решение уравнения  $\epsilon_{\parallel}^{(0)}(\Omega, \mathbf{k}) = 0$ , где  $\epsilon_{\parallel}^{(0)}$  — диэлектрическая проницаемость равновесной плазмы (5.10). При условии  $|Z| \gg 1$  она равна (5.12); экспоненциальным членом в (5.12), дающим затухание Ландау в равновесной плазме, мы пренебрегаем. Обозначая далее через  $\epsilon_{\parallel}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  добавку, вносимую в  $\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k})$  (15.16) потоком, и действуя затем методом возмущений, получаем следующее выражение для декремента плазменных волн:

$$\gamma = \frac{\text{Im} \epsilon_{\parallel}^{(1)}(\Omega, \mathbf{k})}{(\partial \epsilon_{\parallel}^{(0)} / \partial \omega)_{\omega=\Omega}}. \quad (15.17)$$

Как следует из (15.16), мнимая часть  $\epsilon_{\parallel}^{(1)}$  при действительных  $\Omega$  и  $k$  (т.е. при действительном аргументе  $Z_S$ ) определяется  $\text{Re } w(Z_S)$ . Однако  $\text{Re } w(Z_S) = e^{-Z_S^2}$  при  $\text{Im } Z_S = 0$  и, следовательно,

$$\text{Im } \epsilon_{\parallel}^{(1)}(\Omega, k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{LS}^2 (\Omega - kv_S)}{k^3 v_{Ts}^3} e^{-(\Omega - kv_S)^2 / 2k^2 v_{Ts}^2}.$$

Вместе с тем  $(\partial \epsilon_{\parallel}^{(0)} / \partial \omega)_{\omega=\Omega} \approx 2\omega_L^2 / \Omega^3$ . В результате из (15.17) получаем

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{LS}^2 \Omega^3 (\Omega - kv_S)}{\omega_L^2 k^3 v_{Ts}^3} e^{-(\Omega - kv_S)^2 / 2k^2 v_{Ts}^2}. \quad (15.18)$$

В случае  $\Omega < kv_S$  декремент  $\gamma$  становится отрицательным, при этом он описывает кинетическую неустойчивость плазменных волн в системе поток-плазма. При пересчете на коэффициент поглощения  $\mu = 2\gamma / v_{gr}$  полученное кинетическое выражение (15.18) совпадает с величиной (15.9), найденной методом коэффициентов Эйнштейна (при сопоставлении в (15.9) надо положить  $\theta = 0$  и учесть, что  $\Omega/k = v_{ph}$ ,  $\omega \approx \Omega \approx \omega_L$ ). Это обстоятельство лишний раз свидетельствует о том, что классический кинетический и элементарный квантовый подходы к проблеме неустойчивости и усиления в плазме представляют собой две различные трактовки одного и того же явления, приводящие в общей области применимости к одинаковым результатам [283, 322].

Заметим далее, что дисперсионное уравнение (15.16) при  $|Z|, |Z_S| \gg 1$  переходит в квазигидродинамическое уравнение (15.11) (с небольшим уточнением: вместо  $k^2 v_T^2$  в нем фигурирует  $3k^2 v_T^2$ ). Как было выяснено выше, оно описывает неустойчивости гидродинамического характера на плазменных волнах с  $\Omega = kv_S$ . Поэтому критерии реализации этих неустойчивостей сводятся к условиям  $v_S \gg v_T$ ,  $|\delta| \gg \sqrt{2} kv_{Ts}$ . Последнее неравенство для инкремента в форме (15.13) принимает вид

$$\left( \frac{N_S}{N} \right)^{1/3} \gg \frac{v_{Ts}}{v_{ph}}. \quad (15.19)$$

При условии, обратном (15.19), в системе поток-плазма существует только кинетическая неустойчивость с инкрементом  $(-\gamma) \propto N_S/N$  (15.18). Если же отношение  $N_S/N$  не слишком мало и выполнено неравенство (15.19), то появляется сильная гидродинамическая неустойчивость с на частотах  $\omega \approx \omega_L$ . По мере дальнейшего роста  $N_S/N$  все больший интервал частот в области  $\omega < \omega_L$  захватывает гидродинамическая неустойчивость с инкрементом  $(-\gamma) \propto (N_S/N)^{1/3}$ .

### 15.2. Бунемановская неустойчивость

Частным случаем пучковой неустойчивости служит нестабильность плазмы, в которой электроны дрейфуют относительно ионов, создавая электрический ток. В системе отсчета, связанной с электронами, дисперсионное уравнение для продольных волн в квазигидродинамическом приближении аналогично (15.11) — с заменой  $\omega_{L_S}^2 = 4\pi e^2 N_S/m_e$  на  $\omega_{L_i}^2 = 4\pi e^2 N_i/m_i$ , где  $N_i$  — концентрация ионов, равная концентрации электронов  $N$ :

$$\frac{\omega_L^2}{\omega^2 - k^2 v_T^2} + \frac{\omega_{L_i}^2}{(\omega - kv_S)^2} = 1 \quad (15.20)$$

( $v_S$  — скорость движения ионов). Сопоставив (15.20) с (15.11), убеждаемся, что плотный ( $N_i = N$ ) ионный поток эквивалентен разреженному электронному потоку с концентрацией  $N_S = N_i m_e/m_i = N m_e/m_i$ . Последнее означает, что выражения для гидродинамических инкрементов могут быть получены из (15.13), (15.14), если учесть, что теперь  $N_S = N_e m_e/m_i$ :

$$-\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_L \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}, \quad -\gamma = \frac{\omega_L \Omega}{(\omega_L^2 - \Omega^2)^{1/2}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}. \quad (15.21)$$

Фазовая скорость нарастающих плазменных волн  $v_{ph} = \Omega/k \simeq v_S$ ; частота  $\Omega$  близка к  $\omega_L$  для первого, и меньше  $\omega_L$  — для второго инкремента (15.21). Это относится к системе отсчета, связанной с электронами. Наоборот, в системе отсчета, где ионы покоятся, фазовая скорость и частота возбужденных волн близки к нулю.

Неустойчивость, характеризуемая указанными инкрементами, называется бунемановской [323]. Условие, при которых она реализуется, может быть найдено из (15.19) подстановкой  $N_S = N_e m_e/m_i$ :

$$\frac{v_{T_i}}{v_{ph}} \ll \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}. \quad (15.22)$$

Если температуры электронов и ионов одинаковы,  $v_{T_i} = v_T (m_e/m_i)^{1/2}$  ( $v_T$  — тепловая скорость электронов); тогда условие (15.22) выполнено для ионных потоков, чья скорость  $v_S = v_{ph} \gtrsim v_T$ . Однако при скоростях ионов, сравнимых с  $v_T$ , становится существенным затухание Ландау в электронной компоненте. Поэтому неустойчивость возникает лишь при достаточно больших отношениях  $v_S/v_T$ ; в плазме из протонов и электронов — при условии

$$v_S/v_T > 1.27 \quad (15.23)$$

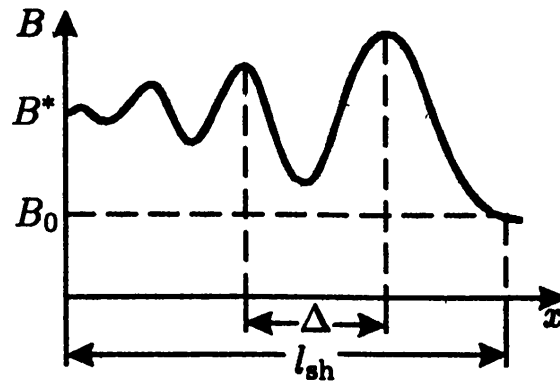


Рис. 47. Профиль ударной волны в плазме

Для таких потоков декремент, характеризующий затухание Ландау, становится меньше бунемановского инкремента, определяемого первым соотношением (15.21). Кинетическая неустойчивость в рассматриваемой системе несущественна, так как она всегда маскируется более сильной гидродинамической неустойчивостью. Если температуры электронов и ионов не совпадают ( $T_e > T_i$ ), плазма с током становится неустойчивой и при скоростях  $v_s < v_T$  (относительно ионно-звуковых и ионных ленгмюровских волн, см. [73]).

Примером системы, где реализуется бунемановская неустойчивость, служит бесстолкновительная ударная волна [324]. В разреженной плазме ( $N\kappa T \ll B_0^2/8\pi$ ) профиль ударной волны, распространяющейся поперек поля  $B_0$ , имеет вид, представленный на Рис. 47. Магнитное поле осциллирует с пространственным периодом

$$\Delta \approx (c/\omega_L \sqrt{M-1}) \ln(U\omega_L \sqrt{M-1}/\nu_{\text{eff}}c)$$

в начале и с периодом  $\Delta \approx c/\omega_L \sqrt{M-1}$  в конце фронта, при этом общая толщина фронта  $l_{\text{sh}} = U/\nu_{\text{eff}}$ . Если значение магнитного поля перед фронтом равно  $B_0$ , то за фронтом оно возрастает до величины  $B^* = \frac{1}{2}B_0(\sqrt{8M^2+1}-1)$ . В приведенных выражениях  $M$  — “магнитное” число Маха, равное отношению скорости ударной волны  $U$  к альфвеновской скорости  $v_A = B_0/\sqrt{4\pi m_i N_i}$ ; в рассмотренных ударных волнах всегда  $M > 1$ . Указанный на Рис. 47 профиль, очевидно, реализуется при условии  $l_{\text{sh}} \gg \Delta$ , т.е.  $\nu_{\text{eff}} \ll \omega_L U/c$ . В этом случае ударная волна называется бесстолкновительной.

Изменение магнитного поля во фронте ударной волны происходит вследствие относительного дрейфа электронов и ионов, создающего ток  $\mathbf{j}$  в плоскости фронта. Скорость дрейфа  $v_s$  превышает  $v_T$ , если число Маха [324, 325]

$$M > 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{8\pi N\kappa T}{B_0^2} \right)^{1/3}. \quad (15.24)$$

В соответствии с критерием (15.23), при этом во фронте ударной волны возникает бунемановская неустойчивость с инкрементами (15.21). Оговоримся, что при анализе бунемановской неустойчивости было пренебрежено постоянным магнитным полем  $B_0$ ; поэтому приведенные выше результаты справедливы, если в плазме  $\omega_L \gg \omega_B$  и частоты возбуждаемых продольных волн  $\omega \gg \omega_B$  (в системе отсчета, связанной с электронами).

### 15.3. Конусная неустойчивость

Черенковская неустойчивость может также возникнуть в системе частиц с распределением по скоростям  $F_S(v)$ , характерным для магнитных ловушек. В таком распределении отсутствуют частицы с питч-углами в пределах конуса потерь  $\vartheta < \vartheta_{cr}$ ; формирование последнего вызвано свободным выходом этих частиц из ловушки. Черенковская неустойчивость в неравновесной плазме с указанным распределением электронов по скоростям была обнаружена в [326]. Аналогичная неустойчивость появляется в системах с дефицитом частиц, обладающих малыми поперечными скоростями  $v_\perp$  по отношению к полю  $B_0$ . Мы познакомимся с конусной неустойчивостью на примере однородной системы, состоящей из плотной равновесной плазмы с концентрацией  $N$  и разреженной примеси энергичных частиц (концентрация  $N_S \ll N$ ), помещенной в постоянное магнитное поле  $B_0$  [327, 328]. Наш выбор оправдан тем, что в космической плазме (конкретно — в плазме солнечной короны) “холодные” частицы быстро максвеллизуются из-за взаимных столкновений, тогда как неравновесный характер распределения энергичных частиц с  $v \gg v_T$  может сохраняться более длительное время. Однако в космических условиях вполне возможно, конечно, и существование неравновесных систем частиц, лишенных равновесной компоненты.

При исследовании устойчивости плазмы в магнитном поле относительно возмущений, содержащих плазменные волны, мы будем исходить из дисперсионного уравнения  $\epsilon_{||}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ , в котором продольная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{||}$  описывается формулой (4.96). Конкретное выражение для  $\epsilon_{||}$  в неравновесной системе частиц, движущихся в поле  $B_0$  по винтовым траекториям, имеет вид (4.97); в нем учтено, что невозмущенное стационарное распределение частиц в магнитном поле  $f_0(p)$  зависит только от продольного импульса  $p$  и квадрата поперечного импульса  $f_0(p) = f_0(p_{||}, p_\perp^2)$ . В случае  $N_S \ll N$  выражение для коэффициента поглощения плазменных волн, вносимого примесью энергичных частиц, совпадает с (15.17), где  $\epsilon_{||}^{(0)}$  —



продольная диэлектрическая проницаемость равновесной плазмы, а  $\epsilon_{\parallel}^{(1)}$  — вклад в проницаемость от примесных электронов. Ограничиваясь рассмотрением задачи в нерелятивистском приближении, будем считать, что продольная ( $k_{\parallel}$ ) и поперечная ( $k_{\perp}$ ) компоненты волнового вектора удовлетворяют неравенствам

$$k_{\parallel} \Delta v_{\parallel} \gg \omega_B, \quad k_{\perp} v_{\perp} \gg \omega_B, \quad (15.25)$$

в которых  $v_{\perp}$  — характерная поперечная скорость, а  $\Delta v_{\parallel}$  — разброс по продольным скоростям энергичных частиц. При этом условия в  $\epsilon_{\parallel}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  на данной частоте  $\omega$  вносят свой вклад гармоники с различными номерами  $l$  (см. (4.97)); поэтому величину  $\epsilon_{\parallel}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  можно получить путем сложного суммирования по гармоникам (см. в этой связи [87]). Однако к выражению для  $\epsilon_{\parallel}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  можно прийти более простым способом, если учесть, что в случае (15.25) длина плазменной волны много меньше радиуса кривизны невозмущенной траектории частиц. Поэтому в хорошем приближении можно считать, что в выражении для тензора  $\epsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$  (4.84) невозмущенные траектории близки к прямым:  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 = \text{const}$ . В этом случае затухание или нарастание волн, взаимодействующих с электронами примеси, связано с излучением частиц, движущихся по прямым траекториям, т.е. с эффектом Вавилова–Черенкова. Подставив затем (4.84) в (4.96) и проводя интегрирование по углу в плоскости поперечных скоростей, получаем [73, 326]:

$$\epsilon_{\parallel}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \int \left\{ \frac{\partial F_S}{\partial v_{\perp}^2} - \frac{(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \partial F_S / \partial v_{\perp}^2 + k_{\parallel} \partial F_S / \partial v_{\parallel}}{[(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})^2 - (k_{\perp} v_{\perp})^2]^{1/2}} \right\} v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}. \quad (15.26)$$

Далее предположим для простоты, что наряду с условием (15.25) у нас выполнено неравенство  $k_{\parallel} v_T \gg \omega_B$  (см. (4.101)). Тогда, в соответствии со сказанным в §4, величина  $\epsilon_{\parallel}^{(0)}$  совпадает с продольной диэлектрической проницаемостью изотропной плазмы (4.88). Для плазменных волн с  $v_{ph} \gg v_T$  проницаемость  $\epsilon_{\parallel}^{(0)} \approx 1 - \omega_L^2 / \omega^2$ . Заметим, что условие  $v_{ph} \gg v_T$ , обеспечивающее возможность пренебречь затуханием Ландау в равновесной компоненте, удовлетворяется вместе с критерием  $k_{\parallel} v_T \gg \omega_B$  только в том случае, когда  $\omega_L^2 \gg \omega_B^2$ .

Допустим теперь, что распределение энергичных частиц по скоро-

стям описывается функцией

$$F_S = \frac{N_S}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \left( \frac{m_e}{\kappa T_S} \right)^{5/2} v_{\perp}^2 \exp \left[ -\frac{m_e(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)}{2\kappa T_S} \right]. \quad (15.27)$$

Подставив (15.27) в (15.26), а затем (15.26) вместе с (4.72) — в (15.17), найдем, что инкремент конусной черенковской неустойчивости в этом случае имеет следующий вид [328]:

$$-\gamma = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_L^4}{N k^3 v_{T_S}^3} \frac{1 - \omega^2 k^{-2} v_{T_S}^{-2} - 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} e^{-\omega^2/2k^2 v_{T_S}^2}, \quad (15.28)$$

где  $v_{T_S} = \sqrt{\kappa T_S/m_e}$  и  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ . Рассматриваемая система неустойчива ( $\gamma < 0$ ) для плазменных волн с фазовыми скоростями

$$v_{\text{ph}}^2 < \left( \frac{\omega}{k} \right)_{\text{cr}}^2 = v_{T_S}^2 (1 - 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha). \quad (15.29)$$

Согласно (15.29) система становится устойчивой относительно возмущений, распространяющихся под углами  $\alpha < \alpha_{\text{cr}} = \operatorname{arctg}(\sqrt{2})$ .

Заметим, что методом коэффициентов Эйнштейна выражение для инкремента (15.28) получается тривиально: достаточно лишь подставить в (15.5) распределение (15.27), проинтегрированное по скоростям в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{k}$ . Критерий неустойчивости  $\alpha > \alpha_{\text{cr}}$  тогда определит фазовые скорости  $v_{\text{ph}} = v_{\mathbf{k}}$ , приходящиеся на интервал с положительной производной  $dF(v_{\mathbf{k}})/dv_{\mathbf{k}}$  (см. (15.7)).

#### 15.4. Квазилинейная теория пучковой неустойчивости

Выше была рассмотрена линейная теория черенковской неустойчивости. Теперь перейдем к изложению квазилинейной теории черенковской пучковой неустойчивости (о квазилинейном режиме конусной неустойчивости см. [329]).

Согласно §14 одним из уравнений квазилинейной теории служит уравнение переноса для плотности энергии (14.20). В однородной системе с  $W_{\mathbf{k}}$ , не зависящей от координат, оно принимает вид

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -2\gamma_j W_{\mathbf{k}}. \quad (15.30)$$

Декремент  $\gamma_j$  определяется выражением (15.5) с медленно меняющейся функцией распределения  $F(v_{\mathbf{k}}, t)$ . Временное поведение функции  $F(v_{\mathbf{k}}, t)$  описывается вторым уравнением квазилинейной теории

(14.26). В самом деле, при условии, что  $N_m = N_m(t)$  и без учета спонтанного излучения (которым для простоты пренебрежено и в (15.30))<sup>115</sup> второе уравнение запишется так:

$$\frac{\partial N_m}{\partial t} = \int [A_q^m(N_q - N_m) - A_m^n(N_m - N_n)] \frac{8\pi^3 W_{\mathbf{k}}}{\hbar\omega} d\omega d\Omega. \quad (15.31)$$

Однако  $N_m = F_S(v_{\perp}, v_{\mathbf{k}})$ , а разности населенностей связаны с  $F_S$  соотношениями типа (15.1). Приняв во внимание также связь (14.7), найдем

$$\frac{\partial F_S}{\partial t} = \int \left\{ P_{\omega\Omega}(v^{(q)}) \frac{\partial F_S}{\partial v} \Big|_{v=v^{(q)}} - P_{\omega\Omega}(v^{(m)}) \frac{\partial F_S}{\partial v} \Big|_{v=v^{(m)}} \right\} \frac{8\pi^3 k W_{\mathbf{k}}}{m_e \hbar \omega^2} d\omega d\Omega, \quad (15.32)$$

Здесь отмечено, что спектральная мощность черенковского излучения  $P_{\omega\Omega}$  (10.22) зависит от скорости частицы  $v$ . Учитывая малость разности  $v^{(q)} - v^{(m)} = \hbar k / m_e$  по сравнению с  $v^{(m)}$  и с характерным интервалом, на котором заметно меняется функция  $F_S$ , разложим выражение в фигурных скобках в ряд по степеням  $\hbar k / m_e$ . Ограничиваясь первыми двумя членами разложения и принимая во внимание явное выражение для  $P_{\omega\Omega}$  (10.22), получаем

$$\frac{\partial F_S}{\partial t} = \int \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{4\pi^2 e^2}{m_e^2 v_{\text{gr}}} \delta(\omega - \mathbf{k}v) \mathbf{k} W_{\mathbf{k}} \frac{\partial F_S}{\partial v} \right] d\omega d\Omega. \quad (15.33)$$

Это уравнение записывается в общепринятой форме

$$\frac{\partial F_S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} D_{\alpha\beta} \frac{\partial F_S}{\partial v_{\beta}}, \quad (15.34)$$

если перейти к интегрированию в пространстве волновых векторов и ввести обозначение

$$D_{\alpha\beta} = 4\pi^2 \frac{e^2}{m_e^2} \int W_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \mathbf{k}v) \frac{k_{\alpha} k_{\beta}}{k^2} d^3 k \quad (15.35)$$

( $d^3 k = k^2 v_{\text{gr}}^{-1} d\omega d\Omega$  — элемент объема в этом пространстве).

<sup>115</sup> Для этого необходимо, чтобы уровень плазменных волн  $W_{\mathbf{k}}$  был достаточно высок:  $N_{\mathbf{k}} \gg 1$  (см. формулу (14.28) и замечания, сделанные после нее).

Уравнение (15.34) с  $D_{\alpha\beta}$  в форме (15.35) и уравнения (15.30), (15.5) с  $F(v_{\mathbf{k}}) = \int F_S(\mathbf{v}) d^2v_{\perp}$  представляют собой замкнутую систему уравнений квазилинейной теории, развитой в работах [317–319]. Соотношение (15.34) имеет вид уравнения диффузии частиц в пространстве скоростей, причем коэффициент диффузии  $D_{\alpha\beta}$  зависит от плотности энергии плазменных колебаний  $W_{\mathbf{k}}$ .

Система (15.30), (15.34) достаточно сложна; однако она упрощается при условии, что спектр плазменных волн — одномерный (т.е. все волновые векторы направлены в одну сторону). Тогда из (15.34), (15.35) получаем, что

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\mathbf{k}}} \left( D \frac{\partial F}{\partial v_{\mathbf{k}}} \right), \quad D = \frac{4\pi^2 e^2}{m_e^2 v_{\mathbf{k}}} W(k). \quad (15.36)$$

Вместе с уравнением

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2\gamma W, \quad \gamma = -2\pi^2 \frac{e^2 v_{\mathbf{k}}^2}{m_e \omega_L} \frac{\partial F}{\partial v_{\mathbf{k}}}, \quad (15.37)$$

следующим из (15.30) и (15.5), соотношение (15.36) описывает квазилинейный режим в системе с функцией распределения по проекциям скоростей  $F(v_{\mathbf{k}})$  и одномерным спектром плазменных волн с плотностью энергии  $W(k)$  в единичном интервале волновых чисел  $k = \omega/v_{\text{ph}} \approx \omega_L/v_{\mathbf{k}}$ .

Основываясь на системе уравнений (15.36), (15.37), рассмотрим процесс развития черенковской неустойчивости (квазилинейной релаксации) в системе поток–плазма. Если в начальный момент  $t = 0$  существует одномерный пакет плазменных волн с набором фазовых скоростей  $\omega/k = v_{\mathbf{k}}$  в интервале, где производная  $dF/dv_{\mathbf{k}}$  положительна, то это возмущение будет нарастать в соответствии с уравнением (15.37). Увеличение  $W(k)$  ведет согласно (15.36) к росту коэффициента диффузии  $D$  и “сглаживанию” функции распределения  $F(v_{\mathbf{k}})$  в области неустойчивости. Последнее в свою очередь вызывает постепенное уменьшение величины инкремента. Конечной стадией процесса релаксации будет образование на функции распределения  $F(v_{\mathbf{k}})$  “плато” — области с  $dF/dv_{\mathbf{k}} = 0$  и стационарным спектром  $W(\omega_L/v_{\mathbf{k}})$  (Рис. 48).

Образование плато на функции распределения  $F(v_{\mathbf{k}})$  имеет ясный физический смысл: в случае инверсии населенностей (роста  $F(v_{\mathbf{k}})$  вместе с  $v_{\mathbf{k}}$ ) число индуцированных переходов (с потерей скорости  $v_{\mathbf{k}}$ ) превышает число переходов с поглощением плазмонов (ведущих к

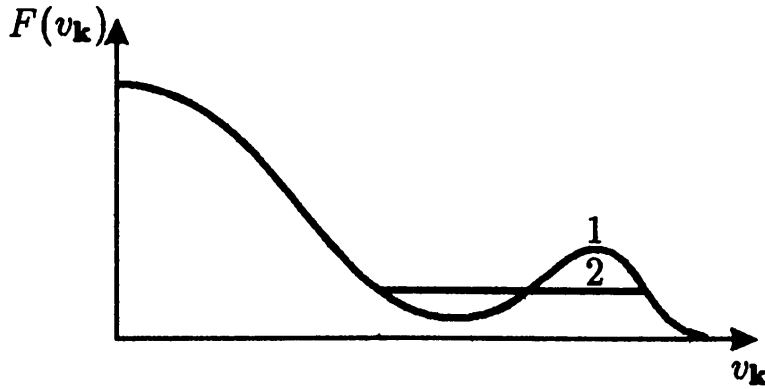


Рис. 48. Квазилинейная релаксация системы поток-плазма: 1 – начальное состояние, 2 – плато

увеличению  $v_{\mathbf{k}}$ ). Это приводит, очевидно, к диффузии частиц по оси  $v_{\mathbf{k}}$  в сторону меньших скоростей и постепенному выравниванию функции распределения  $F(v_{\mathbf{k}})$ . Если же спектр плазменных волн занимает интервал по фазовым скоростям  $v_{\text{ph}} = v_{\mathbf{k}}$  в той области, где  $F(v_{\mathbf{k}})$  падает с ростом  $v_{\mathbf{k}}$ , то направление диффузии, очевидно, меняется на противоположное: частицы переходят в среднем в область больших скоростей, что снова приводит к сглаживанию функции распределения  $F(v_{\mathbf{k}})$ .

Поскольку полная энергия системы “плазмоны + электроны” при квазилинейной релаксации сохраняется, величину энергии плазменных волн на плато можно связать с изменением функции распределения  $F(v_{\mathbf{k}})$ . Из квазилинейных уравнений следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ F - \frac{\partial}{\partial v_{\mathbf{k}}} \left( \frac{\omega_{\text{L}}}{m_e v_{\mathbf{k}}^3} W \right) \right] = 0. \quad (15.38)$$

В этом легко убедиться, подставив  $W \partial F / \partial v_{\mathbf{k}}$  из (15.37) в (15.36). Если в начальном состоянии спектр плазменных колебаний  $W_0(k)$  занимает интервал от  $v_1$  до  $v_2$ , а функция распределения частиц по скоростям есть  $F_0(v_{\mathbf{k}})$ , то в состоянии с плато

$$F_{\infty} - \frac{\partial}{\partial v_{\mathbf{k}}} \left( \frac{\omega_{\text{L}}}{m_e v_{\mathbf{k}}^3} W_{\infty} \right) = F_0 - \frac{\partial}{\partial v_{\mathbf{k}}} \left( \frac{\omega_{\text{L}}}{m_e v_{\mathbf{k}}^3} W_0 \right),$$

где  $F_{\infty}$  и  $W_{\infty}$  — распределение частиц и спектр плазменных колебаний после завершения процесса релаксации. Отсюда ясно, что

$$W_{\infty}(k) = W_0(k) - m_e \frac{\omega_{\text{L}}^2}{k^3} \int_{v_1}^{\omega_{\text{L}}/k} (F_0 - F_{\infty}) dv_{\mathbf{k}}. \quad (15.39)$$

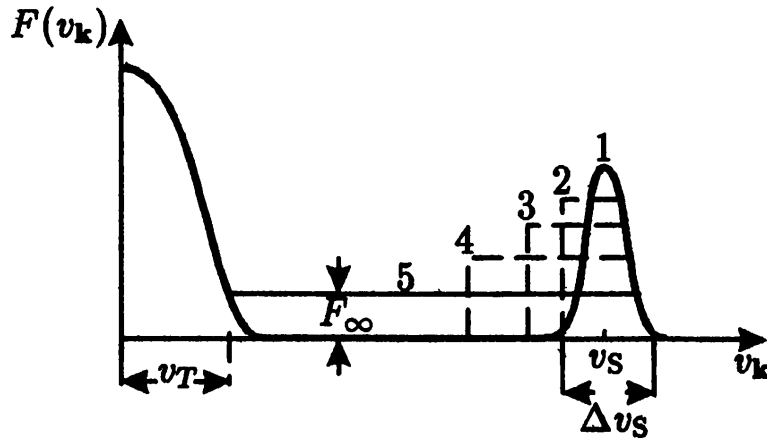


Рис. 49. Релаксация узкого электронного потока: 1 – начальное распределение; 2,3,4 – промежуточные стадии; 5 – конечный этап

“Высота” плато  $F_\infty$  известна; она определяется условием сохранения числа частиц в области  $v_1 < v_k < v_2$ :

$$\int_{v_1}^{v_2} (F_0 - F_\infty) dv_k = 0, \quad F_\infty = (v_2 - v_1)^{-1} \int_{v_1}^{v_2} F_0 dv_k. \quad (15.40)$$

Последнее условие — следствие равенства нулю коэффициента диффузии  $D$  (вместе с плотностью энергии  $W(k)$ ) вне указанного интервала  $v_1 < v_k < v_2$ , поэтому частицы только перераспределяются внутри этого интервала, но не выходят за его пределы. В результате формула (15.39) связывает плотность энергии плазменных волн на плато с начальным распределением  $F_0(v_k)$  и спектром  $W_0(k)$ . В случае достаточно эффективного возбуждения плазменных волн, когда  $W_\infty \gg W_0$ , величина  $W_\infty$  не зависит от уровня излучения в начале квазилинейной релаксации.

Рассмотрим более подробно процесс квазилинейной релаксации в плазме быстрого ( $v_s > v_T$ ) электронного потока с малой начальной дисперсией по скоростям  $\Delta v_s \ll v_s$  (см. Рис. 49).<sup>116</sup> Из рисунка ясно, что поток частиц с концентрацией  $N_s$  релаксирует к состоянию с плато высотой  $F_\infty$  и протяженностью по скорости  $v_k$ , примерно равной  $v_s$ . Согласно условию сохранения числа частиц (15.40)  $F_\infty \approx N_s/v_s$  при  $v_k < v_s$  и  $F_\infty = 0$  при  $v_k > v_s$ . Энергия пучка в состоянии с плато составляет 1/3 от его начальной энергии: это означает, что в течение всего процесса релаксации 2/3 энергии переходит в плазменные колебания. Их спектр нетрудно найти с помощью

<sup>116</sup> Дисперсия  $\Delta v_s$ , однако, должна быть достаточной для выполнения неравенства, обратного (15.19) (чтобы в системе реализовалась только кинетическая неустойчивость).

формулы (15.39). Пренебрегая в ней начальной энергией плазменных волн  $W_0(k)$  (которая обычно соответствует тепловому флуктуационному уровню) и учитывая форму распределения  $F_\infty$ , получим

$$W_\infty(k) = \begin{cases} m_e N_S \omega_L^3 / 2 v_S k^4 & k < \omega_L / v_S, \\ 0 & k > \omega_L / v_S. \end{cases} \quad (15.41)$$

Спектральная плотность энергии плазменных волн  $W_\infty(k)$  растет как  $v_{ph}^4 = (\omega_L/k)^4$ , достигая максимального значения при  $v_{ph} = v_S$ .

Характер эволюции функции распределения потока  $F(v_k, t)$  в обсуждаемой задаче можно установить [330, 331], принимая во внимание малость отношения  $W_0/W_\infty \ll 1$ . Предположим сначала, что  $W_0 = 0$  в области  $v_{ph} < u$  и  $W_0 \neq 0$  в интервале  $v_{ph} > u$ , где  $u$  — некоторая скорость, меньшая  $v_S$  настолько, что  $F(u)$  можно считать равной нулю. Тогда, как следует из уравнения (15.37), плазменные волны с  $v_{ph} < u$  вообще не появятся. Поскольку коэффициент диффузии  $D \propto W(k)$  тогда равен нулю (см. (15.36)), процесс релаксации не может изменить распределение частиц  $F(v_k) = 0$  в интервале  $v_{ph} < u$ . Это означает, что релаксация закончится установлением плато на интервале  $u < v_k < v_S$  высотой  $F = N_S (v_S - u)^{-1}$ ; вне этого интервала  $F = 0$  (см. Рис. 49). Фактически плотность энергии плазменных волн с  $v_{ph} < u$  отлична от нуля; благодаря малости этой величины граница плато будет медленно смещаться влево, в сторону меньших скоростей, а диффузия частиц с  $v_k > u$  под действием возбужденных плазменных волн будет постоянно сохранять состояние плато (см. последовательные этапы 2, 3 и 4 квазилинейной релаксации на Рис. 49).

Зависимость скорости движения левой границы плато  $u(t)$  можно найти, интегрируя уравнение (15.37)

$$\frac{\partial \ln W}{\partial t} = \frac{\pi \omega_L}{N} v_k^2 \frac{\partial F}{\partial v_k}.$$

по  $v_k$  в малом интервале  $v_1 < v_k < v_2$ , включающем в себя скорость  $v_k = u$ . Замечая, что

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial \ln W}{\partial t} d v_k \approx - \frac{d u}{d t} (\ln W_2 - \ln W_1), \quad (15.42)$$

$$\int_{v_1}^{v_2} v_k^2 \frac{\partial F}{\partial v_k} d v_k = v_2^2 F(v_2) \approx u^2 N_S (v_S - u)^{-1},$$

где  $W_2$  и  $W_1$  характеризуют соответственно уровни возбужденных

плазменных волн на плато и флуктуационных плазменных волн в начальной стадии релаксации, получим уравнение для скорости  $u$ :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\pi\omega_L N_S}{\Lambda N} \frac{u^2}{v_S - u}. \quad (15.43)$$

Здесь через  $\Lambda$  обозначен  $\ln(W_2/W_1)$ . Поскольку  $W_2/W_1 \gg 1$ , значение  $\Lambda$  слабо зависит от конкретной величины этого отношения; поэтому приближенно можно положить  $\Lambda \approx \ln(W_\infty/W_0)$  или

$$\Lambda \approx \ln(N_S m_e v_S^2 / 3W_T).$$

В последнем случае под знаком логарифма стоит отношение энергии плазменных волн после завершения квазилинейной релаксации  $N_S m_e v_S^2 / 3$  к энергии тепловых флуктуаций в равновесной плазме  $W_T \sim N \kappa T / N_D$  ( $N_D$  — число частиц в сфере дебаевского радиуса). Решение уравнения (15.43) при  $\Lambda = \text{const}$  имеет вид

$$\frac{v_S}{u} + \ln \frac{u}{v_S} = 1 + \frac{\pi\omega_L N_S}{\Lambda N} t. \quad (15.44)$$

При малых  $\Delta v = v_S - u \ll v_S$  это решение сводится к  $(\Delta v / v_S)^2 = 2\pi\omega_L N_S t / N \Lambda$ . Отсюда следует, что релаксация узкого электронного потока к плато шириной  $\Delta v$  происходит за период

$$t = \frac{1}{2\gamma} \Lambda, \quad \gamma = \pi\omega_L \frac{N_S}{N} \left( \frac{\Delta v}{v_S} \right)^2. \quad (15.45)$$

Весь процесс квазилинейной релаксации характеризуется временем

$$t_{\text{ql}} \sim \frac{\Lambda}{2\pi\omega_L} \frac{N}{N_S}. \quad (15.46)$$

Предположение об одномерности спектра плазменных волн, положенное в основу квазилинейных уравнений (15.36), (15.37), существенно ограничивает общность сделанных выводов. Дело в том, что распределение  $F_\infty$  с плато оказывается неустойчивым относительно плазменных волн других направлений  $\mathbf{k}$ ; процесс возбуждения последних должен вести к формированию плато вдоль новых направлений  $\mathbf{k}$  и т.д. В результате должно установиться “обобщенное” плато с  $F(\mathbf{v}) = \text{const}$ . Однако это невозможно, так как указанное распределение содержит бесконечно большую плотность энергии частиц (интеграл  $\int v^2 F(\mathbf{v}) d^3 v$  расходится). Поэтому процесс квазилинейной ре-



лаксации однородной системы должен завершаться или формированием строго одномерного спектра плазменных волн с плато на функции распределения или созданием устойчивого распределения и диссипацией плазменных волн вследствие затухания Ландау. (О квазилинейной релаксации неоднородного спектра плазменных волн см. подробнее [332, 333].)

Приведенные результаты относятся к релаксации нерелятивистского пучка в плазме. Поведение релятивистских потоков, взаимодействующих с возбужденными плазменными волнами, отличается рядом особенностей, главная из которых состоит в квазиодномерном характере релаксации даже при существенно неоднородном начальном спектре плазменных волн [334, 335]. Последнее обязано сильной угловой зависимости инкремента черенковской неустойчивости и коэффициента диффузии. Поэтому в системе нарастают главным образом плазменные волны с  $\mathbf{k}$ , ориентированным вдоль средней скорости потока  $\mathbf{v}_S$ , а диффузия частиц с изменением направления импульса  $\mathbf{p}$  происходит медленнее, чем диффузия по величине импульса.

Выше мы ограничились обсуждением задачи о квазилинейной релаксации во времени ( $F_S(\mathbf{v}, t)$  и  $W_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, t)$  однородны в пространстве). В космических условиях представляет также интерес квазилинейная релаксация при усилении плазменных волн в пространстве, когда  $F_S$  и  $W_{\mathbf{k}}$  стационарны, но зависят от координат:  $F_S(\mathbf{v}, \mathbf{r})$  и  $W_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ . О квазилинейном режиме в такой задаче с граничными условиями см. [310, 331, 336].

### 15.5. Плазменный механизм генерации радиоизлучения

Под “плазменным механизмом” в теории генерации космического радиоизлучения понимается возбуждение плазменных волн с их последующей трансформацией в электромагнитное излучение. В космических условиях обращение к плазменным механизмам приобретает смысл в тех случаях, когда собственная частота плазмы в источнике приходится на радиодиапазон,<sup>117</sup> а плазменные волны легче возбуждаются, нежели электромагнитные.

Классическим примером плазменного механизма служит процесс генерации быстродрейфующих всплесков солнечного радиоизлучения – всплесков III типа [3]. Схема генерации этого вида радиоизлучения

<sup>117</sup> Впрочем, возможен также вариант плазменного механизма в условиях, когда  $\omega_L$  много меньше частоты радиоизлучения. В этом случае частота  $\omega$  поднимается до наблюдаемых значений за счет комптоновского рассеяния плазменных волн на релятивистских частицах (см. §13).

заключается в следующем. Электронный поток, извергнутый из солнечной вспышки, движется через корональную плазму со скоростью  $v_S \sim c/3$ . В области, занимаемой потоком, реализуются условия, характерные для черенковской неустойчивости в системе поток–плазма. Плазменные волны, излучаемые отдельными частицами потока (эффект Вавилова–Черенкова), усиливаются, поскольку коэффициент черенковского поглощения становится отрицательным (мазерный механизм). Интенсивные плазменные волны затем частично трансформируются в электромагнитные за счет рассеяния на частицах и плазменных же волнах (см. §18, §19); в результате появляется радиоизлучение, которое регистрируется на Земле как всплески III типа. Характерный дрейф по частоте в таких всплесках связан с перемещением агента (потока частиц) в более разреженные слои короны: при этом частота плазменных волн  $\omega \approx \omega_L = (4\pi e^2 N/m_e)^{1/2}$  (а соответственно и частота радиоизлучения) постепенно уменьшается. В системе поток–плазма нарастание плазменных волн во времени (или их усиление в пространстве) происходит лишь при условии, когда инкремент  $(-\gamma^{Cer})$  в потоке превышает декремент, связанный с диссипацией в основной плазме. Последняя обусловлена (как было выяснено в §12) поглощением из-за столкновений и затуханием Ландау. В рассматриваемом случае основную роль играет тормозное поглощение при столкновениях частиц;<sup>118</sup> поэтому для реализации мазерного механизма необходимо, чтобы  $\gamma^{Cer} + \gamma^b < 0$ . Это неравенство в короне будет выполнено, если концентрация частиц в потоке  $N_S > 10^{-10} N$ . В сказанном можно убедиться, обратившись к формулам (12.9), (15.18) и положив в них  $v_{ph} \sim v_S \sim 10v_T$ ,  $v_{ph} - v_S \sim v_{T_S} \sim v_T$ , и  $\nu_{eff} \simeq 5\text{ с}^{-1}$ . Таким образом, в условиях генерации всплесков III типа кинетическая черенковская неустойчивость (усиление) реализуется уже при ничтожно малых плотностях потока  $N_S > 10^{-2}\text{ см}^{-3}$  (при концентрации корональной плазмы  $N \sim 10^8\text{ см}^{-3}$ ). Указанный режим усиления и неустойчивости существует в широком интервале значений  $N_S$ , и лишь в плотных потоках с  $N_S \sim 10^{-3} N > 10^5\text{ см}^{-3}$  возникает гидродинамическая неустойчивость с инкрементами (15.13), (15.14).

При обсуждении процесса квазилинейной релаксации потока в плазме было выяснено, что за время  $t_{q1}$  (15.46) происходит образование плато на функции распределения (при условии сохранения одномерности спектра возбуждения волн). В короне ( $N \sim 10^8\text{ см}^{-3}$ )

<sup>118</sup> В конкретных условиях солнечной короны ( $N \sim 10^8\text{ см}^{-3}$ ,  $v_T \sim 4 \cdot 10^8\text{ см/с}$ ,  $\nu_{eff} \sim 5\text{ с}^{-1}$ ) величина  $\gamma^b$  превысит затухание Ландау для плазменных волн с фазовой скоростью  $v_{ph} > 6v_T$  (см. формулы (12.9) и (12.29)).

поток с концентрацией  $N_S \sim 10 \text{ см}^{-3}$  релаксирует за время  $t_{q1} \sim 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}$  (при оценке по формуле (15.46) логарифм  $\Lambda$  считался порядка единицы). Поскольку дальнейшая генерация плазменных волн в состоянии с плато прекращается, а возбужденные волны за время  $t \sim 1/2\nu_{\text{eff}} \sim 0.1 \text{ с}$  затухнут из-за соударений, возникает проблема “поддержания” наклона функции распределения энергичных частиц в районе плато при прохождении потока через корону.

Существуют две причины, обеспечивающие положительность производной  $dF/dv_k$  в области плато и, как следствие, непрерывную генерацию плазменных волн в течение продолжительного времени [337, 338]: столкновения электронов потока с частицами корональной плазмы и неоднородность пространственного распределения этих электронов. Первая причина связана с резкой зависимостью эффективного числа столкновений заряженных частиц от их скорости:  $\nu_{\text{eff}} \propto v^{-3}$  (см. §12). Так возникает дефицит электронов в потоке с относительно малыми скоростями  $v_k$ , что приводит к наклону плато с  $dF/dv_k > 0$ . Вторая причина действует в том же направлении: при движении ограниченного в пространстве потока через корону медленные частицы отстают от быстрых, что приводит к избытку частиц с высокими скоростями  $v_k$  на переднем фронте потока. В этой связи существенное значение приобретает задача о динамике расширения облака электронов, инжектированных в корону из области солнечной вспышки (с учетом обратного воздействия возбуждаемых плазменных волн на процесс разлета) [339–341]. В одномерном случае (разлет по оси  $z$ ) решение имеет автомодельный характер: плотность энергии плазменных волн  $W$  и распределение электронов  $F$  зависят от координаты и времени лишь через отношение  $z/t$ . Об условиях одномерной диффузии частиц в пространстве скоростей и формировании квазиодномерного спектра плазменных волн в системе электронный поток – корональная плазма см. [342].

Наряду с пучковой неустойчивостью существенную роль в космической плазме может играть бунемановская неустойчивость. Примером являются бесстолкновительные ударные волны, которые благодаря генерации плазменных волн во фронте (за счет бунемановской неустойчивости) и их последующей конверсии в электромагнитное излучение могут служить мощным источником радиоизлучения. В плазме солнечной короны ударные волны, движущиеся от области вспышки, выступают в роли агентов, которые возбуждают радиоизлучение с медленным дрейфом по частоте — всплески II типа (см. об этом [3, 343, 344]).

Наконец в корональной плазме вполне возможно (и вероятно) действие конусной черенковской неустойчивости. Возбуждение плазменных волн с частотой  $\omega \approx \omega_L$  может происходить в магнитных ловушках над биполярными группами солнечных пятен и вообще в активных областях со сложной структурой магнитного поля. Здесь указанная неустойчивость вместе с конусной циклотронной неустойчивостью (§16) обеспечивает эффективное действие плазменного механизма, привлекаемого для объяснения некоторых разновидностей радиоизлучения IV типа [328, 345].

Упомянем также, что плазменный механизм обсуждался в применении к радиоизлучению пульсаров; для знакомства с этим кругом вопросов читатель может обратиться к обзорам [63, 346, 347].

## §16. Циклотронная неустойчивость

В этом разделе будет идти речь о неустойчивости, связанной с циклотронным излучением электронов на отдельных гармониках gyroчастоты. Эта неустойчивость возникает в системе частиц, помещенных в магнитное поле  $B_0$ ; ее характер и инкременты определяются решениями дисперсионного уравнения (4.41) для нормальных волн в магнитоактивной плазме. В дисперсионное уравнение входит тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  (4.94); для продольных волн дисперсионное уравнение сводится к виду  $\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ , где  $\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k})$  определяется выражением (4.97). Как  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , так и  $\epsilon_{\parallel}$  представляют собой бесконечную сумму по гармоникам  $l$ ; в такой сумме можно выделить одну-две соседние гармоники и пренебречь вкладом остальных при достаточно малой дисперсии частиц по импульсам. В нерелятивистском пределе последнее означает, что

$$k_{\parallel} \Delta v_{\parallel} \ll \omega_B. \quad (16.1)$$

Это неравенство противоположно первому из условий (15.25), определяющих области черенковской неустойчивости (или затухания) в плазме.

### 16.1. Циклотронная неустойчивость продольных волн

Для продольных волн мы ограничимся обсуждением циклотронной конусной неустойчивости, предполагая, что неравновесная система частиц имеет распределение  $f_s(\mathbf{p}) = f_s(p_{\parallel}, p_{\perp}^2)$  с нулевой средней скоростью вдоль магнитного поля  $B_0$  и дефицитом частиц с малыми зна-

чениями квадрата поперечного импульса ( $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  — продольная и поперечная компоненты импульса электрона  $p$  по отношению к магнитному полю). Неустойчивость такой неравновесной системы относительно продольных волн была доказана в [348] для функции распределения вида  $f_s \propto \delta(p_{\perp} - p_{\perp}^{(0)})$ . Затем в [349] было показано, что циклотронная неустойчивость возможна и в том случае, когда указанная неравновесная система выступает в качестве разреженной примеси к плотной равновесной плазме. Ниже циклотронная конусная неустойчивость исследуется на примере двухкомпонентной системы “равновесная плазма + примесь неравновесных энергичных электронов”, в предположении, что последние подчиняются распределению вида

$$f_s(p_{\parallel}, p_{\perp}^2) = A p_{\perp}^2 e^{-(p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2)/2a^2} \quad (16.2)$$

с нормирующим фактором  $A = N_s/4\sqrt{2}\pi^{3/2}a^5$ .

Допустим, что скорости энергичных электронов велики по сравнению со скоростью теплового движения электронов равновесной плазмы и достаточно малы по сравнению со скоростью света:

$$m_e^2 v_T^2 \ll a^2 \ll m_e^2 c^2. \quad (16.3)$$

Это, с одной стороны, позволяет пренебречь затуханием Ландау в основной плазме, а с другой — считать неравновесную компоненту слаборелятивистской. Далее, условие (16.1) для энергичных частиц с дисперсией  $\Delta v_{\parallel} \approx a/m_e$  в случае (16.3) предполагает непрерывное выполнение критерия  $k_{\parallel} v_T \ll \omega_B$ , существенно меняющего характер плазменных волн в равновесной плазме. Правда, в интервале  $|\omega - i\omega_B| \lesssim k_{\parallel} v_T \ll \omega_B$  эти волны сильно затухают вследствие циклотронного поглощения (см. §13) и поэтому особого интереса не представляют. Однако в области  $|\omega - i\omega_B| \gg k_{\parallel} v_T$  затухание становится слабым; при этом дисперсионные характеристики продольных волн определяются уравнением (5.55), описывающим моды Бернштейна и волны в гибридной полосе (см. §5 и помещенные там Рис. 14, 15, на которых изображены дисперсионные кривые для этих волн).

Если концентрация примесных частиц  $N_s \ll N$  — электронной концентрации равновесной плазмы, то связь между  $\text{Re}\omega$  и  $k$  будет по-прежнему описываться уравнением (5.55) для равновесной плазмы, а декремент  $\gamma$ , вносимый неравновесной примесью, можно найти методом возмущений. Величина декремента тогда задается формулой (15.17), в которой теперь вклад равновесной плазмы  $\epsilon_{\parallel}^{(0)}$  определяется выражением (5.55), а неравновесной компоненты  $\epsilon_{\parallel}^{(1)}$  — (4.97).

Полюс подынтегрального выражения в (4.97) определяется резонансным условием

$$m(p)\omega - lm_e\omega_B - k_{||}p_{||} = 0, \quad (16.4)$$

совпадающим с формулой Доплера для магнитотормозного излучения (10.34). Если, как мы предполагаем, энергичные частицы — слабoreлятивистские, их масса  $m(p) \approx m_e(1 + p^2/2m_e^2c^2)$ . Зависимостью  $m(p)$  в (16.4) можно пренебречь, если величина  $\omega p^2/2m_e^2c^2$  много меньше, чем  $k_{||}p_{||}$ ; поскольку, в соответствии с (16.2),  $p \sim a$  и  $p_{||} \sim a$ , это означает, что

$$|k_{||}| \gg \omega a/2m_e c^2. \quad (16.5)$$

Таким образом, для направлений  $\mathbf{k}$ , не слишком близких к строго поперечному по отношению к  $\mathbf{B}_0$ , условие Доплера (16.4) становится нерелятивистским. Поэтому инкременты циклотронной неустойчивости в области (16.5) мы также станем называть нерелятивистскими в отличие от релятивистских инкрементов в случае, когда член  $k_{||}v_{||}$  несуществен и условие (16.4) становится чисто релятивистским (оно описывает тогда так называемый поперечный эффект Доплера).

## 16.2. Кинетическая неустойчивость на модах Бернштейна

Считая условие (16.5) выполненным, найдем из (4.97)  $\text{Im} \epsilon_{||}^{(1)}$ . Эта величина определяется вычетом в точке  $m_e\omega - lm_e\omega_B - k_{||}p_{||} = 0$  при интегрировании в (4.97) по продольным импульсам  $p_{||}$ ; она равна [96]:

$$\text{Im} \epsilon_{||}^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{LS}^2 \omega_B}{k_{||} k_{\perp}^2 v_e^3} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} l e^{-Z_l^2} [\delta_l \varphi_l + (\delta_l + 1) \chi_e \varphi_l']. \quad (16.6)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi_l &= e^{-\chi_e} I_l(\chi_e), & Z_l &= \frac{\omega - l\omega_B}{\sqrt{2}k_{||}v_e}, & \delta_l &= \frac{\omega - l\omega_B}{l\omega_B} \\ \chi_e &= \frac{k_{\perp}^2 v_e^2}{\omega_B^2}, & v_e &= \frac{a}{m_e}, & \omega_{LS}^2 &= 4\pi e^2 N_S / m_e, \end{aligned} \quad (16.7)$$

$I_l(\chi_e)$  — модифицированная функция Бесселя порядка  $l$ . При значениях  $\omega$ , заключенных в интервале между двумя гармониками  $(s-1)\omega_B$  и  $s\omega_B$ , все члены суммы по  $l$ , кроме  $l=s-1$  и  $l=s$ , будут экспоненциально малы, если

$$2k_{||}^2 v_e^2 \ll \omega_B^2, \quad (16.8)$$

Сохраняя тогда в сумме (16.6) лишь два указанных члена, получим:

$$\begin{aligned} \text{Im } \epsilon_{\parallel}^{(1)} \approx & \\ & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_L s^2 \omega_B}{k_{\parallel} k_{\perp}^2 v_e^3} \left\{ e^{-Z_{s-1}^2} (s-1) [\delta_{s-1} (\varphi_{s-1} + \chi_e \varphi'_{s-1}) + \chi_e \varphi_{s-1}] \right. \\ & \left. + e^{-Z_s^2} s [\delta_s (\varphi_s + \chi_e \varphi'_s) + \chi_e \varphi'_s] \right\}. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Когда частота  $\omega$  близка к гармонике  $s\omega_B$  настолько, что  $|\delta_s| \ll 1$  и  $|Z_{s-1}^2| \gg 1$ , выражение (16.9) упрощается:

$$\text{Im } \epsilon_{\parallel}^{(1)} \approx \frac{\sqrt{\pi} s \omega_L s^2}{\omega_B (\omega - s\omega_B)} \varphi'_s (\chi_e) Z_s e^{-Z_s^2}. \quad (16.10)$$

Формулы (16.9) и (16.10) соответствуют учету циклотронного излучения на двух и на одной гармонике гирочастоты.

В равновесной плазме на частотах ниже гибридной частоты  $\omega_h = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_B^2}$  производная  $(\partial \epsilon_{\parallel}^{(0)} / \partial \omega)_{\omega=\Omega}$  (где  $\Omega$  — значение частоты, найденной из дисперсионного уравнения  $\epsilon_{\parallel}^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ ) положительна; поэтому инкремент  $-\gamma$  (15.17) для циклотронной неустойчивости будет положителен, если  $\text{Im } \epsilon_{\parallel}^{(1)}$ , описываемая формулами (16.6), (16.9), (16.10), станет отрицательной. Так, например, в случае, когда инкремент на модах Бернштейна определяется одной гармоникой,  $\text{Im } \epsilon_{\parallel}^{(1)}$  равна (16.10); при этом система неустойчива в области  $\varphi'_s (\chi_e) < 0$ . Значения  $\chi_e^{\text{cr}}$  на границе циклотронной неустойчивости находятся из условия  $\varphi'_s (\chi_e^{\text{cr}}) = 0$ . При этом система неустойчива, если

$$\chi_e \equiv k_{\perp}^2 v_e^2 / \omega_B^2 > \chi_e^{\text{cr}} \approx s^2. \quad (16.11)$$

Если ввести параметр  $\chi \equiv k_{\perp}^2 v_T^2 / \omega_B^2$  ( $v_T$  — тепловая скорость электронов равновесной плазмы), то условием неустойчивости станет неравенство

$$\chi > \chi_{\text{cr}} \approx \left( \frac{s v_T}{v_e} \right)^2. \quad (16.12)$$

Из этого критерия и дисперсионных кривых  $\omega(\chi)$ , приведенных на Рис. 14, следует, что циклотронная неустойчивость на модах Бернштейна в полосе, заключенной между гармониками  $(s-1)\omega_B$  и  $s\omega_B$ , возникает на меньших частотах, а поглощение — на более высоких. В этом смысле частотный характер нерелятивистской циклотронной

неустойчивости на модах Бернштейна отличается, например, от соответствующей зависимости черенковского инкремента для плазменных волн в изотропной плазме (15.18), где полоса затухания расположена ниже по частоте, чем полоса неустойчивости. Это отличие вызвано разным характером дисперсии мод Бернштейна и плазменных волн: первые на частотах ниже гибридной частоты  $\omega_h = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_B^2}$  обладают аномальной дисперсией ( $\omega$  уменьшается с ростом  $k$ ; см. Рис. 14), тогда как вторые имеют нормальную дисперсию ( $\omega$  растет вместе с  $k$ ; см. (5.13)).

Явные выражения для нерелятивистских инкрементов на модах Бернштейна нетрудно получить с помощью соотношений (15.17), (5.58), (5.61) и (16.10); в предельных случаях малых и больших  $\chi$  они имеют такой вид [96]

$$\begin{aligned} -\gamma &\approx \sqrt{\pi} \frac{\omega_L s^2}{\omega_L^2} \omega_B s (s^2 - 1) Z_s e^{-Z_s^2} \varphi'_s(\chi_e), & \chi \ll 1, Z_s < 0, \\ -\gamma &\approx -\sqrt{\pi} \frac{\omega_L s^2}{\omega_B} s Z_s e^{-Z_s^2} \varphi'_s(\chi_e), & \chi \rightarrow \infty, Z_s > 0. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Зависимость  $\gamma(k_{\parallel})$  здесь определяется функцией  $Z_s e^{-Z_s^2}$ . Максимальный инкремент соответствует значению  $Z_s = 1/\sqrt{2}$  от

$$k_{\parallel}^{\max} = \frac{\omega - s\omega_B}{v_e}. \quad (16.14)$$

Комбинируя (16.14) с условием реализации нерелятивистской конусной неустойчивости (16.5), получим неравенство

$$|\delta_s| \equiv \left| \frac{\omega - s\omega_B}{s\omega_B} \right| \gg \frac{v_e^2}{2c^2}. \quad (16.15)$$

При нарушении этого неравенства  $k_{\parallel}^{\max}$  выходит за пределы области, в которой возможна циклотронная неустойчивость без учета релятивистской зависимости массы электронов от скорости.

Для исследования зависимости  $-\gamma$  от частоты  $\omega$  и  $k_{\parallel}$  в широком интервале значений  $\chi$ ,  $Z_s$ ,  $Z_{s-1}$  формулы (16.13) недостаточны и следует обратиться к выражению (15.17), в котором фигурируют  $\epsilon_{\parallel}^{(0)}$  и  $\epsilon_{\parallel}^{(1)}$ , заданные непосредственно формулами (5.55) и (16.9). Здесь нельзя обойтись без численных расчетов, результаты которых представлены на Рис. 50 в виде графиков зависимости инкремента  $-\gamma$ , максимизированного по  $k_{\parallel}$ , от частоты  $\omega$ . Из рисунка ясно, что, например,



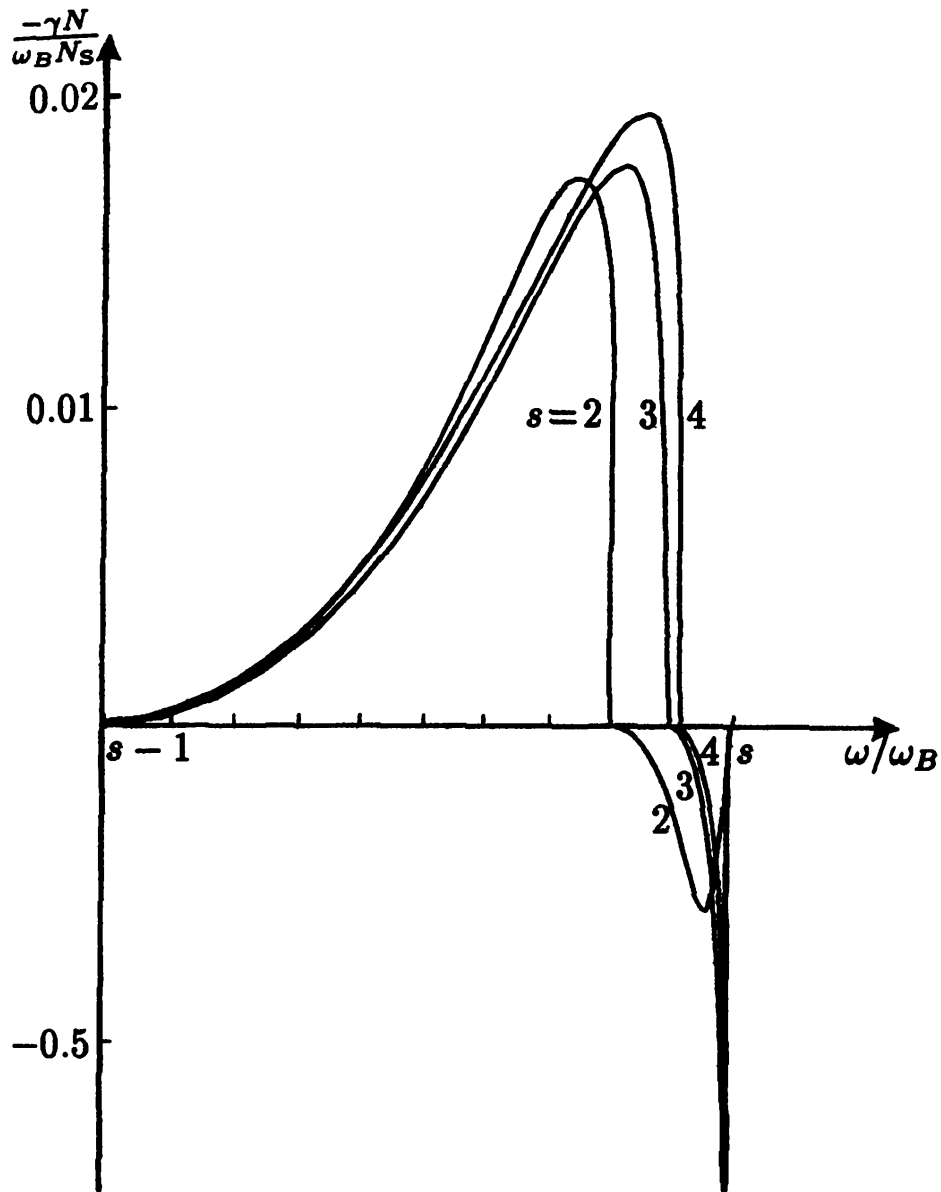


Рис. 50. Частотная зависимость нерелятивистского циклотронного инкремента для мод Бернштейна при  $\omega_L/\omega_B=5$ ,  $v_e/v_T=4$  и  $s=2, 3, 4$  (в различных масштабах для  $\gamma > 0$  и  $\gamma < 0$ )

в интервале частот  $\omega_B < \omega < 2\omega_B$  полоса интенсивного циклотронного поглощения занимает около  $0.2\omega_B$ ; остальной интервал приходится на долю циклотронной неустойчивости с максимальным значением инкремента  $-\gamma_{\max} \approx 10^{-2}\omega_B N_S/N$ . Ширина полос неустойчивости мало меняется с изменением номера гармоники  $s$ . Это означает, что частотный спектр возбужденных мод Бернштейна представляет собой последовательность квазиэквидистантных полос, повторяющихся через интервалы по частоте, близкие к  $\omega_B$ .

При малых  $k_{\parallel}$ , где условие (16.15) не соблюдается, роль релятивистских эффектов становится существенной (в смысле положения полюса (16.4) на плоскости  $p_{\parallel}, p_{\perp}$ ). При строго поперечном распространении ( $k_{\parallel}=0$ ) положение полюса целиком определяется зависимостью массы энергичных электронов от скорости. Для оценки ширины полосы частот, где реализуется релятивистская циклотронная неустойчивость, можно использовать элементарные квантовые соображения, которые заключаются в следующем.

Циклотронное излучение электрона в направлении, перпендикулярном к  $B_0$ , сопровождается уменьшением величины  $p_{\perp}^2$  при постоянном  $p_{\parallel}$  (нормальный эффект Доплера, см. §10). Тогда для частиц, распределенных в импульсном пространстве по закону (16.2), инверсия населенностей имеет место в области, где  $\partial f_s/\partial p_{\perp}^2 > 0$ , т.е. при значениях  $p_{\perp} < \sqrt{2}a$ . С другой стороны, излучение на частоте  $\omega$  поглощается и испускается частицами, чей импульс

$$p = \tilde{p} \equiv m_e c \sqrt{\frac{s^2 \omega_B^2}{\omega^2} - 1} \quad (16.16)$$

(формула (16.16) — решение доплеровского уравнения (16.4) при  $k_{\parallel}=0$  на гармонике  $l=s$ ). Отсюда следует, что частотам, удовлетворяющим неравенству

$$0 < m_e c \sqrt{\frac{s^2 \omega_B^2}{\omega^2} - 1} < \sqrt{2}a, \quad (16.17)$$

соответствуют переходы в области  $\partial f_s/\partial p_{\perp}^2 > 0$  (для  $p_{\parallel}=0$ ). Поэтому в интервале частот (16.17) инкремент  $-\gamma > 0$ , т.е. система становится неустойчивой. Благодаря малости отношения  $a^2/m_e^2 c^2$  (см. (16.3)) полоса неустойчивости  $\Delta\omega$  расположена близ  $\omega = s\omega_B$ , примыкая к гармонике  $s\omega_B$  снизу; ее ширина

$$\Delta\omega \sim \frac{s\omega_B v_e^2}{c^2}. \quad (16.18)$$

На высоких гармониках  $s$  ширина полосы неустойчивости  $\Delta\omega$  может стать сравнимой с  $\omega_B$  даже при  $v_e^2/c^2 \ll 1$ . Более точный кинетический расчет [96] приводит к значению

$$\Delta\omega = s\omega_B \frac{v_e^2}{c^2} \frac{B_1}{B_2}, \quad (16.19)$$

где

$$B_1 = \int_0^{\pi/2} J_s^2(\xi) \sin \vartheta d\vartheta \quad B_2 = \int_0^{\pi/2} J_s^2(\xi) \sin^3 \vartheta d\vartheta,$$

(аргумент  $\xi = k_{\perp} \tilde{p} \sin \vartheta / m_e \omega_B$ ,  $\vartheta$  — питч-угол электронов). Величины  $B_1$  и  $B_2$  одного порядка, но  $B_1 > B_2$ : например, при  $\xi \ll 1$  отношение  $B_1/B_2 = 7/6$ . Некоторое увеличение полосы неустойчивости  $\Delta\omega$  (16.19) по сравнению с оценкой (16.18) вполне естественно: неустойчивость сохраняется, если часть переходов совершается в области, где  $\partial f_s / \partial p_{\perp}^2 < 0$ ; инкремент меняет знак, когда число таких переходов будет достаточно велико по сравнению с переходами в области  $\partial f_s / \partial p_{\perp}^2 > 0$ .

Согласно [96] релятивистский инкремент циклотронной неустойчивости

$$-\gamma = \sqrt{2\pi} \frac{\omega_{LS}^2}{\omega^2} \left( \frac{\partial \epsilon_{\parallel}^{(0)}}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{v_T^2 c^2}{v_e^4} \frac{s y}{\chi} (B_1 - \frac{1}{2} y^2 B_2) e^{-y^2/2}, \quad (16.20)$$

где  $y = \tilde{p}/a$  (см. (16.16)). Для мод Бернштейна на частотах, близких к  $s\omega_B$ ,<sup>119</sup>

$$y^2 = \frac{2(s - \omega/\omega_B)c^2}{s v_e^2} \simeq \frac{c^2 s^2 - 1}{v_e^2} \frac{1}{s!} \left( \frac{\chi}{2} \right)^{s-1}, \quad (16.21)$$

$$\frac{\partial \epsilon_{\parallel}^{(0)}}{\partial \omega} \simeq \frac{2\omega_L^2}{\omega_B^3} \frac{(s-2)!}{(s^2-1)(s+1)} \left( \frac{\chi}{2} \right)^{-s+1} \quad (16.22)$$

Внимание к генерации мод Бернштейна в космической плазме было привлечено благодаря интерпретации на их основе некоторых кратковременных явлений в солнечном радиоизлучении, обладающих своеобразным частотным спектром. Этот спектр и его изменение во времени<sup>120</sup> представлены на Рис. 51 [350]. ; он обладает полосой излучения на низких частотах, к которой примыкает интервал сильного

<sup>119</sup> Формулы (16.21) и (16.22) справедливы в плазме с  $\omega_B \ll \omega_L$  на гармониках  $s \ll \omega_L/\omega_B$  и при условии  $\chi \ll 1$  (см. (5.58), (5.59)).

<sup>120</sup> Диаграмму зависимости интенсивности излучения от частоты и времени называют в радиоастрономии динамическим спектром излучения.

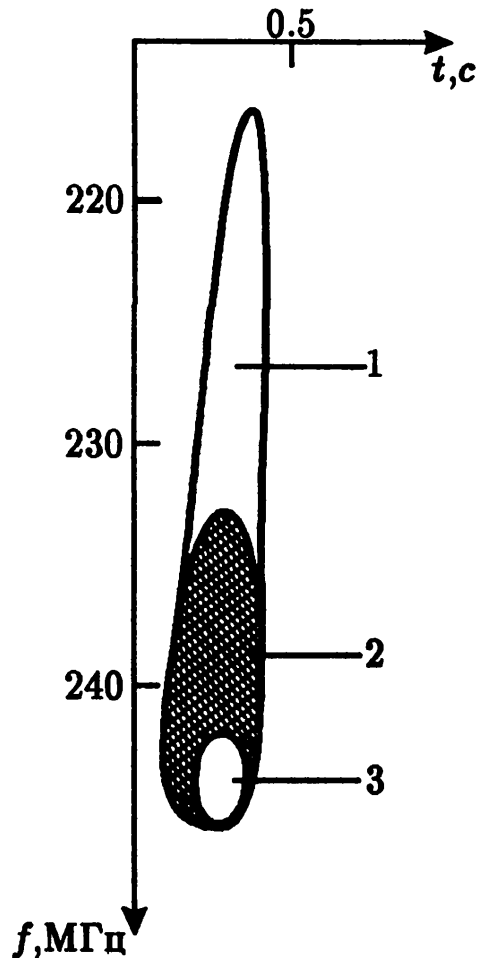


Рис. 51. Динамический спектр отдельного элемента в солнечном радиоизлучении 2 марта 1970 года [350]: 1 — излучающая область, 2 — область поглощения, 3 — яркий “глаз”

поглощения на более высоких частотах: этот интервал заканчивается яркой узкополосной “точкой”. Можно видеть, что ход нерелятивистского циклотронного инкремента на модах Бернштейна (см. Рис. 50) повторяет частотный спектр указанного явления в полосе излучения и интервале поглощения. При этом излучающая полоса соответствует циклотронной неустойчивости, а “темная” область — сильному циклотронному поглощению. Яркий “глаз” при этом связан с положительным релятивистским инкрементом в узкой полосе частот близ  $\omega_B$ . Параметры неравновесной компоненты, величины  $\omega_L$  и  $\omega_B$  в корональной плазме, требования к однородности магнитного поля в источнике излучения см. в [97]. Здесь мы не станем останавливаться на этих вопросах; отметим лишь, что частотный спектр на модах Бернштейна, обеспечиваемый циклотронной неустойчивостью и затуханием, сохранится в общих чертах и на электромагнитных волнах, выходящих за пределы солнечной короны при условии, если радиоизлучение возникает вследствие комбинационного рассеяния (слияния) мод Бернштейна (см. §21).

### 16.3. Кинетическая неустойчивость в гибридной полосе

Здесь характер циклотронной неустойчивости имеет свои особенности, которые связаны с отличием дисперсионных кривых в этой полосе от соответствующих кривых для мод Бернштейна на частотах ниже гибридной (см. Рис. 15). Это отличие имеет место в интервале по  $\chi = k_{\perp}^2 v_T^2 / \omega_B^2 < s$ , где аномальная дисперсия, характерная для мод Бернштейна, сменяется нормальной, с законом дисперсии в форме (5.60). Коэффициент циклотронной неустойчивости для продольных волн в гибридной полосе по-прежнему определяется выражением (15.17) с  $\text{Im} \epsilon_{\parallel}^{(1)}$  в форме (16.9) (кинематический инкремент) и формулой (16.20). Однако в гибридной полосе на частотах, соответствующих нормальной дисперсии ( $\chi < s$ ), значения производной  $\partial \epsilon_{\parallel}^{(0)} / \partial \omega$ , фигурирующей в (15.17) и (16.20), значительно меньше соответствующих значений для мод Бернштейна и для части дисперсионной кривой  $\chi > s$  с аномальной дисперсией в гибридной полосе.<sup>121</sup> Поскольку эта производная входит в знаменатель выражения (15.17) для инкремента, на частотах, близких к гибридной частоте, следует ожидать более сильной неустойчивости, чем на модах Бернштейна.

В случае циклотронной неустойчивости в области нерелятивистского эффекта Доплера (16.5) высокие значения инкремента реализуются при достаточно больших отношениях  $v_e / v_T$ , перемещающих границу неустойчивости  $\chi_{\text{ср}}$  (16.12) в область нормальной дисперсии ( $\chi_{\text{ср}} < s$ ). Если же  $v_e / v_T$  невелико,  $\chi_{\text{ср}}$  будет больше  $s$ , и неустойчивость возникает лишь в области аномальной дисперсии, с инкрементами, характерными для мод Бернштейна.

Графики зависимости циклотронного инкремента (максимизированного по  $k_{\parallel}$ ) от параметра  $\chi$  в гибридной полосе приведены на Рис. 52. Сплошными кривыми на рисунке отмечены те значения инкремента, которые соответствуют  $|k_{\parallel}^{\text{max}}| \gg \omega v_e / 2c^2$  (см. (16.5)); пунктир относится к случаю, когда наибольший инкремент на фиксированной частоте достигается при  $|k_{\parallel}^{\text{max}}| \sim \omega v_e / 2c^2$ , т.е. на границе между нерелятивистским и релятивистским (“поперечным”) эффектами Доплера.

Из рисунка ясно, что величина инкремента в гибридной полосе существенно зависит (при условии  $\chi_{\text{ср}} < s$ , которое выполнено для всех кривых Рис. 52) от величины отношения  $\omega_h / \omega_B$ : инкремент увеличи-

<sup>121</sup> Например, при  $\chi \ll 1$  на гибридной частоте  $\partial \epsilon_{\parallel}^{(0)} / \partial \omega \approx 2 / \omega_h$ , что значительно меньше производной  $\partial \epsilon_{\parallel}^{(0)} / \partial \omega$  (16.22) на модах Бернштейна при тех же значениях  $\chi$ .

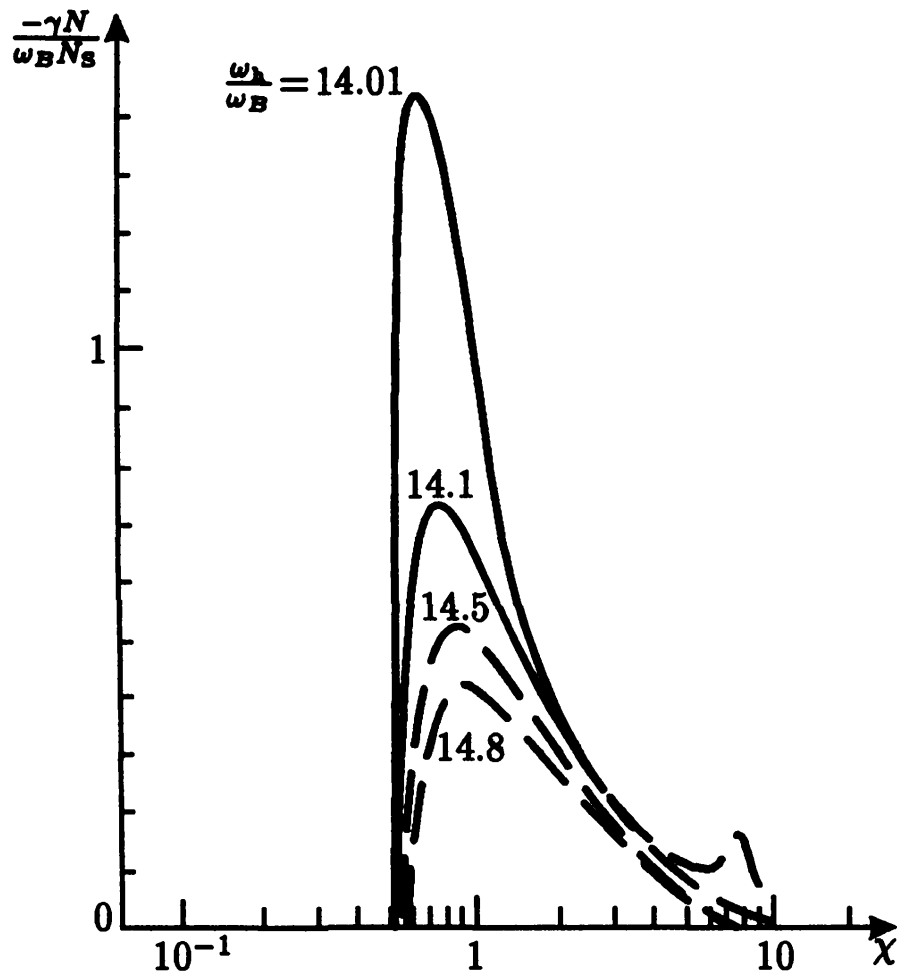


Рис. 52. Зависимость инкремента нерелятивистской циклотронной неустойчивости в гибридной полосе  $14\omega_B < \omega < 15\omega_B$  от параметра  $\chi = k_{\perp}^2 v_T^2 / \omega_B^2$  при различных фиксированных значениях отношения  $\omega_h / \omega_B$

вается по мере приближения гибридной частоты  $\omega_h$  к одной из гармоник  $s\omega_B$ , т.е. при наступлении двойного плазменного резонанса. Для выбранных значений параметров  $v_e/v_T$  и  $s$  повышенные инкременты занимают близ  $s\omega_B$  интервал частот  $\Delta\omega \lesssim (0.1-0.2)\omega_B$ , а величина инкремента в несколько раз превышает соответствующее значение  $(-\gamma)$  в гибридной полосе вдали от области двойного резонанса и на один-два порядка больше инкремента на модах Бернштейна. Выражение для релятивистского инкремента (при распространении продольных волн поперек магнитного поля) по-прежнему определяется формулой (16.20). Теперь, однако, в ней следует учесть иной характер зависимости  $\partial\epsilon_{\parallel}^{(0)}/\partial\omega$  в гибридной полосе, в частности, для области нормальной дисперсии (5.60) величина  $\partial\epsilon_{\parallel}^{(0)}/\partial\omega|_{\epsilon_{\parallel}^{(0)}=0} \approx 2/\omega_h$ . Если  $sv_e^2/c^2 \ll 1$ , релятивистская неустойчивость может реализоваться лишь в узком интервале (16.19), примыкающем снизу к  $s\omega_B$ . Однако при достаточно больших значениях отношения  $\omega_h/\omega_B$  (т.е. при достаточно высоких  $s$ ) величина  $sv_e^2/c^2$  становится сравнимой с единицей. В этом случае интервал релятивистской циклотронной неустойчивости  $\Delta\omega$  занимает значительную часть гибридной полосы; при  $\Delta\omega \gtrsim \omega_B$  в формуле для инкремента уже нельзя оставлять одну гармонику  $l=s$ , как это было сделано при переходе к (16.20).

Усиленная генерация продольных волн при двойном плазменном резонансе в корональной плазме открывает возможность объяснения “зебра”-структуры, иногда появляющейся на динамических спектрах солнечного радиоизлучения. Указанная структура представляет собой систему параллельных дрейфующих полос с повышенным уровнем радиоизлучения, разделенных примерно одинаковыми частотными интервалами. Возникновение такой структуры, возможно, происходит следующим образом [97, 351]. Пусть энергичные электроны с распределением типа (16.2), обеспечивающим развитие конусной циклотронной неустойчивости, заполняют узкую силовую трубку магнитного поля в солнечной короне (Рис. 53). Один из вариантов распределения вдоль силовой трубки гибридной частоты  $\omega_h = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_B^2}$  и гирочастоты  $\omega_B$  вместе с гармониками  $s\omega_B$  изображен схематически на Рис. 54. Точки пересечения кривых на этом рисунке определяют области двойного плазменного резонанса  $\omega_h = s\omega_B$ , соответствующие избранным значениям координаты вдоль трубки  $l=l_s$ . В этих областях, как уже отмечалось выше, происходит усиленная генерация продольных волн на частотах  $\omega_s \approx \omega_h$ .

Радиоизлучение при этом может возникать или за счет слияния

возбужденных плазменных волн (с результирующей частотой  $\omega = 2\omega_s$ ) или вследствие их рассеяния на частицах плазмы (тогда частота радиоизлучения будет близка к  $\omega_s$ ; см. §18, §21)). В обоих случаях на динамическом спектре появится система полос, параллельных оси времени; в соответствии с изложенным, области генерации разных полос локализованы в различных частях распределенного источника. Рассматривая Рис. 54, нетрудно сообразить, что расстояние между соседними областями двойного резонанса  $l_{s-1}$  и  $l_s$  составляет

$$\Delta l \simeq \frac{L_B L_N}{(s-1)L_B - sL_N}, \quad (16.23)$$

где  $L_B = \omega_B (d\omega_B/dl)^{-1}$  и  $L_N = \omega_L (d\omega_L/dl)^{-1}$  — характерные масштабы изменения магнитного поля и электронной концентрации в короне вдоль магнитной трубки. При получении (16.23) предполагалось, что  $\omega_L \gg \omega_B$ , так что  $\omega_h \approx \omega_L$ . Далее, частотный интервал между двумя ближайшими полосами излучения в радиоспектре  $\Delta\omega = 2|\omega_s - \omega_{s-1}|$  можно представить в форме [98]

$$\Delta\omega \approx \frac{2(s-1)\omega_B L_B}{|(s-1)L_B - sL_N|}. \quad (16.24)$$

В зависимости от величины отношения  $L_N/L_B$  интервал  $\Delta\omega$  меняется от  $2\omega_B$  (при  $L_N/L_B \ll 1$ ) до  $2\omega_B L_B/L_N$  (если  $L_N/L_B \gg 1$ ). Интервалы  $\Delta\omega$  здесь указаны в предположении, что радиоизлучение возникает на удвоенной плазменной частоте. Если же радиоизлучение возникает главным образом на частотах  $\omega \approx \omega_L$ , интервалы  $\Delta\omega$  следует сократить вдвое. Заметим, наконец, что вариации в распределении магнитного поля и концентрации корональной плазмы по силовой трубке приведут к изменению частотных интервалов между соседними полосами и дрейфу всей системы полос на динамическом спектре — явлениям, часто наблюдаемым при регистрации “зебра”-структуры.

Отметим также, что в условиях солнечной короны конусная циклотронная неустойчивость, реализующаяся в магнитных ловушках, обладающих арочной структурой, рассматривается как одна из основных причин возбуждения плазменных волн, которые ответственны за создание некоторых разновидностей солнечного радиоизлучения IV типа [345].

#### 16.4. Гидродинамическая неустойчивость при двойном плазменном резонансе

Выше рассматривалась только кинетическая циклотронная неустойчивость, связанная с вычетом в интегральном выражении для



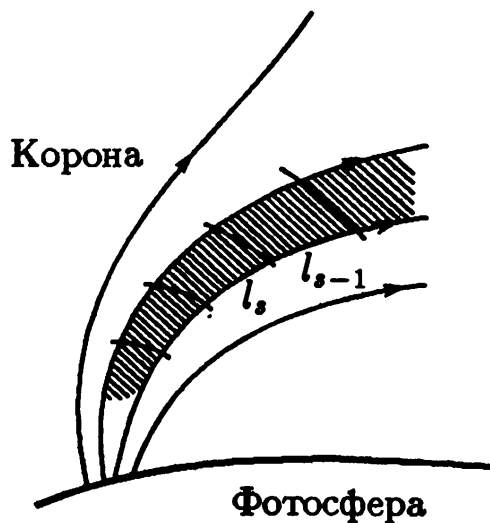


Рис. 53. Модель распределенного источника для солнечного радиоизлучения, обладающего “зебра”-структурой. Область, занимаемая энергичными электронами, заштрихована ( $l$  — координата вдоль силовой трубки)

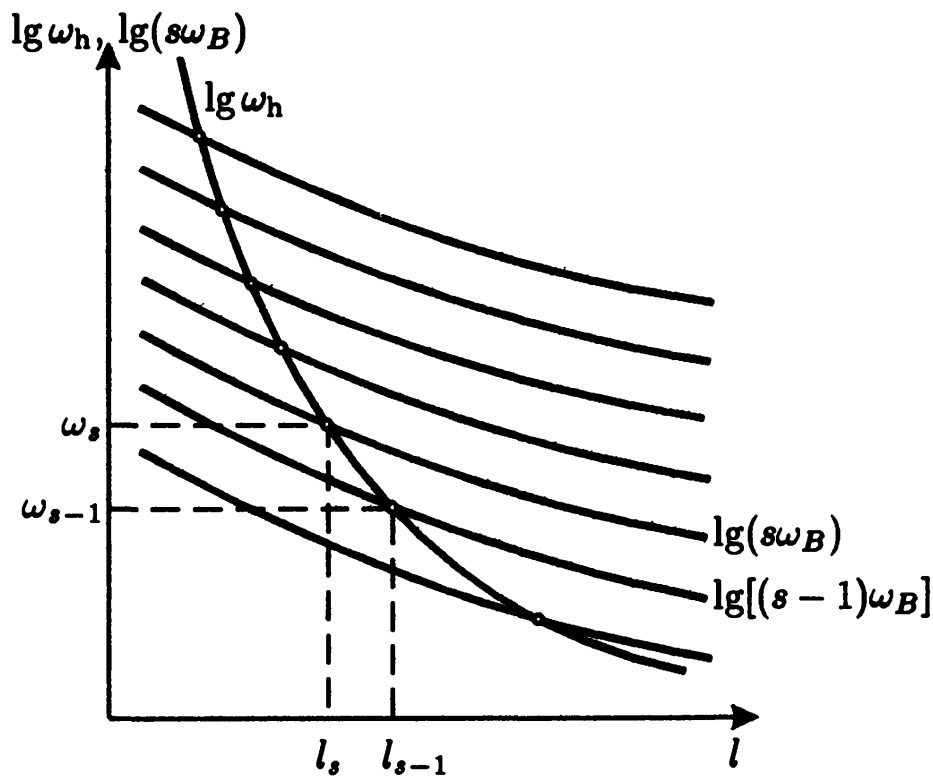


Рис. 54. Распределение  $\omega_h(l)$ ,  $\omega_B(l)$  и  $s\omega_B(l)$  по магнитной силовой трубке

$\text{Im} \epsilon_{\parallel}^{(1)}$  (4.97). Эта неустойчивость появляется (при классическом рассмотрении задачи) только в рамках кинетического уравнения, которому она и обязана своим названием. Однако при достаточно высокой концентрации энергичных частиц или при малой дисперсии их скоростей вкладом  $\text{Im} \epsilon_{\parallel}^{(1)}$  в величину инкремента можно пренебречь, если при этом возникает более сильная неустойчивость, связанная с  $\text{Re} \epsilon_{\parallel}^{(1)}$ .<sup>122</sup> Указанный режим неустойчивости называют гидродинамическим, по аналогии с неустойчивостью в системе поток – плазма без дисперсии частиц по скоростям, которая также связана с  $\text{Re} \epsilon_{\parallel}^{(1)}$  и вместе с тем допускает описание с помощью квазигидродинамических уравнений (см. §15).

При распространении волн поперек магнитного поля ( $k_{\parallel} = 0$ ,  $k_{\perp} = k$ ) резонансное условие (16.4) для слаборелятивистских частиц приобретает следующий вид:

$$(1 + p^2/2m_e^2c^2)\omega - l\omega_B = 0. \quad (16.25)$$

Если дисперсия частиц по импульсам  $\Delta p$  достаточно мала — в случае распределения типа (16.2) это имеет место при условии

$$|\omega - l\omega_B| \gg \omega a^2/2m_e^2c^2 = \omega v_e^2/2c^2, \quad (16.26)$$

то зависимостью массы электрона от скорости в дисперсионном уравнении  $\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 0$ , равно как и ролью вычета в интеграле при вычислении  $\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k})$  (4.97), можно пренебречь. Тогда уравнение  $\epsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) = 0$  может быть представлено в такой форме:

$$1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - \omega_B^2} + \frac{8\pi^2 e^2 m_e}{k^2} \times \\ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l\omega_B}{\omega - l\omega_B} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} J_l^2(\xi) \frac{\partial f_S}{\partial p_{\perp}} = 0 \quad (16.27)$$

(аргумент функции Бесселя  $\xi = kp_{\perp}/m_e\omega_B$ ). Первые два члена здесь характеризуют продольную диэлектрическую проницаемость в основной плазме на частотах, близких к гибридной частоте  $\omega_h = \sqrt{\omega_L^2 + \omega_B^2}$  (т. е. при необходимом условии  $\chi = k^2 v_{\perp}^2 / \omega_B^2 \ll 1$  (см. (5.58)). Последний член определяет вклад в  $\epsilon$  примеси энергичных (но нерелятивистских) электронов с функцией распределения  $f_S(p) = f_S(p_{\parallel}, p_{\perp})$ .

<sup>122</sup>Разделение  $\epsilon_{\parallel}^{(1)}$  на действительную и мнимую части проводится здесь при действительных значениях  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ .

Если частота волны близка к одной из гармоник:  $\omega \approx s\omega_B$ , то в (16.27) из бесконечной суммы можно удержать только один член с  $l = s$ . Считая далее, что в системе реализуется двойной плазменный резонанс  $s\omega_B = \omega_h$ , будем искать решение для частоты в виде  $\omega = \Omega + \delta$ , где  $\Omega = s\omega_B = \omega_h$ . Подставив это значение  $\omega$  в дисперсионное уравнение и предполагая  $\omega_{LS}$  достаточно малой вместе с поправкой к частоте  $\delta$ , получим

$$\delta^2 \simeq \frac{\pi m_e \omega_{LS}^2 \omega_L^2}{k \omega_B N_S} \Phi_s, \quad (16.28)$$

где

$$\Phi_s = \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \int_0^{\infty} dp_{\perp} f_s \frac{dJ_s^2}{d\xi}. \quad (16.29)$$

Квадратное уравнение для  $\delta$  имеет два решения, отличающихся знаком. Если  $\Phi_s < 0$ , то оба решения — чисто мнимые и один из корней соответствует нарастающей волне с инкрементом  $-\gamma = |\delta|$ . Для распределения типа  $f_s = (N_S/2\pi p_{\perp}^0) \delta(p_{\parallel}) \delta(p_{\perp} - p_{\perp}^0)$  фактор  $\Phi_s = (N_S/2\pi p_{\perp}^0) \cdot dJ_s^2/d\xi_0$ , где аргумент функции Бесселя  $\xi_0 = kp_{\perp}^0/m_e \omega_B$ . В этом случае

$$\delta^2 \simeq \frac{\omega_{LS}^2 \omega_L^2}{2\omega_B^2} \frac{1}{\xi_0} \frac{dJ_s^2}{d\xi_0} \quad (16.30)$$

и гидродинамическая циклотронная неустойчивость возникает в системе полос по  $k$ , где отрицательна производная от  $dJ_s^2/d\xi_0$ .

Для распределения энергичных частиц вида (16.2) гидродинамический режим неустойчивости возможен только при достаточно больших значениях концентрации  $N_S$ . В самом деле, функция  $\Phi_s$  тогда записывается в форме

$$\Phi_s = \frac{N_S}{2\pi m_e v_e} \sqrt{\chi_e} \varphi'_s(\chi_e), \quad (16.31)$$

где  $\varphi_s(\chi_e)$  — из (16.7), а производная от  $\varphi_s$  берется по аргументу  $\chi_e = k^2 v_e^2 / \omega_B^2$ . Поправка  $\delta$  к нулевому приближению для частоты  $\Omega = s\omega_B = \omega_h$  определяется, в соответствии с (16.28), уравнением

$$\delta^2 \simeq \frac{\omega_{LS}^2 \omega_L^2}{2\omega_B^2} \varphi'_s(\chi_e). \quad (16.32)$$

Зависимость  $\varphi'_s$  от  $\chi_e$  меняет знак в точке  $\chi_e = \chi_e^{cr} \approx s^2$ , величина  $\varphi'_s > 0$  при  $\chi_e < \chi_e^{cr}$  и отрицательна в области  $\chi_e > \chi_e^{cr}$ . Поэтому в

указанной области имеет место гидродинамическая неустойчивость с инкрементом<sup>123</sup>

$$-\gamma \approx \frac{\omega_{LS}\omega_L}{\omega_B} \sqrt{-\frac{1}{2}\varphi'_s(\chi_e)}. \quad (16.33)$$

Рассмотренная неустойчивость возможна только при условии

$$|\gamma| \gg \omega_L v_e^2 / 2c^2, \quad (16.34)$$

которое следует из (16.26), если в последнем учесть, что  $l = s$  и  $\omega = \Omega - i\gamma$ , где  $\Omega = s\omega_B = \omega_h$ . Принимая во внимание конкретный вид гидродинамического инкремента (16.33), из (16.34) получаем

$$\frac{\omega_{LS}}{\omega_B} \sqrt{-2\varphi'_s(\chi_e)} \gg \frac{v_e^2}{c^2}. \quad (16.35)$$

Этот критерий реализации гидродинамического режима циклотронной неустойчивости выполняется только для достаточно больших значений  $\omega_{LS}$  (т.е. концентрации  $N_S$  примесных электронов). Например, для  $s = 5$  максимум функции  $-\varphi'_s(\chi_e)$  составляет около  $2 \cdot 10^{-4}$ , и гидродинамическая неустойчивость возникнет при  $\omega_{LS}/\omega_B \gg 50v_e^2/c^2$ . В условиях солнечной короны, где  $v_e/c > v_T/c \sim 10^{-2}$ , указанный критерий требует довольно высокой концентрации неравновесных электронов; так, например, при  $v_e \sim 10v_T$  и  $B_0 \sim 20$  Гс ( $\omega_B \sim 4 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup>) величина  $N_S$  должна превышать  $10^7$  см<sup>-3</sup>. Условия возникновения рассмотренной в предыдущем разделе кинетической циклотронной неустойчивости здесь более благоприятные.

Более подробно с гидродинамической циклотронной неустойчивостью можно ознакомиться, обратившись к статьям [95, 349]. Заметим, что циклотронная неустойчивость при определенных условиях существует и в отсутствие плотном максвелловской плазмы, т. е. в однокомпонентной неравновесной системе (см. статьи [348, 352]). Изучение кинетического и гидродинамического режимов неустойчивости в такой системе проведено в работах [95, 353, 354] и др.

В этом параграфе мы смогли рассмотреть только циклотронную неустойчивость продольных волн. Однако это отнюдь не означает, что неустойчивость электромагнитных волн на циклотронных гармониках менее важна и интересна. Вполне возможно, что такая неустойчивость реализуется, например, в плазме солнечной короны и

<sup>123</sup> Отметим, что интервал  $\chi_e$ , где может быть гидродинамическая неустойчивость при двойном плазменном резонансе, совпадает с областью кинетической нерелятивистской неустойчивости на модах Бернштейна (см. критерий (16.11)).

в ионосфере Юпитера, обеспечивая генерацию некоторых компонент радиоизлучения этих объектов [355].

Возможность неустойчивости электромагнитных волн на отдельных гармониках гирочастоты была отмечена в [311] для системы с дефицитом частиц, обладающих малыми поперечными импульсами. Затем она исследовалась для различных вариантов распределения неравновесных частиц по импульсам в работах [84, 356–367] (см. также [72, 73, 368] и приведенную там библиографию). В [359] обращено внимание на циклотронную неустойчивость электромагнитных возмущений в системе с анизотропией температур, т.е. в системе, где функция распределения частиц по скоростям

$$F(v) \propto \exp(-mv_{\perp}^2/2\kappa T_{\perp} - mv_{\parallel}^2/2\kappa T_{\parallel})$$

и  $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$ .

Циклотронная неустойчивость может выступать также как “пучковая” неустойчивость, появляясь в системе “разреженный поток частиц – равновесная плазма” на частотах, отвечающих аномальному эффекту Доплера [79]. В этом случае она имеет ясный физический смысл, который заключается в следующем. В §10 было выяснено, что при испускании кванта  $\hbar\omega$  в области углов  $\alpha$ , соответствующих аномальному доплер-эффекту (10.36), величина квадрата поперечного импульса  $p_{\perp}^2$  увеличивается. Поэтому для распределения  $f_S(p) = f_S(p_{\parallel}, p_{\perp}^2)$ , убывающего с ростом  $p_{\perp}^2$ , число электронов в состоянии до испускания кванта оказывается больше, чем в состоянии, в которое переходит частица после излучения фотона ( $N_m/N_n > 1$ ). Такая инверсия населенностей приводит к усилению и неустойчивости (см. §14). Наоборот, в области нормального эффекта Доплера рассматриваемое распределение по импульсам устойчиво, так как здесь излучение связано с уменьшением величины  $p_{\perp}^2$ ; последнее приводит к обратному отношению населенностей ( $N_m/N_n < 1$ ). Для потока частиц с распределением вида (11.17) критерий неустойчивости [79]:

$$n_j \frac{v_S}{c} \cos \alpha > 1 \quad (16.36)$$

несколько отличается от условия аномального доплер-эффекта (10.36). Дело в том, что при излучении у частицы меняется не только  $p_{\perp}^2$ , но и  $p_{\parallel}$ , — обстоятельство, которое в приведенных рассуждениях не учитывалось.

## §17. Синхротронная реабсорбция и неустойчивость

Если в предыдущих параграфах рассматривались главным образом условия и характер неустойчивости продольных (плазменных) волн, то теперь мы обратимся к неустойчивости плазмы относительно электромагнитных возмущений, проиллюстрировав ее на примере синхротронной неустойчивости. Этот тип неустойчивости непосредственно связан с синхротронным излучением релятивистских частиц в магнитном поле; он возникает в условиях, когда коэффициент синхротронной реабсорбции  $\mu_j$  становится отрицательным. Тогда, в соответствии с принятой терминологией, говорят, что в системе действует когерентный синхротронный механизм. Если же  $\mu_j > 0$ , то в источнике имеет место некогерентный синхротронный механизм. Знание коэффициента реабсорбции в этом случае важно для суждения о характере частотного спектра синхротронного излучения.

### 17.1. Реабсорбция синхротронного излучения

Для расчета коэффициента реабсорбции системы релятивистских электронов в магнитном поле мы используем метод коэффициентов Эйнштейна [312], согласно которому общая формула для  $\mu_j$  имеет вид (14.16). Чтобы получить конкретные выражения для коэффициента реабсорбции синхротронного излучения, учтем то существенное обстоятельство, что синхротронное излучение сосредоточено в малом телесном угле вдоль скорости электрона  $v$ , а частотный спектр излучения практически непрерывный (см. §10). Предположим также для простоты, что распределение релятивистских электронов по импульсам изотропное:  $f_s(p) = f_s(p)$ .

Поскольку при синхротронном излучении испускание кванта  $\hbar\omega$  происходит в направлении мгновенной скорости электрона, закон сохранения импульса принимает такой вид:  $p^{(m)} = p^{(n)} + \hbar k$ , ( $p^{(m)}$  и  $p^{(n)}$  — значения импульса электрона до и после испускания фотона). Соответствующие населенности  $N_m$ ,  $N_n$  состояний ( $m$ ) и ( $n$ ) равны  $f_s(p^{(m)})$  и  $f_s(p^{(n)})$ , причем

$$f_s(p^{(n)}) = f_s(p^{(m)} - \hbar k) \approx f_s(p^{(m)}) - \frac{df_s}{dp} \hbar k. \quad (17.1)$$

Переход к последнему равенству возможен при условии, что функция

распределения электронов мало меняется на интервале  $\Delta p \sim \hbar k$ . Согласно (17.1) разность  $N_n/N_m - 1$ , фигурирующая в выражении для  $\mu_j$  (14.16), равна  $-(\hbar k/f_S(p^{(m)}))(df_S/dp)$ ; поэтому коэффициент реабсорбции синхротронного излучения приобретает вид

$$\mu_j = -\frac{8\pi^3 c^2}{n_j^2 \omega^2} |\cos \vartheta_j| \int A_m^n \hbar k \frac{\partial f_S}{\partial p} d^3 p. \quad (17.2)$$

Здесь суммирование по состояниям  $(m) \leftrightarrow (n)$  заменено интегрированием в импульсном пространстве. Далее учтем, что  $k = (\omega/c)n_j$ ,  $d^3 p = p^2 dp d\Omega$  и вероятность спонтанного излучения  $A_m^n$  связана со спектральной мощностью излучения  $P_{\omega\Omega}$  соотношением (14.7). Тогда

$$\mu_j = -\frac{8\pi^3 c}{n_j \omega^2} |\cos \vartheta_j| \int P_{\omega\Omega} \frac{df_S}{dp} p^2 dp d\Omega, \quad (17.3)$$

где

$$P_{\omega\Omega} = P_{\omega j} \delta(\Omega_{\mathbf{k}} - \Omega). \quad (17.4)$$

В последней формуле  $P_{\omega j}$  — мощность синхротронного излучения в единичном интервале частот в  $j$ -ю нормальную волна  $\delta(\Omega_{\mathbf{k}} - \Omega)$  — дельта-функция,  $\Omega_{\mathbf{k}}$  и  $\Omega$  — единичные векторы вдоль  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}$  соответственно. Здесь мы снова использовали то обстоятельство, что синхротронное излучение сосредоточено в малом телесном угле вдоль скорости (импульса) электрона.

Далее удобно перейти от функции распределения электронов по импульсам  $f_S(p)$  к энергетическому спектру  $N(\mathcal{E})$ . С учетом (17.4) и (11.70) из (17.3) получаем

$$\mu_j = -\frac{8\pi^3 c^2}{n_j \omega^2} |\cos \vartheta_j| \int_0^\infty P_{\omega j}(\omega, \mathcal{E}) \frac{d}{d\mathcal{E}} \left[ \frac{N(\mathcal{E})}{\mathcal{E}^2} \right] \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}. \quad (17.5)$$

В разреженной плазме ( $\omega_L^2/\omega^2 \ll 1$ ) со слабым магнитным полем ( $\omega_B \ll \omega$ ) показатель преломления электромагнитных волн определяется формулой  $n_j^2 = 1 - \omega_L^2/\omega^2$ ; он близок к единице вместе с  $\cos \vartheta_j$ . В этом случае [247, 312]:

$$\mu_j \approx -\frac{8\pi^3 c^2}{\omega^2} \int_0^\infty P_{\omega j}(\omega, \mathcal{E}) \frac{d}{d\mathcal{E}} \left[ \frac{N(\mathcal{E})}{\mathcal{E}^2} \right] \mathcal{E}^2 d\mathcal{E}. \quad (17.6)$$

В (17.6) величина  $P_{\omega j}$  характеризует мощность синхротронного излучения электрона с  $\mathbf{p} \parallel \mathbf{k}$ ;pitch-угол такого электрона  $\vartheta$  совпадает,

очевидно, с углом между магнитным полем  $B_0$  и волновым вектором  $k$ .

При  $\omega_L^2/\omega^2 \ll 1$  и  $\omega_B/\omega \ll 1$  в широком интервале углов  $\alpha$ , где  $\omega_B^2 \sin^4 \alpha / 4\omega^2 \cos^2 \alpha \ll 1$ , выполнено квазипродольное приближение (см. (5.24)). В этом приближении нормальные волны (обыкновенные и необыкновенные) циркулярно поляризованы; мощность синхротронного излучения в каждую волну<sup>124</sup>

$$P_{\omega j}(\omega, \mathcal{E}) = \frac{1}{2} P_{\omega}(\omega, \mathcal{E}), \quad (17.7)$$

где  $P_{\omega}(\omega, \mathcal{E})$  характеризует суммарную мощность синхротронного излучения в обе нормальные волны, определяемую формулой (10.94). (Напомним, что при  $\vartheta \neq \pi/2$  в формуле (10.94) гирочастоту  $\omega_B$  следует заменить на  $\omega_B \sin \vartheta$ .) Из сказанного ясно, что в разреженной изотропной плазме в квазипродольном приближении коэффициент реабсорбции описывается формулой (17.6), в которой

$$P_{\omega j}(\omega, \mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega}{c} \left[ \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \right] \int_{\omega/\omega'_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx. \quad (17.8)$$

Через  $\omega'_c$  здесь обозначена величина

$$\omega'_c = \frac{3}{2} \omega_B \sin \alpha \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \left[ 1 + \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \right]^{-3/2}. \quad (17.9)$$

При произвольных углах  $\alpha$  выражение для  $P_{\omega j}(\omega, \mathcal{E})$  имеет вид [369]:

$$P_{\omega j}(\omega, \mathcal{E}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega}{c} \left[ \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \frac{\omega_L^2}{\omega^2} \right] \times \left[ \int_{\omega/\omega'_c}^{\infty} K_{5/3}(x) dx + \frac{1 - K_j^2}{1 + K_j^2} K_{2/3}(\omega/\omega'_c) \right], \quad (17.10)$$

где  $K_{5/3}$  и  $K_{2/3}$  — функции Макдональда,  $K_j$  — коэффициент поляризации волны  $j$ -го типа (см. (5.34)). Для квазипродольного распространения  $K_j = \pm 1$  и (17.10) переходит в (17.8).

<sup>124</sup>Соотношение (17.7) отражает тот факт, что усредненная по всей диаграмме поляризация синхротронного излучения близка к линейной (с точностью до членов порядка  $m_e c^2/\mathcal{E}$  и  $\sqrt{1 - n^2}$ ); именно поэтому полная мощность излучения  $P_{\omega}$  может быть представлена как сумма двух одинаковых по величине циркулярно поляризованных компонент.



Таблица 3

$\gamma$	1	2	3	4	5
$g(\gamma)$	6.03	4.39	4.08	4.33	5.21
$\bar{g}(\gamma)$	4.33	2.95	2.51	2.76	2.89

### 17.2. Коэффициент реабсорбции для степенного энергетического спектра

Мы уже имели возможность убедиться, что в космических приложениях важную роль играет синхротронное излучение электронов, распределенных по степенному закону  $N(\mathcal{E}) = K\mathcal{E}^{-\gamma}$  (см. §11). Из (17.8) ясно, что влиянием среды на  $P_{\omega j}(\omega, \mathcal{E})$  можно пренебречь в области частот и энергий, удовлетворяющих неравенству (10.95). Если учесть, однако, что излучение и поглощение на частоте  $\omega$  создается в основном частицами с энергией (10.82)  $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_{\max}$ , то критерий, при котором можно не учитывать влияния показателя преломления среды на коэффициент синхротронной реабсорбции,<sup>125</sup> сводится к виду (10.102). На этих частотах величина  $\mu_j$  (17.6), (17.7) может быть представлена (для  $N(\mathcal{E}) \propto \mathcal{E}^{-\gamma}$ ) в следующей форме [247]:

$$\mu_j = 4\pi g(\gamma) \frac{e^3}{m_e} \left( \frac{3e}{m_e^3 c^5} \right)^{\gamma/2} K(B_0 \sin \alpha)^{\frac{\gamma+2}{2}} \omega^{-\frac{\gamma+4}{2}}, \quad (17.11)$$

где

$$g(\gamma) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \Gamma\left(\frac{3\gamma+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+22}{12}\right). \quad (17.12)$$

Величина фактора  $g(\gamma)$  для нескольких значений индекса  $\gamma$  указана в Табл. 17.2. Подставив в (17.11) численные значения констант, получим [247]

$$\mu_j = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi g(\gamma) (3.5 \cdot 10^9)^\gamma K(B_0 \sin \alpha)^{\frac{\gamma+2}{2}} f^{-\frac{\gamma+4}{2}} \text{ см}^{-1}. \quad (17.13)$$

Коэффициенты реабсорбции (17.11), (17.13) описывают поглощение в однородном магнитном поле; они зависят как от величины  $B_0$ ,

<sup>125</sup> Приближение (10.102) мы будем именовать “вакуумным”, не забывая, однако, что при этом среда (“холодная” плазма) по-прежнему формирует поляризацию обыкновенных и необыкновенных волн (круговую — для рассматриваемого случая квазипродольного распространения).

так и от ориентации магнитного поля  $\alpha$ . Если магнитное поле хаотически неоднородно, то степень реабсорбции можно характеризовать коэффициентом поглощения  $\bar{\mu}$ , представляющим собой результат усреднения  $\mu_j$  вдоль луча. Считая для простоты, что магнитное поле одинаково по величине ( $B_0 = \text{const}$ ) и хаотично по направлениям, имеем [66]

$$\bar{\mu} = \int_0^{\pi/2} \mu_j(\alpha) \sin \alpha d\alpha = 4\pi \bar{g}(\gamma) \frac{e^3}{m_e} \left( \frac{3e}{m_e^3 c^5} \right)^{\gamma/2} \mathcal{K} B_0^{\frac{\gamma+2}{2}} \omega^{-\frac{\gamma+4}{2}}, \quad (17.14)$$

где

$$\bar{g}(\gamma) = \frac{\pi\sqrt{3\pi}}{4} \Gamma\left(\frac{\gamma+6}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma+22}{12}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{\gamma+8}{4}\right). \quad (17.15)$$

Значения  $\bar{g}(\gamma)$  для некоторых  $\gamma$  также приведены в Табл. 17.2. После подстановки численных значений констант в формулу (17.14) последняя приобретает следующий вид:

$$\bar{\mu} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi \bar{g}(\gamma) (3.5 \cdot 10^9)^\gamma \mathcal{K} B_0^{\frac{\gamma+2}{2}} f^{-\frac{\gamma+4}{2}} \text{ см}^{-1}. \quad (17.16)$$

Отметим, что значения интенсивности излучения  $I_j$ , найденные из уравнения переноса, в котором фигурируют усредненные излучательная способность  $\bar{a}_\omega$  (11.82) и коэффициент реабсорбции  $\bar{\mu}$  (17.14), будут мало отличаться от точных значений в каждой точке луча, если выполнено условие  $\bar{\mu} l_0 \ll 1$ . Последнее означает, что область квазиоднородного магнитного поля с характерным размером  $l_0$  должна быть оптически тонкой. Поскольку при  $\bar{\mu} l_0 \ll 1$  интенсивность  $I_j$  определяется излучением на интервале  $l \sim \mu^{-1} \gg l_0$  вдоль луча, она характеризуется усредненными по  $l_0$ , величинами  $\bar{a}_\omega$  и  $\bar{\mu}$ . Роль каждого отдельного облака в формировании излучения в данной точке тогда оказывается мало существенной.

Влиянием синхротронной реабсорбции на величину интенсивности излучения вообще можно пренебречь, если оптическая толщина излучающей области  $\tau_j = \mu_j L \ll 1$  ( $L$  — линейный размер источника). В этом случае интенсивность излучения  $I_j = a_\omega L$ ; для степенного энергетического спектра релятивистских электронов  $I_j \propto \omega^{-\frac{\gamma-1}{2}}$  (см. §11, в частности, формулы (11.78), (11.79)). Если же источник оптически толстый:  $\tau_j \gg 1$ , то интенсивность излучения  $I_j = a_\omega / \mu_j$ . Для синхротронного излучения  $a_\omega \propto \omega^{-\frac{\gamma-1}{2}}$ ,  $\mu_j \propto \omega^{-\frac{\gamma+4}{2}}$  и следовательно,

$$I_j \propto \omega^{5/2} \quad (17.17)$$

Таким образом, в области  $\tau_j \gg 1$  синхротронный источник имеет стандартный частотный спектр излучения с индексом  $\alpha = -5/2$  независимо от индекса энергетического спектра излучающих электронов  $\gamma$ .

Благодаря росту коэффициента реабсорбции синхротронного излучения  $\mu_j$  (и  $\bar{\mu}$ ) с уменьшением частоты  $\omega$ , излучающая область становится оптически толстой на достаточно низких частотах. Из сказанного ясно, что частотный спектр синхротронного излучения релятивистских электронов, распределенных по степенному закону, имеет следующий характер (см. Рис. 55): на высоких частотах (где  $\tau_j \ll 1$ ) интенсивность растет с уменьшением частоты, на низких (в области  $\tau_j \gg 1$ ) она падает вместе с частотой. Максимум в спектре достигается при значениях  $\omega \sim \omega_{\text{ср}}$ , где  $\omega_{\text{ср}}$  удовлетворяет условию  $\tau(\omega_{\text{ср}}) = 1$ . Поскольку оптическая толщина равна  $\mu_j L$  или  $\bar{\mu} L$  (где  $\mu_j$  и  $\bar{\mu}$  — из (17.11) и (17.14)), последнее условие связывает между собой значения  $L$ ,  $\mathcal{K}$  и  $B_0 \sin \alpha$  (или просто  $B_0$ ) в дискретном источнике. Если размеры источника  $L$  известны, то положение максимума частотного спектра  $\omega_{\text{ср}}$  устанавливает еще одно недостающее соотношение между  $\mathcal{K}$  и  $B_0$ , позволяющее определить эти величины в источнике синхротронного излучения (см. в этой связи замечания в конце §11).

Эффект синхротронной реабсорбции позволяет объяснить наблюдаемый спад интенсивности инфракрасного излучения у пульсара PSR 0532 в Крабовидной туманности (по сравнению с уровнем излучения в оптическом диапазоне) и оценить параметры источника, если предположить, что излучение этого пульсара в инфракрасных, оптических и рентгеновских лучах создается благодаря действию некогерентного синхротронного механизма в магнитосфере нейтронной звезды (см. подробнее см. [68, 370, 371]). Вместе с тем для распределенного радиоизлучения Галактики синхротронная реабсорбция особой роли не играет: она может оказаться заметной только на очень низких частотах  $f < f_{\text{ср}} \sim 0.1$  МГц. В сказанном нетрудно убедиться с помощью формулы (17.16): из нее следует, что в Галактике (при  $L \sim 10$  кпк  $\approx 3 \cdot 10^{22}$  см,  $B_0 \sim 3 \cdot 10^{-6}$  Гс,  $\mathcal{K} \sim 10^{-14}$  эрг см $^{-3}$ , и  $\gamma = 2$ ) оптическая толщина  $\bar{\mu} L \sim 1$  при  $f_{\text{ср}} = \omega_{\text{ср}}/2\pi \sim 0.1$  МГц.

### 17.3. Синхротронная неустойчивость

Обратимся теперь к отысканию условий, при которых синхротронная реабсорбция становится отрицательной и падающее на систему излучение не поглощается, а наоборот, усиливается в ней. В частности, такая система релятивистских частиц усиливает и свое собственное синхротронное излучение, благодаря чему его уровень превышает

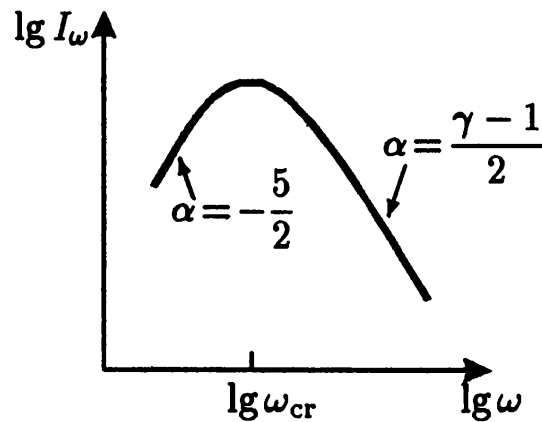


Рис. 55. Частотный спектр синхротронного излучения системы релятивистских электронов со степенным энергетическим спектром (при учете реабсорбции и в пренебрежении влиянием среды)

суммарную интенсивность спонтанного синхротронного излучения от отдельных частиц. Иными словами, в системе реализуется когерентный синхротронный механизм излучения. Отрицательной реабсорбции ( $\mu_j < 0$ ) соответствуют положительные значения инкремента  $-\gamma_j$ ; при рассмотрении временной эволюции такой системы это означает, что в ней возникает синхротронная неустойчивость.

В случае, когда система релятивистских электронов с изотропным распределением по импульсам находится в разреженной плазме со слабым магнитным полем ( $\omega_B/\omega \ll 1$ ,  $1 - n^2 = \omega_L^2/\omega^2 \ll 1$ ), коэффициент синхротронной реабсорбции определяется выражением (17.6). Его можно представить в несколько иной форме, взяв интеграл по частям:

$$\mu_j = \frac{8\pi^3 c^2}{\omega^2} \int_0^\infty \frac{N(\mathcal{E})}{\mathcal{E}^2} \frac{d}{d\mathcal{E}} [\mathcal{E}^2 P_{\omega j}(\omega, \mathcal{E})] d\mathcal{E}. \quad (17.18)$$

Знак  $\mu_j$ , как ясно из этого выражения, зависит в конечном счете от характера изменения  $\mathcal{E}^2 P_{\omega j}$ . Если  $\mathcal{E}^2 P_{\omega j} = \text{const}$ , коэффициент  $\mu_j = 0$ . Когда  $\mathcal{E}^2 P_{\omega j}$  растет вместе с энергией  $\mathcal{E}$ , производная  $d(\mathcal{E}^2 P_{\omega j})/d\mathcal{E} > 0$ , что обеспечивает положительный характер синхротронной реабсорбции. И, наконец, в случае, если в некотором интервале энергий  $d(\mathcal{E}^2 P_{\omega j})/d\mathcal{E} < 0$  соответствующим выбором распределения электронов  $N(\mathcal{E})$  можно обеспечить отрицательность коэффициента синхротронной реабсорбции  $\mu_j$ .

Предположим сначала, что распространение квазипродольное, а нормальные волны поляризованы по кругу. Тогда мощность синхротронного излучения  $P_{\omega j}$  в волну  $j$ -го типа определяется выражением (17.8). Из последнего следует, что влиянием среды на величину  $P_{\omega j}$

можно пренебречь в интервале энергий, где

$$\frac{\omega_L^2}{\omega^2} \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \ll 1 \quad (17.19)$$

(область I); наоборот, это влияние становится определяющим в другом предельном случае (область II), когда

$$\frac{\omega_L^2}{\omega^2} \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2 \gg 1. \quad (17.20)$$

Посмотрим сначала, какой вклад в коэффициент реабсорбции на частоте  $\omega$  дают электроны из интервала энергий (17.19) (из области I). Согласно (17.8) в этом интервале

$$P_{\omega j} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega}{c} \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \int_z^\infty K_{5/3}(x) dx, \quad (17.21)$$

где

$$z \equiv \frac{\omega}{\omega'_c} \approx \frac{2}{3} \frac{\omega}{\omega_B \sin \alpha} \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2. \quad (17.22)$$

Отсюда следует, что  $d(\mathcal{E}^2 P_{\omega j})/d\mathcal{E} > 0$ , т.е. величина  $\mathcal{E}^2 P_{\omega j}$  монотонно возрастает с ростом  $\mathcal{E}$ . Поэтому интервал I дает положительный вклад в коэффициент реабсорбции (17.18), равный

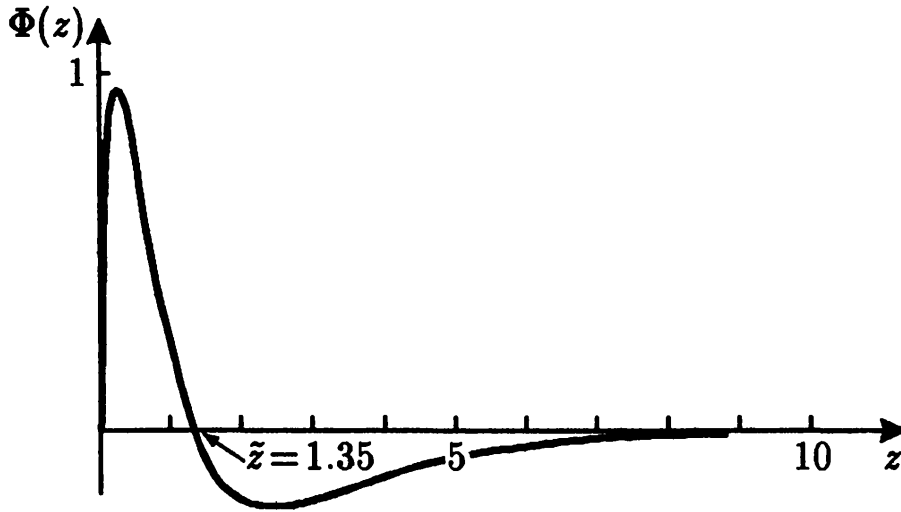
$$\mu^I = \frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{e^2 c}{\omega_B \sin \alpha} (m_e c^2)^4 \int_0^{\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_*} \frac{N(\mathcal{E})}{\mathcal{E}^5} K_{5/3}(z) d\mathcal{E}. \quad (17.23)$$

Здесь  $z$  связано с  $\mathcal{E}$  соотношением (17.22); величина  $\mathcal{E}_* = m_e c^2 \omega / \omega_L$ , т.е. верхний предел в интеграле (17.23) выбран так, чтобы удовлетворить условию слабого влияния среды (17.19).

Заметим, что в “вакууме” (при  $\omega_L \rightarrow 0$ ) неравенство (17.19) выполнено при любых энергиях и в формуле (17.23) верхний предел можно заменить на бесконечный. В этом случае (17.23) определяет полный коэффициент синхротронной реабсорбции (для циркулярно поляризованных волн); он всегда положителен независимо от формы изотропного энергетического спектра  $N(\mathcal{E})$  релятивистских частиц [30, 372]. Это свидетельствует об отсутствии в рассматриваемых условиях синхротронной неустойчивости.

Перейдем теперь к исследованию интервала II (17.20), где роль среды весьма существенна. Согласно (17.8) в этом интервале

$$P_{\omega j} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega_L^2}{c \omega} \int_z^\infty K_{5/3}(x) dx, \quad (17.24)$$


 Рис. 56. График функции  $\Phi(z)$ 

где

$$z \equiv \frac{\omega}{\omega'_c} \approx \frac{2}{3} \frac{\omega_L^3}{\omega^2 \omega_B \sin \alpha} \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2}. \quad (17.25)$$

Тогда производная

$$\frac{d}{d\mathcal{E}}(\mathcal{E}^2 P_{\omega j}) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{e^2 \omega \omega_B \sin \alpha}{c \omega_L} m_e c^2 \Phi(z). \quad (17.26)$$

Здесь через  $\Phi(z)$  обозначена функция

$$\Phi = 2z \int_z^\infty K_{5/3}(x) dx - z^2 K_{5/3}(z). \quad (17.27)$$

Эта функция — знакопеременная, поскольку, как нетрудно убедиться,  $\int_0^\infty \Phi(z) dz = 0$ . Из графика  $\Phi(z)$ , приведенного на Рис. 56, ясно, что  $\Phi(z) > 0$  при  $0 < z < \tilde{z}$  и  $\Phi(z) < 0$ , если  $z > \tilde{z}$ ; смена знака происходит в точке  $z \approx 1.35$ .

Учитывая (17.24) и (17.26), из (17.18) получаем, что вклад в коэффициент реабсорбции  $\mu_j$  от электронов из интервала II (17.20) составляет

$$\mu^{\text{II}} = 2\pi^2 \sqrt{3} e^2 c \frac{\omega_B \sin \alpha}{\omega_L \omega} m_e c^2 \int_{\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_*}^\infty \frac{N(\mathcal{E})}{\mathcal{E}^2} \Phi(z) d\mathcal{E}, \quad (17.28)$$

Величина  $z$  связана с  $\mathcal{E}$  соотношением (17.25); нижний предел интегрирования (с  $\mathcal{E}_* = m_e c^2 \omega / \omega_L$ ) выбран так, чтобы удовлетворить условию существенного влияния среды (17.20).

Для получения полного коэффициента реабсорбции синхротронного излучения в присутствии среды (“холодной” плазмы) следует,

очевидно, сложить выражения (17.23) и (17.28), добавив к ним соответствующий интеграл в промежуточном интервале между I и II. В этом интервале, однако, выражение для  $P_{\omega j}$  не упрощается, поэтому при расчете  $\mu_j$  в общем случае для широкого энергетического спектра релятивистских электронов следует пользоваться точной формулой для  $P_{\omega j}$  (17.8), а не ее предельными выражениями (17.21), (17.24). Однако из отрицательности функции  $\Phi(z)$  при  $z > \tilde{z}$  ясно, что при специальном выборе распределения  $N(\mathcal{E})$  (а именно — при таком распределении, когда основной вклад в коэффициент реабсорбции дает область энергий, соответствующая интервалу  $z > \tilde{z} \approx 1.35$ :

$$\mathcal{E} > \tilde{\mathcal{E}} \approx 2m_e c^2 \omega^2 \omega_B \omega_L^{-3} \sin \alpha, \quad (17.29)$$

и одновременно удовлетворяющая условию (17.20)) реабсорбция станет отрицательной и синхротронное излучение будет усиливаться в самой системе излучающих релятивистских электронов [312].

Из сказанного следует, что эффект отрицательной реабсорбции и синхротронная неустойчивость в среде возникают благодаря существенному изменению зависимости мощности синхротронного излучения  $P_{\omega j}(\omega, \mathcal{E})$  от энергии частицы  $\mathcal{E}$  по сравнению с соответствующей зависимостью в пустоте. Если в последнем случае  $\mathcal{E}^2 P_{\omega j}$  монотонно увеличивается вместе с  $\mathcal{E}$ , то в среде величина  $\mathcal{E}^2 P_{\omega j}$  возрастает только в области  $\mathcal{E} < \tilde{\mathcal{E}}$ ; при  $\mathcal{E} > \tilde{\mathcal{E}}$  она убывает с ростом  $\mathcal{E}$ . Заметим, что указанный характер изменения  $\mathcal{E}^2 P_{\omega j}$  в области существенного влияния среды  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_*$  имеет место лишь в том случае, если значение  $\tilde{\mathcal{E}}$ , при котором  $\mathcal{E}^2 P_{\omega j}$  максимально, лежит в области  $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_*$  (т.е. если  $\tilde{\mathcal{E}} \gg \mathcal{E}_*$ ). Когда  $\tilde{\mathcal{E}} \lesssim \mathcal{E}_*$ , убывание  $\mathcal{E}^2 P_{\omega j}$  с ростом происходит во всем интервале  $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_*$ .

#### 17.4. Отрицательная реабсорбция в системах с “моноэнергетическим” и степенным распределениями релятивистских электронов

Проиллюстрируем эффект отрицательной реабсорбции синхротронного излучения на двух конкретных примерах энергетического спектра  $N(\mathcal{E})$  [312].

Рассмотрим сначала систему релятивистских электронов с узким (“моноэнергетическим”) спектром, максимум которого приходится на энергию  $\mathcal{E}_0$ . Ширина спектра  $\Delta\mathcal{E}$  предполагается достаточно малой для того, чтобы функции  $\mathcal{E}^{-5} K_{5/3}(z)$  и  $\mathcal{E}^{-2} \Phi(z)$  в (17.23), (17.28) можно было вынести за знак интеграла со значением в точке  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ .<sup>126</sup>

<sup>126</sup> Однако величина  $\Delta\mathcal{E}$  должна быть достаточно большой по сравнению с рас-

Выполнив эту операцию, получим

$$\mu_j = \mu^I = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e^2 c}{\omega_B \sin \alpha} \frac{(m_e c^2)^4}{\mathcal{E}_0^5} N_S K_{5/3}(z_0),$$

$$z_0 = \frac{2}{3} \frac{\omega}{\omega_B \sin \alpha} \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2$$
(17.30)

при  $\mathcal{E}_0 \ll \mathcal{E}_*$  и

$$\mu_j = \mu^{II} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} e^2 c \frac{\omega_B \sin \alpha}{\omega_L \omega} \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_0^2} N_S \Phi(z_0),$$

$$z_0 = \frac{2}{3} \frac{\omega_L^3}{\omega^2 \omega_B \sin \alpha} \frac{\mathcal{E}_0}{m_e c^2}$$
(17.31)

при  $\mathcal{E}_0 \gg \mathcal{E}_*$ . Напомним, что  $\mathcal{E}_* = m_e c^2 \omega / \omega_L$ , а через  $N_S = 4\pi \int N(\mathcal{E}) d\mathcal{E}$  здесь обозначена концентрация релятивистских электронов.

Коэффициент реабсорбции меняется с частотой следующим образом. На высоких частотах (в области I) зависимость  $\mu_j(\omega)$  описывается формулой (17.30). При этом реабсорбция положительна; коэффициент  $\mu_j$  при больших  $\omega$  экспоненциально мал, затем он быстро возрастает по мере уменьшения частоты. Миновав промежуточную область  $\omega \sim \omega_L \mathcal{E}_0 / m_e c^2$ , в которой  $\mu_j(\omega)$  не описывается формулами (17.30), (17.31), мы переходим в интервал II, где справедливо выражение (17.31). В этом интервале частот о характере функции  $\mu_j(\omega)$  можно судить по Рис. 57, на котором представлен график  $\sqrt{z_0} \Phi(z_0) \propto \mu_j$  в функции от  $1/\sqrt{z_0} \propto \omega$ .

В зависимости от конкретных соотношений между параметрами системы в области II реализуются два случая. Если частота

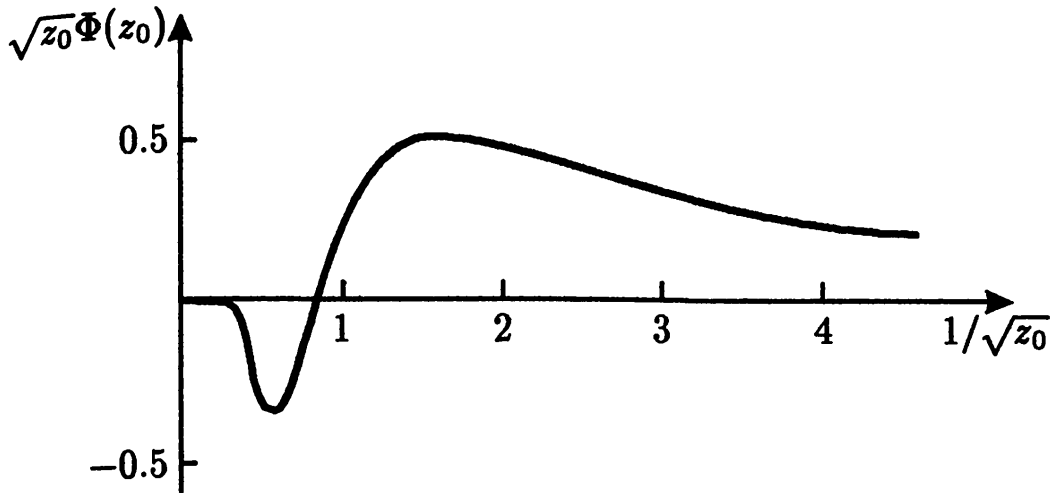
$$\omega \approx \left( 0.5 \frac{\omega_L^3}{\omega_B \sin \alpha} \frac{\mathcal{E}_0}{m_e c^2} \right)^{1/2},$$
(17.32)

соответствующая значению  $z_0 = \tilde{z} \approx 1.35$ , располагается значительно

---

стоянием между двумя соседними значениями энергии  $\mathcal{E}$  частиц, излучающих на частоте  $\omega$ . Согласно (10.83) указанный интервал равен  $m_e c^2 \omega_B / \omega$  и, следовательно, наш "моноэнергетический" спектр должен удовлетворять условию  $\Delta \mathcal{E} \gg m_e c^2 \omega_B / \omega$ . Только при этом условии мы имеем право заменить дискретный спектр синхронного излучения "сглаженным" спектром (17.8), (17.10) и использовать для коэффициента реабсорбции формулы, приведенные в этом разделе [373, 374].



Рис. 57. График зависимости  $\sqrt{z_0}\Phi(z_0)$  от  $1/\sqrt{z_0}$ 

ниже характерной частоты  $\omega = \omega_L \mathcal{E}_* / m_e c^2$ , т.е. если

$$\frac{\omega_L}{2\omega_B \sin \alpha} \ll \frac{\mathcal{E}_0}{m_e c^2}, \quad (17.33)$$

то смена знака  $\Phi(z_0)$  приходится на область II. Тогда в высокочастотной части этой области коэффициент реабсорбции по-прежнему положителен и только ниже частоты, определяемой равенством (17.32), он становится отрицательным. Степень отрицательной реабсорбции (величина  $-\mu_j$ ) достигает максимума на частоте

$$\omega_{\max} \approx \left( 0.24 \frac{\omega_L^3}{\omega_B \sin \alpha} \frac{\mathcal{E}_0}{m_e c^2} \right)^{1/2}, \quad (17.34)$$

соответствующей значению  $z_{\max} \approx 2.8$ , а затем быстро убывает с частотой по закону  $\mu_j \propto \omega^{-4} e^{-a/\omega^2}$ . Из Рис. 57 ясно, что частотный интервал, занимаемый областью синхротронной неустойчивости и усиления, довольно узок и расположен примерно в пределах  $|\omega - \omega_{\max}| \lesssim 0.3\omega_{\max}$ . В другом случае, когда частота (17.32) сравнима или больше  $\omega_L \mathcal{E}_0 / m_e c^2$ , т.е. когда

$$\frac{\omega_L}{2\omega_B \sin \alpha} \gtrsim \frac{\mathcal{E}_0}{m_e c^2}, \quad (17.35)$$

коэффициент  $\mu_j$  будет отрицателен во всем интервале

$$\omega^2 \ll \omega_L^2 (\mathcal{E}_0 / m_e c^2)^2,$$

где весьма существенно влияние среды. Однако при сильном неравенстве  $\omega_L / 2\omega_B \sin \alpha \gg \mathcal{E}_0 / m_e c^2$  величина  $z_0 \gg 1$  во всей области II и степень отрицательной реабсорбции станет экспоненциально малой. Это

обстоятельство связано с резким падением мощности синхротронного излучения электрона при условии  $\omega_L/2\omega_B \gg \mathcal{E}_0/m_e c^2$  (см. (10.96)).

В качестве второго примера рассмотрим систему релятивистских электронов со степенным энергетическим спектром вида

$$N(\mathcal{E}) = \begin{cases} \mathcal{K}\mathcal{E}^{-\gamma} & \text{if } \mathcal{E}_1 < \mathcal{E} < \mathcal{E}_2, \\ 0 & \text{if } \mathcal{E} < \mathcal{E}_1 \text{ or } \mathcal{E} > \mathcal{E}_2. \end{cases} \quad (17.36)$$

Ограничимся для простоты случаем, когда  $\mathcal{E}_1$  удовлетворяет условию (17.20). Тогда степень реабсорбции полностью определяется областью существенного влияния среды, так что

$$\mu_j = \mu^{\text{II}} = 2\pi^2 \sqrt{3} e^2 c \frac{\omega_B \sin \alpha}{\omega_L \omega} m_e c^2 \mathcal{K} \int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} \mathcal{E}^{-\gamma-2} \Phi(z) d\mathcal{E}. \quad (17.37)$$

После замены переменной (17.25) получаем

$$\begin{aligned} \mu_j &= 2\pi^2 \sqrt{3} e^2 c \frac{\omega_B \sin \alpha}{\omega_L \omega} \\ &\times \left( \frac{3\omega^2 \omega_B \sin \alpha}{2\omega_L^3} \right)^{-\gamma-1} (m_e c^2)^{-\gamma} \mathcal{K} \int_{z_1}^{z_2} z^{-\gamma-2} \Phi(z) dz; \end{aligned} \quad (17.38)$$

пределы  $z_1$  и  $z_2$  определяются значениями  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ . Выражение для  $\mu_j$  упрощается, если  $z_1 \ll 1$  и  $z_2 \gg 1$ . Это имеет место при условии

$$\frac{2}{3} \frac{\omega_L^3}{\omega_B \sin \alpha} \frac{\mathcal{E}_1}{m_e c^2} \ll \omega^2 \ll \frac{2}{3} \frac{\omega_L^3}{\omega_B \sin \alpha} \frac{\mathcal{E}_2}{m_e c^2}. \quad (17.39)$$

Неравенство  $z_2 \gg 1$  позволяет заменить верхний предел в интеграле (17.38) на бесконечный, так как подынтегральное выражение быстро убывает при больших  $z$  (функция  $\Phi(z) \propto z^{3/2} e^{-z}$  при  $z \gg 1$ ). Вместе с тем неравенство позволяет заменить нижний предел на нулевой, если интеграл от  $z^{-\gamma-2} \Phi(z)$  при этом сходится. Поскольку функция  $z^{-\gamma-2} \Phi(z) \propto z^{-\gamma-5/3}$  при  $z_1 \ll 1$ , ясно, что сходимость будет обеспечена при условии  $\gamma < -2/3$ . Считая это условие выполненным, получаем, что на частотах (17.39):

$$\begin{aligned} \mu_j &\approx 2\pi^2 \sqrt{3} e^2 c \frac{\omega_B \sin \alpha}{\omega_L \omega} \left( \frac{3\omega^2 \omega_B \sin \alpha}{2\omega_L^3} \right)^{-\gamma-1} \\ &\times (m_e c^2)^{-\gamma} \mathcal{K} \int_0^{\infty} z^{-\gamma-2} \Phi(z) dz. \end{aligned}$$

Подставив сюда выражения для  $\Phi(z)$  (17.27) и взяв первый из полученных интегралов по частям, приведем коэффициент  $\mu_j$  к следующему виду:

$$\mu_j \approx -2\pi^2 \sqrt{3} e^2 c \frac{\omega_B \sin \alpha}{\omega_L \omega} \left( \frac{3\omega^2 \omega_B \sin \alpha}{2\omega_L^3} \right)^{-\gamma-1} \times (m_e c^2)^{-\gamma} \mathcal{K} \left( \frac{2}{\gamma} + 1 \right) \int_0^\infty z^{-\gamma} K_{5/3}(z) dz. \quad (17.40)$$

Поскольку интеграл в (17.40) всегда положителен, степень реабсорбции будет отрицательной, если индекс

$$\gamma < -2. \quad (17.41)$$

Выше отмечалось, что функция распределения по импульсам  $f_s(p)$  пропорциональна  $\mathcal{E}^{-2} N(\mathcal{E})$ , т.е. величине  $\mathcal{E}^{-\gamma-2}$  для степенного спектра. Поэтому критерий синхротронной неустойчивости (17.41) означает, что функция распределения по импульсам  $f_s(p)$  должна расти вместе с  $p$ .

### 17.5. Заключительные замечания

Возможность появления синхротронной неустойчивости в изотропной системе релятивистских электронов была отмечена при исследовании частотной зависимости степени синхротронной реабсорбции с учетом среды [312] (см. также [317]). Указанное исследование основывалось на выражениях для степени реабсорбции  $\mu_j(\omega)$ , полученных методом коэффициентов Эйнштейна; в целом оно было проведено так, как это изложено в предыдущих разделах. Развитая затем кинетическая теория синхротронной неустойчивости [195, 196, 369, 374, 375] подтвердила полученные результаты и позволила изучить изменение характера неустойчивости при увеличении ширины энергетического спектра релятивистских электронов (от гидродинамической неустойчивости циклотронного типа для распределения по импульсам  $f_s(p) \propto \delta(p-p_0)$ ) к кинетической неустойчивости на одной гармонике и далее, при достаточно широкой функции  $f_s(p)$  — к синхротронной неустойчивости). Последняя возникает в условиях, когда эффективный вклад в излучение и поглощение на данной частоте вносят частицы с широким набором энергий  $\mathcal{E}$  (10.83), соответствующих разным значениям гармоник  $s$  (см. сноску в начале предыдущего раздела).

Следует подчеркнуть, что требование полной изотропии распределения релятивистских частиц по импульсам для справедливости при-

веденных выше коэффициентов синхротронной реабсорбции не обязательно. Вполне достаточно, чтобы функция  $f_S(p)$  мало менялась в интервале питч-углов  $\Delta\vartheta \sim [(m_e c^2/\mathcal{E})^2 + 1 - n^2]^{1/2}$  около направления распространения волны, т. е. в интервале порядка характерной ширины диаграммы направленности синхротронного излучения в среде (см. §11). Более того, при резко анизотропном характере распределения релятивистских частиц в импульсном пространстве, когда  $f_S(p)$  заметно меняется в пределах указанного выше интервала  $\Delta\vartheta$ , синхротронная неустойчивость возникает и в условиях, когда присутствие среды несущественно. На это обстоятельство было обращено внимание в [197, 376]; о синхротронной неустойчивости в системах с анизотропным распределением электронов см. [377] и приведенную там библиографию.

Ясно, однако, что реализация резко анизотропных распределений релятивистских частиц представляет собой трудную проблему. Следует поэтому ожидать, что в космических условиях синхротронная неустойчивость и отрицательная реабсорбция возникают скорее всего в системах релятивистских частиц с квазиизотропным энергетическим спектром, играющих роль примеси к “холодной” плазме. В настоящее время убедительные свидетельства о существовании синхротронной неустойчивости в астрофизических условиях отсутствуют, хотя относительная мягкость требований к системе, где возможна подобная неустойчивость, делает появление последней весьма вероятным (см. [373]). Объекты следует искать на достаточно низких частотах  $\omega \lesssim \omega_L^2/\omega_B$ , где влияние среды ведет к существенной депрессии синхротронного излучения (см. неравенство (10.102)).

Важным признаком отрицательной реабсорбции в источнике синхротронного излучения (помимо общих соображений о возможной нестационарности и сложности частотного спектра из-за экспоненциального характера усиления) служит сильная циркулярная поляризация. В самом деле, реабсорбция синхротронного излучения характеризуется коэффициентами  $\mu_j$  ( $j = 1, 2$ ), относящимися к волнам двух типов (см. (17.6)). Однако при квазипродольном распространении с точностью до членов порядка  $m_e c^2/\mathcal{E}$  и  $\sqrt{1 - n^2}$  фигурирующая в выражении для  $\mu_j$  величина  $P_{\omega j}$  определяется формулой (17.7), поэтому с указанной точностью  $\mu_1 = \mu_2$ . Более строгий кинетический расчет показывает, что  $\mu_1 \neq \mu_2$ , хотя значения  $\mu_1$  близки к  $\mu_2$  [369].

Если в источнике выполнено неравенство  $|\mu_1 - \mu_2|L \gtrsim 1$ , то выходящее за пределы области генерации синхротронное излучение будет циркулярно поляризовано со степенью поляризации  $\zeta_c$  порядка еди-

ницы (см. §9).

Сказанное, разумеется, не следует понимать в том смысле, что когерентный синхротронный механизм может обеспечить только сильную круговую поляризацию излучения; если поляризация нормальных волн отличается от круговой, то при  $|\mu_1 - \mu_2|L \gtrsim 1$  излучение будет поляризовано иначе. При исследовании синхротронной реабсорбции в этом разделе постоянно предполагалось, что показатель преломления и поляризационные характеристики нормальных волн определяются “холодной” плазмой, в то время как релятивистские электроны непосредственно участвуют в процессе излучения и поглощения волн. Такое разделение функций возможно в объектах, содержащих достаточно плотную нерелятивистскую плазму с примесью релятивистских частиц (межзвездная среда, оболочки сверхновых, солнечная корона). Наоборот, в условиях, характерных, например, для магнитосферы нейтронной звезды, где релятивистской энергией может обладать подавляющее число частиц, указанное приближение становится нерелеванным.

Согласно [195, 196, 375] определяющая роль “холодной” плазмы сохраняется, если  $|n_1 - n_2| \gg (c/2\omega)\mu_j$ , где  $n_1 - n_2$  — разность показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн в “холодной” плазме, а  $\mu_j$  — коэффициент реабсорбции, вносимый системой релятивистских частиц. Соответствующие значения электронной концентрации  $N$ , необходимой для выполнения указанного неравенства, нетрудно получить, учитывая конкретные выражения для  $n_1 - n_2$  и  $\mu_j$ . Так, например, в квазипродольном приближении (при  $\omega_L^2/\omega^2 \ll 1$  и  $\omega_B/\omega \ll 1$ ) разность  $n_1 - n_2$  задается выражением (9.13), а степень реабсорбции  $\mu_j$  для степенного энергетического спектра релятивистских частиц (в приближении (10.102)) — формулой (17.11). “Холодная” плазма будет формировать поляризацию нормальных волн, если ее концентрация

$$N \gg g(\gamma) \frac{m_e c^2}{8\pi} \mathcal{K} \left( \frac{3e}{m_e^3 c^5} \frac{B_0}{\omega} \right)^{\gamma/2} \frac{\sin \frac{\gamma+2}{2} \alpha}{\cos \alpha}. \quad (17.42)$$

При моноэнергетическом изотропном распределении релятивистских частиц роль неравенства (17.42) выполняет условие

$$N \gg N_S \sqrt{(m_e c^2/\mathcal{E})^2 + \omega_L^2/\omega^2} \quad (17.43)$$

( $N_S$  — концентрация релятивистских электронов).

В случае неравенств, обратных (17.42) и (17.43), поляризация обыкновенных и необыкновенных волн зависит от их частоты и определяется характеристиками релятивистской плазмы. Так, например, в системе с моноэнергетическим изотропным спектром релятивистских электронов поляризация нормальных волн, распространяющихся под углом  $\alpha \gg m_e c^2 / \mathcal{E}$  к магнитному полю, оказывается линейной на частотах  $\omega \sim \omega_c \equiv (3/2)\omega_B \sin \alpha (\mathcal{E}/m_e c^2)^2$ ; в системе со степенным распределением  $N(\mathcal{E})$  поляризация может быть как линейной, так и круговой (а также эллиптической), в зависимости от величин  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  — энергий на границах степенного спектра (17.36) [195, 196]. Выражения для коэффициентов синхротронной реабсорбции в системе со степенным энергетическим спектром и линейной поляризацией нормальных волн приведены и обсуждаются в [208].

Если распределение релятивистских электронов — резко анизотропное, то синхротронная неустойчивость возможна в отсутствие “холодной” плазмы. Указанная неустойчивость, однако, появляется и при изотропном распределении частиц, если роль среды, обеспечивающей отличие показателя преломления от единицы, играют сами излучающие электроны [375]. Выше было выяснено, что в системе с “моноэнергетическим” изотропным спектром релятивистских электронов, погруженной в “холодную” плазму, синхротронная неустойчивость имеет место на частотах  $\omega \sim \omega_{\max}$  (17.34), если показатель преломления среды при этом удовлетворяет условиям  $(m_e c^2 / \mathcal{E})^2 \ll 1 - n^2(\omega) \ll 1$ . В отсутствие “холодной” плазмы  $1 - n^2(\omega) \approx \Omega_L^2 / \omega^2$ , где  $\Omega_L$  — релятивистская плазменная частота, квадрат которой равен  $(4\pi e^2 N_S / m_e)(m_e c^2 / \mathcal{E}_0)$  (см. §5). Тогда указанные условия синхротронной неустойчивости можно представить в виде [378]

$$\left(\frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_0}\right)^2 \ll \left(\frac{B_0^2 \sin^2 \alpha}{\mathcal{E}_0 N_S}\right)^{1/2} \ll 1, \quad (17.44)$$

учитывая при этом, что в рассматриваемой релятивистской системе частота нарастающих волн  $\omega$  получается из (17.34) заменой  $\omega_L \rightarrow \Omega_L$ . Для углов  $\alpha \sim 1$  правое неравенство (17.44) требует, чтобы энергия системы частиц намного превышала энергию магнитного поля. Это требование в астрофизических условиях реализовать нелегко; однако оно становится более мягким при переходе к углам  $\alpha \ll 1$ .

Заметим наконец, что здесь речь шла о синхротронной неустойчивости в системах с показателем преломления  $n < 1$ ,  $1 - n \ll 1$ . Характер неустойчивости в среде с  $n > 1$ ,  $1 - n \ll 1$  резко меняется [379], что, очевидно, связано прежде всего с изменением характера собственного

излучения релятивистских частиц в среде с  $n > 1$  по сравнению с излучением при  $n < 1$  (см. §10). Одновременное возбуждение волн с  $n(\omega) < 1$  и  $n(\omega) > 1$  релятивистскими электронами в “холодной” плазме было изучено в [378] на примере синхротронной неустойчивости плазменных волн в диапазоне частот, где показатель преломления  $n_{pl}(\omega)$  близок к единице, а разность  $n_{pl}(\omega) - 1$  меняет знак. При этом характер неустойчивости в области  $n_{pl}(\omega) < 1$  напоминает синхротронную неустойчивость на электромагнитных волнах (но с более высокими инкрементами). В интервале частот, где  $n_{pl}(\omega) > 1$ , зависимость  $\mu_{pl}(\omega)$  существенно иная: она имеет осциллирующий характер, с заходом в область усиления  $\mu_{pl}(\omega) < 0$  при осцилляциях достаточно большой амплитуды. Кинетические циклотронная, гирсинхротронная и синхротронная неустойчивости обсуждались также в обзоре [380] и статье [381].

## Глава 8

# Рассеяние излучения в астрофизической плазме

До сих пор в качестве основных факторов, определяющих характер переноса излучения в астрофизической плазме, рассматривались излучение и поглощение в среде (включая отрицательную реабсорбцию в неравновесной плазме). В этих процессах элементарными актами взаимодействия излучения со средой служат испускание и поглощение фотонов (плазмонов) отдельными заряженными частицами плазмы. Однако есть и другие процессы, оказывающие существенное влияние на характер переноса излучения. Мы имеем в виду рассеяние последнего на волнах и частицах — процесс, который складывается из элементарных актов столкновения фотонов между собой или с частицами плазмы. Эти эффекты при определенных условиях могут привести к радикальной перестройке углового и частотного спектров излучения, а также вызвать конверсию (трансформацию) излучения из одной моды в другую. Последнее обстоятельство особенно важно для плазменных механизмов радиоизлучения, эффективное действие которых невозможно без передачи энергии из возбужденных плазменных волн в электромагнитное излучение, способное выйти за пределы плазмы (см. §7). Эффекты, связанные с резонансным циклотронным рассеянием, формируют полосы и линии в поглощении в спектрах магнитных вырожденных звезд. Обратное воздействие излучения на плазму проявляется здесь в виде радиационного давления. В некоторых случаях благодаря мощному циклотронному рассеянию силы радиационного давления превышают силу тяжести; истечение плазмы с поверхности звезд ведет к образованию протяженных плазменных оболочек в магнитных полях этих объектов. Отметим наконец, что в этой главе приведены лишь те сведения о рассеянии излучения и его воздействии на плазму, которые необходимы для первоначального ознакомления с указанными процессами и их приложениями в астро-



физике. Для более подробного изучения этих вопросов читатель может обратиться к монографиям и обзорам [10, 72, 89, 310, 382–385] и статьям, цитированным в этой главе.

## §18. Рассеяние волн на частицах в изотропной плазме

### 18.1. Спонтанное и индуцированное рассеяние

Как уже отмечалось, при квантовой трактовке рассеяния волн на частицах процесс рассеяния сводится к “упругим” столкновениям фотонов (плазмонов) с частицами плазмы. Такие столкновения происходят с сохранением энергии и импульса взаимодействующих частиц

$$\mathcal{E} + \hbar\omega = \mathcal{E}' + \hbar\omega', \quad (18.1)$$

$$\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} = \mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k}', \quad (18.2)$$

где  $\mathcal{E}$  и  $\mathbf{p}$  — энергия и импульс частицы,  $\hbar\omega$  и  $\hbar\mathbf{k}$  — энергия и импульс фотона до столкновения; соответствующие величины после рассеяния отмечены штрихами. Считая относительное изменение энергии частицы в процессе рассеяния достаточно малым, представим  $\mathcal{E}'$  в таком виде:  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} + (d\mathcal{E}/dp)\Delta p$ , где  $\Delta p = p' - p = \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  и  $d\mathcal{E}/dp = v$  как для релятивистских, так и для нерелятивистских частиц. Учитывая далее закон сохранения энергии (18.1), приходим к выводу, что в каждом элементарном акте рассеяния кванта на частице со скоростью  $v$  должно соблюдаться соотношение

$$\omega - \omega' = (\mathbf{k} - \mathbf{k}')v. \quad (18.3)$$

Введем вероятность рассеяния излучения  $w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , определив ее так, чтобы величина  $w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') (d^3k'/8\pi^3)$  характеризовала отнесенную к единице времени вероятность перехода фотона с импульсом  $\hbar\mathbf{k}$  в фазовый объем  $d^3k'$  при рассеянии на частице с импульсом  $\mathbf{p}$ .<sup>127</sup> При этом предполагается, что величина  $w$  не зависит от величины интенсивности излучения. Поэтому она характеризует процесс спонтанного рассеяния, равно как независимая от интенсивности вероятность  $A_m^n$  описывает процесс спонтанного излучения (см. §14). Наряду со спонтанным рассеянием существует также индуцированное рассеяние — с вероятностью  $\tilde{w}N_{\mathbf{k}'}$ , пропорциональной  $N_{\mathbf{k}'}$  — числу фотонов

<sup>127</sup> Напомним, что  $d^3k' (2\pi)^{-3}$  есть число мод в объеме  $d^3k'$  пространства волновых векторов и в единичном объеме координатного пространства (см. (2.14)).

(плазмонов) в единичном объеме, приходящихся на одну моду с волновым вектором  $\mathbf{k}'$ .<sup>128</sup> Учитывая связь между  $N_{\mathbf{k}}$  и  $W_{\mathbf{k}}$  вида (14.28), заключаем, что вероятность индуцированного рассеяния пропорциональна плотности энергии рассеянного излучения (т.е. излучения, в которое происходит рассеяние).

Величина вероятности спонтанного рассеяния  $w(p, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$  зависит от конкретного характера ‘рассеивающего центра’ и типа нормальных волн, участвующих в процессе рассеяния. Однако связь между  $w(p, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ,  $\tilde{w}(p, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ,  $w(p', \mathbf{k}', \mathbf{k})$ , и  $\tilde{w}(p', \mathbf{k}', \mathbf{k})$ , где две последние величины относятся к обратному процессу рассеяния из  $\mathbf{k}'$  в  $\mathbf{k}$ , имеет универсальный характер. Она может быть установлена из баланса процессов рассеяния в условиях термодинамического равновесия [387], аналогично тому, как это было сделано в §14 для коэффициентов Эйнштейна.

Число переходов в единицу времени из фазового объема  $d^3k$  в фазовый объем  $d^3k'$  при рассеянии  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$  будет равно

$$[N_{\mathbf{k}}w(p, \mathbf{k}, \mathbf{k}') + N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}'}\tilde{w}(p, \mathbf{k}, \mathbf{k}')] N_{\mathbf{p}} \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6}.$$

Число обратных переходов в единицу объема координатного пространства при рассеянии  $\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}$  составит соответственно

$$[N_{\mathbf{k}'}w(p', \mathbf{k}', \mathbf{k}) + N_{\mathbf{k}'}N_{\mathbf{k}}\tilde{w}(p', \mathbf{k}', \mathbf{k})] N_{\mathbf{p}'} \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6}.$$

Здесь через  $N_{\mathbf{p}}$  и  $N_{\mathbf{p}'}$  обозначены концентрации рассеивающих частиц с импульсами  $p$  и  $p'$ . В приведенных выражениях также учтено, что число квантов в фазовом объеме  $d^3k$  равно  $N_{\mathbf{k}}d^3k(2\pi)^{-3}$ .

Для установления термодинамического равновесия достаточно, чтобы в условиях, когда числа квантов  $N_{\mathbf{k}}$ ,  $N_{\mathbf{k}'}$  и ‘населенности’  $N_{\mathbf{p}}$ ,  $N_{\mathbf{p}'}$  определяются их равновесными значениями, количество прямых и обратных актов рассеяния было одинаковым, т.е.

$$[N_{\mathbf{k}}w(p, \mathbf{k}, \mathbf{k}') + N_{\mathbf{k}}N_{\mathbf{k}'}\tilde{w}(p, \mathbf{k}, \mathbf{k}')] N_{\mathbf{p}} = [N_{\mathbf{k}'}w(p', \mathbf{k}', \mathbf{k}) + N_{\mathbf{k}'}N_{\mathbf{k}}\tilde{w}(p', \mathbf{k}', \mathbf{k})] N_{\mathbf{p}'}. \quad (18.4)$$

Отношение  $N_{\mathbf{p}'}/N_{\mathbf{p}}$  определяется здесь формулой Больцмана (14.9); с учетом закона сохранения (18.1) это отношение можно представить в виде

$$\frac{N_{\mathbf{p}'}}{N_{\mathbf{p}}} = \exp \left[ \frac{\hbar(\omega' - \omega)}{\kappa T} \right]. \quad (18.5)$$

<sup>128</sup> Понятие индуцированного рассеяния было введено Паули [386].

Числа фотонов  $N_{\mathbf{k}}$ ,  $N_{\mathbf{k}'}$  в свою очередь описываются формулой Планка [55]:

$$N_{\mathbf{k}} = (e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1)^{-1}, \quad N_{\mathbf{k}'} = (e^{\hbar\omega'/\kappa T} - 1)^{-1}. \quad (18.6)$$

В области закона Вина ( $\hbar\omega \gg \kappa T$ )

$$N_{\mathbf{k}} = e^{-\hbar\omega/\kappa T}, \quad N_{\mathbf{k}'} = e^{-\hbar\omega'/\kappa T}, \quad (18.7)$$

в области Рэлея–Джинса ( $\hbar\omega \ll \kappa T$ )

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{\kappa T}{\hbar\omega}, \quad N_{\mathbf{k}'} = \frac{\kappa T}{\hbar\omega'}. \quad (18.8)$$

Последние выражения непосредственно следуют также из формул (2.15) и (14.28). При низких температурах ( $T \rightarrow 0$ ) из (18.4) с учетом (18.5) и (18.6) получаем

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = w(\mathbf{p}', \mathbf{k}', \mathbf{k}). \quad (18.9)$$

Для высоких температур ( $T \rightarrow \infty$ ) из (18.4), (18.5), и (18.8) следует, что

$$\tilde{w}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \tilde{w}(\mathbf{p}', \mathbf{k}', \mathbf{k}). \quad (18.10)$$

Наконец, из (18.4) с учетом (18.5), (18.6) и только что полученных равенств (18.9), (18.10) находим

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \tilde{w}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (18.11)$$

Равенство вероятностей спонтанного рассеяния  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}$  (18.9), (18.10) и соотношение (18.11), характеризующее связь между вероятностями спонтанного и индуцированного рассеяния, справедливы и в отсутствие термодинамического равновесия, по тем же причинам, что и соотношения между коэффициентами Эйнштейна  $A_m^n$ ,  $B_m^n$ , и  $B_n^m$  (см. §14).

## 18.2. Интегральное кинетическое уравнение для фотонов и уравнение переноса излучения

Зная соотношения между вероятностями рассеяния, нетрудно написать уравнения, характеризующие изменение числа квантов во времени. Эти уравнения принято называть кинетическими уравнениями для фотонов (плазмонов) с учетом процессов рассеяния. Число квантов, покидающих в единицу времени единичный фазовый объем за счет спонтанного и индуцированного рассеяния, равно

$$\int N_{\mathbf{k}}(N_{\mathbf{k}'} + 1)w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')f_0(\mathbf{p})\frac{d^3p d^3k'}{(2\pi)^6}. \quad (18.12)$$

Число квантов, входящих в этот объем, составляет

$$\int N_{\mathbf{k}'}(N_{\mathbf{k}} + 1)w(\mathbf{p}', \mathbf{k}', \mathbf{k})f_0(\mathbf{p}')\frac{d^3p'd^3k'}{(2\pi)^6}. \quad (18.13)$$

(здесь  $f_0(\mathbf{p})$  и  $f_0(\mathbf{p}')$  — функции распределения частиц по импульсам). Однако  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  и  $w(\mathbf{p}', \mathbf{k}', \mathbf{k}) = w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , поэтому последнее выражение можно представить в виде

$$\int N_{\mathbf{k}'}(N_{\mathbf{k}} + 1)w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')f_0(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{k}')\frac{d^3pd^3k'}{(2\pi)^6}.$$

Поскольку число фотонов в единичном фазовом объеме составляет  $N_{\mathbf{k}}(2\pi)^{-3}$ , из сказанного ясно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & \int w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')N_{\mathbf{k}'}f_0(\mathbf{p})\frac{d^3pd^3k'}{(2\pi)^3} \\ & - N_{\mathbf{k}} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')f_0(\mathbf{p})\frac{d^3pd^3k'}{(2\pi)^3} \\ & + N_{\mathbf{k}} \int w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')N_{\mathbf{k}'}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}\frac{d^3pd^3k'}{(2\pi)^3}. \quad (18.14) \end{aligned}$$

В полученном кинетическом уравнении для  $N_{\mathbf{k}}$ <sup>129</sup> учтено, что в классической плазме изменение импульса частицы  $\Delta\mathbf{p} = \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  при каждом элементарном акте рассеяния мало по сравнению с характерной шириной функции распределения  $f_0(\mathbf{p})$ . Поэтому последнюю можно разложить в ряд по степеням  $\hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  и ограничиться первыми двумя членами, что и сделано при переходе к (18.14).

Поскольку рассеяние не связано с “рождением” и “исчезновением” фотонов, оно вызывает только перераспределение последних в пространстве импульсов  $\hbar\mathbf{k}$ . Ясно, что и кинетическое уравнение (18.14) описывает процессы, идущие с сохранением общего числа квантов излучения, заполняющих фазовое пространство. Из вида (18.14) следует, что спонтанные процессы, характеризуемые первыми двумя членами в правой части уравнения, увеличивают число  $N_{\mathbf{k}}$  при обмене

<sup>129</sup> Кинетическое уравнение для фотонов, рассеивающихся на частицах плазмы, было получено в [388, 389]. Отметим также, что уравнение в форме (18.14) (вместе с условием рассеяния (18.3)) не учитывает влияния постоянного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  на состояние рассеивающих частиц. Поэтому в магнитоактивной плазме кинетическое уравнение, вообще говоря, отличается от (18.14) (см., например, [390, 391]).

квантами  $k' \leftrightarrow k$ , если  $N_{k'} > N_k$ ; наоборот, число квантов  $N_k$  убывает за счет спонтанного рассеяния  $k' \leftrightarrow k$ , если  $N_{k'} < N_k$ . Отсюда следует, что спонтанное рассеяние приводит к перераспределению фотонов (плазмонов) из области фазового пространства с большим числом  $N_k$  в область, где число квантов меньше. Иными словами, спонтанное рассеяние выравнивает распределение  $N_k$  в пространстве волновых векторов.

Роль индуцированного рассеяния в перераспределении фотонов по пространству  $k$  сложнее: она зависит от знака  $(k - k') \partial f_0 / \partial p$  в третьем члене уравнения (18.14), описывающем такое рассеяние. Ситуация упрощается, если функция распределения рассеивающих частиц изотропна:  $f_0(p) = f_0(p)$ . Тогда производная<sup>130</sup>

$$\frac{\partial f_0}{\partial p} = \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{dp} = v \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} = -v \frac{f_0(p)}{\kappa T}, \quad (18.15)$$

где  $\mathcal{E}$  — энергия частицы с импульсом  $p$ , и с учетом (18.3) третий член в кинетическом уравнении (18.14) примет вид

$$N_k \int w \hbar(\omega - \omega') N_{k'} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{d^3 p d^3 k'}{(2\pi)^3}. \quad (18.16)$$

В плазме с  $\partial f_0 / \partial \mathcal{E} < 0$  (например, в равновесной плазме, см. (18.15)) знак подынтегрального выражения противоположен знаку разности  $\omega - \omega'$ . Отсюда нетрудно заключить, что индуцированное рассеяние, вызывающее обмен фотонами между двумя элементами объема фазового пространства  $d^3 k$  и  $d^3 k'$ , увеличивает число фотонов с частотой  $\omega$ , если  $\omega < \omega'$ , и уменьшает его при  $\omega > \omega'$ . Таким образом, процессы индуцированного рассеяния ведут к перераспределению числа фотонов из областей фазового пространства с большей частотой в область с меньшей частотой, энергия фотонов  $\hbar\omega$  в процессе индуцированного рассеяния постепенно уменьшается, а энергия рассеивающих частиц увеличивается. Подчеркнем, что указанное направление “перекачки” фотонов по спектру относится к плазме, в которой  $f_0(p)$  изотропна и  $\partial f_0 / \partial \mathcal{E} < 0$ . Нарушение этих условий может изменить направление перекачки (что и происходит, например, при рассеянии на пучках заряженных частиц в плазме [392]).

Кинетическое уравнение для числа квантов  $N_k$  можно преобразовать, используя соотношение (14.28); тогда оно примет форму урав-

<sup>130</sup> Последнее равенство справедливо для максвелловского распределения частиц.

нения переноса для плотности энергии  $W_{\mathbf{k}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} + v_{\text{gr}} \frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial l} &= \int w \frac{\omega}{\omega'} W_{\mathbf{k}'} f_0(p) \frac{d^3 p d^3 k'}{(2\pi)^3} \\ &- W_{\mathbf{k}} \int w f_0(p) \frac{d^3 p d^3 k'}{(2\pi)^3} + W_{\mathbf{k}} \int w \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{\omega'} W_{\mathbf{k}'} \frac{\partial f_0}{\partial p} d^3 p d^3 k'. \end{aligned} \quad (18.17)$$

Здесь  $w = w(p, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ; в левую часть уравнения добавлен член, учитывающий возможную неоднородность в распределении плотности энергии  $W_{\mathbf{k}}$  вдоль луча:  $v_{\text{gr}}(\partial W_{\mathbf{k}}/\partial l)$  (ср. с уравнением переноса (8.28)).

Сопоставление (18.17) с уравнением переноса для плотности энергии (8.28) показывает также, что роль излучательной способности  $\alpha_{\mathbf{k}}$  играет первый член из правой части (18.17), характеризующий спонтанное рассеяние всех  $\mathbf{k}'$  в  $\mathbf{k}$ :

$$\alpha_{\mathbf{k}} = \int w \frac{\omega}{\omega'} W_{\mathbf{k}'} f_0(p) \frac{d^3 p d^3 k'}{(2\pi)^3}. \quad (18.18)$$

Второй член, описывающий спонтанное рассеяние из  $\mathbf{k}$  во все  $\mathbf{k}'$ , и третий член, определяющий индуцированное рассеяние для прямого ( $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$ ) и обратного ( $\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k}$ ) процессов, в сумме дают величину  $-\beta_j W_{\mathbf{k}} = -2\gamma_j W_{\mathbf{k}}$ , где  $\gamma_j$  имеет смысл коэффициента затухания вследствие рассеяния:

$$\gamma_j = \int w f_0(p) \frac{d^3 p d^3 k'}{2(2\pi)^3} - \int w \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{2\omega'} W_{\mathbf{k}'} \frac{\partial f_0}{\partial p} d^3 p d^3 k'. \quad (18.19)$$

Далее, уравнение (18.17) с помощью (8.29) можно представить в форме уравнения переноса интенсивности (8.30); тогда коэффициент поглощения из-за рассеяния будет равен  $\mu_j = 2\gamma_j v_{\text{gr}}^{-1}$ , где  $\gamma_j$  — из (18.19), а излучательная способность  $a_{\omega} = k^2 \alpha_{\mathbf{k}} (|\cos \vartheta_j| v_{\text{gr}})^{-1}$ ; величина  $\alpha_{\mathbf{k}}$  задана выражением (18.18).

Первый член в формуле для коэффициента затухания (18.19) (мы будем обозначать его через  $\gamma_j^{\text{sp}}$ ) обусловлен спонтанным рассеянием излучения с волновым вектором  $\mathbf{k}$ .<sup>131</sup> Оно всегда дает положительный вклад в  $\gamma_j$ , увеличивая эффективное затухание излучения с плотностью энергии  $W_{\mathbf{k}}$ . Второй член ( $\gamma_j^{\text{ind}}$ ) описывает индуцированное рассеяние из  $\mathbf{k}$  во все  $\mathbf{k}'$  и обратно; он отличен от нуля лишь при

<sup>131</sup> В астрофизике величина  $\mu_j^{\text{sp}} = 2\gamma_j^{\text{sp}} v_{\text{gr}}^{-1}$  обычно называется коэффициентом экстинкции.

$W_{\mathbf{k}'} \neq 0$ . Знак  $\gamma_j^{\text{ind}}$  зависит, очевидно, от знака разности  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$  и производной от функции распределения рассеивающих частиц  $\partial f_0 / \partial p$ . При изотропном распределении по скоростям для коэффициента индуцированного рассеяния справедливо следующее выражение (ср. с (18.16)):

$$\gamma_j^{\text{ind}} = - \int w \frac{\omega - \omega'}{2\omega'} W_{\mathbf{k}'} \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{E}} d^3 p d^3 k'. \quad (18.20)$$

В равновесной плазме  $\partial f_0 / \partial \mathcal{E} < 0$  и, следовательно, интервал частот  $\omega' < \omega$  дает положительный, а область  $\omega' > \omega$  — отрицательный вклад в величину  $\gamma_j^{\text{ind}}$ . Результирующий знак  $\gamma_j^{\text{ind}}$  зависит, очевидно, от распределения плотности энергии  $W_{\mathbf{k}}$  по спектру:  $\gamma_j^{\text{ind}} < 0$ , если энергия волн, взаимодействующих с излучением частоты  $\omega$ , сосредоточена преимущественно в области более высоких частот.

Уравнение переноса (18.17) описывает изменение плотности энергии из-за процессов рассеяния на частицах; влияние процессов излучения и поглощения в плазме на величину  $W_{\mathbf{k}}$  при этом можно учесть, если включить в правую часть (18.17) член  $\alpha_{\mathbf{k}}^{\text{em}} - 2\gamma_j^{\text{abs}} W_{\mathbf{k}}$ , в котором  $\alpha_{\mathbf{k}}^{\text{em}}$  характеризует спонтанное излучение, а  $\gamma_j^{\text{abs}}$  — поглощение в плазме, связанное с соударениями частиц или затуханием Ландау (см. §11, §12). Результирующий коэффициент затухания в уравнении переноса тогда примет вид

$$\gamma_j = \gamma_j^{\text{sp}} + \gamma_j^{\text{ind}} + \gamma_j^{\text{abs}}. \quad (18.21)$$

В случае, когда коэффициент индуцированного рассеяния  $\gamma_j^{\text{ind}}$  отрицателен и достаточно велик по модулю ( $-\gamma_j^{\text{ind}} > \gamma_j^{\text{sp}} + \gamma_j^{\text{abs}} > 0$ ), результирующий коэффициент затухания также становится отрицательным. При этом на частоте  $\omega$  возникает неустойчивость (“раскачка” колебаний), связанная с индуцированным рассеянием. В отличие от неустойчивостей, связанных с индуцированным излучением и возникающих при инверсной населенности частиц в плазме (см. §14), обсуждаемая неустойчивость может иметь место и в равновесной плазме. Однако для ее появления необходимо, чтобы распределение плотности излучения  $W_{\mathbf{k}}$  по спектру имело резко неравновесный характер.

### 18.3. Рассеяние излучения с одномерным спектром. Дифференциальная и интегральная перекачка

Сложность интегро-дифференциального уравнения переноса излучения (18.17) заставляет искать условия, в которых его анализ становится более доступным. Так, например, при рассмотрении интерва-

лов времени  $\Delta t \ll 1/\gamma_j$  или расстояний  $\Delta l \ll 1/\mu_j$  влиянием на плотность энергии  $W_{\mathbf{k}}$  индуцированного рассеяния, равно как и поглощением из-за диссипации и спонтанного рассеяния в плазме, можно пренебречь.<sup>132</sup> Это означает, что в уравнении (18.17) можно оставить лишь первый член, характеризующий излучательную способность  $\alpha_{\mathbf{k}}$  за счет спонтанного рассеяния волн  $\mathbf{k}'$  в волну  $\mathbf{k}$ .

С другой стороны, существенное упрощение уравнения переноса (18.17) возможно в случае, когда уровень излучения достаточно высок. Это позволяет пренебречь спонтанным рассеянием по сравнению с индуцированным и, следовательно, оставить в правой части (18.17) только последний член  $2\gamma_j^{\text{ind}} W_{\mathbf{k}}$ . Дальнейшее упрощение (и большая наглядность) достигается за счет определенных предположений о характере углового спектра излучения, например, изотропии или одномерности распределения  $W_{\mathbf{k}}$ ,  $W_{\mathbf{k}'}$  в пространстве волновых векторов.

В нерелятивистской равновесной плазме уравнение переноса (18.17) с учетом только индуцированного рассеяния запишется в форме

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} + v_{\text{gr}} \frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial l} = -2\gamma_j^{\text{ind}} W_{\mathbf{k}}, \quad (18.22)$$

$$2\gamma_j^{\text{ind}} = \int w_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{\omega - \omega'}{\omega' \kappa T_{\alpha}} W_{\mathbf{k}'} d^3 k'; \quad (18.23)$$

здесь учтено, что для максвелловского распределения рассеивающих частиц  $\partial f_0 / \partial \mathcal{E} = -f_0(p) / \kappa T$  (18.15), и введено обозначение

$$w_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int w(p, \mathbf{k}, \mathbf{k}') f_0(p) d^3 p \quad (18.24)$$

(индекс  $\alpha$  указывает здесь на сорт рассеивающих частиц). Вероятность рассеяния  $w(p, \mathbf{k}, \mathbf{k}')$  отлична от нуля только при условии (18.3). Это означает, что она пропорциональна  $\delta(\omega_- - \mathbf{k}_- \mathbf{v})$ , где  $\omega_- = \omega - \omega'$  и  $\mathbf{k}_- = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ . Поскольку в равновесной плазме  $f_0(p) \propto e^{-p^2/2m_{\alpha}\kappa T_{\alpha}}$ , интегрирование в (18.24) с учетом дельта-функции от  $\omega_- - \mathbf{k}_- \mathbf{v}$  дает

$$w_{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = w_{\alpha}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{\exp(-\omega_-^2/2\mathbf{k}_-^2 v_{T_{\alpha}}^2)}{|\mathbf{k}_-|}. \quad (18.25)$$

Вид  $w_{\alpha}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  зависит от конкретного характера рассеивающих центров в плазме (см. далее (18.53) и (18.54)).

<sup>132</sup> Здесь  $\mu_j$  — результирующий коэффициент поглощения, равный  $2\gamma_j v_{\text{gr}}^{-1}$  ( $\gamma_j$  — коэффициент затухания (18.21)).



Имея в виду дальнейшие приложения, рассмотрим более подробно перенос излучения с одномерными спектрами вида

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{k}} d^3 k &= W(k) \delta(\Omega - \Omega_0) dk d\Omega, \\ W_{\mathbf{k}'} d^3 k' &= W(k') \delta(\Omega' - \Omega'_0) dk' d\Omega'. \end{aligned} \quad (18.26)$$

Здесь  $W(k)$  и  $W(k')$  — одномерные распределения плотности энергии излучения,  $d\Omega$  и  $d\Omega'$  — элементы телесных углов,  $\Omega = \mathbf{k}/k$  и  $\Omega' = \mathbf{k}'/k'$  — единичные векторы. Умножим обе части уравнения (18.22) на  $d^3 k$  и подставим в него (18.23) и (18.26). Проведя затем интегрирование по телесным углам  $d\Omega$  и  $d\Omega'$ , получим уравнение переноса для одномерных спектров  $W(k)$  и  $W(k')$ :

$$\frac{\partial W(k)}{\partial t} + v_{\text{gr}} \frac{\partial W(k)}{\partial l} = - \int w_{\alpha}(k, k') \frac{\omega_-}{\omega' \kappa T_{\alpha}} W(k) W(k') dk'. \quad (18.27)$$

Здесь  $w_{\alpha}(k, k')$  определяется формулой (18.25) с фиксированным направлением волновых векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  (вдоль  $\Omega_0$  и  $\Omega'_0$  соответственно). В нее входит экспоненциальный фактор с показателем, зависящим от взаимной ориентации векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . Если  $\theta_1$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , то экспонента увеличивается с ростом  $\theta_1$ , становясь наибольшей при  $\theta_1 = \pi$ . Когда величина  $w_{\alpha}(k, k')$  при  $\theta_1 = \pi$  много больше соответствующего значения для  $\theta_1 = 0$ , можно считать, что рассеяние излучения, имеющего одномерный спектр с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ , происходит главным образом в волны с противоположными направлениями  $\mathbf{k}'$  (т.е.  $\Omega'_0 = -\Omega_0$  и  $k_-^2 = (k + k')^2$ ).

Выше, при обсуждении кинетического уравнения (18.14), отмечалось, что индуцированное рассеяние в равновесной плазме приводит к “перекачке” фотонов (волн) по спектру в сторону меньших значений частоты  $\omega$ . Эволюция спектра имеет “дифференциальный” характер, если ширина спектра  $W(k')$  по частотам

$$\Delta\omega \gg |k_-| v_{T_{\alpha}}. \quad (18.28)$$

Это неравенство означает, что в каждом акте рассеяния частота сдвигается на величину  $|\omega_-| = |\omega - \omega'| \ll \Delta\omega$  (см. (18.3)). Для плазменных волн, занимающих (в согласии с дисперсионным уравнением (5.13)) частотный интервал  $\Delta\omega \lesssim 3k^2 v_T^2 / 2\omega_L$ , дифференциальная перекачка возможна только при рассеянии на ионах (когда  $v_{T_{\alpha}} = v_T \ll v_T^2 / v_{\text{ph}}$ , где  $v_T$  — тепловая скорость электронов, а  $v_{\text{ph}}$  — фазовая скорость плазменных волн).

При условии (18.28) интегро-дифференциальное уравнение (18.27) можно заменить приближенно дифференциальным уравнением [394]. Рассмотрим в качестве примера рассеяние плазменных волн в плазменные на экранированных ионах. Тогда в (18.25) с точностью до коэффициента порядка единицы можно положить

$$w_{\alpha}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = w_i^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{\sqrt{2\pi}}{16} \frac{\omega_L^2}{N v_{Ti}} \cos^2 \theta_1, \quad (18.29)$$

где  $\theta_1$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  (см. (18.53)). При рассеянии волны с противоположными волновыми векторами ( $\mathbf{k} \uparrow \downarrow \mathbf{k}'$ )  $\cos^2 \theta_1 = 1$ . Из условия (18.28) тогда следует, что подынтегральное выражение в уравнении (18.27) (с  $w_{\alpha}$  в форме (18.25), (18.29)) представляет собой произведение “острой” функции  $\omega_- \exp(-\omega_-^2/2k_-^2 v_{T\alpha}^2)$  на медленно меняющиеся функции. Поэтому с точностью до членов порядка  $|k_-|v_{T\alpha}/\Delta\omega$  в подынтегральном выражении можно заменить быстро меняющуюся функцию на производную от дельта-функции:

$$-\frac{\omega_-}{\sqrt{2\pi}|k_-|^3 v_{T\alpha}^3} \exp(-\omega_-^2/2k_-^2 v_{T\alpha}^2) \rightarrow \delta'(\omega_-). \quad (18.30)$$

Множитель перед экспонентой здесь выбран так, чтобы дельта-функция удовлетворяла обычной нормировке  $\int \delta(\omega_-) d\omega_- = 1$ . Напомним, что здесь  $v_{T\alpha} = v_{Ti}$ ,  $k_- = k + k'$  и  $\omega_- = \omega - \omega'$ . Интегрируя затем в (18.27) по  $k'$ , окончательно получаем

$$\frac{\partial W(k)}{\partial t} + v_{gr} \frac{\partial W(k)}{\partial l} = \frac{\pi}{18} \frac{\omega_L^3}{m_i N v_{Ti}^4} W(k) \frac{\partial W(-k)}{\partial k}. \quad (18.31)$$

При условии, обратном (18.28),

$$\Delta\omega \ll |k_-|v_{T\alpha}, \quad (18.32)$$

мы имеем дело с “интегральной” перекачкой: в каждом акте рассеяния изменение частоты столь велико, что рассеянные волны выводятся за пределы полосы  $\Delta\omega$ , в которой сосредоточено рассеиваемое излучение. Если спектры  $W(k)$  и  $W(k')$  по волновым векторам достаточно узкие:

$$\Delta k \ll k, \quad \Delta k' \ll k', \quad (18.33)$$

то уравнение переноса (18.27) можно существенно упростить, положив

$$W(k) = W\delta(k - k_0), \quad W(k') = W'\delta(k' - k'_0), \quad (18.34)$$

Здесь  $W$  и  $W'$  имеют смысл полной плотности энергии в спектрах  $W(k)$  и  $W(k')$ , сосредоточенных близ значений волновых чисел  $k_0$  и  $k'_0$ . Взяв в (18.27) интеграл по  $k'$  с учетом (18.34) и интегрируя уравнение (18.27) почленно по переменной  $k$ , получим

$$\frac{\partial W}{\partial t} + v_{gr} \frac{\partial W}{\partial l} = -\eta W W', \quad (18.35)$$

где

$$\eta = w_\alpha(k_0, k'_0) \frac{\omega(k_0) - \omega(k'_0)}{\omega(k'_0) \kappa T_\alpha}. \quad (18.36)$$

Следует иметь в виду, что аналогичное уравнение имеет место и для  $W'$ ; поэтому полная система включает в себя (18.35) и уравнение

$$\frac{\partial W'}{\partial t} + v_{gr} \frac{\partial W'}{\partial l} = \eta W W' \quad (18.37)$$

с тем же коэффициентом  $\eta$ . Таким образом, уравнение переноса излучения снова свелось к дифференциальной форме, но теперь уже относительно интегральных характеристик спектра излучения  $W$  и  $W'$ .

#### 18.4. Стабилизация пучковой неустойчивости

В §15 было выяснено, что в системе поток – плазма возникает черенковская пучковая неустойчивость с инкрементом  $\gamma^{Cer} \propto dF/dv_{\mathbf{k}}$ , где  $dF/dv_{\mathbf{k}}$  — производная от функции распределения электронов в потоке по проекциям скорости  $\mathbf{v}$  на направление возбуждаемых плазменных волн  $\mathbf{k}$  (см. (15.5)). Нарастание плотности энергии плазменных волн  $W(k)$  в резонансной области (т.е. в интервале фазовых скоростей  $v_{ph}$ , приходящихся на область, где есть частицы пучка с  $v_{\mathbf{k}} = v_{ph}$ ) и соответствующее изменение вида  $F(v_{\mathbf{k}})$  под действием плазменных волн описывается системой квазилинейных уравнений (15.36), (15.37). Ее анализ показывает, что процесс эволюции  $F(v_{\mathbf{k}})$  и  $W(k)$  во времени (квазилинейная релаксация) заканчивается формированием плато на функции распределения  $F(v_{\mathbf{k}})$  с высоким уровнем плазменных волн над ним. При анализе квазилинейной релаксации в §15 эффекты рассеяния плазменных волн не принимались во внимание. Их учет, однако, при определенных условиях может радикально изменить всю картину развития неустойчивости в плазме и, в частности, привести к нелинейной стабилизации пучковой неустойчивости [395].

Эффект стабилизации возникает в том случае, если высокий уровень рассеянных плазменных волн приводит к эффективному индуцированному рассеянию и “перекачке” плазменных волн в сторону

меньших частот (высоких фазовых скоростей). Если указанное перераспределение энергии по спектру, выводящее плазменные волны из резонансной области и прекращающее их взаимодействие с пучком, происходит быстрее, чем процесс квазилинейной релаксации, последняя вообще не наступает: энергия плазменных волн сосредоточивается в нерезонансной области спектра, уровень плазменных волн в резонансной области остается низким, и распределение частиц в потоке почти не деформируется.

В §15 была подробно рассмотрена квазилинейная релаксация “узкого” потока частиц (с начальной дисперсией по скоростям  $\Delta v_S \ll v_S$ ) при возбуждении последним плазменных волн с  $v_{ph} \parallel v_S$ . Если же такой поток стабилизирован и квазилинейная релаксация не происходит, то эволюция плазменных волн описывается системой уравнений, объединяющей (15.37), (18.35) и (18.37):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -2\bar{\gamma}W - \eta WW' - 2\gamma^{abs}W, \quad (18.38)$$

$$\frac{\partial W'}{\partial t} = \eta WW' - 2\gamma^{abs}W'. \quad (18.39)$$

Здесь  $\eta$  определено формулой (18.36), в случае затухания из-за столкновений  $2\gamma^{abs} = \nu_{eff}$  (см. (12.9)),

$$\bar{\gamma} = -2\pi^2 \frac{e^2 v_S^2}{m_e \omega_L} \frac{\overline{\partial F_0}}{\partial v_k} \approx -2\pi^2 \frac{e^2 v_S^2}{m_e \omega_L} \frac{N_S}{(\Delta v_S)^2} \quad (18.40)$$

— некоторое среднее значение черенковского декремента в области неустойчивости для потока с начальной функцией распределения по скоростям  $F_0(v_k)$ . В (18.40) учтено, что в течение всего процесса стабилизации распределение частиц остается близким к первоначальному:  $\partial F / \partial v_k \approx \partial F_0 / \partial v_k$  и  $v_k \approx v_S$ . Уравнения (18.38), (18.39) записаны для случая, когда все переменные и параметры не зависят от пространственных координат.

Допустим сначала, что стабилизация происходит в отсутствие поглощения плазменных волн ( $\nu_{eff} = 0$ ), и найдем плотность энергии в нерезонансной области  $W'(\infty)$ , установившуюся в результате возбуждения и индуцированного рассеяния плазменных волн. Интегрируя (18.38) и (18.39), нетрудно найти, что

$$W(t) + W'(t) = -\frac{2\bar{\gamma}}{\eta} \ln \frac{\eta W'(t)}{-2\bar{\gamma}} + C, \quad (18.41)$$

где  $C$  — константа интегрирования. Полагая здесь  $t = 0$  и  $t = \infty$ , получим два соотношения; почленное вычитание одного из другого позволяет получить величину :

$$W'(\infty) \approx -\frac{2\bar{\gamma}}{\eta} \ln \frac{W'(\infty)}{W'(0)} \approx -\frac{2\bar{\gamma}}{\eta} \ln \frac{-2\bar{\gamma}}{\eta W'(0)}. \quad (18.42)$$

При переходе к (18.42) учтено, что начальный уровень шумов  $W(0)$ ,  $W'(0)$  и плотность энергии  $W(\infty)$  плазменных волн, установившихся в резонансной области, существенно ниже плотности энергии  $W'(\infty)$  в нерезонансной части спектра.

Процесс стабилизации, приводящий к конечному состоянию с плотностью энергии  $W'(\infty)$  в форме (18.42), происходит следующим образом. Сначала плотность энергии  $W$  плазменных волн, взаимодействующих с потоком частиц, нарастает вследствие неустойчивости по закону  $W(t) = W(0)e^{-2\bar{\gamma}t}$ . Индуцированное рассеяние в этот период остается слабым из-за низкого уровня плазменных волн в нерезонансной области  $W'$ . Постепенно  $W'$  увеличивается, повышая эффективность индуцированного рассеяния, выводящего плазменные волны из взаимодействия с потоком. Поэтому  $W$  достигает максимума в момент  $t_{\max}$ , когда  $\partial W/\partial t = 0$  и  $W' = -2\bar{\gamma}/\eta$  (см.(18.38)). При этом величина  $W(t_{\max}) \sim W'(\infty)$ . Затем  $W$  начинает убывать, а  $W'$  по-прежнему нарастает, приближаясь к уровню  $W'(\infty)$ . Характерное время убывания  $W$  после момента  $t = t_{\max}$  тоже порядка  $t_{\max}$ . Из сказанного следует, что и за характерное время процесса стабилизации в целом ( $t_{st}$ ) можно принять интервал от начала процесса  $t = 0$  до  $t = t_{\max}$ . Полагая для оценки, что на этом интервале  $W(t) \approx W(0)e^{-2\bar{\gamma}t}$  и учитывая, что при  $t = t_{\max}$  величина  $W(t_{\max}) \sim W'(\infty)$ , (18.42), получаем

$$t_{st} \sim -\frac{1}{2\bar{\gamma}} \ln \frac{-2\bar{\gamma}}{\eta W(0)}. \quad (18.43)$$

Для того чтобы установить критерий стабилизации (т.е. условие, при котором изменение функции распределения в потоке несущественно и для описания процесса развития неустойчивости можно использовать систему уравнений (18.38), (18.39) с фиксированным значением  $\bar{\gamma}$ ), следует обратиться к уравнению (15.36). Интегрируя его по времени, найдем, что

$$\delta F \equiv F_{\infty} - F_0 = \frac{\partial}{\partial v_{\mathbf{k}}} \left( \frac{a}{v_{\mathbf{k}}} \frac{\partial F_0}{\partial v_{\mathbf{k}}} \int_0^{\infty} W(\mathbf{k}, t) dt \right). \quad (18.44)$$

Здесь  $a = (2\pi)^2 e^2 / m_e^2$  и  $F_\infty$  — функция распределения  $F(v_k)$  при  $t \rightarrow \infty$ . В правой части мы положим  $\partial F / \partial v_k \approx \partial F_0 / \partial v_k$ , считая заранее изменение функции распределения частиц достаточно малым. Далее, согласно (18.39),

$$\int_0^\infty W(t) dt = \frac{1}{\eta} \ln \frac{W'(\infty)}{W'(0)},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial v_k} \delta F \sim \frac{a}{v_S (\Delta v_S)^2 \eta \Delta k} \frac{\partial F_0}{\partial v_k} \ln \frac{W'(\infty)}{W'(0)}. \quad (18.45)$$

При переходе от (18.44) к (18.45) учтено, что

$$\int_0^\infty W(k, t) dt \sim \frac{1}{\Delta k} \int_0^\infty W(t) dt,$$

где  $\Delta k$  — характерная ширина резонансного спектра, и что под знаком производной в (18.44) стоят функции, существенно меняющиеся на интервале  $\Delta v_k \sim \Delta v_S$ . Поэтому их дифференцирование по  $v_k$  приближенно соответствует делению на  $\Delta v_S$ . При

$$\frac{a}{v_S (\Delta v_S)^2 \eta \Delta k} \ln \frac{W'(\infty)}{W'(0)} \ll 1. \quad (18.46)$$

из (18.45) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial v_k} \delta F \ll \frac{\partial}{\partial v_k} F,$$

т.е. неравенство (18.46) служит критерием стабилизации пучковой неустойчивости. Полагая  $\Delta k \approx \omega_L \Delta v_S / v_S^2$  и принимая во внимание оценку  $\bar{\gamma}$  (18.40), представим этот критерий в виде

$$-\frac{2\bar{\gamma}}{N_S m_e v_S \Delta v_S \eta} \ln \frac{-2\bar{\gamma}}{\eta W'(0)} \ll 1. \quad (18.47)$$

Коэффициент  $\eta$  в случае индуцированного рассеяния на ионах определяется согласно (18.25), (18.29), (18.36) выражением

$$\eta = \frac{3}{16} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_L (k_0 - k'_0)}{m_e N v_{T_i}} \exp \left[ -\frac{(\omega_0 - \omega'_0)^2}{2v_{T_i}^2 (k_0 + k'_0)^2} \right], \quad (18.48)$$

где  $\omega_0 - \omega'_0 = 3(k_0^2 - k'_0{}^2)v_{T_i}^2 / 2\omega_L$  (см. (5.13)). Поскольку энергия плазменных волн, возбужденных стабилизированным потоком, определяется формулой (18.42), из условия (18.47) следует, что

$$W'(\infty) \ll N_S m_e v_S \Delta v_S,$$

т.е. она много меньше убыли энергии потока при установлении “плато” шириной  $\Delta v_S$ . Однако процесс квазилинейной релаксации “узкого” потока завершается установлением плато шириной порядка  $v_S \gg \Delta v_S$  и передачей в плазменные волны  $2/3$  своей энергии (см. §15). Отсюда ясно, что в условиях стабилизации эффективность возбуждения плазменных волн резко уменьшается.

Выше при обсуждении стабилизации неустойчивости мы не учитывали затухания плазменных волн из-за соударений. Последние, однако, могут существенно изменить процесс стабилизации плазменных волн, придав ему пульсирующий характер [396, 397]. Это особенно ясно в случае, когда время затухания плазменных волн ( $\sim \nu_{\text{eff}}^{-1}$ ) много больше характерного времени стабилизации  $t_{\text{st}} \sim -1/\bar{\gamma}$  (18.43). Исчезновение плазменных волн в нерезонансной области за время порядка  $1/\nu_{\text{eff}}$  приведет к возобновлению процесса генерации и новому нарастанию  $W'$  за счет индуцированной перекачки. Описанная картина, повторяясь с периодом  $\tau \sim 1/\nu_{\text{eff}}$ , точнее, с периодом [398, 399]

$$\tau \approx \frac{1}{\nu_{\text{eff}}} \ln \frac{-2\bar{\gamma}}{\eta W'(0)}, \quad (18.49)$$

и представляет собой пульсирующий режим генерации плазменных волн стабилизированным потоком.

Хотя изменения в распределении частиц  $F(v_{\mathbf{k}})$  за один период малы, они постепенно накапливаются, вызывая нелинейную релаксацию стабилизированного потока с образованием “плато”. Однако в условиях стабилизации процесс релаксации совершается значительно медленнее, чем для нестабилизированного потока. Поскольку плотность энергии, передаваемая от частиц потока к плазменным волнам за один период пульсаций, равна  $W'(\infty)$ , поток теряет  $2/3$  своей энергии  $N_S m_e v_S^2 / 2$  и образует плато за время

$$t_{\text{nl}} \sim N_S m_e v_S^2 / 6 \nu_{\text{eff}} W'(\infty). \quad (18.50)$$

Указанное время нелинейной релаксации при  $-1/\bar{\gamma} \gg \nu_{\text{eff}}$  значительно превышает время квазилинейной релаксации  $t_{\text{ql}}$  (15.46). Заметим, что для интервалов  $t \ll t_{\text{nl}}$  динамика пульсирующего режима описывается уравнениями (18.38), (18.39) с  $\bar{\gamma} = \text{const}$ ; их исследование проведено в [400].

Принципиальная возможность стабилизации неустойчивости в астрофизических условиях, причем не только пучковой, но и конусной, черенковской, синхротронной и пр. [10, 397, 401] не подлежит сомне-

нию. Однако в каждом конкретном случае наличие стабилизации может быть установлено только в результате детального анализа. Для классического примера действия плазменного механизма в космической плазме — всплесков III типа в солнечной короне — такой анализ показал, что критерий стабилизации (18.47) для основной массы всплесков, генерируемых электронными потоками, не выполняется [337, 338] (см. также [402–404]). Сказанное означает, что возбуждение плазменных волн этими потоками происходит в режиме квазилинейной релаксации (§15). Вместе с тем из (18.47) ясно, что критерий стабилизации легче реализовать для ионных потоков, поскольку для них черенковский инкремент  $-1/\bar{\gamma}$  в  $m_i/m_e$  раз меньше (см. (15.5)). Некоторым указанием на возможность стабилизации пучковой неустойчивости в короне служат регистрируемые иногда всплески III типа с квазипериодическим изменением интенсивности радиоизлучения ( $\tau \sim 2-3$  с). Такие изменения могут быть обусловлены пульсирующим режимом неустойчивости, чей период  $\tau$  (18.49) в условиях короны составляет секунды и доли секунды (для  $\nu_{\text{эф}} \sim 1-10$  с $^{-1}$ ; см. §12). Квазипериодические профили радиоизлучения  $I_\omega(t)$  чаще наблюдаются в радиоизлучении IV типа и в некоторых специальных видах солнечных радиовсплесков. Возможно, что это явление также связано с пульсирующим режимом пучковой и конусной черенковской неустойчивостей [398, 399, 401]. О стабилизации и пульсирующем режиме конусной неустойчивости в условиях земной магнитосферы см. [397].

### 18.5. Рэлеевское рассеяние в нерелятивистской плазме

При конкретных расчетах вероятностей рассеяния волн следует учитывать, что между движением заряженных частиц в плазме существует корреляция, связанная с эффектом экранирования кулоновского заряда на расстояниях  $r \sim D$  ( $D$  — радиус Дебая; см. (1.4), (1.5)). Такая корреляция может существенно изменить эффективность рассеяния.

Характер экранирования (появления пространственного заряда противоположного знака) зависит от скорости движения частицы. Конкретно, вокруг положительного иона, имеющего заряд  $+e$  и движущегося со скоростью  $v \ll v_{Ti} = \sqrt{\kappa T/m_i}$ , возникает облако радиуса  $D$  с повышенной концентрацией электронов. Общий заряд такого облака равен  $-e/2$ ; другая половина заряда иона компенсируется за счет недостатка ионов в дебаевской сфере. Экранировка поля электрона при скоростях  $v_{Te} \ll v \ll v_{Ti}$  происходит несколько иначе: по-



ложительный пространственный заряд  $+e$  создается только за счет недостатка электронов в дебаевской сфере; концентрация ионов не меняется, поскольку последние, обладая скоростями порядка  $v_{T_i}$ , не “успевают” перераспределиться при движении частицы со скоростью  $v \gg v_{T_i}$ . И, наконец, заряженная частица, обладающая высокой скоростью  $v \gg v_T$ , вообще не в состоянии окружить себя экранирующей оболочкой из медленных частиц плазмы.

Из сказанного следует, что рассеяние излучения с любой длиной волны на быстрых частицах ( $v \gg v_T$ ) происходит как на свободных зарядах благодаря отсутствию в этом случае экранирующей оболочки.<sup>133</sup> Для рассеяния электромагнитных волн в плазме приближение свободных частиц допустимо также на волнах короче дебаевского радиуса  $\lambda \ll D$  (т.е.  $kD \gg 1$ ): вклад в рассеянное излучение от распределенного дебаевского облака становится незначительным и эффективное рассеяние связано только с центральной частицей. Этот вариант типичен для рассеяния в оптическом и рентгеновском диапазоне.

Наоборот, исследование рассеяния электромагнитных волн с  $kD \ll 1$  (на частицах нерелятивистской плазмы со скоростями  $v \lesssim v_T$ ), а также слабозатухающих плазменных волн, для которых всегда  $kD \ll 1$ , должно происходить с учетом экранирующих эффектов. Условие  $kD \ll 1$ , как правило, выполнено в радиодиапазоне. При этом рассеяние происходит не на отдельных частицах плазмы, а на конгломератах, состоящих из частицы и окружающего ее дебаевского облака. Рассеяние на центральной частице представляет собой излучение при вынужденных колебаниях последней в поле падающей на нее волны. Когда частица окружена дебаевским облаком, то возникает второй эффект — излучение тока, наведенного волной в этом облаке.

Эффективность рассеяния при этом существенно зависит от характера рассеивающего центра. Так, например, в случае, когда в роли последнего выступает ион ( $v \ll v_{T_i}$ ), окруженный дебаевским облаком электронов с общим зарядом  $-e/2$ , то благодаря большой массе иона эффект рассеяния на центральной частице будет мал по сравнению с рассеянием на электронном облаке. Поэтому основной вклад в вероятность и сечение рассеяния при этом дает экранирующее электронное

<sup>133</sup>Мы отвлекаемся здесь от того обстоятельства, что быстрая частица в плазме излучает плазменные волны (за счет эффекта Вавилова–Черенкова); последние также дают вклад в общее сечение рассеяния на быстрой частице. Однако рассеяние волн на плазменных волнах относится уже к комбинационному типу рассеяния; оно рассматривается в §21.

облако. Если же центральной частицей служит электрон со скоростью  $v$  в интервале  $v_{T_i} \ll v \ll v_T$ , то его окружает облако пространственного заряда  $+e$ , созданное дефицитом электронов в дебаевской сфере. Поле рассеянного излучения от центральной частицы в значительной степени компенсируется полем рассеяния от окружающего облака. Полная компенсация не наступает благодаря конечному отношению длины волны к размерам облака, в результате вероятность рассеяния на экранированных электронах резко уменьшается (примерно в  $(kD)^2$  раз) по сравнению с вероятностью рассеяния на экранированных ионах [388, 389]. Указанная вероятность возрастет, если учесть роль ионов в создании экранирующего облака вокруг электрона. Благодаря влиянию последних пространственный заряд, созданный дефицитом электронов в дебаевской сфере, будет отличаться от  $+e$ , что несколько уменьшит степень компенсации [383, 395].

Выше предполагалось, что эффект рассеяния в плазме сводится к излучению при вынужденных колебаниях частицы (и экранирующего облака) в поле проходящей волны. Такое представление правильно, если рассеивается поперечная электромагнитная волна; однако при рассеянии продольных плазменных волн оно становится неполным. Дело в том, что тогда наряду с излучением при вынужденных колебаниях появляется "переходное рассеяние". Это название применяют [393, 405] к процессу излучения при падении на заряженную частицу (движущуюся или неподвижную) волны диэлектрической проницаемости вида  $\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos(kr - \omega t)$ . Последняя периодически меняет характер поляризации среды вокруг заряда, за счет чего и возникает рассеянное излучение. Указанное изменение диэлектрической проницаемости существует в продольных плазменных волнах, поскольку распространение последних сопровождается изменением электронной концентрации, и отсутствует в поперечных электромагнитных волнах. Из сказанного ясно, что эффект переходного рассеяния следует учитывать при конкретных расчетах вероятности рассеяния плазменных волн.

Не останавливаясь на процедуре вычисления вероятностей (см. [89, 383, 384]), приведем окончательные выражения, характеризующие вероятность рассеяния на экранированных ионах в изотермической плазме. Для рассеяния плазменных волн ( $l$ ) в плазменные ( $l'$ ) имеем

$$w \equiv w_{ll'} = \frac{(2\pi)^3 e^4}{m_e^2 \omega_L^2} \cos^2 \theta_1 |2 + i\sqrt{\pi} Z_i w(Z_i)|^{-2} \delta(\omega_- - \mathbf{k}_- \cdot \mathbf{v}). \quad (18.51)$$

Здесь  $w(Z_i)$  — функция Крампа с аргументом  $Z_i = \omega_- / \sqrt{2} |k_-| v_{T_i}$  (см.

(4.91)); через  $\omega_-$  и  $\mathbf{k}_-$  обозначены соответственно разности  $\omega - \omega'$  и  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ , через  $\theta_1$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . В случае рассеяния плазменных волн ( $l$ ) в электромагнитные ( $l'$ )

$$w \equiv w_{ilt'} = \frac{(2\pi)^3 e^4}{m_e^2 \omega_L^2} \sin^2 \theta_1 |2 + i\sqrt{\pi} Z_i w(Z_i)|^{-2} \delta(\omega_- - \mathbf{k}_- \cdot \mathbf{v}). \quad (18.52)$$

Присутствие дельта-функции в приведенных формулах учитывает условие рассеяния (18.3), следующее из законов сохранения энергии и импульса.

В равновесной плазме выражения для коэффициентов спонтанного и индуцированного рассеяний  $\gamma_j^{\text{sp}}$ ,  $\gamma_j^{\text{ind}}$  содержат величину  $w_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  (18.24), имеющую смысл вероятности рассеяния волны  $\mathbf{k}$  в  $\mathbf{k}'$  на частицах из единичного объема среды (см. (18.19) и (18.23)). При рассеянии на экранированных ионах вероятность  $w_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = w_i(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  трудно найти, интегрируя (18.51) и (18.52) по максвелловской функции распределения  $f_0(\mathbf{p})$ . Тогда  $w_i(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  примет вид (18.25), где для рассеяния плазменных волн в плазменные

$$w_\alpha^* \equiv w_{ill'}^* = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{\omega_L^2}{N v_{Ti}} \cos^2 \theta_1 |2 + i\sqrt{\pi} Z_i w(Z_i)|^{-2}, \quad (18.53)$$

а для рассеяния плазменных волн в электромагнитные

$$w_\alpha^* \equiv w_{ilt'}^* = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \frac{\omega_L^2}{N v_{Ti}} \sin^2 \theta_1 |2 + i\sqrt{\pi} Z_i w(Z_i)|^{-2}. \quad (18.54)$$

Если не стремиться к высокой точности, то в выражениях (18.53), (18.54) можно заменить  $|2 + i\sqrt{\pi} Z_i w(Z_i)|^{-2}$  на  $1/4$ . При этом допускается ошибка в величине  $w_\alpha^*$  на фактор порядка единицы, но зато существенно упрощается вид этих выражений. Указанное упрощение применяется довольно часто; оно было использовано выше в формуле (18.29).

Точные коэффициенты экстинкции  $\mu_j^{\text{sp}} = 2\gamma_j^{\text{sp}} v_{gr}^{-1}$  получаются интегрированием  $w_i(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  по всем  $\mathbf{k}'$  (см. (18.19) и (18.24)). В результате можно установить, что для рассеяния  $l \rightarrow l'$

$$\mu_j^{\text{sp}} = 2\pi e^4 N / 27 m_e^2 v_T^4, \quad (18.55)$$

для процесса  $l \rightarrow l'$

$$\mu_j^{\text{sp}} = 4\pi e^4 N / 3\sqrt{3} m_e^2 c^3 v_T. \quad (18.56)$$

Отношение этих коэффициентов равно  $c^3/6\sqrt{3}v_T^3$ , т.е. в нерелятивистской плазме оно много больше единицы.

К исследованию процесса рассеяния на экранированных ионах в плазме можно подойти иначе, если отклонения электронной концентрации от стационарных значений в дебаевском облаке радиуса  $D$  трактовать как флуктуации, вызванные тепловым движением частиц [283]. Представим отклонения электронной концентрации от невозмущенного значения  $\delta N(\mathbf{r}, t)$  в виде двух слагаемых:  $\delta N = \delta N' + \delta N''$ . Первое слагаемое повторяет флуктуации концентрации ионов  $\delta N_i$  (т.е.  $\delta N' = \delta N_i$ ); поэтому оно связано (на масштабах больше  $D$ ) с квазинейтральными флуктуациями плотности плазмы  $\delta \rho \approx m_i \delta N$ . Второе слагаемое учитывает изменение концентрации электронов, сопровождаемое появлением электрического заряда  $\delta \rho_e = -e \delta N''$ . Нетрудно усмотреть, что часть флуктуаций  $\delta N'$  описывает облака пространственного заряда, экранирующего ионы, поэтому рассеяние на этих флуктуациях эквивалентно рассеянию на экранированных ионах. С другой стороны, длинноволновая часть спектра флуктуаций  $\delta N''$  ( $kD \ll 1$ ) представляет собой совокупность плазменных волн теплового происхождения.

Частотный спектр рассеянного излучения определяется характером изменения во времени  $\delta N'$  и  $\delta N''$ . Поскольку изменения плотности плазмы  $\delta \rho$  происходят медленно по сравнению с периодом колебаний в падающей волне  $2\pi/\omega$  (где  $\omega > \omega_L$ ), рассеяние последней на  $\delta N'$  не сопровождается существенным изменением частоты:  $|\omega - \omega'| \lesssim kv_T$  (см. (18.3)). Это так называемое рэлеевское рассеяние. Спектр  $\delta N''$  имеет резкий максимум на частотах  $\omega \approx \omega_L$ , характерный для плазменных волн. Поэтому изменение частоты  $\omega$  при рассеянии на  $\delta N''$  может быть значительным:  $|\omega - \omega'| \approx \omega_L$  (комбинационное рассеяние). Обсуждение эффектов рассеяния излучения на волнах мы отложим до §21, рассмотрев здесь рэлеевское рассеяние плазменных волн с их конверсией в электромагнитное излучение.

Зависимость диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  в плазме от электронной концентрации  $N$  приводит к тому, что флуктуации  $\delta N'$ , связанные с медленными изменениями плотности среды  $\delta \rho$ , вызовут флуктуации  $\delta \epsilon$ . Учитывая медленность последних, пренебрежем изменением  $\delta \epsilon$  во времени, положив  $\delta \epsilon = \delta \epsilon(\mathbf{r})$ . При прохождении волны  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$  поле  $\mathbf{E}$  наводит в среде добавочную поляризацию  $\delta \mathbf{P} = \delta \epsilon \mathbf{E}/4\pi$  (поскольку  $\mathbf{P} = (\epsilon - 1)\mathbf{E}/(4\pi)$ ; см. (4.5), (4.12)). Эта поляризация в свою очередь служит сторонним источником излучения как электромагнитных, так и плазменных волн. Поэтому процесс

рассеяния на флуктуациях  $\delta N'$  сопровождается конверсией волн одного типа в волны другого типа — обстоятельство, весьма важное для плазменных механизмов радиоизлучения.

Найдем мощность рассеянного электромагнитного излучения из объема  $V$ , линейные размеры которого  $L$  удовлетворяют условию  $D \ll L \ll \lambda/2\pi$  ( $\lambda$  — длина проходящей плазменной волны). Благодаря неравенству  $L \ll \lambda/2\pi$  излучение, создаваемое стороной поляризацией  $\delta P = \delta \epsilon E/4\pi$  из такого объема, можно считать дипольным. Мощность последнего, как известно [241], равна  $\mathcal{P} = (n_{el}\omega^4/3c^3)d_0^2$ , где  $d_0$  — амплитуда дипольного момента системы  $d$ , меняющегося с частотой  $\omega$ . В нашем случае  $d = \int_V \delta P dV$  и частота  $\omega$  совпадает с частотой проходящей волны. Поэтому средняя мощность излучения

$$\mathcal{P} = \frac{n_{el}(\omega)\omega^4 E_0^2 V^2}{48\pi^2 c^3} \overline{(\delta \epsilon)_V^2}. \quad (18.57)$$

Через  $\overline{(\delta \epsilon)_V^2}$  здесь обозначен средний квадрат флуктуаций диэлектрической проницаемости в объеме  $V$ ; при этом  $(\delta \epsilon)_V = V^{-1} \int_V \delta \epsilon dV$ . Вследствие пропорциональности между  $\epsilon - 1$ ,  $N$  и  $\rho$  в плазме

$$(\delta \epsilon)_V = \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} (\delta \rho)_V = \frac{\epsilon - 1}{\rho} (\delta \rho)_V = \frac{4\pi e^2}{m_e \omega^2} (\delta N_i)_V.$$

и, следовательно,

$$\mathcal{P} = \frac{n_{el}(\omega)e^4 E_0^2 V^2}{3m_e^2 c^3} \overline{(\delta N_i)_V^2}. \quad (18.58)$$

Из теории флуктуаций в равновесной плазме следует (см., например, [72]), что средний квадрат флуктуаций ионной концентрации  $\overline{(\delta N_i)_V^2}$  в объеме  $V \gg D^3$  равен  $N_i/2V$ , в отличие от идеального газа из невзаимодействующих (“свободных”) частиц, где  $\overline{(\delta N)_V^2} = N/V$ . Это отличие представляется вполне естественным, так как распределение ионов в плазме коррелировано благодаря эффекту дебаевского экранирования.

Подставив  $\overline{(\delta N_i)_V^2} = N_i/2V$  в (18.58), получаем [283]

$$\mathcal{P} = \frac{n_{el}(\omega)e^4 E_0^2 V N_i}{6m_e^2 c^3}. \quad (18.59)$$

Поскольку флуктуации  $\delta \epsilon$  и  $\delta N_i$  в разных объемах  $V \gg D^3$  некоррелированы, мощности дипольного излучения из таких объемов складываются. Это означает, что формула (18.59) остается справедливой для любых  $V \gg D$  (в том числе и для  $V \gtrsim \lambda^3$ ).

Введем теперь полное сечение рассеяния  $\sigma_{\text{tot}}$ , определив его как отношение мощности, рассеиваемой одной частицей по всем направлениям и частотам, к интенсивности проходящей волны. Из формулы (18.59) и выражений для интенсивности излучения  $I_{\mathbf{k}}$  (5.8), (5.17) тогда следует, что полное сечение рассеяния на экранированных ионах в электромагнитные волны равно

$$\sigma_{\text{tot}} \equiv \sigma_{itt'} = \frac{1}{2} \sigma_{\text{T}}, \quad (18.60)$$

если проходящая волна — электромагнитная, и

$$\sigma_{\text{tot}} \equiv \sigma_{ilt'} = \frac{1}{2} \sigma_{\text{T}} \frac{c}{\sqrt{3} v_{\text{T}}}, \quad (18.61)$$

если проходящая волна — плазменная. Здесь через

$$\sigma_{\text{T}} = (8\pi/3)(e^2/m_e c^2)^2 \quad (18.62)$$

обозначено так называемое томсоновское сечение; оно характеризует рассеяние электромагнитных волн на свободных электронах в вакууме в отсутствие постоянного магнитного поля  $B_0$ .

Отметим, что в плазме дипольное излучение плазменных волн в  $0.1(c^3/v_{\text{T}}^3)$  раз эффективнее, чем электромагнитных [406]. Поэтому сечения  $\sigma_{itt'}$  и  $\sigma_{ill'}$ , описывающие процессы  $t \rightarrow l'$  и  $l \rightarrow l'$ , во столько же раз больше соответствующих значений  $\sigma_{itt'}$ , (18.60) и  $\sigma_{ilt'}$ , (18.61) [407].

Для плазменных механизмов радиоизлучения часто используется понятие коэффициента трансформации  $Q$  плазменных волн в электромагнитные [3]. По определению,  $Q$  есть отношение мощности рассеянного из единичного объема электромагнитного излучения к интенсивности плазменных волн  $I_{\mathbf{k}}$ . Отсюда и из определения полного сечения  $\sigma_{\text{tot}}$  ясно, что  $Q = \sigma_{ilt'} N_i$ , где  $\sigma_{ilt'}$  определяется формулой (18.61). Коэффициент трансформации  $Q$  является частным случаем коэффициента спонтанного рассеяния

$$\mu_j^{\text{sp}} = \int \sigma_{\text{tot}} f_0(p) d^3 p. \quad (18.63)$$

Согласно (18.60)-(18.62), этот коэффициент для рассеяния электромагнитных волн в электромагнитные имеет вид

$$\mu_j^{\text{sp}} = \frac{4\pi e^4 N_i}{3m_e^2 c^4}, \quad (18.64)$$

если  $kD \ll 1$ , и

$$\mu_j^{\text{sp}} = \frac{8\pi e^4 N_i}{3m_e^2 c^4} \quad (18.65)$$

при  $kD \gg 1$ .

Коэффициент рассеяния плазменных волн в электромагнитные

$$\mu_j^{\text{sp}} = \frac{4\pi e^4 N_i}{3\sqrt{3}m_e^2 c^3 v_T}. \quad (18.66)$$

Последнее выражение тождественно формуле (18.56).<sup>134</sup> Это не удивительно, так как коэффициент спонтанного рассеяния (18.63) имеет точно такой же смысл, что и введенный ранее коэффициент экстинкции

$$\mu_j^{\text{sp}} = 2\gamma_j^{\text{sp}} v_{\text{gr}}^{-1} = v_{\text{gr}}^{-1} \int w f_0(p) \frac{d^3 p d^3 k'}{(2\pi)^3}. \quad (18.67)$$

Заметим, наконец, что в согласии с (18.63) и (18.67) полное сечение  $\sigma_{\text{tot}}$  связано с вероятностью рассеяния  $w$  соотношением

$$\sigma_{\text{tot}} = \int v_{\text{gr}}^{-1} w(p, k, k') \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3}. \quad (18.68)$$

Величину, фигурирующую под интегралом, называют дифференциальным сечением рассеяния; такое сечение характеризует здесь рассеяние в единичный объем пространства волновых векторов  $k'$ .

### 18.6. Рассеяние на свободных частицах. Обратный эффект Комптона

В предыдущем разделе уже отмечалось, что в плазме при рассеянии излучения с длиной волны  $\lambda \ll D$  или при рассеянии на частицах, движущихся со скоростью  $v \gg v_T$ , дебаевская экранировка становится несущественной. В этих условиях каждая рассеивающая частица может считаться “свободной” в смысле некоррелированности ее движения с движением других частиц. Рассеяние на свободных частицах будет некогерентным и его полная мощность  $\mathcal{P}$  в объеме  $V$  сложится из мощностей рассеянного излучения отдельных частиц.

Из законов сохранения (18.1), (18.2) для частиц с произвольными (в том числе релятивистскими) энергиями следует, что в вакууме энергия рассеянного фотона

$$\mathcal{E}_\gamma \equiv \hbar\omega' = \frac{\epsilon(1 - \beta \cos \theta)}{1 - \beta \cos \theta_2 + \epsilon \mathcal{E}^{-1}(1 - \cos \theta_1)}, \quad (18.69)$$

<sup>134</sup>Рассматривается однократно ионизованная плазма с  $N_i = N$ .

Здесь  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}$ ,  $\theta_1$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , а  $\theta_2$  — угол между  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{p}$ ; через  $\mathcal{E}$ ,  $\mathbf{p}$  и  $v = \beta c$  обозначены начальные энергия, импульс и скорость электрона, через  $\epsilon = \hbar\omega$  — энергия налетающего фотона.

Если  $\epsilon \ll mc^2$  и электрон до столкновения с фотоном покоится ( $v = 0$ ), энергия  $\mathcal{E}_\gamma$  близка к  $\epsilon$ . Сечение рассеяния тогда можно определить классически, учитывая, что под действием волны  $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$  электрон совершает вынужденные колебания  $\mathbf{r} = -e\mathbf{E}/m_e\omega^2$  и излучает как элементарный диполь с моментом  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$ . Мощность дипольного излучения в вакууме в единицу телесного угла  $\Omega'$  равна [241]

$$\mathcal{P}_{\Omega'} = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sin^2 \Theta, \quad (18.70)$$

где  $\Theta$  — угол между  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{E}$ . Поэтому дифференциальное сечение рассеяния, отнесенное к единице телесного угла  $\Omega'$ , есть

$$\sigma_{\Omega'} \equiv \frac{\mathcal{P}_{\Omega'}}{(c/8\pi)E_0^2} = \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sin^2 \Theta. \quad (18.71)$$

В случае, когда падающее на электрон электромагнитное излучение неполяризовано (это будет постоянно предполагаться в дальнейшем), сечение получается усреднением (18.71) по всем направлениям  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ :

$$\sigma_{\Omega'} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta_1). \quad (18.72)$$

Полное сечение рассеяния равно томсоновскому:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \sigma_{\Omega'} d\Omega' = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = \sigma_T. \quad (18.73)$$

(см. (18.62)).

Если “мягкие” фотоны рассеиваются на энергичных (релятивистских) электронах ( $\mathcal{E} \gg \epsilon = \hbar\omega$ ), то такой процесс называется “обратным” комптон-эффектом, в отличие от обычного эффекта Комптона, соответствующего столкновениям “жестких” фотонов с электронами малой энергии ( $\mathcal{E} \ll \epsilon$ ). Обратное комптоновское рассеяние<sup>135</sup> мы рассмотрим в томсоновском пределе, когда в системе отсчета, связанной с релятивистским электроном, энергия налетающего фотона  $\tilde{\epsilon} \ll m_e c^2$ .

<sup>135</sup>Его часто называют просто “комптоновским излучением”.



Поскольку  $\tilde{\epsilon} = \epsilon(1 - \beta \cos \theta)(1 - \beta^2)^{-1/2}$  (см. (3.9)), в “лабораторной” системе отсчета томсоновскому пределу соответствует условие

$$2\epsilon \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \ll m_e c^2. \quad (18.74)$$

При этом, как нетрудно усмотреть из формулы (18.69), энергии рассеянных фотонов  $\mathcal{E}_\gamma$  заключены в пределах

$$\frac{1}{4} \epsilon \left( \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \leq \mathcal{E}_\gamma \leq 4\epsilon \left( \frac{\mathcal{E}}{m_e c^2} \right)^2. \quad (18.75)$$

максимальная энергия  $\mathcal{E}_\gamma$  реализуется при встречном столкновении фотона и электрона с рассеянием в направлении импульса электрона  $p$  (т.е.  $\theta = \theta_1 = \pi$ ,  $\theta_2 = 0$ ); минимальная — при  $\theta = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ . Поскольку электрон релятивистский, рассеянное излучение сосредоточено преимущественно в узком угле  $\sim m_e c^2 / \mathcal{E}$  вдоль  $p$  (аргументация в пользу этого утверждения совершенно аналогична соображениям относительно ширины диаграммы направленности синхротронного излучения, приведенным в §10). Максимальная энергия рассеянных фотонов  $\mathcal{E}_\gamma \gg \epsilon$ ; ясно, что она приобретает главным образом за счет убыли энергии электрона. Вместе с тем из (18.74), (18.75) следует, что  $\mathcal{E}_\gamma \ll \mathcal{E}$  т.е. при каждом акте рассеяния частица теряет относительно малую часть своей энергии.

Предел  $\tilde{\epsilon} \ll m_e c^2$  наиболее важен для астрофизических приложений, хотя в космических условиях возможна реализация и противоположного неравенства  $\tilde{\epsilon} \gg m_e c^2$  (например, при рассеянии оптических и рентгеновских фотонов на электронах высоких энергий в Крабовидной туманности, квазарах и т.п.; подробнее см. [208]). В пределе  $\tilde{\epsilon} \gg m_e c^2$  потери энергии электрона приобретают катастрофический характер: при каждом акте рассеяния в излучение передается энергия  $\mathcal{E}_\gamma \sim \mathcal{E}$ .

Для понимания дальнейшего следует иметь в виду, что под сечением рассеяния обычно понимают одну из трех величин:  $\sigma_{\Omega'}^W$  — отношение рассеянной мощности к интенсивности проходящего излучения,  $\sigma_{\Omega'}^N$  — отношение числа рассеянных фотонов к плотности потока фотонов в этом излучении и, наконец,  $\sigma_{\Omega'}$  — отношение числа рассеянных фотонов к плотности потока фотонов, “налетающих” на электрон. Индекс  $\Omega'$  в приведенных обозначениях указывает на рассеяние в единицу телесного угла  $\Omega'$ , т.е. здесь речь идет о дифференциальных сечениях. Эти сечения соотносятся между собой следующим образом:

$$\frac{\omega}{\omega'} \sigma_{\Omega'}^W = \sigma_{\Omega'}^N = (1 - \beta \cos \theta) \sigma_{\Omega'}. \quad (18.76)$$

фактор  $\omega/\omega'$  учитывает изменение частоты излучения в процессе рассеяния, а фактор  $(1 - \beta \cos \theta)$  — отличие плотности потока фотонов  $cN_{\mathbf{k}}$  через неподвижную площадку от плотности потока фотонов  $(c - v \cos \theta)N_{\mathbf{k}}$  через площадку, движущуюся вместе с электроном.<sup>136</sup> В любом случае предполагается, что указанная единичная площадка располагается в плоскости, ортогональной импульсу фотонов  $\hbar\mathbf{k}$ .

Выше мы использовали только одно из определений сечения рассеяния, а именно  $\sigma_{\Omega'}^W$  (см. (18.71), (18.72)), однако для томсоновского рассеяния на нерелятивистском электроном ( $\omega \approx \omega'$ ,  $\beta \ll 1$ ) все три определения практически совпадают. При исследовании обратного комптоновского рассеяния на релятивистских электронах ситуация меняется; здесь удобно использовать сечение  $\sigma_{\Omega'}$  благодаря инвариантности  $\sigma_{\Omega'} d\Omega'$  (сохранению этой величины при переходе от одной системы отсчета к другой). Последнее обстоятельство довольно очевидно: оно следует из определения  $\sigma_{\Omega'}$ , если учесть тот факт, что число фотонов в фазовом пространстве не зависит от выбора системы отсчета. Отмеченная инвариантность и совпадение всех трех сечений в системе отсчета, связанной с электронами, позволяет утверждать, что в “лабораторной” системе

$$\sigma_{\Omega'}^N d\Omega' = (1 - \beta \cos \theta) \sigma_{\Omega'} d\Omega' = (1 - \beta \cos \theta) \sigma_{\tilde{\Omega}'} d\tilde{\Omega}'. \quad (18.77)$$

Здесь  $\sigma_{\tilde{\Omega}'}$  — томсоновское сечение в системе, связанной с электроном (см. (18.72)). Зная последнее, можно рассчитать и  $\sigma_{\Omega'}^N$ ; необходимое для этого преобразование элемента телесного угла  $d\tilde{\Omega}' \rightarrow d\Omega'$  нетрудно установить, используя закон аберрации (3.8). В результате получаем

$$\sigma_{\Omega'}^N = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{(1 - \beta \cos \theta)(1 + \cos^2 \tilde{\theta}_1)(1 + \beta \cos \tilde{\theta}_2)}{1 - \beta^2}. \quad (18.78)$$

Здесь  $\tilde{\theta}_1$  — угол между  $\tilde{\mathbf{k}}$  и  $\tilde{\mathbf{k}}'$ , а  $\tilde{\theta}_2$  — угол между  $\tilde{\mathbf{k}}'$  и  $\mathbf{p}$ , где волновые векторы  $\tilde{\mathbf{k}}$  и  $\tilde{\mathbf{k}}'$  падающего и рассеянного излучения берутся в системе, связанной с электроном;  $\mathbf{p}$  — импульс последнего в “лабораторной” системе отсчета:

Допустим теперь для простоты, что распределение “мягких” фотонов изотропно, и их концентрация в интервале энергий  $d\epsilon$  составляет  $n_{\text{ph}}(\epsilon)d\epsilon$ . Тогда число фотонов, рассеянных электроном в единицу

<sup>136</sup> Величина  $c - v \cos \theta$  есть относительная скорость фотона и электрона в “лабораторной” системе отсчета (в проекции на направление импульса фотона).

времени в интервал энергий  $d\mathcal{E}_\gamma$ , будет равно

$$\frac{d\mathcal{E}_\gamma}{4\pi} \int \sigma(\mathcal{E}, \epsilon, \mathcal{E}_\gamma) c n_{\text{ph}}(\epsilon) d\epsilon, \quad (18.79)$$

где

$$\sigma(\mathcal{E}, \epsilon, \mathcal{E}_\gamma) = \int \sigma_{\Omega'}^N \delta[\mathcal{E}_\gamma - \Phi(\epsilon, \mathcal{E}, \theta, \theta_1, \theta_2)] d\Omega d\Omega'. \quad (18.80)$$

Введением дельта-функции от  $\mathcal{E}_\gamma$  учтено, что фотон с энергией  $\mathcal{E}_\gamma$  возникает только при определенном сочетании параметров  $\epsilon$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\theta$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , определяемом законами сохранения при рассеянии; через  $\Phi$  здесь обозначена функция, стоящая в правой части равенства (18.69). Поскольку в аргументе дельта-функции фигурирует энергия рассеянного фотона, из (18.80) ясно, что  $\sigma(\mathcal{E}, \epsilon, \mathcal{E}_\gamma)$  имеет смысл дифференциального сечения, усредненного по всем направлениям “мягких” фотонов и отнесенного к единичному интервалу энергий  $\mathcal{E}_\gamma$ . Из (18.69), (18.78) и (18.80) следует, что при условии (18.74) и в области  $\epsilon \leq \mathcal{E}_\gamma \leq 4\epsilon(\mathcal{E}/m_e c^2)^2$  [408]

$$\sigma(\mathcal{E}, \epsilon, \mathcal{E}_\gamma) = \quad (18.81)$$

$$\frac{3}{32} \sigma_T \frac{(m_e c^2)^4}{\epsilon^2 \mathcal{E}^3} \left\{ 2 \frac{\mathcal{E}_\gamma}{\mathcal{E}} - \frac{(m_e c^2)^2 \mathcal{E}_\gamma^2}{\epsilon \mathcal{E}^3} + \frac{8\epsilon \mathcal{E}}{(m_e c^2)^2} + 4 \frac{\mathcal{E}_\gamma}{\mathcal{E}} \ln \frac{(m_e c^2)^2 \mathcal{E}_\gamma}{4\epsilon \mathcal{E}^2} \right\}.$$

Полное сечение рассеяния при этом равно томсоновскому:

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \sigma(\mathcal{E}, \epsilon, \mathcal{E}_\gamma) d\mathcal{E}_\gamma = \sigma_T. \quad (18.82)$$

Далее, средние потери энергии электрона на комптоновское рассеяние составляют

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_C = c \int \sigma(\mathcal{E}, \epsilon, \mathcal{E}_\gamma) n_{\text{ph}}(\omega) \mathcal{E}_\gamma d\mathcal{E}_\gamma d\epsilon = c N_{\text{ph}} \sigma_T \cdot \frac{4}{3} \bar{\epsilon} (\mathcal{E}/m_e c^2)^2. \quad (18.83)$$

Здесь через  $N_{\text{ph}}$  обозначено число фотонов в единице объема, а через  $\bar{\epsilon}$  — средняя энергия фотона:

$$N_{\text{ph}} = \int n_{\text{ph}}(\epsilon) d\epsilon, \quad \bar{\epsilon} = \frac{1}{N_{\text{ph}}} \int \epsilon n_{\text{ph}}(\epsilon) d\epsilon. \quad (18.84)$$

В (18.83) учтено, что при каждом акте рассеяния электрон теряет энергию  $\Delta\mathcal{E} \approx \mathcal{E}_\gamma$ . С другой стороны, потери энергии электрона в

единицу времени можно записать в виде  $-(d\mathcal{E}/dt)_C = cN_{\text{ph}}\sigma_{\text{tot}}\bar{\mathcal{E}}_\gamma$ . Со- поставив это соотношение с (18.83) и приняв во внимание (18.82), за- ключаем, что средняя энергия рассеянных квантов

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{4}{3}\bar{\epsilon}\left(\frac{\mathcal{E}_\gamma}{m_e c^2}\right)^2. \quad (18.85)$$

Отсюда ясно, что независимо от энергии релятивистского элек- трона  $\mathcal{E}$  частота  $\mathcal{E}_\gamma/\hbar$  для комптоновского рассеяния совпадает с ха- рактерной частотой синхротронного излучения  $\omega_{\text{max}}$  (10.80), если вы- полнено условие  $8\bar{\epsilon}/3 = \hbar\omega_B$ . Вместе с тем и потери энергии ча- стицы на комптоновское рассеяние (18.83) зависят от  $\mathcal{E}$  так же, как синхротронные потери (10.99). Величина указанных потерь стано- вится одинаковой при сравнимых плотностях энергии “мягкого” из- лучения  $W_{\text{ph}} = \bar{\epsilon}N_{\text{ph}}$  и плотности энергии постоянного магнитного поля  $W_B = B_0^2/8\pi$  (точнее, при  $2W_{\text{ph}}/3 = W_B$ ).

О частотном спектре комптоновского рассеяния на электронах, распределенных по энергиям, можно судить, рассчитав величину из- лучательной способности

$$a_\omega = \mathcal{E}_\gamma \int \sigma(\mathcal{E}, \epsilon, \mathcal{E}_\gamma) c n_{\text{ph}}(\epsilon) N(\mathcal{E}) d\epsilon d\mathcal{E} \quad (18.86)$$

Конкретно, для степенного спектра электронов  $N(\mathcal{E}) = K\mathcal{E}^{-\gamma}$  (11.77) интеграл [408]

$$\int_{\mathcal{E}_{\text{min}}}^{\infty} \sigma(\mathcal{E}, \epsilon, \mathcal{E}_\gamma) N(\mathcal{E}) d\mathcal{E} = \quad (18.87)$$

$$\frac{2^\gamma(\gamma^2 + 4\gamma + 11)}{(\gamma + 1)(\gamma + 3)^2(\gamma + 5)} 8\pi \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \mathcal{K}(m_e c^2)^{1-\gamma} \epsilon^{\frac{\gamma-1}{2}} \mathcal{E}_\gamma^{-\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Нижний предел  $\mathcal{E}_{\text{min}} = m_e c^2 (\mathcal{E}_\gamma/4\epsilon)^{1/2}$  здесь определяется из условия (18.75). Для равновесного излучения спектр  $n_{\text{ph}}(\epsilon)$  описывается фор- мулой Планка [55]

$$n_{\text{ph}}(\epsilon) = \frac{1}{\pi^2(\hbar c)^3} \frac{\epsilon^2}{e^{\epsilon/\kappa T} - 1}, \quad \bar{\epsilon} \approx 2.7 \kappa T. \quad (18.88)$$

В этом случае комптоновская излучательная способность будет равна [408]

$$a_\omega = c(\gamma) \frac{2}{3} \sigma_T c N_{\text{ph}} \bar{\epsilon} (m_e c^2)^{1-\gamma} \left(\frac{4}{3}\bar{\epsilon}\right)^{\frac{\gamma-3}{2}} \mathcal{K} \mathcal{E}_\gamma^{-\frac{\gamma-1}{2}}, \quad (18.89)$$

где фактор

$$c(\gamma) = 4.74(1.05)^\gamma \frac{\gamma^2 + 4\gamma + 11}{(\gamma + 1)(\gamma + 3)^2(\gamma + 5)} \Gamma\left(\frac{\gamma + 5}{2}\right) \zeta\left(\frac{\gamma + 5}{2}\right), \quad (18.90)$$

$\Gamma(x)$  — гамма-функция,  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$  — функция Римана. Для  $\gamma = 1, 2, 3, 4$  этот фактор соответственно равен 0.84, 0.86, 0.99, 1.4. Формула (18.89) остается справедливой (с точностью до коэффициента порядка единицы) и для неравновесных распределений “мягких” фотонов  $n_{ph}(\epsilon)$  со средней энергией  $\bar{\epsilon}$ .

Из (18.89) следует, что частотный спектр комптоновского излучения  $a_\omega \propto \mathcal{E}_\gamma^{-\alpha} \propto \omega^{-\alpha}$ , где  $\alpha = (\gamma - 1)/2$  совпадает с частотным спектром синхротронного излучения (в смысле идентичности спектральных индексов  $\alpha$  при одинаковых индексах энергетического спектра  $\gamma$ ; см. для сравнения формулы (11.78), (11.79)). Излучательная способность на данной частоте  $\omega$  также будет одинакова по порядку величины, если  $W_{ph} \sim W_B$ .

Отмеченная выше аналогия между обратным комптоновским рассеянием и синхротронным излучением (как в отношении их спектров, так и в отношении потерь энергии релятивистских частиц), конечно, не случайна [208]. Она вызвана тем, что поле излучения, создаваемое классической заряженной частицей, определяется ее ускорением, т.е. силой  $\mathbf{f} = e\mathbf{E} + (e/c)[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ , действующей на частицу (см., например, [56]). В поле электромагнитной волны в вакууме  $\mathbf{f} \sim e\mathbf{E}$ , а в постоянно магнитном поле  $\mathbf{f} \sim (e/c)\mathbf{v}B_0$ . Для релятивистской частицы  $v \approx c$  и указанные силы сравниваются при одинаковых плотностях энергии электромагнитного излучения и постоянного магнитного поля. Это и служит причиной отмеченной ‘эквивалентности’ комптоновского рассеяния и синхротронного излучения.

В астрофизических условиях обратное комптоновское рассеяние представляет интерес прежде всего в связи с проблемой происхождения внеземного рентгеновского и гамма-излучения. Возможно, что значительная и даже основная часть распределенного рентгеновского и гамма-излучения (фонового излучения) создается за счет рассеяния равновесного реликтового излучения с температурой  $T \approx 2.7\text{ K}$  на релятивистских электронах в нашей Галактике и межгалактическом пространстве [272]. Не исключено также, что обратный комптон-эффект в магнитосфере пульсара PSR 0532 в Крабе (а именно — рассеяние оптических и мягких рентгеновских квантов на релятивистских электронах) играет заметную роль при генерации наблюдаемого гамма-излучения от этого источника [68] и т.д. Подробнее об

обратном комптоновском рассеянии и его астрофизических приложениях см. [208, 250, 408–410]. Отметим, что комптоновское рассеяние плазменных волн (с конверсией в электромагнитное излучение) рассматривалось в [388, 389], индуцированное комптоновское излучение — в [411–413] и многих других работах.

Следует подчеркнуть, что при отыскании сечения комптоновского рассеяния мы исходили из возможности выбрать инерциальную систему отсчета, в которой движение электрона в поле падающей на него волны является нерелятивистским:  $\tilde{v} \ll c$ . В такой системе (которая выше именовалась “системой, связанной с электроном”) скорость вынужденного движения  $\tilde{v} \sim e\tilde{E}/m_e\tilde{\omega}$  и, следовательно, ограничение снизу на частоту  $\tilde{\omega}$  при обратном комптон-эффекте имеет вид  $\tilde{\omega} \gg e\tilde{E}/m_e c$ . Поскольку плотность энергии в электромагнитной волне равна  $W = E^2/8\pi$  и отношение  $W/\omega^2$  не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой (см. (5.8) и [56]), отсюда получаем релятивистски-инвариантное условие для обратного комптон-эффекта:

$$\delta = \frac{e\sqrt{8\pi W}}{m_e c \omega} \ll 1. \quad (18.91)$$

При произвольных значениях параметра  $\delta$ , т.е. при движении заряженной частицы в поле волны произвольной частоты и амплитуды, излучение называется синхро-комптоновским. В предельном случае  $\delta \ll 1$  оно переходит в комптоновское излучение, а при  $\delta \gg 1$  приобретает черты, характерные для синхротронного излучения. Последнее особенно ясно, если частица находится в поле волны с  $E \ll B$  (в альфвенской волне, например). Тогда  $W = B^2/8\pi$  и  $\delta = eB/m_e c \omega = \omega_B/\omega$ . Условие  $\delta \gg 1$  при этом означает, что излучение релятивистских частиц происходит так же, как и в постоянном магнитном поле: за время  $1/\omega_B$ , в течение которого диаграмма излучения обращена к наблюдателю (§10), поле волны не успевает существенно измениться.

Синхро-комптоновское излучение системы электронов со степенным энергетическим спектром рассмотрено в [414].

В астрофизике синхро-комптоновское излучение обсуждалось в связи с попытками объяснить радиоизлучение пульсаров. При этом предполагалось, что последнее происходит в процессе движения релятивистских электронов в низкочастотном электромагнитном поле, которое создается вращающимся магнитным ротатором (нейтронной звездой с магнитным моментом, ориентированным под углом к оси вращения) [415]. Синхро-комптоновское излучение привлекалось также для интерпретации радиоизлучения Крабовидной туманности и

некоторых внегалактических источников [416, 417].

### 18.7. Дифференциальное уравнение Компанейца и комптонизация излучения

В разделе 18.2 мы привели кинетическое уравнение для фотонного газа, чей энергетический и угловой спектр меняется в процессе рассеяния (спонтанного и индуцированного) на частицах с заданной функцией распределения по скоростям (см. уравнение (18.14)). Это уравнение имеет интегральную форму, и его решение весьма затруднительно без специальных предположений о виде углового спектра излучения (анализ этого уравнения для одномерного спектра см. выше). Поскольку, однако, при комптоновском (томсоновском) рассеянии в нерелятивистской плазме частота фотона  $\omega$  меняется относительно мало:  $\omega - \omega' \ll \omega$ , можно ожидать, что изменение числа фотонов на частоте  $\omega$  во времени (то есть величина  $\partial N_{\mathbf{k}}/\partial t$ ) будет зависеть только от значений  $N_{\mathbf{k}}$  в соседних участках спектра. Это означает, что производную  $\partial N_{\mathbf{k}}/\partial t$  можно приближенно выразить через  $N_{\mathbf{k}}$  и производные  $\partial N_{\mathbf{k}}/\partial \omega$ ,  $\partial^2 N_{\mathbf{k}}/\partial \omega^2$  и т.д. при том же значении частоты  $\omega$ .

Переход от интегрального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & \int N_{\mathbf{k}}(N_{\mathbf{k}} + 1) \omega(p', k', k) f_0(p') \frac{d^3 p' d^3 k'}{(2\pi)^3} \\ & - \int N_{\mathbf{k}}(N_{\mathbf{k}'} + 1) \omega(p, k, k') f_0(p) \frac{d^3 p d^3 k'}{(2\pi)^6}, \end{aligned} \quad (18.92)$$

полученного на основе выражений (18.12) и (18.13), к дифференциальному уравнению можно сделать, разлагая подынтегральные выражения в (18.92) в ряд по малым степеням разности  $\omega - \omega'$  и ограничиваясь членами вплоть до  $(\omega - \omega')^2$ . Полагая функцию распределения рассеивающих электронов  $f_0(p)$  равновесной (максвелловской), а излучение — изотропным и неполяризованным, получим уравнение Компанейца [394]:<sup>137</sup>

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = N \sigma_T \frac{\hbar}{m_e c} \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \omega^4 \left( \frac{\kappa T}{\hbar} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial \omega} + N_{\mathbf{k}} + N_{\mathbf{k}}^2 \right) \right]. \quad (18.93)$$

Здесь  $N_{\mathbf{k}}$  — число фотонов в одной моде,  $N$  — электронная концентрация и  $T$  — электронная температура. При равновесном (планковском) распределении фотонов (18.6) уравнение имеет стационарное решение

<sup>137</sup> Позднее это уравнение было получено в [418, 419].

$\partial N_{\mathbf{k}}/\partial t = 0$ , соответствующее термодинамическому равновесию системы из вещества и излучения. Вводя безразмерные переменные

$$x = \frac{\hbar\omega}{\kappa T}, \quad y = u \frac{\kappa T}{m_e c^2}, \quad u = N c \sigma_T t \quad (18.94)$$

и обозначая для простоты  $N_{\mathbf{k}} \equiv n$ , получим уравнение Компанейца в форме

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right], \quad (18.95)$$

которая не содержит никаких параметров. Напомним, что  $n$  связана с плотностью энергии излучения  $W_{\mathbf{k}}$  соотношением (14.28).

Уравнение (18.95) учитывает деформацию частотного спектра вследствие рассеяния излучения с энергиями фотонов  $\hbar\omega \ll m_e c^2$  в нерелятивистской плазме ( $\kappa T \ll m_e c^2$ ). В каждом акте рассеяния энергия фотона изменяется вследствие эффекта Доплера и эффекта отдачи. Если  $\kappa T \gg \hbar\omega$ , то средняя энергия фотона увеличивается за счет Доплер-эффекта величину  $\hbar\omega \kappa T / m_e c^2$ . Если  $\kappa T \ll \hbar\omega$ , эффект отдачи уменьшает энергию фотона на величину  $(\hbar\omega)^2 / m_e c^2$ . Эволюция спектра неравновесного излучения при многократном рассеянии в равновесной плазме, обычно называемая комптонизацией, широко обсуждалась в литературе [413, 420–424, 426] и т.д. на основе уравнения (18.95).

Процесс комптонизации играет важную роль в астрофизике при изучении взаимодействия излучения с плазмой. Расчеты комптонизации реликтового излучения особенно удобны на основе уравнения Компанейца благодаря однородности задачи, когда параметры плазмы и излучения не зависят от координат и меняются только во времени. Комптонизация играет существенную роль и в формировании спектров компактных рентгеновских источников (в аккреционных дисках вокруг черных дыр, при аккреции на нейтронные звезды и белые карлики, в расширяющихся оболочках сверхновых). Во многих случаях здесь также оказалось возможным использовать уравнение Компанейца вследствие большой оптической толщины источников по томсоновскому рассеянию.

Переходя к анализу уравнения (18.95) заметим, что член, содержащий  $n^2$ , учитывает индуцированное рассеяние. При достаточно низких уровнях излучения по сравнению с равновесным и в виновской области спектра этим эффектом можно пренебречь и рассматривать



линейное уравнение вида

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( x^4 \frac{\partial n}{\partial x} + n \right) \right]. \quad (18.96)$$

С его помощью можно найти характерное время, за которое энергия кванта  $\hbar\omega \ll \kappa T$  увеличивается вследствие комптонизации в  $e$  раз. Умножив почленно уравнение (18.96) на  $x^3$  и интегрируя в пределах от 0 до  $\infty$ , получим:

$$\frac{d}{dy} \int_0^\infty n x^3 dx = 4 \int_0^\infty n x^3 dx - \int_0^\infty n x^4 dx. \quad (18.97)$$

При  $\hbar\omega \ll \kappa T$  (т.е.  $x \ll 1$ ) вторым интегралом в правой части можно пренебречь. Тогда решением (18.97) будет

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 \exp(t/t_C), \quad (18.98)$$

где характерное время комптонизации

$$t_C = \frac{m_e c^2}{4\kappa T N c \sigma_T}. \quad (18.99)$$

В уравнении (18.96) первый член в круглых скобках  $\partial n/\partial x$  описывает доплеровское изменение частоты при рассеянии, второй член  $n$  — изменение частоты за счет эффекта отдачи. При доплеровском изменении частоты решение получившегося дифференциального уравнения имеет вид [427]:

$$n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int_0^\infty \frac{n(z)}{z} \exp \left[ -\frac{(\ln x + 3y - \ln z)^2}{4y} \right] dz. \quad (18.100)$$

Оно описывает эволюцию произвольного начального спектра  $n(z) \equiv n(\omega, t = 0)$ . Если начальный спектр — монохроматический  $W_{\mathbf{k}} = A\delta(x - x_0)$ , то в следующие моменты времени

$$W_{\mathbf{k}}(x, y) = \frac{A}{\sqrt{4\pi y x_0}} \exp \left[ -\frac{(\ln x_0 - \ln x + 3y)^2}{4y} \right]. \quad (18.101)$$

Из (18.101) следует, что линия со временем расширяется, а ее центр смещается в сторону высоких частот

$$\frac{x_{\max}}{x_0} = e^{3y}, \quad (18.102)$$

где  $x_{\max}$  соответствует частоте, при которой плотность энергии  $W_k$  максимальна.

Если, наоборот, в уравнении (18.96) пренебречь членом  $\partial n/\partial x$ , то оно будет описывать эволюцию спектра излучения вследствие эффекта отдачи. Согласно [424, 425] величина  $n\omega^4$  сохраняется вдоль характеристики

$$\frac{d\omega}{du} = -\frac{\hbar\omega^2}{m_e c^2}, \quad du = c\sigma_T N dt. \quad (18.103)$$

Решение уравнения (18.96) в общей форме получено Компанейцем [394]. Оно выражается через функции Уиттекера мнимого индекса. Из этого решения, в частности, следует, что в результате комптонизации средняя частота кванта  $\bar{\omega}$ , испущенного в начальный момент времени с частотой  $\omega_0$ , стремится к значению  $3kT/\hbar$  независимо от величины  $\omega_0$ .

Для исследования комптонизации в компактных рентгеновских источниках и нахождения вида спектров выходящего за пределы плазменного облака излучения решения однородной задачи на основе уравнения Компанейца недостаточно. Однако, в этой проблеме его можно использовать, зная вместе с ним функцию распределения фотонов по временам выхода из источника.

Рассмотрим проблему выхода фотонов в модели однородного сферического облака плазмы радиуса  $R$ , где происходит рассеяние фотонов, инжектированных из центра облака  $r=0$ . Основным параметром для облака плазмы служит оптическая толщина  $\tau_0 = N\sigma_T R$  по томсоновскому рассеянию. Введем безразмерное время  $u = \sigma_T N c t$  (см. (18.94)), характеризующее число актов рассеяния фотона в облаке до выхода за его пределы. В случае  $u \gg 1$  проблема переноса излучения в облаке становится диффузионной, что упрощает отыскание функции распределения фотонов по времени диффузии фотона внутри облака  $P(t)$ .

Уравнение диффузии фотонов в облаке имеет вид:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D \frac{\partial I}{\partial r} \right), \quad (18.104)$$

где коэффициент диффузии

$$D = \frac{c}{2\sigma_T N(r)} \quad (18.105)$$

есть константа, не зависящая при томсоновском рассеянии от частоты  $\omega$ , а в однородном облаке — и от радиуса  $r$ . Граничным условием для интенсивности излучения  $I(r, t)$  служит равенство

$$\left( \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{3}{2} \frac{\partial I}{\partial r} \right)_{r=r_0} = 0. \quad (18.106)$$

Оно означает отсутствие потока фотонов в облако снаружи на границе, где оптическая толщина  $\tau = \tau_0 = N\sigma_T R$ . Начальным условием служит равенство

$$I \Big|_{u=0} = \frac{1}{4\pi a^2} \delta(\tau), \quad (18.107)$$

означающее, что в начальный момент времени  $u=0$  источник фотонов локализован в центре облака, где  $\tau = N\sigma_T r = 0$ .

Решение уравнения (18.104) с условиями (18.106), (18.107) приведено в статье [420], которой мы и следуем при дальнейшем изложении.<sup>138</sup> Среднее время диффузии фотона в облаке (время выхода)

$$t_0 = \int_0^\infty t P(t) dt = R\tau_0/2c, \quad (18.108)$$

среднее число актов рассеяния

$$\bar{u} = \tau_0^2/2. \quad (18.109)$$

Вид функции  $P(u)$  представлен на Рис. 58. Максимум  $P = P_{\max}$  лежит около значения  $t = 0.3R\tau_0/c$ , то есть при  $u = 0.3\tau_0^2$ . В области  $u \gg \bar{u}$  имеет место асимптотика

$$P(u) \simeq \frac{2\pi^2}{3(\tau_0 + 2/3)^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 u}{3(\tau_0 + 2/3)^2}\right), \quad (18.110)$$

в интервале  $1 \ll u \ll \bar{u}$  справедливо следующее приближенное выражение:

$$P(u) \simeq \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{\tau_0^2}{u^{3/2}} \exp\left(\frac{-3\tau_0^2}{4u}\right). \quad (18.111)$$

Отметим, что в случае однородного распределения источников фотонов по сферическому плазменному облаку

$$P(u) \simeq \frac{2}{\tau_0^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 u}{3\tau_0^2}\right) \quad (18.112)$$

<sup>138</sup> В той же работе рассмотрены также более сложные случаи неоднородного облака и распределенных по облаку источников фотонов.

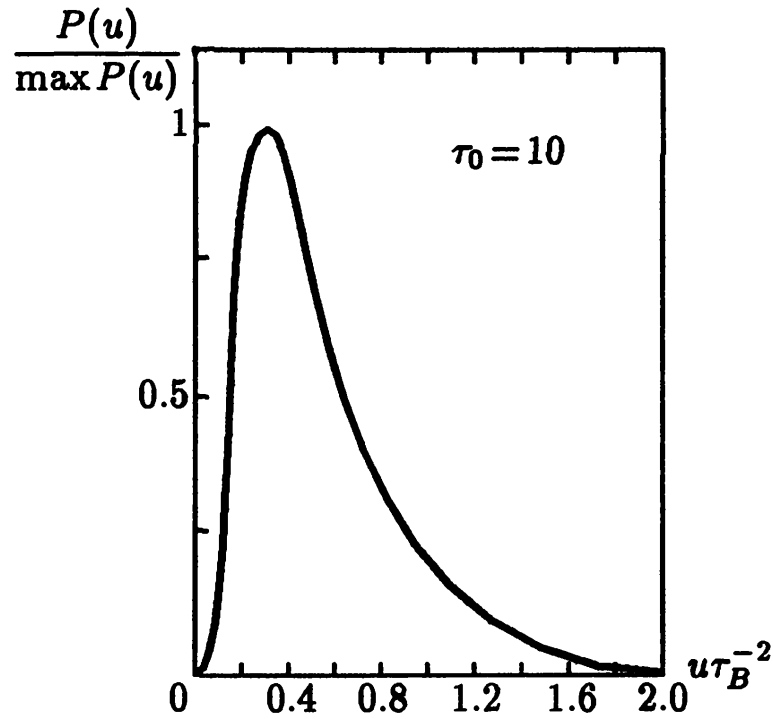


Рис. 58. Распределение фотонов по времени выхода за пределы сферического плазменного облака для  $\tau_0 = 10$ . Мгновенная инжекция фотонов в центре облака происходит в момент  $u = 0$  [420]

для  $u \gg \bar{u} = \tau_0^2/5$ ;

$$P(u) \simeq \frac{1}{\tau_0} \left( \frac{3}{\pi u} \right)^{1/2} \left[ 1 - \frac{2}{\tau_0} \left( \frac{\pi u}{3} \right)^{1/2} \right] \quad (18.113)$$

в интервале  $1 \ll u \ll \bar{u}$ . Если источники фотонов распределены в облаке по закону

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau_0}{\pi \tau} \sin \frac{\pi \tau}{\tau_0}, \quad (18.114)$$

(этот случай — промежуточный между центральным источником и однородным распределением в облаке), то при любом  $u$

$$P(u) = \beta e^{-\beta u}, \quad (18.115)$$

где

$$\beta = \frac{\pi^2}{3(\tau_0 + 2/3)^2} \simeq \frac{3}{\tau_0^2}. \quad (18.116)$$

При переходе к последнему равенству учтено, что в рассматриваемых задачах предполагается условие  $\tau_0 \gg 1$ . Для  $P(u)$  в форме (18.115) среднее число рассеяний фотона в облаке составляет  $\bar{u} = \beta^{-1}$ . Из сопоставления формул (18.110), (18.112) и (18.115) ясно, что форма

функции  $P(u)$  при  $u \gg \bar{u}$  слабо зависит от конкретного распределения источников фотонов по облаку.

Вид функции  $P(t)$  представляет интерес для конкретных астрофизических приложений в теории рентгеновских барстеров. Если время высвобождения энергии в источнике мало по сравнению с наблюдаемой длительностью всплеска, то последнее может определяться запаздыванием выхода из-за диффузии фотонов в плазменном облаке. При этом наблюдаемый профиль всплеска  $I(t)$  будет совпадать с формой функции  $P(t)$ . Наблюдаемые рентгеновские всплески имеют крутой передний фронт и экспоненциальный закон спада интенсивности  $I \propto \exp(-t/t_0)$ , так что профиль всплесков напоминает кривую  $P(t)$  на Рис. 58. Сопоставление теоретической кривой  $P(t)$  с наблюдаемым профилем всплеска позволяет оценить оптическую толщину плазменного облака по томсоновскому рассеянию  $\tau_0$ , поскольку

$$t_0 = \frac{3\tau_0^2}{\pi^2 \sigma_T N c} = \frac{3}{\pi^2} \frac{R\tau_0}{c}. \quad (18.117)$$

Таким образом, по наблюдаемому  $t_0$  и известному радиусу облака  $R$  можно найти  $\tau_0$  и электронную концентрацию в рассеивающем облаке. Поскольку, однако, время освобождения энергии в источнике фотонов практически неизвестно, указанное соответствие позволяет судить лишь о верхней границе  $\tau_0$ .

Выше уже отмечалось, что решение однородного уравнения Компанейца недостаточно для отыскания формы частотного спектра стационарного объекта. Однако, проблема может быть решена, если мы наряду с решением линейного уравнения (18.96) (в пренебрежении индуцированным рассеянием) используем функцию  $P(t)$ . Если источник фотонов в плазменном облаке — стационарный, то решение уравнения Компанейца даст нам ответ на вопрос, каков спектр фотонов после  $u = \sigma_T N c t$  рассеяний. Вместе с тем функция  $P(t)$  характеризует число фотонов, прошедших в облаке время  $t$  до выхода за его пределы. Отсюда следует, что свертка вида

$$I_\omega(\omega) \propto \int_0^\infty I_\omega(\omega, t) P(t) dt. \quad (18.118)$$

определяет стационарный частотный спектр излучения, наблюдаемого от рассеивающего облака (с источником фотонов, расположенным внутри него; см. [428]). В других обозначениях о частотном

спектре (18.118) можно судить по виду интеграла

$$N(x) = \int_0^{\infty} n(x, u) P(u) du, \quad (18.119)$$

где  $N(x) \equiv N_{\mathbf{k}}(x)$  — число фотонов на одну моду в фазовом пространстве стационарного спектра. Это число связано с интенсивностью излучения  $I_{\omega}(x)$  соотношением

$$I_{\omega}(x) = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3c^2} N_{\mathbf{k}}(x), \quad (18.120)$$

следующим из формул (2.13), (14.28). Поэтому форма спектра  $I_{\omega}(x)$  повторяет зависимость  $x^3 N(x)$ , где  $x = \hbar\omega/\kappa T$ ; коэффициент пропорциональности мы обозначим через  $A$ :

$$I_{\omega}(x) = Ax^3 N(x). \quad (18.121)$$

Найдем стационарный спектр (18.119) с временем выхода  $P(u)$  (18.115). Для этого умножим уравнение (18.96) почленно на  $\beta e^{-\beta u}$  и проинтегрируем по  $u$  в пределах от 0 до  $\infty$ . Тогда получим уравнение

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[ x^4 \left( \frac{dN}{dx} + N \right) \right] = \gamma N - \frac{\gamma f(x)}{x^3}, \quad (18.122)$$

где

$$\gamma = \frac{m_e c^2}{\kappa T} \beta = \frac{\pi^2 m_e c^2}{3\kappa T (\tau_0 + 2/3)^2}. \quad (18.123)$$

При интегрировании по безразмерному времени  $u$  было использовано начальное условие  $n(x, u=0) = f(x)x^{-3}$ , которое определяется спектром излучения источника фотонов  $f(x)$ , распределенного в пространстве по закону (18.114).

При рассеянии мягких фотонов в горячей плазме ( $x \ll 1$ ) можно пренебречь вторым членом в круглых скобках в левой части уравнения (18.122) (этот член учитывает эффект отдачи; в результате принимается во внимание только доплеровское изменение частоты). Если спектр инжектируемых в облако фотонов — моноэнергетический:  $f(x) = x_0 \delta(x - x_0)$ , то спектральная интенсивность  $I_{\omega}(x)$  выходящего из облака излучения будет равна

$$I_{\omega}(x) = Ax^3 N(x) = A \frac{\alpha(\alpha + 3)}{(2\alpha + 3)} \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\alpha+3}, \quad 0 \leq x \leq x_0 \quad (18.124)$$

$$I_{\omega}(x) = A \frac{\alpha(\alpha + 3)}{(2\alpha + 3)} \left( \frac{x}{x_0} \right)^{-\alpha}, \quad x_0 \leq x \ll 1. \quad (18.125)$$

Здесь спектральный индекс [429]

$$\alpha = \left( \frac{9}{4} + \gamma \right)^{1/2} - \frac{3}{2}. \quad (18.126)$$

Заметим, что источник с первоначальным планковским спектром, чья температура  $T_{\text{rad}} \ll T_e$ , обладает спектром выходящего из облака излучения, форма которого совпадает с (18.125) в интервале  $\kappa T_{\text{rad}} \ll \hbar\omega \ll \kappa T_e$  [420]. Таким образом, в этом случае высокочастотное крыло спектра излучения после комптонизации приобретает степенной характер.

В случае рассеяния жестких фотонов в холодной плазме ( $x \gg 1$ ) основную роль играет изменение частоты фотонов за счет эффекта отдачи. При этом в уравнении (18.122) можно пренебречь членом, содержащим производную  $dN/dx$  и получить решение в виде

$$I_\omega(z) = A \frac{\beta}{z} \exp\left(-\frac{\beta}{z}\right) \int_z^\infty f(\xi) \exp\left(\frac{\beta}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi} \quad (18.127)$$

для произвольного спектра источника фотонов  $f(z)$ . Здесь вместо переменной  $x = \hbar\omega/\kappa T$  введена новая безразмерная переменная  $z = \hbar\omega/m_e c^2$ , поскольку комптонизированный спектр от электронной температуры  $T$  в этом случае не зависит. Комптонизация моноэнергетического спектра  $f(z) = z_0 \delta(z - z_0)$  приводит к тому, что спектр выходящего из облака излучения имеет вид:

$$I_\omega(z) = A \frac{\beta}{z} \exp\left(-\frac{\beta}{z} + \frac{\beta}{z_0}\right) \Theta(z_0 - z), \quad (18.128)$$

где функция

$$\Theta(z_0 - z) = \begin{cases} 0 & z > z_0, \\ 1 & z < z_0, \end{cases} \quad (18.129)$$

а отношение

$$\frac{\beta}{z} = \frac{\pi^2 m_e c^2}{3(\tau_0 + 2/3)^2 \hbar\omega}. \quad (18.130)$$

Отсюда ясно, что эффект отдачи может привести только к уменьшению энергии фотонов.

Комптонизация излучения со спектром источника  $f(z) = Cz^{-\alpha}$  сохраняет степенной характер спектра с новым индексом  $\alpha + 1$ :

$$I_\omega(z) = \frac{A\beta C}{\alpha} z^{-(\alpha+1)}. \quad (18.131)$$

Этот спектр можно получить из формулы (18.127) при условии  $z \gg \beta$ , когда фигурирующие в ней экспоненты близки к единице. Уменьшение величины  $I_\omega(z)$  в области  $z \gg \beta$  сопровождается соответствующим увеличением  $I_\omega(z)$  на частотах, где  $z \simeq \beta$ , что вполне естественно, так как общее число фотонов при рассеянии остается неизменным. При малых  $z \ll \beta$  существенной модификации спектра не происходит.

Решение уравнения (18.122), справедливое во всем интервале частот, получено в [420]. Для моноэнергетического спектра источника  $f(x) = x_0 \delta(x - x_0)$  и  $x_0 \ll 1$  высокочастотное крыло  $x \gg x_0$  спектра излучения, покидающего плазменное облако, имеет вид

$$I_\omega(x) = A \frac{\alpha(\alpha + 3)x_0^\alpha}{\Gamma(2\alpha + 4)} x^3 e^{-x} \int_0^\infty \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} \left(1 + \frac{\xi}{x}\right)^{\alpha+3} d\xi, \quad (18.132)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция. При  $x \ll 1$  спектр сводится к форме (18.125); в области  $x \gg 1$  получается распределение типа виновского:

$$I_\omega(x) = A \frac{\alpha \Gamma(\alpha)(\alpha + 3)x_0^\alpha}{\Gamma(2\alpha + 4)} x^3 e^{-x}, \quad (18.133)$$

где спектральный индекс  $\alpha$  — из (18.126). Подчеркнем, что  $\alpha$  не зависит от характера распределения источников фотонов в облаке и определяется только электронной температурой и оптической толщиной облака по рассеянию. Соответствующие решения для произвольного спектра источника  $f(x)$  также приведены в [420].

Роль эффектов комптонизации в формировании наблюдаемых спектров рентгеновского излучения была выяснена в работе [430] на примере объекта Cyg X-1 — кандидата в черные дыры. Из Рис. 59 следует, что наблюдаемый спектр излучения Cyg X-1 хорошо описывается формулой (18.132) при значениях  $\alpha \simeq 0.56$  ( $\gamma \simeq 2$ ) и  $\kappa T \simeq 27$  кэВ, что соответствует оптической толщине  $\tau_0 \simeq 5$  (см. (18.123)). Несмотря на сравнительно низкую температуру плазмы, комптонизация приводит к появлению спектра излучения, простирающегося до 150 кэВ. Соответствие наблюдаемого и теоретического спектров указывает на определяющую роль комптонизации излучения в объекте Cyg X-1. Приведенный пример — далеко не единственный. Так, рентгеновский спектр квазара 3C 273 также достаточно хорошо описывается формулой (18.132) с  $\kappa T = 16$  кэВ и  $\tau_0 = 4$  [421]. Здесь при сопоставлении спектров принято во внимание космологическое красное



смещение и дисковая геометрия источника.<sup>139</sup> Последняя несколько изменяет связь между  $\gamma$  и  $\alpha$ , которая вместо формулы (18.126) описывается теперь соотношением

$$\gamma = \frac{\pi^2}{12} \frac{m_e c^2}{\kappa T (\tau_0 + 2/3)^2}. \quad (18.134)$$

Отметим, что в этом разделе все формулы для комптонизации вместе с уравнением Компанейца получены для случая нерелятивистской плазмы. В слабо релятивистской  $\kappa T \sim m_e c^2$  и релятивистской  $\kappa T \gg m_e c^2$  плазмах аналитическое рассмотрение затруднительно, и все расчеты ведутся, как правило, численными методами (обычно методом Монте-Карло) [431]. Результаты этих расчетов приведены в работе [421].

## §19. Перенос излучения на циклотронных частотах

### 19.1. Резонансное циклотронное рассеяние

В §18 было рассмотрено рассеяние излучения в изотропной плазме. Наложение магнитного поля  $B_0$  на плазму не просто меняет величину сечения рассеяния. Здесь появляются качественно новые эффекты, связанные с резонансным циклотронным рассеянием; они приводят к анизотропии функции распределения электронов, к рассеянию в тонких гирорезонансных слоях (в неоднородном магнитном поле), к появлению мощных сил давления излучения на плазму. Все эти вопросы будут обсуждаться в этом и следующем разделах.

Имея в виду приложения результатов §19, §20 к конкретным условиям плазмы в магнитных полях белых карликов и нейтронных звезд, мы будем полагать выполненным критерий (5.42) разреженной плазмы и неравенство  $kD \gg 1$ . Первое условие обеспечивает близость показателей преломления волн  $n_{1,2}$  к единице, а второй — возможность пренебречь дебаевской экранировкой при расчетах сечения рассеяния (см. об этом замечания в §1).

Как известно (см., например, [432]), сечение рассеяния излучения

<sup>139</sup> В “дисковой” геометрии плазменного облака рассматривается плоский слой плазмы с оптической толщиной по рассеянию, равной  $2\tau_0$ .

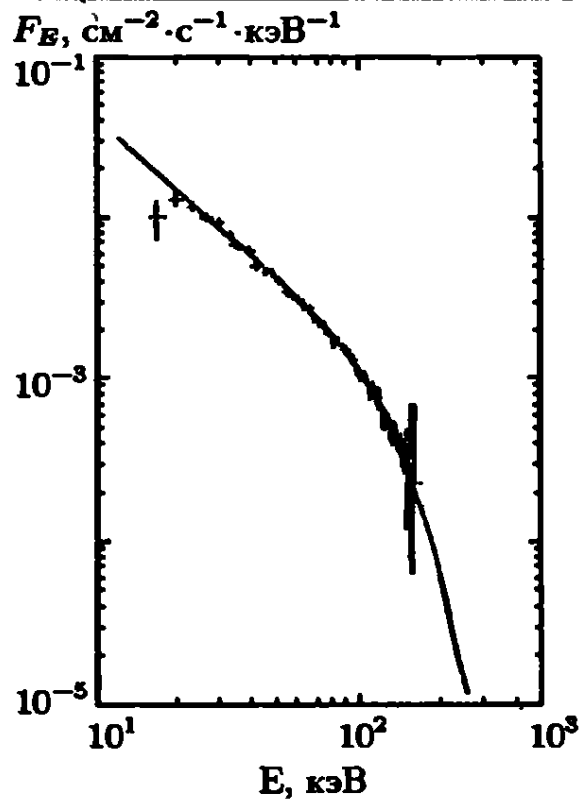


Рис. 59. Сравнение наблюдаемого спектра излучения Cyg X-1 (зависимости спектрального потока фотонов  $F_E$  от их энергии  $E$ ) со спектром, сформированным в результате комптонизации низкочастотных фотонов в плазменном облаке с  $\tau_0 = 5$  и  $\kappa T = 27$  кэВ [430]

нерелятивистским электроном в магнитном поле пропорционально

$$\sigma_T \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{(\omega')^2}{(\omega' - \omega_B)^2 + \Gamma^2/4} \right], \quad (19.1)$$

где  $\sigma_T$  — томсоновское сечение (18.73),  $\Gamma = 4e^2\omega_B^2/3m_e c^3$  — естественная ширина линии (обратное время релаксации при переходе с одного уровня Ландау на соседний),  $\omega'$  и  $\omega_B$  — частота излучения в системе отсчета, связанной с поступательным движением электрона вдоль магнитного поля, и гирочастота, соответственно. Частота  $\omega$  в системе отсчета, связанной, например, с неподвижной плазмой, выражается через  $\omega'$  посредством формулы Доплера (3.9):

$$\omega' = \omega(1 - p_{\parallel} \cos \alpha / m_e c). \quad (19.2)$$

Здесь  $p_{\parallel}$  — продольный (вдоль  $\mathbf{B}_0$ ) импульс электрона,  $\alpha$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и магнитным полем  $\mathbf{B}_0$  (ср. с формулами (3.9) и (10.34); релятивистские эффекты в (19.2) и далее не учитываются). Структура формулы для сечения циклотронного рассеяния (19.1) — такая же, как и для резонансной флуоресценции в двухуровневых системах (см., например, [210]). Вообще говоря, сечение

рассеяния на электроны в магнитном поле имеет сложную угловую зависимость. Однако, для нас существенным является то, что в сечении рассеяния можно выделить постоянное слагаемое и резонансный член. Это обстоятельство и отражено в формуле (19.1), из которой следует существование резонанса на частоте  $\omega = \omega'$ . Если ширина частотного спектра излучения превышает характерную ширину резонанса  $\Delta\omega \simeq \Gamma$ , то рассеяние на частотах  $(\omega' - \omega_B)^2 \lesssim \Gamma^2/4$  можно трактовать как последовательность двух процессов — поглощения с переходом на более высокий уровень Ландау и излучения с переходом на более низкий уровень Ландау, с конечным временем жизни электрона в возбужденном состоянии. При этом стационарное распределение по поперечным импульсам  $p_{\perp}$  (по населенностям уровней Ландау) определяется интенсивностью излучения на резонансной частоте (см. §14). Для фотонов с частотами вне интервала  $(\omega' - \omega_B)^2 \lesssim \Gamma^2/4$  рассеяние станет нерезонансным.

Согласно (19.2), резонансное рассеяние в полосе  $|\omega' - \omega_B| \lesssim \Gamma/2$  происходит на частицах, продольный импульс которых расположен в интервале

$$m_e c \frac{\omega - \Gamma/2 - \omega_B}{\omega} \lesssim p_{\parallel} \cos \alpha \lesssim m_e c \frac{\omega + \Gamma/2 - \omega_B}{\omega}. \quad (19.3)$$

Отсюда следует, что волна с частотой  $\omega$ , распространяющаяся под углом  $\alpha$  к магнитному полю  $B_0$ , рассеивается на электронах, продольный импульс которых лежит в малой окрестности продольного импульса

$$p_{\parallel} = m_e c \frac{\omega - \omega_B}{\omega \cos \alpha}. \quad (19.4)$$

Для таких частиц волна после рассеяния имеет другую частоту  $\tilde{\omega}$  и другой угол  $\tilde{\alpha}$ , но они по-прежнему связаны доплеровским условием (19.4) с той же величиной  $p_{\parallel}$ <sup>140</sup>

$$p_{\parallel} = m_e c \frac{\tilde{\omega} - \omega_B}{\tilde{\omega} \cos \tilde{\alpha}}. \quad (19.5)$$

Поэтому перенос излучения с частотами  $\omega(\alpha)$  при данном фиксированном значении  $p_{\parallel}$  происходит независимо от переноса излучения, связь параметров в котором характеризуется условием (19.4), но при других значениях  $p_{\parallel}$ . Нерезонансное рассеяние излучения происходит на частицах с любым импульсом  $p_{\parallel}$  вне интервала (19.3).

<sup>140</sup> Это справедливо, если пренебречь ролью квантового эффекта отдачи при циклотронном переходе (см. §10, в частности, формулу (10.33)).

Рассмотрим теперь рассеяние излучения в плазме, в которой распределение электронов по продольным импульсам — максвелловское с нерелятивистской продольной температурой  $T_{\parallel}$  (то есть  $\kappa T_{\parallel} \ll m_e c^2$ ). Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что  $T_{\parallel}$  ограничена снизу условием, что доплеровская ширина спектра циклотронного излучения и рассеяния  $\Delta\omega \sim \beta_{T_{\parallel}} \omega_B$ , где  $\beta_{T_{\parallel}} = (\kappa T_{\parallel} / m_e c^2)^{1/2}$ , велика по сравнению с естественной шириной линии  $\Gamma = 4e^2 \omega_B^2 / 3m_e c^3$ . Это условие легко выполняется в астрофизической плазме.

В согласии со сказанным, коэффициент нерезонансного рассеяния определяется практически всеми электронами в плазме. Поэтому коэффициент нерезонансного рассеяния пропорционален общему числу частиц в единице объема  $N$

$$\mu_{\text{нс}} \simeq \frac{\sigma_T N}{2} \left[ 1 + \frac{\omega^2}{(\omega - \omega_B)^2} \right] \quad (19.6)$$

(ср. с соответствующим выражением (18.65) в изотропной плазме). Коэффициент резонансного рассеяния пропорционален числу частиц с “резонансным” импульсом  $p_{\parallel}$  (19.4) для излучения в единичном интервале частот. Это число пропорционально функции распределения  $f(p_{\parallel})$ , умноженной на производную  $|dp_{\parallel}/d\omega|$ . Если для излучения с частотой  $\omega$  под углом  $\alpha$  продольный импульс  $p_{\parallel}$  (19.4) достаточно велик, то значение максвелловской функции  $f(p_{\parallel})$  станет экспоненциально малым вместе с величиной коэффициента резонансного циклотронного рассеяния. В этом случае, отвечающем частотам

$$|\omega - \omega_B| \gg \beta_{T_{\parallel}} \omega_B |\cos \alpha|, \quad (19.7)$$

перенос излучения определяется нерезонансным рассеянием. Он описывается уравнением переноса излучения в форме (8.12) с коэффициентом рассеяния (19.6).

## 19.2. Уравнение переноса излучения на циклотронных частотах в бесстолкновительной плазме

На частотах

$$|\omega - s\omega_B| \lesssim \beta_{T_{\parallel}} \omega_B s |\cos \alpha| \quad (19.8)$$

перенос излучения связан с резонансными циклотронными переходами. В стационарном случае уравнение переноса на циклотронных гармониках может быть получено исходя из общего уравнения (8.2), которое мы запишем в виде

$$\frac{dI_{\omega}(\omega, \alpha)}{dl} = a_{js} - \mu_{js} I_{\omega}(\omega, \alpha), \quad (19.9)$$

где  $I_\omega(\omega, \alpha)$  — спектральная интенсивность излучения на частоте  $\omega$  в направлении  $\alpha$ ,  $a_{js}$  и  $\mu_{js}$  — циклотронная излучательная способность и коэффициент поглощения волны  $j$ -го типа на гармонике  $s$ . В данном случае рассматривается необыкновенное излучение ( $j=1$ ) на первой гармонике  $s=1$ . Учтем, что циклотронные переходы электронов между уровнями Ландау в магнитном поле под действием излучения с интенсивностью  $I_\omega(\omega, \alpha)$  устанавливают, вообще говоря, анизотропное распределение электронов по скоростям. Это распределение по поперечным импульсам  $p_\perp$  и в отсутствие соударений (ударных переходов между уровнями Ландау) является больцмановским (14.36) с поперечной температурой  $T_\perp = T_{\text{эф}}$  (14.34), (14.37), определяемой интегральной зависимостью от интенсивности  $I_\omega$  на первой гармонике гирочастоты. Если распределение по продольным импульсам  $p_\parallel$  — максвелловское с продольной температурой  $T_\parallel$  как свободным параметром, то такая плазма с анизотропией температур  $T_\parallel \neq T_\perp$  характеризуется циклотронной излучательной способностью  $a_{js}$  и коэффициентом циклотронного поглощения  $\mu_{js}$ , приведенным в §11 и §13 (формулы (11.36)–(11.38) и (13.29)–(13.31)).

Для того, чтобы получить уравнение переноса с учетом циклотронного рассеяния, выберем, в соответствии с физическими условиями в плазме, конкретные формулы для  $a_{js}$ ,  $\mu_{js}$  и подставим в них выражение для эффективной температуры (14.37) или (14.40). Затем полученные формулы внесем в уравнение переноса (8.2). Так, в случае, когда поляризация мод определяется разреженной плазмой, а не намагниченным вакуумом, уравнение переноса в отсутствие соударений в необыкновенной моде на первой гармонике гирочастоты примет вид [183, 184]

$$\frac{dI_\omega(\omega, \alpha)}{dl} = -\mu_{11}I_\omega(\omega, \alpha) + \frac{\mu_{11}}{4\pi} \oint_{4\pi} \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \tilde{\alpha})I_\omega(\tilde{\omega}, \tilde{\alpha})d\Omega, \quad (19.10)$$

где интегрирование ведется по телесному углу  $4\pi$  для направлений  $\tilde{\alpha}$ , связанных соотношением (19.5) с частотой  $\tilde{\omega}$  в подынтегральном выражении. В этом соотношении продольный импульс  $p_\parallel$  — тот же, что и в соотношении (19.4), которое связывает частоту  $\omega$  и угол  $\alpha$  для интенсивности излучения  $I_\omega(\omega, \alpha)$ . Уравнение (19.10) описывает перенос излучения, соответствующего необыкновенной моде на первой гармонике гирочастоты. Поэтому здесь фактор  $(3/4)(1 + \cos^2 \tilde{\alpha})$  представляет собой диаграмму направленности циклотронного излучения на первой гармонике в той же моде, а  $\mu_{11}$  — коэффициент циклотрон-

ного рассеяния в тех же условиях. Согласно (13.29), он равен

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_L^2}{\omega_B c \beta_{T\parallel}} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{|\cos \alpha|} e^{-Z_1^2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \pi^{3/2} e^2 N}{(m_e \kappa T_{\parallel})^{1/2} \omega_B} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{|\cos \alpha|} e^{-Z_1^2}, \end{aligned} \quad (19.11)$$

где

$$Z_1 = \frac{\omega - \omega_B}{\sqrt{2} \beta_{T\parallel} \omega \cos \alpha} = \frac{p_{\parallel}}{\sqrt{2} m_e c \beta_{T\parallel}}. \quad (19.12)$$

Уравнение (19.10) описывает перенос того излучения, которое в данных условиях определяет распределение электронов по поперечным скоростям за счет циклотронных переходов в поле излучения. Поэтому функции  $I_{\omega}(\omega, \alpha)$  и  $I_{\omega}(\tilde{\omega}, \tilde{\alpha})$  совпадают между собой, характеризуя угловой и частотный спектр излучения в необыкновенной моде на первой гармонике гирочастоты. Сопоставляя (19.10) с уравнением переноса (8.12), убеждаемся, что (19.10) также представляет собой уравнение переноса типа рассеяния, причем коэффициент циклотронного поглощения  $\mu_{11}$  в данном случае выступает в качестве коэффициента резонансного циклотронного рассеяния. Следует особенно подчеркнуть это принципиальное обстоятельство, которое нередко приводило к недоразумениям. Отмеченное совпадение [183, 184] делает излишним специальное вычисление коэффициентов циклотронного рассеяния, поскольку их роль выполняют коэффициенты циклотронного поглощения.

Как уже отмечалось, в рассматриваемых условиях взаимодействие излучения с плазмой на циклотронных гармониках наиболее эффективно для необыкновенной волны на первой гармонике. Вероятность циклотронных переходов на обыкновенной волне первой гармоники, а также на волнах обоих типов для гармоник  $s \geq 2$  значительно слабее. Это находит свое отражение в величинах излучательной способности и коэффициентов поглощения: для  $j = 2, s = 1$  эти величины меньше на фактор  $\beta_{T\parallel}^{-2}$ , а для  $j = 1, 2$  и  $s \geq 2$  они убывают по закону  $\beta_{T\perp}^{2s}$ . Это позволяет пренебречь влиянием излучения на высших гармониках и обыкновенным излучением на первой гармонике на величину поперечной температуры электронов в плазме  $T_{\perp}$ . В указанных условиях уравнение переноса этих компонент излучения будет иметь вид (19.9). Однако, в этом уравнении  $a_{j,s}$  и  $\mu_{j,s}$  станут зависеть через  $T_{\perp}$  от интенсивности необыкновенной волны на первой гармонике, которая определяется уравнением (19.10). При решении уравнения переноса

(19.9) величины  $a_{js}$ ,  $\mu_{js}$  могут считаться заданными, не зависящими от искомой интенсивности  $I_\omega$ . В этом случае перенос излучения не имеет характер рассеяния, и форма решений уравнения переноса совпадает с (8.40)–(8.45). Если, в частности, оптическая толщина по циклотронному поглощению  $\tau_{js}$  достигает значений больше единицы, то яркостная температура излучения  $T_b$ , выходящего из плазмы, будет равна поперечной температуре электронов  $T_\perp$ .

Уравнению переноса (19.10) можно придать другой вид, если учесть в нем связь (19.4) между  $\dot{\omega}$  и  $\alpha$  и (19.5) между  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\alpha}$ , в которой  $p_{||}$  играет роль независимого параметра. Для этого умножим почленно уравнение (19.10) на дельта-функцию  $\delta\{\omega(1 - p_{||} \cos \alpha/m_e c) - \omega_B\}$  и проинтегрируем по частоте  $\omega$ . В результате получим, что уравнение переноса примет вид: [434]:<sup>141</sup>

$$\frac{\partial I_\omega(p_{||}, \alpha)}{\partial l} - \frac{d\omega_B}{dl} \frac{m_e c}{\omega_B \cos \alpha} \frac{\partial I_\omega(p_{||}, \alpha)}{\partial p_{||}} = \mu_{11}(p_{||}, \alpha)[S - I_\omega(p_{||}, \alpha)], \quad (19.13)$$

где через  $S$  обозначена функция источников<sup>142</sup>

$$S = \int_0^\pi \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \alpha) I_\omega(p_{||}, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha, \quad (19.14)$$

а интенсивность излучения в направлении  $\alpha$ , которое взаимодействует с электронами, имеющими продольный импульс  $p_{||}$ , обозначена через

$$I_\omega(p_{||}, \alpha) = \int I_\omega \delta\{\omega(1 - p_{||} \cos \alpha/m_e c) - \omega_B\} d\omega. \quad (19.15)$$

Производная  $\partial I_\omega/\partial l$  характеризует изменение интенсивности излучения, взаимодействующего с частицами с фиксированным  $p_{||}$ , в пространстве, а член  $\partial I_\omega/\partial p_{||}$  — изменение интенсивности излучения в данной точке  $l$  при изменении продольного импульса частиц  $p_{||}$  (то есть “перенос” излучения по импульсам  $p_{||}$ ).

При переходе к (19.13) в левой части уравнения пренебрежено членами, содержащими производную  $d(\cos \alpha)/dl$ , по сравнению с  $d\omega_B/dl$ .

<sup>141</sup> Аналогичное уравнение использовалось для анализа переноса излучения с учетом резонансного рассеяния в движущемся с нерелятивистской скоростью двухуровневом газе [433]. Общим для обоих случаев является то обстоятельство, что они описывают перенос излучения, которое взаимодействует с частицами, движущимися с одной скоростью.

<sup>142</sup> Для простоты мы здесь и в дальнейшем опускаем знак  $\sim$  над  $\alpha$  в подынтегральном выражении.

Допустимость такого пренебрежения ясна из следующих соображений. В неоднородном магнитном поле излучение на заданной частоте  $\omega$  выйдет из резонансного интервала взаимодействия с плазмой (19.8) за счет изменения магнитного поля по величине, пройдя расстояние  $\beta_{T\parallel} L_B |\cos \alpha|$ . В то же время, изменение магнитного поля по направлению приведет к такому же эффекту на расстоянии  $L_\alpha$ . Если характерный масштаб  $L_B = \omega_B |d\omega_B/dl|^{-1}$  сравним по величине с масштабом  $L_\alpha = |\cos \alpha d(\cos \alpha)/dl|^{-1}$ , то отношение этих расстояний составляет  $\beta_{T\parallel} |\cos \alpha| \ll 1$ . Отсюда следует, что влияние пространственных вариаций магнитного поля по величине более существенно, чем по направлению.

### 19.3. Решения уравнения переноса излучения в однородном и неоднородном магнитном поле

Найдем решение уравнений переноса (19.13) в слабонеоднородном магнитном поле, когда толщина плазменного слоя  $H \ll \beta_{T\parallel} L_B$ . В этом случае, типичном для плазмы в фотосфере и короне на магнитных белых карликах,<sup>143</sup> магнитное поле в слое можно считать однородным и пренебречь в уравнении переноса переносом излучения по продольным импульсам электронов  $p_{\parallel}$  (то есть членом  $\partial I_\omega / \partial p_{\parallel}$ ). Кроме того, предположим для простоты, что магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  ориентировано перпендикулярно слою плазмы (вдоль оси  $z$ ). При сказанных предположениях уравнение переноса излучения примет вид:

$$\cos \alpha \frac{\partial I_\omega}{\partial z} = \mu_{11}(p_{\parallel}, \alpha) [S - I_\omega], \quad (19.16)$$

Здесь  $I_\omega = I_\omega(z, p_{\parallel}, \alpha)$  и  $S = S(z, p_{\parallel})$ , а граничные условия

$$I_\omega|_{z=0, \cos \alpha > 0} = I_\omega^{\text{inc}}(\omega, \alpha), \quad (19.17)$$

$$I_\omega|_{z=H, \cos \alpha < 0} = 0$$

учитывают, что снизу на слой падает излучение с заданной интенсивностью  $I_\omega^{\text{inc}}(\omega, \alpha)$ ; снаружи есть только излучение, выходящее из слоя (его надо найти), а интенсивность падающего извне излучения равна нулю.

<sup>143</sup>Если плазма с температурой  $T \sim 10^6 - 10^7$  К на магнитных белых карликах находится под действием только силы тяжести, то она оказывается прижатой к поверхности звезды. Приведенная высота  $H = 2\kappa T / m_p g \sim 10^6 - 10^7$  см при этом составляет всего лишь  $10^{-3} - 10^{-2}$  от величины радиуса звезды  $R_* \sim 10^9$  см.



Решение уравнения переноса начнем, пользуясь методом Шварцшильда–Шустера. Однако, в форме, изложенной в §8, этот метод не позволяет найти угловые зависимости интенсивности излучения. Поэтому мы поступим следующим образом. Сначала применим к уравнению переноса (19.16) метод Шварцшильда–Шустера для отыскания функции источников  $S$ . Для этого умножим уравнение почленно на  $|\cos \alpha| \sin \alpha$  и проинтегрируем по  $\alpha$  в пределах от 0 до  $\pi/2$ , а затем — от  $\pi/2$  до  $\pi$ , вынося в левой части уравнения из-под интеграла  $|\cos \alpha| \cos \alpha$  со средним значением на полусфере  $1/3$  и  $-1/3$ . В правой части уравнения ту же операцию совершим с  $(1 + \cos^2 \alpha)$ , вынося его со средним значением  $4/3$ . Из полученной системы двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{\partial I_1}{\partial z} &= \frac{2}{3} \mu_{11}(\alpha=0) \left[ -I_1 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \right], \\ -\frac{1}{3} \frac{\partial I_2}{\partial z} &= \frac{2}{3} \mu_{11}(\alpha=0) \left[ -I_2 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \right] \end{aligned} \quad (19.18)$$

относительно

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} I_\omega \sin \alpha \, d\alpha, \quad I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} I_\omega \sin \alpha \, d\alpha \quad (19.19)$$

найдем функцию источников

$$S = \frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{I^{\text{inc}}(1 + 2\tau_c)}{2(1 + \tau_c)} - \frac{I^{\text{inc}}\tau_c}{(1 + \tau_c)} \frac{z}{H}. \quad (19.20)$$

Здесь

$$I^{\text{inc}} = \int_0^{\pi/2} I_\omega^{\text{inc}}(\omega, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha; \quad (19.21)$$

предполагается, что интенсивность необыкновенной моды  $I_\omega^{\text{inc}}(\omega, \alpha)$  изотропна по полусфере и мало меняется в полосе циклотронного резонанса (19.8). Величина  $\tau_c$  в (19.20) — это оптическая толщина плазменного слоя по циклотронному рассеянию волн необыкновенного типа на гармонике  $s=1$ :

$$\tau_c = \mu_{11}(\alpha=0)H = \frac{(2\pi)^{3/2}e^2}{(m_e\kappa T_{\parallel})^{1/2}\omega_B} NH \exp \left[ -\frac{p_{\parallel}^2}{2\kappa T_{\parallel}} \right]. \quad (19.22)$$

Действуя далее методом последовательных приближений, получим из уравнения (19.16) зависимость  $I_\omega(\alpha)$  по известной функции источников  $S$  (19.20). В результате интенсивность излучения на выходе из

слоя ( $z = H$ ) будет равна

$$I_{\omega}^{\text{out}} = I_{\omega}^{\text{inc}} e^{\Psi} + \frac{I_{\omega}^{\text{inc}}}{1 + \tau_c} \frac{1 + 5 \cos^2 \alpha}{2(1 + \cos^2 \alpha)} (1 - e^{\Psi}) - \frac{I_{\omega}^{\text{inc}} \tau_c}{1 + \tau_c} e^{\Psi}, \quad (19.23)$$

Здесь введено обозначение

$$\Psi = -\frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \tau_c. \quad (19.24)$$

Эта формула получена в [434]; при публикации был пропущен последний член. В оптически толстом слое ( $\tau_c \gg 1$ ) выходящее излучение описывается формулой

$$I_{\omega}^{\text{out}} = \frac{I_{\omega}^{\text{inc}}}{1 + \tau_c} \frac{1 + 5 \cos^2 \alpha}{2(1 + \cos^2 \alpha)}. \quad (19.25)$$

Из (19.25) ясно, что плазменный слой в однородном магнитном поле формирует в спектре проходящего сквозь слой излучения циклотронные линии в поглощении. Уровень излучения в линии (точнее, его необыкновенной компоненты) уменьшается до  $I^{\text{out}} \sim I^{\text{inc}} \tau_c^{-1}$ , а ширина линии определяется доплеровским уширением и составляет  $\Delta\omega \sim \beta_{T_{\parallel}} \omega_B$ .

Развитый подход к исследованию переноса излучения на циклотронных частотах в разреженной плазме используется для объяснения происхождения полос в поглощении, регистрируемых в спектрах некоторых магнитных белых карликов.

Рассмотрим теперь перенос излучения в сильнонеоднородном магнитном поле, когда выполнен критерий  $H \gg \beta_{T_{\parallel}} L_B$ . При этом сильное циклотронное рассеяние имеет место лишь в пределах гирорезонансного слоя толщиной  $L_{11} \simeq 2\sqrt{2}\beta_{T_{\parallel}} L_B |\cos \alpha|$  (см. формулу (13.42) для аналогичного случая сильного циклотронного поглощения в неоднородном магнитном поле). На магнитных белых карликах этот вариант переноса излучения реализуется или в протяженном аккреционном столбе над магнитными полюсами, или в случае, когда сила радиационного давления на циклотронных частотах сравнима или превалирует над силой тяжести. В последнем случае вокруг белого карлика может существовать протяженная плазменная оболочка, рассеяние фотосферного излучения в которой существенно меняет наблюдаемый оптический спектр звезды (см. раздел 19.5 и последнюю часть данного раздела).

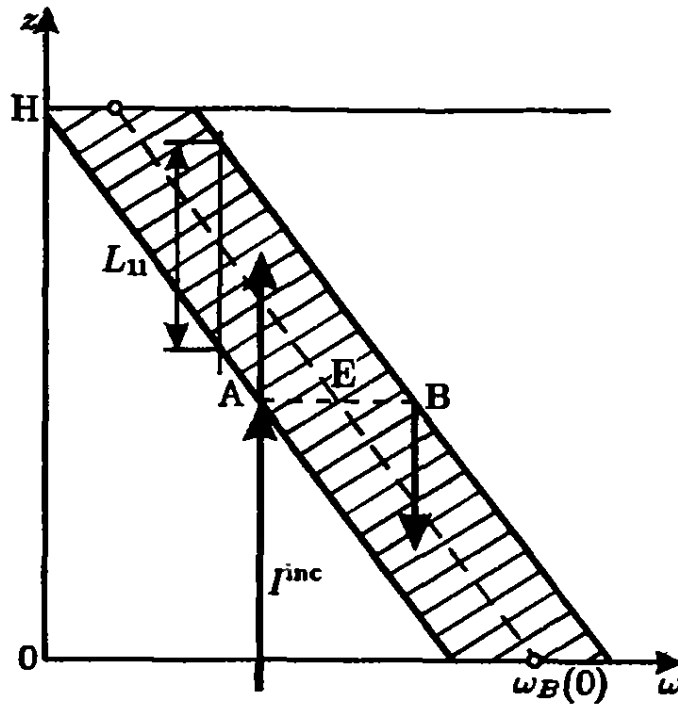


Рис. 60. К объяснению эффекта полупрозрачности оптически толстого по циклотронному рассеянию гирорезонансного слоя. Гирорезонансный слой на плоскости  $(\omega, z)$  (заштриховано);  $L_{11}$  — толщина гирорезонансного слоя,  $\Delta\omega$  — изменение частоты при рассеянии  $\Gamma^{\text{inc}}$  на входе в гирорезонансный слой

В предельном случае сильнонеоднородного магнитного поля можно пренебречь в уравнении (19.13) пространственным переносом излучения по сравнению с “переносом” излучения по продольным импульсам  $p_{\parallel}$  и исходить из уравнения<sup>144</sup>

$$-\frac{m_e c}{\omega_B} \frac{\partial \omega_B}{\partial z} \frac{\partial I_{\omega}}{\partial p_{\parallel}} = \mu_{11}(p_{\parallel}, \alpha)[S - I_{\omega}], \quad (19.26)$$

где  $\mu_{11}$  и  $S$  определяются выражениями (19.11) и (19.14) соответственно. Ось  $z$  перпендикулярна плазменному слою; магнитное поле  $B_0$  направлено вдоль  $z$ . После замены независимой переменной  $p_{\parallel}$  на

$$y = (2\pi m_e \kappa T_{\parallel})^{-1/2} \int_{-\infty}^{p_{\parallel}} \exp(-p_{\parallel}^2 / 2m_e \kappa T_{\parallel}) dp_{\parallel}, \quad (19.27)$$

<sup>144</sup>По форме это уравнение напоминает использованное в теории движущихся звездных оболочек уравнение В.В.Соболева благодаря аналогии между пространственным изменением гирочастоты в неоднородном магнитном поле и доплеровским изменением резонансной частоты в двухуровневом газе, движущемся с переменной скоростью. С отмеченной аналогией связано также представление о гирорезонансных слоях в плазме [299] и поверхностях постоянной скорости в расширяющихся звездных оболочках [435, 436].

уравнение (19.26) примет вид

$$\frac{\partial I_\omega}{\partial y} = \frac{3}{8} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{|\cos \alpha|} \tau_g [S - I_\omega], \quad (19.28)$$

где

$$\tau_g = \frac{16}{3} \frac{\pi^2 e^2 N L_B}{m_e c \omega_B} = 2.6 \cdot 10^{-8} \frac{N L_B}{B_0}, \quad (19.29)$$

— оптическая толщина гирорезонансного слоя  $s = 1$  по циклотронному рассеянию необыкновенной волны ( $\alpha = 0$ ). Уравнение (19.28) в приближении Шварцшильда–Шустера сводится к системе двух уравнений относительно  $I_{1,2}$  (19.19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial y} &= \tau_g \left[ -I_1 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \right], \\ \frac{\partial I_2}{\partial y} &= \tau_g \left[ -I_2 + \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \right]. \end{aligned} \quad (19.30)$$

При этом граничные условия по обе стороны от гирорезонансного слоя примут вид

$$I_1(y = 0) = I^{\text{inc}}, \quad I_2(y = 0) = 0, \quad (19.31)$$

причем  $I^{\text{inc}}$  берется в точке  $z$ , где  $\omega_B = \omega$ . Эти граничные условия отвечают случаю, когда на гирорезонансный слой только с одной стороны падает изотропное излучение с интенсивностью

$$I^{\text{inc}} = \int_0^{\pi/2} I_\omega^{\text{inc}} \sin \alpha d\alpha.$$

Решение системы (19.30) с граничными условиями (19.31) имеет вид

$$I_1 = \frac{I^{\text{inc}}}{2} [1 + e^{-\tau_g y}], \quad I_2 = \frac{I^{\text{inc}}}{2} [1 - e^{-\tau_g y}], \quad (19.32)$$

а функция источников

$$S = \frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{I^{\text{inc}}}{2}.$$

Таким образом, функция источников в гирорезонансном слое постоянна, тогда как в однородном магнитном поле она убывает с ростом  $z$  (см. (19.20)). Это ведет к качественным различиям в характере решений уравнения переноса в двух рассматриваемых предельных случаях слабо- и сильнонеоднородного магнитного поля (см. ниже).

Действуя методом последовательных приближений, найдем по известной  $S$  решение уравнения (19.26). В результате получаем, что интенсивность выходящего из гирорезонансного слоя излучения равна [434]:

$$I_{\omega}^{\text{out}}(y = 1, \cos \alpha > 0) = I^{\text{inc}} \exp \Phi + \frac{1}{2} I^{\text{inc}} (1 - \exp \Phi), \quad (19.33)$$

а интенсивность отраженного излучения

$$I_{\omega}^{\text{ref}}(y = 1, \cos \alpha < 0) = \frac{1}{2} I^{\text{inc}} (1 - \exp \Phi). \quad (19.34)$$

Здесь через  $\Phi$  обозначено следующее выражение:

$$\Phi = -\frac{3}{8} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{|\cos \alpha|} \tau_g. \quad (19.35)$$

При рассеянии в оптически толстом гирорезонансном слое  $\tau_g \gg 1$  последний остается полупрозрачным:

$$I_{\omega}^{\text{out}} = I_{\omega}^{\text{ref}} = \frac{1}{2} I^{\text{inc}}, \quad (19.36)$$

что радикально отличается как от случая рассеяния излучения в однородном магнитном поле (где при  $\tau_c \gg 1$  выходящее излучение убывает как  $\tau_c^{-1}$ ; см. формулу (19.25)), так и от случая прохождения излучения через гирорезонансный слой столкновительной плазмы, где интенсивность  $I^{\text{out}}$  при  $\tau_g \gg 1$  экспоненциально убывает с ростом  $\tau_g$  (см. §13).

Полученный результат можно пояснить следующим образом (см. Рис. 60). Предположим для простоты, что рассеяние излучения на электроны происходит только в двух направлениях (вперед и назад) с одинаковой вероятностью. Если гирорезонансный слой — оптически толстый ( $\tau_g \gg 1$ ), то первый акт рассеяния излучения, падающего на слой со стороны малых  $z$ , происходит в точке  $A$  на краю гирорезонансного слоя (то есть там, где оптическая толщина по рассеянию достигает значений меньше или порядка единицы). При этом частота излучения, рассеянного вперед, сохраняется, а рассеянного назад — меняется на величину  $\Delta\omega \sim 2\beta_{T\parallel} \omega_B |\cos \alpha|$ , то есть переходит на внешнюю сторону гирорезонансного слоя — в точку  $B$ , расположенную симметрично по отношению к середине слоя (точке  $E$ ). Таким образом, падающее излучение на краю слоя делится на две компоненты равной интенсивности  $I^{\text{inc}}/2$ , причем одна компонента соответствует

излучению, падающему на слой изнутри (точка  $A$ ), а другая — падающему снаружи (точка  $B$ ). Если свойства гирорезонансного слоя в пределах интервала  $\Delta\omega_B \sim \Delta\omega$  одинаковы, то дальнейшее рассеяние обеих компонент приведет к выходу из слоя излучения с одинаковой интенсивностью  $I^{\text{inc}}/2$  в противоположных направлениях — в соответствии с формулой (19.36).

Протяженный плазменный слой в неоднородном магнитном поле не формирует узкую циклотронную линию на частоте  $\omega \sim \omega_B$ , как в однородном магнитном поле. В спектре излучения, выходящего из такого слоя, появляется полоса в поглощении, ширина которой определяется значением гирочастоты на верхней и нижней границах плазменного слоя. Если гирорезонансный слой  $\omega \simeq \omega_B$  оптически толстый по циклотронному рассеянию необыкновенных волн  $\tau_g \gg 1$ , то наблюдаемая интенсивность необыкновенной компоненты составит половину от интенсивности необыкновенной компоненты падающего излучения. Если вместе с тем гирорезонансный слой прозрачен по обыкновенному излучению (его оптическая толщина порядка  $\beta_{T\parallel}^2 \tau_g$ ), то интенсивность выходящего излучения составит  $3/4$  от интенсивности падающего неполяризованного излучения. Если же плазма достаточно плотная и оптическая толщина по обыкновенному излучению также больше единицы, то интенсивность этой компоненты будет равна интенсивности равновесного излучения с температурой  $T_{\perp}$ .

Теория переноса излучения в плазме, погруженной в сильнонеоднородное магнитное поле, играет существенную роль при исследовании циклотронного рассеяния в протяженных плазменных оболочках магнитных белых карликов.

Выше мы рассматривали циклотронное рассеяние в случае, когда влияние намагниченного вакуума на поляризацию мод в плазме несущественно. Если это не так (см. критерии (5.85) и (5.87)), и поляризация мод определяется намагниченным вакуумом (ситуация, характерная для нейтронных звезд с сильным магнитным полем), то вероятности циклотронных переходов под действием обыкновенного и необыкновенного излучения на первой гармонике гирочастоты становятся сравнимыми по величине. Это видно, например, из сопоставления коэффициентов циклотронного поглощения (13.32) и (13.33), которые для  $s = 1$  соотносятся как  $\mu_{11}/\mu_{21} = \cos^2 \alpha$ . Здесь следует учитывать влияние обеих мод на величину поперечной температуры электронов плазмы. При очень грубых оценках можно пренебречь различием между модами, положив в уравнении вида (19.10)  $\mu \simeq (\mu_{21} + \mu_{11})/2$ .

Более корректный подход, развитый в [54, 315], позволяет полу-

читать величину поперечной температуры  $T_{\perp}$ , определяемой формулой (14.51). Учитывая выражение для  $T_{\perp}$  в коэффициентах переноса  $a_{j1}$  и  $\mu_{j1}$ , получаем систему уравнений для переноса излучения в двух модах  $j=1, 2$  на первой гармонике  $s=1$ :

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\mathbf{k}}^{(1)}(p_{\parallel}, \alpha)}{dl} &= -\mu_{11} \left[ N_{\mathbf{k}}^{(1)}(p_{\parallel}, \alpha) - x_1 - x_2 \right], \\ \frac{dN_{\mathbf{k}}^{(2)}(p_{\parallel}, \alpha)}{dl} &= -\mu_{21} \left[ N_{\mathbf{k}}^{(2)}(p_{\parallel}, \alpha) - x_1 - x_2 \right], \end{aligned} \quad (19.37)$$

в которых коэффициенты поглощения в системе “плазма + намагниченный вакуум” определяются формулами (13.32)–(13.36) (с учетом (14.51)), а  $x_1$  и  $x_2$  — формулами (14.52). Решив систему (19.37) и найдя величину  $T_{\perp}$ , можно определить коэффициенты переноса  $a_{js}$ ,  $\mu_{js}$  на высших гармониках  $s \geq 2$  и найти интенсивность выходящего излучения на этих гармониках из уравнений (19.9). Решение последних уравнений элементарно; оно имеет вид

$$I_{js}^{\text{out}} = I_{js}^{\text{inc}} e^{-\tau_{js}} + \frac{a_{js}}{\mu_{js}} (1 - e^{-\tau_{js}}), \quad (19.38)$$

где оптическая толщина плазменного слоя  $\tau_{js} = \mu_{js} L$  определяется формулой (13.40) с заменой  $\beta_T^{2s-2}$  фактором  $\beta_{T_{\perp}}^{2s-2}$  (ср. с формулой (13.31)). Решение системы (19.37) значительно сложнее. Для слоя плазмы в однородном магнитном поле это решение методом Шварцшильда–Шустера получено в [54, 315] и использовано в этих работах для анализа происхождения циклотронных линий в спектре космических гамма-всплесков.

Использованный подход к описанию переноса излучения на циклотронных гармониках в бесстолкновительной плазме основан на приближении, согласно которому распределение электронов по поперечным скоростям (уровням Ландау) устанавливается излучением на первой гармонике. В свою очередь, это распределение определяет излучательные способности и коэффициенты поглощения на всех высших гармониках. В данной многоуровневой схеме переноса учитываются следующие элементарные процессы: 1) на первой гармонике — резонансное рассеяние и конверсия из одной моды в другую (последнее — только в намагниченном вакууме); эти процессы определяют населенности всех уровней (величину  $T_{\perp}$ ); 2) на высших гармониках — испускание фотона после поглощения нескольких фотонов первой

гармоники, а также поглощение, которое связано с размножением фотонов высших гармоник в фотоны первой гармоники. Однако, в этой схеме не принято во внимание рассеяние на высших гармониках и вклад этих процессов в интенсивность на первой гармонике (в случае, когда они существенны)<sup>145</sup>. Для их учета необходимо более полное рассмотрение. Эти процессы исследовались (путем численных расчетов) в работе [437], однако в ней была упущена часть тех эффектов, которые учтены выше.

#### 19.4. Перенос излучения на циклотронных частотах с учетом столкновений в плазме

Межчастичные столкновения в плазме приводят к появлению тормозного излучения и поглощения; соответствующие излучательные способности и коэффициенты поглощения приведены в §11, §13. Кроме того, столкновения вызывают безызлучательные переходы между уровнями Ландау. Благодаря этому наряду с резонансным циклотронным рассеянием появляются два новых процесса: 1) ударное возбуждение (переход электрона на высший уровень Ландау) + циклотронное излучение и 2) циклотронное поглощение с последующим де-возбуждением. В отличие от резонансного рассеяния на гирочастоте, сохраняющим число фотонов, два указанных процесса связаны с рождением и истинным поглощением фотонов. Эти процессы, как будет ясно из дальнейшего, могут быть существенны даже в пределе “бесстолкновительной” плазмы, когда параметр  $\epsilon$  (14.56), (14.58) много меньше единицы.

Распределение электронов по уровням под действием излучения и межчастичных столкновений в случае  $\epsilon \ll 1$  было получено в §14 (см. формулу (14.55) для населенностей  $N_m$ ). В случае разреженной плазмы, где выполнен критерий (5.42), это неравновесное стационарное распределение задается интенсивностью необыкновенной моды  $j=1$  на первой гармонике гирочастоты  $s=1$ . Излучательная способность (14.17) при этом будет равна

$$a_{11} = \hbar\omega \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_m^{m-1} f(p_{\parallel}) N_m dp_{\parallel}, \quad (19.39)$$

<sup>145</sup> Следует отметить, что процесс рассеяния на высших гармониках менее существен, чем вклад в первую гармонику от “размножения” фотонов высших гармоник  $s\hbar\omega_B$ . Основное различие между этими двумя процессами в том, что после поглощения фотона  $s\hbar\omega_B$  происходит или излучение фотона  $s'\hbar\omega_B$  (где  $s' \geq 2$ ), или излучение нескольких фотонов  $\hbar\omega_B$ . Последняя возможность для нерелятивистского электрона значительно более вероятна.



где  $f(p_{||})$  характеризует фиксированную функцию распределения по продольным импульсам, а

$$A_m^{m-1} = \frac{e^2 \omega \omega_B}{4\pi m_e c^3} m(1 + \cos^2 \alpha) \delta \left\{ \omega \left( 1 - \frac{p_{||} \cos \alpha}{m_e c} \right) - \omega_B \right\} \quad (19.40)$$

есть вероятность циклотронного перехода  $(m) \rightarrow (m-1)$  [223]. В этих формулах через  $m$  обозначен номер уровня Ландау, а в аргументе  $\delta$ -функции пренебрежено эффектом отдачи. Из (19.39), (19.40) следует, что для максвелловского распределения  $f(p_{||})$

$$a_{11} = \frac{\hbar \omega^3}{(2\pi)^3 c^2} F \sum_{m=1}^{\infty} m N_m, \quad (19.41)$$

$$F = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_L^2}{\omega_B c} \frac{\omega_B^2}{\omega^2 \beta_{T_{||}}} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{|\cos \alpha|} \frac{e^{-Z_1^2}}{N},$$

где  $Z_1$  определяется выражением (19.12) и  $N$  — полная концентрация электронов в плазме. Подставив (14.55) в (19.41), получим [41]:

$$a_{11} = \frac{\hbar \omega_B^3}{(2\pi)^3 c^2} F N \left[ x_1 + \epsilon \left( \frac{\kappa T_{||}}{\hbar \omega_B} - x_1 \right) \right]. \quad (19.42)$$

Эта формула справедлива для произвольных значений  $x_1$ , включая квазиклассический предел  $x_1 \gg 1$  и квантовый предел  $x_1 \ll 1$ .<sup>146</sup> Далее, коэффициент поглощения  $\mu_{11}$  (14.16) может быть представлен в виде

$$\mu_{11} = F \sum_{m=1}^{\infty} m(N_{m-1} - N_m) = FN, \quad (19.43)$$

откуда следует, что величина  $\mu_{11}$  не зависит от характера распределения электронов по уровням Ландау (то есть от распределения электронов по поперечным скоростям). Это обстоятельство было отмечено в [438]. Оно означает, в частности, что коэффициент поглощения  $\mu_{11}$  имеет одинаковую форму как в классической, так и в квантованной плазме.

Действуя так же, как при переходе к уравнению переноса (19.16) в плоскостной плазме, помещенной в однородное магнитное поле (это уравнение справедливо без учета столкновительных переходов,

<sup>146</sup> В отсутствие столкновений  $\epsilon = 0$  этим пределам отвечают условия  $\kappa T_{\perp} \gg \hbar \omega_B$  и  $\kappa T_{\perp} \ll \hbar \omega_B$ , соответственно (см. §14).

то есть в приближении  $\epsilon = 0$ ), в случае  $\epsilon \neq 1$  получим такое же уравнение:

$$\cos \alpha \frac{\partial I_\omega}{\partial z} = F(p_{||}, \alpha) N[S - I_\omega], \quad (19.44)$$

но с другой функцией источников

$$S(z, p_{||}) = \frac{1}{\epsilon + 1} \int_0^\pi \frac{3}{8} (1 + \cos^2 \alpha) I_\omega(z, p_{||}, \alpha) \sin \alpha d\alpha + \frac{\epsilon}{\epsilon + 1} I_\omega^{(0)}(T_{||}). \quad (19.45)$$

При  $\epsilon \ll 1$  уравнение (19.44), (19.45) переходит в уравнение, полученное в [41], при  $\epsilon \gg 1$  — в обычное уравнение переноса в равновесной столкновительной плазме с  $T_\perp = T_{||} = T$ . Для произвольных значений параметра  $\epsilon$  оно получено в [316]. Заметим, что уравнение (19.44) по форме совпадает с хорошо изученным в теории звездных атмосфер уравнением Милна-Эддингтона, описывающем перенос излучения в резонансных линиях атомов.

Уравнение (19.44), (19.45) после замены  $\lambda \equiv \epsilon/(\epsilon + 1) \rightarrow p \equiv \mu_b/\mu_{11}$  (где  $\mu_b$  — коэффициент тормозного поглощения) переходит в уравнение переноса излучения с учетом рассеяния и процессов тормозного излучения и поглощения. Последнее было проанализировано в [183], откуда и можно взять решения для (19.44), (19.45) (см. также [316]). Эти решения получены методом Шварцшильда-Шустера для величин  $I_1$  и  $I_2$  (см. (19.19)):

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_\omega^{(0)}(T_{||}) \left( 2 + C_1 e^{-2\sqrt{\lambda}\tau} + C_2 e^{2\sqrt{\lambda}\tau} \right), \\ I_1 - I_2 &= I_\omega^{(0)}(T_{||}) \sqrt{\lambda} \left( -C_1 e^{-2\sqrt{\lambda}\tau} + C_2 e^{2\sqrt{\lambda}\tau} \right). \end{aligned} \quad (19.46)$$

Постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} C_1 &= -\Delta^{-1} \left[ 2(1 + \sqrt{\lambda}) e^{2\sqrt{\lambda}\tau_c} + (\gamma - 2)(1 - \sqrt{\lambda}) \right], \\ C_2 &= \Delta^{-1} \left[ 2(1 - \sqrt{\lambda}) e^{-2\sqrt{\lambda}\tau_c} + (\gamma - 2)(1 + \sqrt{\lambda}) \right], \end{aligned} \quad (19.47)$$

где

$$\Delta = (1 + \sqrt{\lambda})^2 e^{2\sqrt{\lambda}\tau_c} - (1 - \sqrt{\lambda})^2 e^{-2\sqrt{\lambda}\tau_c},$$

найлены с учетом граничных условий на краях слоя плазмы толщиной

$H$  по координате  $z$ :<sup>147</sup>

$$\begin{aligned} I_1(z=0) &= I_\omega^{\text{inc}}, \\ I_2(z=H) &= 0, \end{aligned} \quad (19.48)$$

где  $\tau_c$  и  $I_\omega^{\text{inc}}$  — из (19.22) и (19.21), соответственно. Эти граничные условия — те же, что и в задаче о циклотронном рассеянии в плазменном слое при  $\epsilon=0$  (см. (19.17)); через  $\gamma$  обозначена величина  $2I_\omega^{\text{inc}}/I_\omega^{(0)}(T_{\parallel})$ . Далее, в приведенных соотношениях

$$\tau = \mu_{11}(\alpha=0)[H-z] \quad (19.49)$$

определяет оптическую толщину по циклотронному рассеянию, отсчитываемую от верхней границы слоя  $z=H$ . Коэффициент рассеяния  $\mu_{11}$  в (19.49) определяется формулой (19.11). Интенсивность выходящего из слоя излучения в точке  $z=H$  равна

$$I^{\text{out}} = \sqrt{\lambda} I_\omega^{(0)}(T_{\parallel})(C_2 - C_1). \quad (19.50)$$

Отметим, что в бесстолкновительной плазме при  $\epsilon \rightarrow 0$  (то есть при  $\lambda \rightarrow 0$ ) приведенное решение переходит в решение для чисто рассеивающего слоя:

$$I_1 + I_2 = I_\omega^{(0)}(T_{\parallel}) \frac{1 + 2\tau}{1 + \tau_c} \frac{\gamma}{2}, \quad (19.51)$$

$$I_1 - I_2 = I_\omega^{(0)}(T_{\parallel}) \frac{1}{1 + \tau_c} \frac{\gamma}{2},$$

$$I^{\text{out}} = I_\omega^{\text{inc}} \frac{1}{1 + \tau_c}. \quad (19.52)$$

Сопоставляя последнюю формулу с выражением (19.23), полученным для того же случая, убеждаемся, что решение (19.51), (19.52) является более грубым; угловая зависимость интенсивности  $I_\omega(\alpha)$  отражена в нем только через разность величин  $I_1$  и  $I_2$ . Это неудивительно, так как решение (19.51), (19.52) получено методом Шварцшильда-Шустера, тогда как при отыскании (19.23) этот способ был дополнен методом последовательных приближений по найденной функции источников  $S$ .

<sup>147</sup> Ось  $z$  направлена вдоль магнитного поля  $B_0$ .

В пределе столкновительной плазмы  $\epsilon \rightarrow \infty$  (то есть при  $\lambda \rightarrow 1$ ) решение (19.46) сводится к виду

$$I_1 + I_2 = I_\omega^{(0)}(T_{\parallel}) \left[ 2 - e^{-2\tau} + (\gamma - 2)e^{-2(\tau_c - \tau)} \right], \quad (19.53)$$

$$I_1 - I_2 = I_\omega^{(0)}(T_{\parallel}) \left[ e^{-2\tau} + (\gamma - 2)e^{-2(\tau_c - \tau)} \right],$$

$$I^{\text{out}} = I^{\text{inc}} e^{-2\tau_c} + I_\omega^{(0)}(T_{\parallel})(1 - e^{-2\tau_c}). \quad (19.54)$$

Эти формулы описывают перенос излучения в равновесной плазме  $T_{\perp} = T_{\parallel}$  с учетом циклотронного излучения и поглощения. Появление здесь коэффициента 2 в показателях экспонент связано с приближенным характером метода Шварцшильда–Шустера.

Перенос излучения в плазме с произвольным значением параметра  $\epsilon \equiv \lambda/(1 - \lambda)$  существенным образом зависит от протяженности слоя  $H$ . Если слой “толстый”:

$$2\sqrt{\lambda}\tau_c \gg 1, \quad (19.55)$$

то внутри слоя (на расстояниях от краев слоя  $\Delta z > (2\sqrt{\lambda}\mu_{11})^{-1}$ ) интенсивность

$$I_1 \simeq I_2 \simeq I_\omega^{(0)}(T_{\parallel}), \quad (19.56)$$

то есть излучение полностью “термализуется” — его интенсивность близка к равновесному значению при температуре  $T_{\parallel}$ . Это, в частности, означает, что внутри слоя анизотропия температур исчезает:  $T_{\perp} = T_{\parallel}$ . Выходящее из плазмы излучение в этом случае определяется только параметрами слоя и не зависит от  $I^{\text{inc}}$ :

$$I^{\text{out}} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} I_\omega^{(0)}(T_{\parallel}). \quad (19.57)$$

В случае “тонкого” слоя

$$2\sqrt{\lambda}\tau_c \ll 1 \quad (19.58)$$

термализации, очевидно, не происходит, и выходящее из слоя излучение

$$I^{\text{out}} = \frac{I^{\text{inc}}}{1 + (1 + \lambda)\tau_c} + 2\lambda\tau_c I_\omega^{(0)}(T_{\parallel}). \quad (19.59)$$

В зависимости от относительной величины двух слагаемых в правой части (19.59) выходящее излучение определяется или рассеянным падающим излучением или собственным излучением слоя. Если

$$I^{\text{inc}} [1 + (1 + \lambda)\tau_c]^{-1} \ll 2\lambda\tau_c I_\omega^{(0)}(T_{\parallel}), \quad (19.60)$$

то выходящее излучение определяется собственным излучением слоя:

$$I^{\text{out}} = 2\lambda\tau_c I_{\omega}^{(0)}(T_{\parallel}). \quad (19.61)$$

При обратном условии

$$I^{\text{inc}} [1 + (1 + \lambda)\tau_c]^{-1} \gg 2\lambda\tau_c I_{\omega}^{(0)}(T_{\parallel}), \quad (19.62)$$

выходящее излучение представляет собой падающее излучение, прошедшее через рассеивающий слой:

$$I^{\text{out}} = \frac{I^{\text{inc}}}{1 + (1 + \lambda)\tau_c}. \quad (19.63)$$

При  $\tau_c \ll 1$  слой перестает заметно влиять на проходящее излучение. Внутри циклотронной линии это происходит при достаточно малой электронной плотности  $N$ , вне линии — за счет экспоненциального уменьшения  $\tau_c$  с ростом  $|\omega - \omega_B|$  (см. (19.4) и (19.22)).

Если критерий (19.62) выполнен в центре линии, то он выполнен во всей линии. Тогда плазменный слой на первой гармонике является чисто рассеивающим. Из (19.63) ясно, что циклотронная линия, формируемая за счет рассеяния, будет линией в поглощении; она будет достаточно глубокой, если в центре линии  $\omega = \omega_B$  оптическая толщина  $\tau_c \gtrsim 1$ . С ростом  $\tau_c$  и  $\lambda$  критерий (19.62) заменяется на обратное неравенство (19.60). В этом случае выходящее излучение определяется параметрами слоя (см. (19.61)); при

$$I^{\text{inc}} < 2\lambda\tau_c I_{\omega}^{(0)}(T_{\parallel}) \quad (19.64)$$

будет формироваться линия в излучении.<sup>148</sup>

Проведенный анализ профиля циклотронной линии относится к “тонкому” слою (19.58). В случае “толстого” слоя (19.55) с термализацией излучения профиль линии зависит от величины  $\lambda$  и отношения  $I^{\text{inc}}/I_{\omega}^{(0)}(T_{\parallel})$  (см. (19.57)). При

$$I^{\text{inc}} > \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} I_{\omega}^{(0)}(T_{\parallel}) \quad (19.65)$$

циклотронная линия  $\omega \simeq \omega_B$  — абсорбционная, а в случае противоположного неравенства она становится эмиссионной. И, наконец, в

<sup>148</sup>Здесь возможен и более сложный вариант, когда центр линии наблюдается в излучении, а крылья линии — в поглощении (если неравенство (19.64) нарушено на краях линии за счет уменьшения  $\tau_c$ ).

столкновительном пределе  $\epsilon \gg 1$  в горячем слое с  $T_{\parallel} > T_{\text{inc}}$ , где  $T_{\text{inc}}$  — яркостная температура падающего излучения, линия остается эмиссионной при любых значениях оптической толщины  $\tau_c$ .

Перенос излучения на высших гармониках гирочастоты и обыкновенного излучения на первой гармонике можно рассматривать с помощью уравнения (19.9), в котором  $a_{js}$  и  $\mu_{js}$  находятся в приближении фиксированной функции распределения электронов. Последняя определяется уровнем излучения в необыкновенной моде на первой гармонике. Соответствующие выражения для  $a_{js}$  и  $\mu_{js}$  для произвольных значений параметра  $\epsilon$  отличаются от выражений  $a_{js}$  и  $\mu_{js}$  в плазме с анизотропией температур (11.38) и (13.31), переходя в них при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Эти более общие выражения получены в [316]. Решение уравнения переноса (19.9) в однородном слое плазмы толщиной  $H$  имеет вид (ср. с (8.33)):

$$I_{js}^{\text{out}} = I_{js}^{\text{inc}} e^{-\tau_{js}/\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} \int_0^{\tau_{js}} \frac{a_{js}}{\mu_{js}} e^{-\xi/\cos\alpha} d\xi, \quad (19.66)$$

где  $\tau_{js} = \int_0^H \mu_{js} dz$ . Отсюда следует, что (как обычно в поглощающем и излучающем слое с  $\tau_{js} \gg 1$ ) выходящее излучение определяется функцией источников  $S = a_{js}/\mu_{js}$  в слое  $\Delta h$ , примыкающем к верхней границе  $z = H$ . Его толщина  $\Delta h$  определяется соотношением

$$\int_{H-\Delta h}^H \mu_{js} dz \simeq 1. \quad (19.67)$$

Анализ, проведенный в [316], показал, что в тонком рассеивающем слое (19.58), (19.62) все гармоники выходящего излучения представляют собой линии в поглощении; их глубина уменьшается с ростом номера гармоники  $s$ . В тонком слое с собственным излучением (19.58), (19.60) формируются линии в эмиссии или они имеют более сложный профиль с излучением в середине и абсорбцией на краях линии — в зависимости от того, выполнено или нарушено неравенство (19.64). Далее, в толстом слое (19.55) все линии становятся эмиссионными, с интенсивностью в центре, равной  $I_{\omega}^{(0)}(T_{\parallel})$ . Таким образом, в целом профили циклотронных линий на всех гармониках и в обеих модах аналогичны.

В заключение мы рассмотрим перенос излучения в циклотронной линии  $\omega \simeq \omega_B$  в неоднородной плазменной атмосфере с наложенным на нее однородным магнитным полем. Предположим, что плотность

плазмы меняется с высотой по барометрическому закону

$$N = N_0 \exp(-z/H), \quad (19.68)$$

где шкала высот в водородной атмосфере

$$H = 2\kappa T_{\parallel} / m_p g, \quad (19.69)$$

$g$  — ускорение свободного падения.

Перенос излучения в континууме (вне линии) определяется нерезонансным томсоновским рассеянием, тормозным излучением и поглощением. Уравнение переноса в этом случае будет иметь вид (8.65), а его решение (без учета угловой зависимости) можно записать в форме (8.73). В результате излучение, выходящее из слоя, можно представить следующим образом [184]

$$I_1^{\text{out}} = I_{\omega}^{(0)}(T_{\parallel}) \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(4/3)} M_T^{1/3}, \quad (19.70)$$

где  $M_T = \mu_b / H(\sigma_T N)^2$  (ср. с формулой (8.74)).

На частотах  $\omega \simeq \omega_B$  (в циклотронной линии) перенос излучения описывается уравнением (19.44), (19.45). Решая это уравнение в приближении Шварцшильда–Шустера, в бесстолкновительном пределе  $\epsilon \ll 1$  получим для  $I_1$  и  $I_2$  (19.19) следующие соотношения [439]

$$I_1 + I_2 = I_{\omega}^{(0)}(\omega_B) \left[ 2 - \frac{2 \text{Ai}(\Phi^{2/3} M_c^{1/3} \tau_c)}{\text{Ai}(0) - \text{Ai}'(0)(M_c/\Phi)^{1/3}} \right], \quad (19.71)$$

$$I_1 - I_2 = \Phi^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau_c} (I_1 + I_2),$$

где

$$\tau_c(z) \equiv \frac{4\sqrt{2}\pi^{3/2}e^2}{m_e c \omega_B \beta T_{\parallel}} N(z) H \quad (19.72)$$

— оптическая толщина в центре циклотронной линии, отсчитываемая вглубь атмосферы,

$$\Phi(p_{\parallel}) = \exp(-p_{\parallel}^2 / 2m_e \kappa T_{\parallel}) \quad (19.73)$$

— доплеровский профиль циклотронной линии, параметр

$$M_c = \epsilon / \tau_c. \quad (19.74)$$

Поскольку  $\epsilon \propto N(z)$  и  $\tau_c \propto N(z)$  (см. (14.58) и (19.72)), их отношение (19.74) не зависит от координаты  $z$ . При получении (19.71) использовались граничные условия, аналогичные граничным условиям в континууме:

$$I_2|_{\tau_c=0} = 0, \quad I_{1,2}|_{\tau_c \rightarrow \infty} \rightarrow \text{const.}$$

Первое условие означает, что снаружи на атмосферу излучение не падает, а второе условие требует конечности интенсивности излучения в глубине атмосферы (фактически, она определяется величиной равновесной интенсивности  $I_\omega^{(0)}(T_{||})$ ). Интенсивность выходящего из атмосферы излучения, согласно (19.71), равна

$$I^{\text{out}} \equiv I_1(\tau_c=0) = \frac{-2\text{Ai}'(0)(M_c/\Phi)^{1/3}I_\omega^{(0)}(\omega_B)}{\text{Ai}(0) - \text{Ai}'(0)(M_c/\Phi)^{1/3}}. \quad (19.75)$$

Если поляризация мод определяется не плазмой, а намагниченным вакуумом (см. условие (5.85), легко реализующееся на нейтронных звездах), то коэффициенты циклотронного поглощения (рассеяния) сравнимы по величине:  $\mu_{11} = \mu_{21} \cos^2 \alpha$ . При упрощенном расчете можно пренебречь различием между ними и положить  $\mu_c = (\mu_{11} + \mu_{21})/2$ . В этом случае уравнение переноса излучения в сумме по обеим модам аналогично (19.44), (19.45). При этом под  $I_\omega$  следует понимать полную интенсивность излучения на первой гармонике, а в слагаемое, содержащее равновесную интенсивность  $I_\omega^{(0)}$ , добавить фактор 2. В результате вместо формулы (19.75) мы будем иметь следующее выражение для суммарной интенсивности выходящего за пределы атмосферы излучения:

$$I^{\text{out}} = \frac{-4\text{Ai}'(0)(M_c/\Phi)^{1/3}I_\omega^{(0)}(\omega_B)}{\text{Ai}(0) - \text{Ai}'(0)(M_c/\Phi)^{1/3}}. \quad (19.76)$$

Здесь  $\tau_c$  и  $M_c$  определяются формулами (19.72) и (19.74), соответственно.

### 19.5. Циклотронные особенности в спектрах магнитных вырожденных звезд

В магнитных полях белых карликов ( $B_0 \sim 10^8$  Гс) и нейтронных звезд ( $B_0 \sim 10^{12}$  Гс) циклотронные частоты лежат соответственно в оптическом (ультрафиолетовом) и рентгеновском диапазонах. Естественно поэтому, что неидентифицированные полосы поглощения, обнаруженные в спектрах некоторых магнитных белых карликов [440-



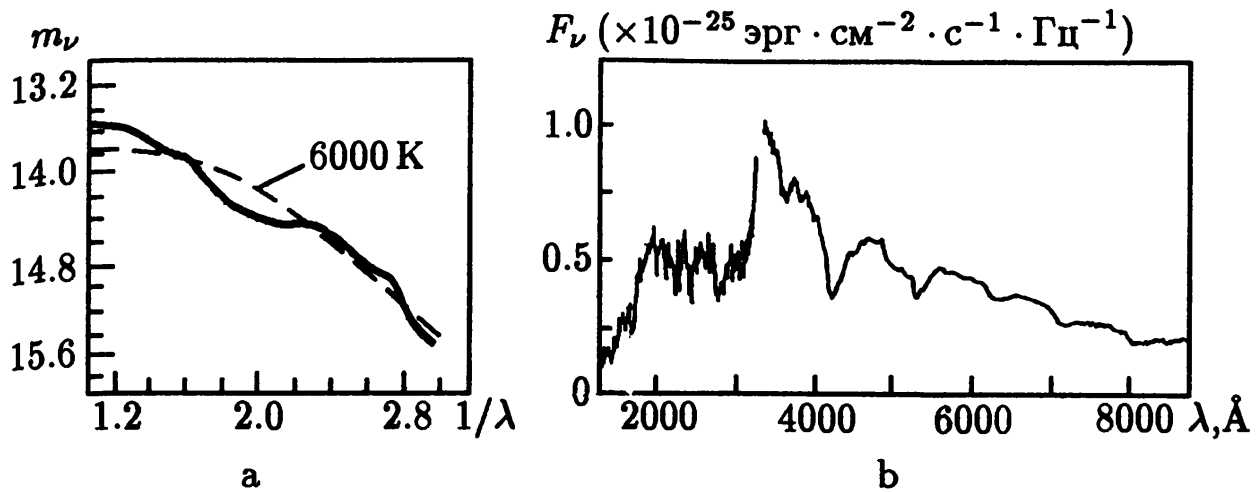


Рис. 61. Частотные спектры излучения магнитных белых карликов: *a*, спектр (зависимость видимой спектральной величины  $m_v$  от обратной длины волны в микронах) “холодного” карлика G 240-72 с температурой фотосферы  $T_{ph} \simeq 6 \cdot 10^3$  K [443]; *b*, спектр “горячего” карлика GD 229 с  $T_{ph} \simeq (1.5 - 2) \cdot 10^4$  K [441]. Пунктиром отмечен спектр равновесного излучения фотосферы

442], связываются с циклотронными эффектами. Примеры спектров, содержащих такие полосы, приведены на Рис. 61. С другой стороны, открытие рентгеновского излучения звездных корон с температурой  $T_c \sim 10^7$  K у немагнитных белых карликов послужило стимулом для изучения взаимодействия горячей плазмы с излучением фотосферы магнитных белых карликов с целью объяснить происхождение абсорбционных полос в спектрах этих объектов. Здесь следует заметить, что рентгеновское излучение одиночных магнитных белых карликов до сих пор уверенно не обнаружено. Именно, это излучение от GR 290 зарегистрировано в рентгеновском обзоре на спутнике “Эйнштейн” [444], но более чувствительные наблюдения этого карлика на *ROSAT*, проведенные позднее, оказались безуспешными. Установленный верхний предел рентгеновской светимости в 40 раз меньше величины, измеренной на “Эйнштейне” [40]. Причиной этого может быть или случайная флуктуация фона при наблюдении на “Эйнштейне”, или уменьшение плотности излучающей плазмы на GR 290 более чем в 6 раз за время между наблюдениями.<sup>149</sup> Как мы убедимся, формирование заметных полос в поглощении может происходить в существенно более разреженных коронах.

Если корона белого карлика имеет температуру  $T_c \sim 10^6 - 10^7$  K,

<sup>149</sup> Отметим, что если магнитный белый карлик входит в состав двойной системы с аккрецией, то мощное рентгеновское излучение будет обеспечено за счет аккрецирующего потока и в том случае, когда белый карлик лишен короны.

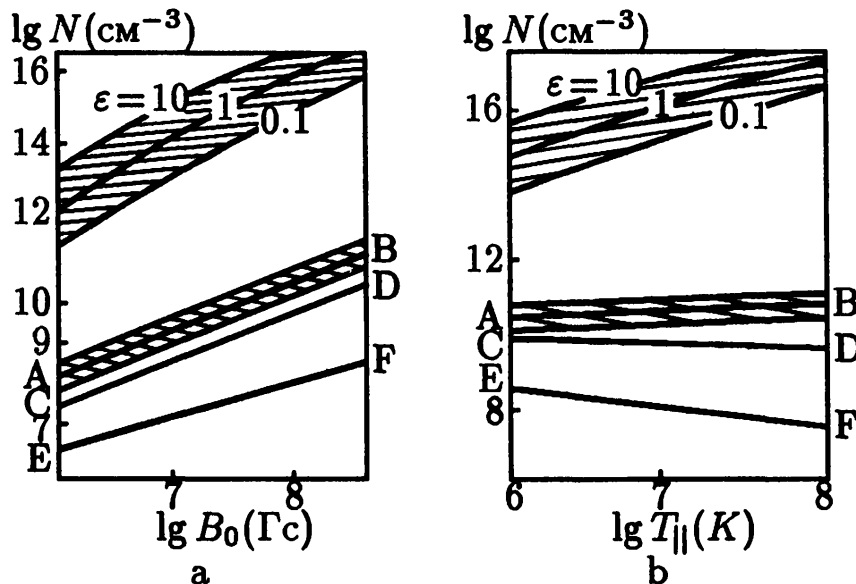


Рис. 62. Области параметров  $N$ ,  $B_0$  и  $T_{\parallel}$  с качественно различным характером переноса циклотронного излучения в короне белого карлика [41]: а, плоскость параметров  $\lg N - \lg B_0$  при постоянной температуре корональной плазмы  $T_{\parallel} = 10^7$  К; б, плоскость параметров  $\lg N - \lg T_{\parallel}$  при постоянном значении магнитного поля звезды  $B_0 = 10^8$  Гс

как у большинства обнаруженных звездных корон, то благодаря большой силе тяжести корональная плазма окружает звезду тонким слоем высотой  $H \sim (10^{-2} - 10^{-3})R_*$ , где  $R_* \sim 10^9$  см — радиус белого карлика. Перенос излучения в такой короне можно рассматривать на основе уравнения (19.44), (19.45) в однородном магнитном поле, учитывающего эффекты циклотронного рассеяния и ударных переходов между уровнями Ландау. Проведенный в предыдущем разделе анализ решений этого уравнения позволяет указать области корональных параметров  $N$ ,  $B_0$  и  $T_{\parallel}$  с качественно различным характером переноса циклотронного излучения и профилем циклотронных линий выходящего из короны оптического излучения. Эти области параметров показаны на Рис. 62.<sup>150</sup>

На диаграммах Рис. 62 заштрихованная полоса по обе стороны от линии  $\epsilon = 1$  разделяет области столкновительной ( $\epsilon > 10$ ) и бесстолкновительной ( $\epsilon < 0.1$ ) плазмы. В области высоких концентраций  $N$ , характерных для столкновительного предела, в плазме формируются эмиссионные линии, яркостная температура в которых достигает корональных значений  $T_b \simeq T_c$  при  $\tau_{js} \gg 1$ . Линия АВ разделяет на диаграммах области, соответствующие случаям “толстой” (19.55) и

<sup>150</sup> При построении диаграммы были использованы значения параметра  $\epsilon$  (14.56), (14.58) с эффективной частотой столкновений  $\nu_{\text{eff}}$  в форме (12.12)–(12.14), не учитывающей влияния постоянного магнитного поля  $B_0$  на этот процесс. Однако следует иметь в виду, что на магнитных белых карликах учет  $B_0$  может оказаться существенным (см. раздел 13.1).

“тонкой” (19.58) короны.<sup>151</sup> Первый случай (с термализацией излучения) реализуется в более плотной плазме. Линия  $CD$  разделяет области, в которых циклотронные линии наблюдаются в эмиссии или в поглощении. Граница между этими областями определяется равенством

$$I^{\text{inc}} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{1 + \sqrt{\lambda}} I_{\omega}^{(0)}(T_{\parallel}) \quad (19.77)$$

(см. формулу (19.65)). Ее положение на диаграмме зависит от величины отношения  $T_{\text{ph}}/T_{\parallel}$ , которое при построении Рис. 62 было принято равным  $3 \cdot 10^{-3}$ . Ниже  $CD$  излучение на гирочастоте испытывает лишь рассеяние в корональной плазме. Это рассеяние становится неэффективным, а циклотронные линии весьма слабыми в области под линией  $EF$ . Эта линия соответствует значениям оптической толщины  $\tau_c = \mu_{11}N = 1$  для необыкновенной моды на первой гармонике  $s = 1$ .

Из сказанного ясно, что достаточно сильным линиям в поглощении соответствует область параметров между линиями  $EF$  и  $CD$ . Для  $B_0 \simeq 10^8$  Гс и  $T_{\parallel} \simeq 10^7$  К этот интервал соответствует электронной концентрации

$$2 \cdot 10^8 < N < 6 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}.$$

В короне магнитных белых карликов благодаря неоднородному распределению магнитного поля по поверхности звезды вместо узкой циклотронной линии в интегральном излучении формируется, очевидно, широкая абсорбционная полоса. Пример такой полосы в спектре магнитного белого карлика представлен на Рис. 61, а.

Таким образом, присутствие в спектрах магнитных белых карликов сильных полос в поглощении, а не в эмиссии, указывает на существование у этих объектов звездных корон с плотностью плазмы, заключенной в довольно узких пределах. Изучение циклотронных особенностей в оптическом и ультрафиолетовом спектрах служит в настоящее время практически единственным источником информации о коронах этих объектов. Мягкое рентгеновское излучение из короны, окружающей тонким слоем звезду столь малых размеров, как белый карлик, при концентрациях плазмы  $N < 6 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$  оказывается слишком слабым для обнаружения с помощью рентгеновской аппаратуры на спутниках “Эйнштейн” и ROSAT. В результате исследование циклотронных особенностей в оптических спектрах является способом

<sup>151</sup> Заштрихованная полоса около линии  $AB$  соответствует значениям  $2\sqrt{\lambda}\tau_c$  в интервале от 0.3 до 3.

изучения корон магнитных белых карликов, на один-три порядка более чувствительным (по электронной плотности), чем современные космические исследования в мягком рентгене.

Существование звездных корон, прижатых к поверхности магнитных белых карликов сильным гравитационным полем этих объектов, в принципе возможно только если их фотосферы достаточно холодные ( $T_{ph}$  порядка нескольких тысяч кельвин). Как следует из содержания следующего §20, ситуация может существенно измениться для горячих магнитных белых карликов, имеющих температуру  $T_{ph} \gtrsim 2 \cdot 10^4$  К. В этом случае сила радиационного давления излучения фотосферы на циклотронных частотах может стать сравнимой и даже превышать силу тяжести. Это приводит к истечению плазмы из верхних слоев фотосферы и образованию протяженной плазменной оболочки и экваториального плазменного диска вокруг звезды. Такой объект — радиационный дискон — при достаточной плотности оболочки способен существенно исказить вид частотного спектра фотосферы, а именно — привести к появлению глубоких и широких полос депрессии в наблюдаемом спектре [39, 445]. Пример такого спектра объекта GD 229 с депрессией в ультрафиолете, перекрывающей интервал 2000-3000 Å, приведен на Рис. 62 *b*.

В протяженной плазменной оболочке (с размером в несколько звездных радиусов  $R_*$ ) вокруг горячего белого карлика будет выполнен критерий сильнонеоднородного магнитного поля  $H \gg \beta_{T\parallel} L_B$ . В этом случае, как уже обсуждалось выше, циклотронное рассеяние на данной частоте  $\omega$  происходит в узких гирорезонансных слоях  $\omega \simeq \omega_B$  (см. (13.42)). Оптическая толщина этого слоя по рассеянию на необыкновенных волнах  $\tau_g$  задается формулой (19.29), а интенсивность выходящего из плазмы излучения при  $\tau_g > 1$  — формулой (19.36). Поскольку влияние слоя  $\omega \sim \omega_B$  на обыкновенную компоненту мало по сравнению с рассеянием в необыкновенном излучении, уровень интенсивности в полосе депрессии составит 3/4 от величины излучения фотосферы. С помощью формулы (19.29) нетрудно убедиться, что сильная депрессия возникает, если электронная концентрация в оболочке GD 229  $N > 10^8$  см<sup>-3</sup> (при оценке было принято, что  $B_0 \sim 5 \cdot 10^8$  Гс и  $L_B \simeq R_*/3 \sim 3 \cdot 10^8$  см).

Наличие сильных магнитных полей на нейтронных звездах также приводит к деформации спектров излучения. Однако теперь, в полях  $B_0 \sim 10^{12}$  Гс, циклотронные эффекты проявляются в рентгеновском диапазоне, а именно — в спектрах излучения рентгеновских пульсаров и космических гамма-всплесков. Примеры наблюдаемых спектров

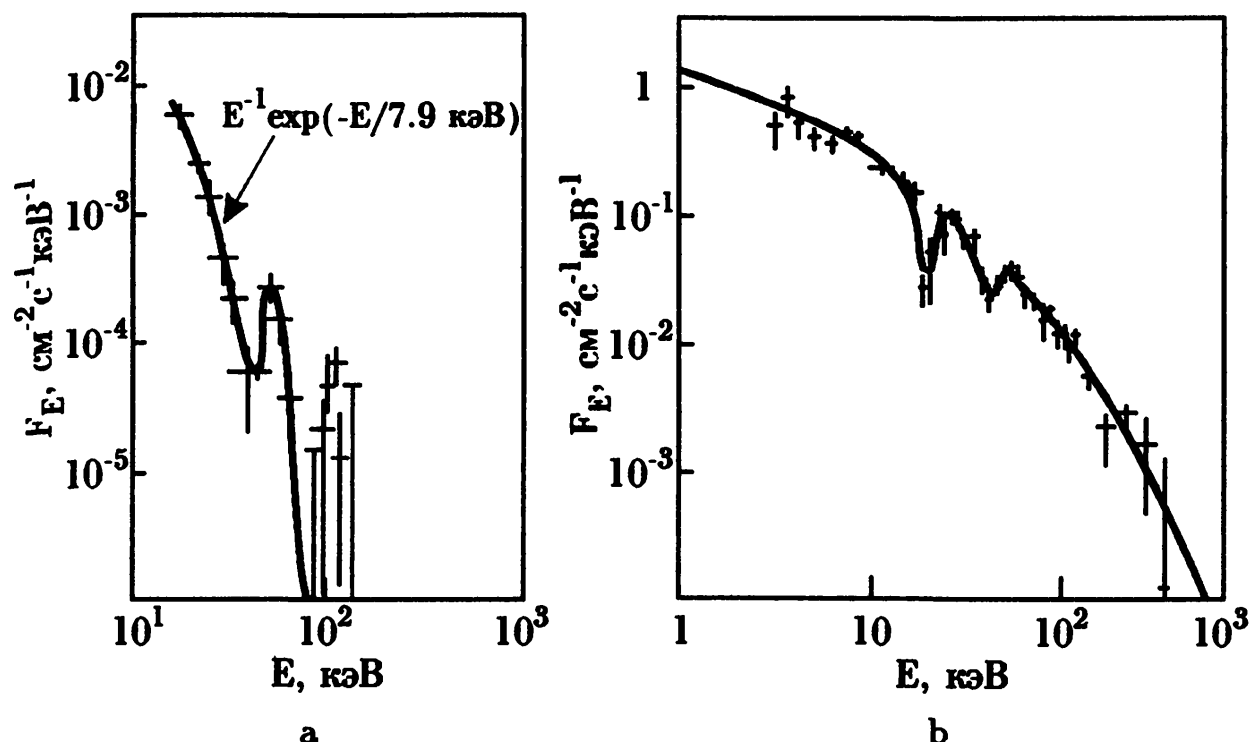


Рис. 63. Спектры рентгеновского излучения (спектральный поток фотонов  $F_E$  как функция энергии фотона  $E$ ) рентгеновского пульсара Her X-1 (a) [44] и космического гамма-всплеска GB 870303 (b) [446]

приведены на Рис. 63.

Предположение о возможном присутствии циклотронных особенностей в спектрах рентгеновских пульсаров было выдвинуто в работе [447] задолго до их обнаружения. Нейтронные звезды – рентгеновские пульсары входят в состав двойных систем. Вторая компонента такой системы служит источником вещества, аккрецируемого в полярные районы на поверхности магнитной нейтронной звезды. Вблизи магнитного полюса образуется горячее пятно, состоящее из плазмы, нагретой до температуры  $T \sim 10^8$  К (если судить по форме спектра в континууме). Эта плазма и служит источником наблюдаемого рентгеновского излучения, которое приобретает пульсирующий характер вследствие вращения нейтронной звезды. Благодаря локализации горячей плазмы в ограниченной полярной области и близ поверхности звезды магнитное поле в этой области можно считать однородным. Это обеспечивает узость циклотронных линий, частота которых позволяет определить величину магнитного поля нейтронных звезд – рентгеновских пульсаров. Так, для Her X-1 это поле равно  $4 \cdot 10^{12}$  Гс, для 4U 0115-69 величина  $B_0 \simeq 10^{12}$  Гс.

Существование сильного резонансного циклотронного рассеяния в плазме на магнитных нейтронных звездах позволило предположить

[45], что циклотронные линии в спектре рентгеновских пульсаров формируются по аналогии с фраунгоферовыми линиями в оптических спектрах обычных звезд (появление большей части этих линий связано с резонансным рассеянием при электронных переходах между дискретными энергетическими уровнями атомов и молекул). Эта идея была развита в [184, 448] в предположении, что рентгеновское излучение в континууме и в линиях возникает в горячей изотермической атмосфере с концентрацией, распределенной по барометрическому закону (19.68) с приведенной высотой  $H \sim 10^2$  см (для  $T \sim 10^8$  К; величина температуры плазмы в источнике излучения выбирается так, чтобы форма наблюдаемого спектра в континууме соответствовала наблюдаемой). Проведенный выше анализ (см. (19.70)) показывает, что в континууме интенсивность излучения

$$I^{\text{out}} \simeq I_{\omega}^{(0)} M_T^{1/3}, \quad (19.78)$$

где  $M_T = \mu_b / H \mu_T^2$  ( $\mu_b$  — коэффициент тормозного поглощения,  $\mu_T$  — коэффициент томсоновского рассеяния). В условиях нейтронных звезд  $M_T \sim 10^{-6}$ , так что в континууме интенсивность излучения плазменного слоя меньше интенсивности равновесного излучения примерно на два порядка. Это обстоятельство следует учитывать при оценках расстояния до рентгеновских пульсаров по потоку наблюдаемого излучения [104]. Далее, в центре циклотронной линии  $\omega = \omega_B$  интенсивность излучения из такой атмосферы составит (см. (19.75)):

$$I^{\text{out}} \simeq I_{\omega}^{(0)} M_c^{1/3}. \quad (19.79)$$

где параметр  $M_c = \epsilon / \tau_c$  по оценкам для рентгеновских пульсаров порядка  $10^{-11}$  ( $\epsilon$  — параметр (14.56), (14.58),  $\tau_c$  — оптическая толщина по циклотронному рассеянию в намагниченном вакууме). Интенсивность в линии составит  $\sim M_c^{1/3} \simeq 2 \cdot 10^{-4}$  от равновесного значения, т.е. уровень излучения в линии опускается существенно ниже уровня излучения в ближайшем континууме. Таким образом, вследствие сильного резонансного циклотронного рассеяния с  $\mu_c \gg \mu_T$  в спектре излучения рентгеновского пульсара формируется линия в поглощении. Она возникает на уровне рентгеновского континуума, уже ослабленного за счет томсоновского рассеяния.

Следует подчеркнуть, что формулы (19.78), (19.79) имеют оценочный характер и приведены здесь для иллюстрации роли циклотронных эффектов на нейтронных звездах. В них (как и в более сложных выражениях (19.70) и (19.76)), не учтены угловые зависимости коэф-

коэффициентов поглощения и рассеяния, эффекты конверсии мод и квантовой отдачи в процессе рассеяния. Кроме того, здесь, как и ранее, не учитывалось влияние магнитного поля на величину  $\mu_b$  и на частоту столкновений  $\nu_{\text{eff}} = \nu_{ei}$ , которая входит в выражения для  $\mu_b$  и параметра  $\epsilon$  (см. разделы 12.1 и 13.1). Вместе с тем модель изотермической атмосферы в горячем пятне — не единственная, которая обсуждалась в теории рентгеновских пульсаров. Альтернативой служит модель аккреционной колонки, вытянутой в высоту вдоль магнитного поля над полюсом звезды. Эта модель отвечает случаю сильной аккреции, когда плотность аккрецирующего столба становится достаточной для реализации циклотронных эффектов непосредственно в этой колонке, а не в горячей атмосфере, нагреваемой за счет умеренной аккреции.

Теперь о циклотронных линиях в спектрах источников космических гамма-всплесков (гамма-барстеров). Такие линии были обнаружены в результате наблюдений на автоматических межпланетных станциях “Венера-11” и “Венера-12” [47]. В спектрах гамма-всплесков были зарегистрированы циклотронные линии в поглощении, указывающие на присутствие в источниках сильных магнитных полей (примерно такой же величины, как и на рентгеновских пульсарах). Позднее такие линии регистрировались в процессе многих наблюдений. Среди последних результатов укажем данные, полученные станцией “ФОБОС-2” [49] и спутником “Гинга” [446]. Пример спектров, полученных спутником “Гинга” и содержащих две циклотронные гармоники, приведен на Рис. 63, *b*.

Существование циклотронных особенностей в спектрах космических гамма-всплесков служит одним из наиболее убедительных аргументов в пользу их связи с магнитными нейтронными звездами. Однако, отсутствие таких особенностей в спектрах всплесков, регистрируемых “GRO”, наряду с высокой изотропией в локализации источников этих всплесков на небосводе, ставит указанную связь под сомнение. Последнее делает актуальным обсуждение других вариантов происхождения космических гамма-всплесков, включая внегалактические (см. §1).

Помня об этих замечаниях, обратимся тем не менее к модели гамма-барстера — нейтронной звезды с сильным магнитным полем. Модель изотермического горячего пятна, развитая в применении к рентгеновским пульсарам, в случае гамма-барстеров не может объяснить появление довольно узких циклотронных линий на фоне жесткого рентгеновского континуума. Дело в том, что для создания такого континуума (с энергией кванта  $\hbar\omega \sim 100$  кэВ) требуется плазма с не-

меньшей энергией излучающих электронов. Однако доплеровская ширина циклотронных линий, образованных в процессе рассеяния на таких электронах, превысит реально наблюдаемые значения. Поэтому для создания узких циклотронных линий в поглощении необходимо существование сравнительно холодной плазмы над горячим пятном (с энергией частиц в несколько десятков кэВ). Такая двухслойная модель была предложена в [449] и подробно проанализирована в работах [54, 315, 437]. Вполне возможно, что верхний слой представляет собой электрон-позитронную плазму. Электрон-позитронные пары возникают при однофотонном поглощении в сильном магнитном поле гамма-квантов с энергией выше 1 МэВ, излученных в жестком хвосте спектра горячего пятна. Формирование циклотронных гармоник было рассмотрено аналитически на основе уравнения переноса (19.37) в статье [54]. Численные расчеты циклотронных линий методом Монте-Карло были проведены в [437]. В рамках обоих подходов были определены параметры плазменного слоя, формирующего циклотронные линии; вместе с тем, в [54] был установлен верхний предел на расстояние до источников гамма-всплесков, указывающий на галактическое происхождение источников, обладающих заметной второй гармоникой в спектре излучения. Однако как в одной, так и в другой работе не были учтены полностью все те процессы, которые существенно влияют на формирование циклотронных линий в гамма-всплесках.

## §20. Сила радиационного давления в плазме

Проблема светового давления на среду является традиционной для астрофизики, а эддингтоновский предел светимости является важной и привычной для астрофизика характеристикой звездного объекта. Дополнительный импульс исследования роли давления излучения получили в последние годы в связи с развитием теории аккрецирующих компактных объектов, где, в частности, анализируются эффекты, связанные со световым давлением при томсоновском рассеянии на свободных электронах [450–454]. Если сечение рассеяния превышает томсоновское (за счет резонансного рассеяния в линиях), сила радиационного давления может существенно увеличиться. Это обстоятельство хорошо известно в теории звездных атмосфер [455–458]: давление в линиях ионов играет определяющую роль в создании звездного ветра у звезд ранних типов [177, 456, 459, 460]. Вырожденные звезды могут



обладать сильным магнитным полем, благодаря которому электронная гирочастота  $\omega_B$  располагается в оптическом или рентгеновском диапазонах. В этих условиях существует резонансное взаимодействие излучения звезды с плазмой за счет процессов циклотронного рассеяния, что также резко повышает силу давления излучения. Этот эффект и его астрофизические последствия будут подробно рассмотрены в настоящем разделе.

### 20.1. Радиационное давление при томсоновском рассеянии

Как известно, излучение со спектральной интенсивностью  $I_\omega$  имеет импульс  $I_\omega/c$ , который при рассеянии на электроне передается этой частице. В результате возникает сила радиационного давления на электроне (в плазме с  $n_j \simeq 1$ ):

$$f = \int_{\omega} \oint_{4\pi} \frac{\sigma_{sc} I_\omega}{c} l \, d\Omega d\omega, \quad (20.1)$$

равная уменьшению импульса излучения в единицу времени. В формуле (20.1)  $\sigma_{sc}$  — сечение рассеяния;  $l = k/k$  — единичный вектор вдоль волнового вектора  $k$ ;  $d\Omega$  — элемент телесного угла.

Если электрон располагается близ поверхности звезды, из которой исходит излучение (в верхней полусфере), то сила радиационного давления будет направлена по радиусу звезды и равна

$$f = \frac{\sigma_T}{c} \int_{\omega} \pi I_\omega \, d\omega = \frac{\sigma_T \mathcal{L}}{4\pi R_*^2 c}. \quad (20.2)$$

Здесь сечение рассеяния принято равным томсоновскому  $\sigma_T$  (18.62),

$$\mathcal{L} = 4\pi R_*^2 \int F_\omega \, d\omega \quad (20.3)$$

— светимость звезды радиуса  $R_*$ ,  $F_\omega = \pi I_\omega$  — спектральный поток излучения с поверхности звезды. Вместе с тем сила гравитации на поверхности звезды, действующая на протон, равна

$$f_g = GM_* m_p / R_*^2, \quad (20.4)$$

( $G$  — гравитационная постоянная,  $M_*$  — масса звезды). Приравнивая силы (20.2) и (20.4), получаем известное выражение для критической (эддингтоновской) светимости

$$\mathcal{L}_{cr} = \frac{4\pi GM_* m_p c}{\sigma_T}. \quad (20.5)$$

Если в квазинейтральной плазме сила давления на электрон  $f$  превышает гравитационную силу  $f_g$ , действующую на протон массой  $m_p \gg m_e$ , то плазма истекает с поверхности звезды под действием давления излучения; критерием появления звездного ветра в этом случае служит неравенство

$$\mathcal{L} > \mathcal{L}_{\text{сг}} \simeq 10^{38} \frac{M_*}{M_\odot} \text{ эрг/с}, \quad (20.6)$$

( $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$  г — масса Солнца). Этот же критерий делает невозможной аккрецию вещества на компактный источник. Поэтому величина  $\mathcal{L}_{\text{сг}}$  дает также верхнюю границу светимости рентгеновских источников (белых карликов и нейтронных звезд), излучающих при их нагреве за счет аккреции.

Найдем теперь силу давления излучения в рассеивающем плазменном слое. Интенсивность излучения в таком слое можно найти из уравнения переноса (8.13), положив в нем  $a_\omega = 0$  и  $\mu_j = 0$ . Действуя приближенным методом Шварцшильда–Шустера, можно найти распределение интегральных интенсивностей  $I_1, I_2$  (8.55) на выходе из слоя (см. (8.58)):

$$I_1 = \frac{I^{\text{inc}}}{1 + \tau_T}. \quad (20.7)$$

Здесь  $I^{\text{inc}}$  — интенсивность падающего излучения (величина  $I_1$  при входе в слой),  $\tau_T = \mu_T \Delta h$  — оптическая толщина по томсоновскому рассеянию ( $\mu_T = \sigma_T N$  — коэффициент томсоновского рассеяния в слое с концентрацией  $N$  и толщиной  $\Delta h$ ). В рамках примененного метода силу давления излучения (20.1) на электрон,

$$f_T = \int_\omega \int_0^{2\pi} I_\omega \cos \theta \sin \theta \, d\theta d\omega, \quad (20.8)$$

можно представить в виде

$$f_T \simeq \frac{\pi \sigma_T}{c} \int_\omega (I_1 - I_2) \, d\omega,$$

если вынести  $\cos \theta$  за знак интеграла со значением  $1/2$  на интервале  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  и со значением  $-1/2$  на интервале  $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ . Разность  $I_1 - I_2$  не зависит от координаты  $h$  внутри слоя (это следует из (8.56), поскольку в чисто рассеивающем слое  $p=0$ ). Последнее означает, что  $I_1 - I_2$  в любой точке слоя равна интенсивности выходящего излучения

(20.7) (поскольку на выходе из слоя  $I_2 = 0$ ). В результате получаем, что

$$f_T \simeq \frac{\pi\sigma_T}{c} \frac{1}{1 + \tau_T} \int_0^\infty I^{\text{inc}} d\omega. \quad (20.9)$$

Для излучения с планковским спектром  $I^{\text{inc}}$  (2.23) интеграл в формуле (20.9) равен  $(\sigma/\pi)T^4$ , где  $\sigma = \pi\kappa^4/60\hbar^3 c^2$  — постоянная Стефана-Больцмана. В этом случае сила давления на одну частицу

$$f_T = \frac{\sigma_T}{c} \frac{\sigma T^4}{1 + \tau_T}. \quad (20.10)$$

Из (20.9) и (20.10) следует, что эта сила убывает с ростом оптической толщины слоя, причем она не зависит от конкретного положения частицы внутри слоя.

## 20.2. Сила давления излучения на циклотронных частотах

В анизотропной среде следует ввести тензор давления излучения

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{1}{c} \oint_{4\pi} I_\omega l_i l_j d\Omega, \quad (20.11)$$

где  $l_i, l_j$  проекции единичного вектора  $l \parallel k$  на  $i$ -ю и  $j$ -ю координатные оси, соответственно. Каждый элемент тензора (20.11) равен потоку импульса излучения в единичном интервале частот в  $j$ -м направлении в единицу времени через площадку, ориентированную перпендикулярно  $i$ -му направлению. При переносе циклотронного излучения на частотах  $\omega \simeq \omega_B$  следует учесть, что излучение единичного интервала частот взаимодействует с частицами из интервала продольных импульсов  $p_{\parallel}$ , равного

$$\left| \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial \omega} \right| = \frac{m_e c}{\omega_B |\cos \alpha|} \quad (20.12)$$

(см. (19.4)). Давление излучения на частицы в единичном интервале продольных импульсов равно

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{1}{c} \oint_{4\pi} I_\omega l_i l_j \left| \frac{\partial \omega}{\partial p_{\parallel}} \right| d\Omega, \quad (20.13)$$

а  $-\text{div} \mathcal{P}_{ij}$  есть сила радиационного давления на частицы из единичного интервала импульсов  $p_{\parallel}$ . Разделив далее  $-\text{div} \mathcal{P}_{ij}$  на  $f(p_{\parallel})$  —

число частиц в этом интервале в единице объема, получим силу радиационного давления в циклотронной линии, действующую на одну частицу:

$$f_B = -f^{-1}(p_{\parallel}) (l \nabla) \left( \oint_{4\pi} \frac{I_{\omega}(p_{\parallel}, \alpha)}{c} l \left| \frac{\partial \omega}{\partial p_{\parallel}} \right| d\Omega \right). \quad (20.14)$$

В горизонтальном плоском слое плазмы с однородным магнитным полем  $\mathbf{B}_0$ , направленным вертикально вдоль оси  $z$ , благодаря цилиндрической симметрии задачи в тензоре  $\mathcal{P}_{ij}$  отличны от нуля только диагональные компоненты. В этом случае сила  $f_B$  направлена по  $z$  и равна

$$f_B = \frac{2\pi\omega_B}{m_e c^2 f(p_{\parallel})} \left[ -\frac{\partial}{\partial z} \int_0^{\pi} I_{\omega}(p_{\parallel}, \alpha) \cos^2 \alpha |\cos \alpha| \sin \alpha d\alpha \right]. \quad (20.15)$$

Преобразуем это выражение, используя уравнение переноса с учетом чистого рассеяния (19.16), предполагая, что функция  $f(p_{\parallel})$  — максвелловская. Для этого проинтегрируем по углу  $\alpha$  в пределах от 0 до  $\pi$  уравнение (19.16) почленно, умножив предварительно каждый член на  $|\cos \alpha| \cos \alpha \sin \alpha$ . В результате получим, что фактор в квадратных скобках в выражении (20.15) равен

$$\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2} e^2 N}{(m_e \kappa T)^{1/2} \omega_B} e^{-p_{\parallel}^2 / 2m_e \kappa T_{\parallel}} \int_0^{\pi} (1 + \cos^2 \alpha) \cos \alpha I_{\omega}(z, p_{\parallel}, \alpha) \sin \alpha d\alpha.$$

Отсюда следует, что сила давления в циклотронной линии на одну частицу [461]:

$$f_B(p_{\parallel}) = \frac{4\pi^3 e^2}{m_e c^2} \int_0^{\pi} (1 + \cos^2 \alpha) \cos \alpha I_{\omega}(z, p_{\parallel}, \alpha) \sin \alpha d\alpha. \quad (20.16)$$

Фигурирующий в (20.16) интеграл можно найти, используя решение уравнения (19.16), полученное методом Шварцшильда–Шустера. Из решения системы (19.18) следует, что

$$f_B(p_{\parallel}) = \frac{3\pi^3 e^2}{m_e c^2} (I_1 - I_2), \quad (20.17)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  определяются формулами (19.19). При этом разность

$$I_1 - I_2 = \frac{\Gamma^{\text{inc}}(p_{\parallel})}{1 + \int_0^H \mu_{11}(z, p_{\parallel}, \alpha=0) dz}, \quad (20.18)$$

где

$$I^{\text{inc}}(p_{\parallel}) = \int_0^{\pi/2} I_{\omega}^{\text{inc}} \left( \omega_B (1 - p_{\parallel} \cos \alpha / m_e c)^{-1}, \alpha \right) \sin \alpha d\alpha, \quad (20.19)$$

а  $I_{\omega}^{\text{inc}}$  — интенсивность излучения, падающего на слой, и  $H$  — высота слоя, не зависит от координаты  $z$ . Если  $I_{\omega}^{\text{inc}}$  изотропна в интервале углов  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  и мало меняется на ширине циклотронной линии, то

$$I^{\text{inc}}(p_{\parallel}) \simeq \int_0^{\pi/2} I_{\omega}^{\text{inc}}(\omega_B) \sin \alpha d\alpha = I^{\text{inc}}, \quad (20.20)$$

то есть равна величине, не зависящей от  $p_{\parallel}$ . Тогда

$$f_B(p_{\parallel}) = \frac{3\pi^3 e^2}{m_e c^2} \frac{I^{\text{inc}}}{1 + \tau_c \exp(-p_{\parallel}^2 / 2m_e \kappa T_{\parallel})}, \quad (20.21)$$

где

$$\tau_c = \frac{(2\pi)^{3/2} e^2}{m_e c \beta_{T_{\parallel}} \omega_B} N_H \quad (20.22)$$

— оптическая толщина слоя в центре линии по циклотронному рассеянию на необыкновенной волне и

$$N_H = \int_0^H N(z) dz$$

— число частиц в столбе высотой  $H$ .

Согласно (20.21), сила давления зависит от продольного импульса частицы: при удалении от центра линии (т.е., с ростом  $|p_{\parallel}|$ ) сила давления увеличивается вследствие уменьшения оптической толщины.

Усреднив (20.21) по максвелловскому распределению, получим среднюю силу, действующую на одну частицу [461]:

$$f_B = f_B^{\text{max}} \Psi(\tau_c). \quad (20.23)$$

Здесь

$$f_B^{\text{max}} = \frac{3\pi^3 e^2}{m_e c^2} I^{\text{inc}} \quad (20.24)$$

— максимальная сила, действующая на частицу, а интеграл

$$\Psi(\tau_c) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{e^{\xi^2} + \tau_c} \quad (20.25)$$

при  $\tau_c \ll 1$  близок к единице и имеет асимптотику  $\Psi \simeq \tau_c^{-1} \sqrt{\ln \tau_c}$  при больших  $\tau_c$ . В теории переноса излучения для  $\Psi(\tau_c)$  часто используют аппроксимацию

$$\Psi(\tau_c) \simeq \min\{1; \tau_c^{-1}\}. \quad (20.26)$$

Наложение магнитного поля на плазму резко увеличивает силу давления излучения, если

$$\Gamma = f_B/f_T \gg 1, \quad (20.27)$$

где  $f_B$  и  $f_T$  — из (20.23) и (20.9), соответственно. Зависимость  $\Gamma(N_H)$  представлена на Рис. 64. Из него видно, что величина  $\Gamma$  монотонно бывает с ростом  $N_H$  от своего максимального значения

$$\Gamma_{\max} = \frac{9\pi \hbar c}{8 e^2} \frac{m_e c^2}{\hbar} \frac{I^{\text{inc}}(\omega_B)}{\int_0^\infty I_1^{\text{inc}} d\omega} \quad (20.28)$$

при  $N_H \rightarrow 0$  до

$$\Gamma_{\min} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta_{T\parallel} \omega_B \frac{I^{\text{inc}}(\omega_B)}{\int_0^\infty I_1^{\text{inc}} d\omega} \quad (20.29)$$

при  $N_H \rightarrow \infty$ . Если излучение имеет планковский спектр с температурой  $T$ , то

$$\Gamma_{\max} = \frac{135 \hbar c}{16\pi^3 e^2} \frac{m_e c^2}{\kappa T} \frac{(\hbar\omega_B/\kappa T)^3}{\exp(\hbar\omega_B/\kappa T) - 1} \quad (20.30)$$

Это выражение, естественно, совпадает с найденным в статье [462], где рассматривалась сила давления излучения на одну частицу в поле излучения с планковским спектром без учета эффектов, связанных с  $\tau_c \neq 0$ .

Если  $\Gamma_{\max} \ll 1$ , наложение магнитного поля не увеличивает заметным образом силу радиационного давления. Если же  $\Gamma_{\max} \gg 1$ , то роль циклотронного давления зависит от оптической толщины  $\tau_c$  (т.е. от числа частиц в столбе  $N_H$ ). Оно становится существенным при  $\Gamma > 1$ , что имеет место при условии [461]

$$\tau_c < \Gamma_{\max} \quad (20.31)$$

(см. (20.23), (20.26), (20.9)). При этом отношение силы радиационного давления  $f_B$  к силе тяжести  $f_g = m_p g$  составит

$$\Delta = \frac{3\pi^3 e^2}{m_e m_p c^2} I^{\text{inc}}(\omega_B) \min\{1; \tau_c^{-1}\} \frac{R_*^2}{GM_*}. \quad (20.32)$$

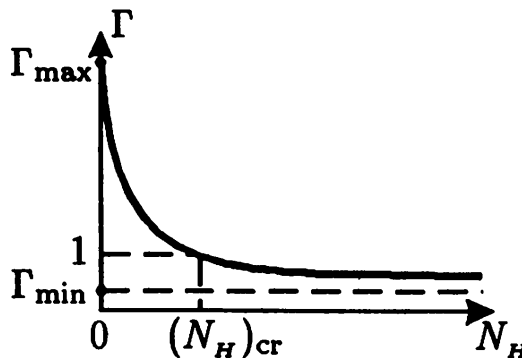


Рис. 64. Зависимость отношения силы давления в циклотронной линии к силе давления в континууме  $\Gamma$  от оптической толщины  $\tau_c$  (20.22) [461]

Если спектр падающего на слой излучения — планковский с температурой  $T$ , то

$$I^{\text{inc}}(\omega_B) = \frac{\hbar\omega_B^3}{(2\pi)^3 c^2} \frac{1}{\exp(\hbar\omega_B/kT) - 1} \quad (20.33)$$

(см. (2.23) (20.20)).

Приведенные формулы относятся к давлению излучения в условиях, когда поляризация нормальных волн определяется плазмой. Если же поляризация определяется намагниченным вакуумом (выполнен критерий (5.85)), то при ориентировочных оценках можно пренебречь различием между коэффициентами циклотронного поглощения (рассеяния)  $\mu_{11}$  и  $\mu_{21}$ , положив  $\mu \simeq (\mu_{11} + \mu_{21})/2$ . В этом случае оптическая толщина  $\tau_c \simeq (\mu_{11} + \mu_{21})N_H/2$  окажется равной половине (20.22), что следует учесть в последующих формулах, а в формулы (20.24), (20.28), (20.29) надо подставить полную интенсивность излучения в сумме по обоим модам.

В протяженных плазменных оболочках, локализованных в сильнонеоднородном магнитном поле, перенос излучения качественно отличается от переноса излучения в однородном магнитном поле (см. §19). Это обстоятельство отражается и на величине силы давления излучения, обусловленной циклотронным рассеянием. Исходным выражением для силы давления здесь по-прежнему служит формула (20.16). Однако теперь форма решения для интенсивности излучения  $I_\omega(z, p_{||}, \alpha)$  существенно иная (см. (19.33), (19.34)). Это приводит к следующему выражению для силы давления излучения на одну частицу с импульсом  $p_{||}$ :

$$f_B(p_{||}) = \frac{3\pi^3 e^2}{m_e c^2} I^{\text{inc}}(\omega_B) e^{-\tau_\omega y}, \quad (20.34)$$

где

$$I^{\text{inc}}(\omega_B) = \int_0^{\pi/2} I_{\omega}^{\text{inc}}(\omega_B, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha,$$

$I_{\omega}^{\text{inc}}(\omega_B, \alpha)$  — спектральная интенсивность излучения, падающего на гирорезонансный слой  $\omega \simeq \omega_B$ ,  $\tau_g$  — оптическая толщина гирорезонансного слоя (19.29), переменная  $y$  — из (19.27). Усредняя (20.34) по максвелловскому распределению  $f(p_{\parallel})$ , получим среднюю силу, действующую на одну частицу [461]:

$$f_B = \frac{3\pi^3 e^2}{m_e c^2} I^{\text{inc}}(\omega_B) \frac{1 - \exp(-\tau_g)}{\tau_g}. \quad (20.35)$$

Соответственно, сила, действующая на частицы в единичном объеме, будет равна  $f_B N$ . Сила давления излучения в оптически толстом гирорезонансном слое  $\tau_g \gg 1$  обратно пропорциональна  $\tau_g$  и плотности плазмы на уровне  $\omega \simeq \omega_B$ :

$$f_B \simeq \frac{3\pi^3 e^2}{m_e c^2} \frac{I^{\text{inc}}}{\tau_g}. \quad (20.36)$$

В заключение этого раздела рассмотрим, следуя [39, 439], силу давления излучения в неоднородной плазменной атмосфере, формируемого за счет циклотронного рассеяния и межчастичных столкновений. Это позволит установить критерий устойчивости такой атмосферы: нарушение последнего ведет к потере массы, связанной с истечением с поверхности горячих звезд, обладающих сильным магнитным полем. В последнем случае давление излучения может оказывать существенное влияние на структуру и динамику плазменных оболочек вокруг таких объектов (см. следующий раздел).

Рассмотрим модель изотермической ( $T_{\parallel} = \text{const}$ ) нерелятивистской атмосферы с барометрическим законом распределения плотности плазмы по высоте (19.68). Магнитное поле будем считать однородным и ориентированным вдоль оси  $z$ .<sup>152</sup> Снова исходим из выражения (20.16) для силы давления излучения в циклотронной линии на одну частицу. Распределение интенсивности излучения в атмосфере в приближении Шварцшильда–Шустера определяется формулами (19.71). В этом же приближении [439]

$$f_B = \frac{6\pi^3 e^2}{m_e c^2 \sqrt{\pi}} M_c^{1/3} I_{\omega}^{(0)}(\omega_B) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\text{Ai}'(\Phi^{2/3} M_c^{1/3} \tau_c) \Phi \, d\xi}{\text{Ai}(0) \Phi^{1/3} - \text{Ai}'(0) M_c^{1/3}}, \quad (20.37)$$

<sup>152</sup>Обобщение на случай, когда магнитное поле  $B_0$  наклонено к вертикали, проведено в [463].



где  $Ai$  и  $Ai'$  — функция Эйри и ее производная,  $\Phi(\xi) = \exp(-\xi^2)$ , параметр  $M_c = \epsilon/\tau_c$ , а оптическая толщина  $\tau_c$  определяется формулой (19.72).

Оценим величину интеграла в (20.37) в приближении прямоугольного профиля циклотронной линии. Так как наибольший вклад в интеграл дает область  $|\xi| \lesssim 1$ , положим  $\Phi = \Phi(0) = 1$  при  $|\xi| \leq \sqrt{\pi}/2$  и  $\Phi = 0$  вне этого интервала. Тогда для  $f_B$  (20.37) получаем следующее приближенное выражение:

$$f_B \simeq \frac{6\pi^3 e^2}{m_e c^2} M_c^{1/3} I_\omega^{(0)}(\omega_B) \frac{-Ai'(M_c^{1/3} \tau_c)}{Ai(0)}. \quad (20.38)$$

При переходе от (20.37) к (20.38) опущен второй член в знаменателе подынтегрального выражения, так как он мал по сравнению с первым при  $M_c^{1/3} \ll 1$ . Согласно (20.38), сила  $f_B$  максимальна при выходе из фотосферы (где  $\tau_c \rightarrow 0$ ) и монотонно убывает в глубине с ростом  $\tau_c$  вследствие термализации излучения (при больших  $\tau_c$  излучение становится изотропным и  $f_B \rightarrow 0$ ).

Атмосфера становится неустойчивой, если сила давления на единицу объема  $f_B N$  превышает силу тяжести  $m_p g N$ , т.е. если отношение

$$\Delta = f_B / m_p g > 1. \quad (20.39)$$

Для появления истечения с поверхности звезды достаточно, чтобы параметр  $\Gamma$  стал больше единицы на выходе из фотосферы, где, согласно (20.38), сила

$$f_B \simeq \frac{6\pi^3 e^2}{m_e c^2} M_c^{1/3} I_\omega^{(0)}(\omega_B) \frac{-Ai'(0)}{Ai(0)}. \quad (20.40)$$

### 20.3. Эффекты радиационного давления на магнитных вырожденных звездах

В §19 шла речь о формировании циклотронных полос при рассеянии в тонких плазменных слоях (коронах) на магнитных белых карликах. Такие оболочки с приведенной высотой  $H$  много меньше радиуса звезды могут существовать в том случае, если действие сильного гравитационного поля не будет скомпенсировано силой радиационного давления. Оценки показывают, что вклад томсоновского рассеяния в силу давления на белых карликах несущественен по сравнению с циклотронным рассеянием. Влияние последнего можно оценить, пользуясь Рис. 64 и относящимися к нему формулами. Так, для “холодного”

белого карлика с магнитным полем  $B_0 \simeq 2 \cdot 10^8$  Г и температурой фотосферы  $T \simeq 6 \cdot 10^3$  К величина  $\Gamma_{\max} \simeq 4 \cdot 10^7$  (см. (20.30)), то есть существенно больше единицы. В этом случае, согласно Рис. 64, сила циклотронного давления будет значительно выше давления излучения в континууме, если  $\tau_c \ll \Gamma_{\max}$ . Для формирования заметной полосы в поглощении оптическая толщина по циклотронному рассеянию должна быть достаточно большой:  $\tau_c > 1$ . В случае  $\tau_c \simeq 1$  отношение (20.32) радиационной силы к силе тяжести  $\Delta$  (с учетом выражения (20.33) для величины  $I^{\text{inc}}(\omega_B)$ ) оказывается меньше единицы:  $\Delta \simeq 0.3$  для  $R_* \simeq 10^9$  см,  $M_* \simeq M_\odot \simeq 2 \cdot 10^{33}$  г. Это означает, что корона на белом карлике устойчива, и давление излучения в целом малосущественно, хотя с ростом температуры фотосферы ситуация может измениться, и формирование тонкой корональной оболочки вокруг звезды станет невозможным.

Более детальное рассмотрение устойчивости плазмы на магнитных белых карликах необходимо в тех случаях, когда мы интересуемся возможностью нарушения гидростатического равновесия, ведущего к истечению плазмы из верхних слоев фотосферы. Здесь при расчете силы давления следует принять во внимание ослабление интенсивности излучения в циклотронной линии, которая имеет абсорбционный характер.<sup>153</sup> Сказанное означает, что сила давления определяется формулой (20.38) внутри фотосферы и выражением (20.40) в вершине фотосферы, соответственно. Отношение силы давления  $f_B$  к силе тяжести  $m_p g$  (20.39), равное единице, определяет границу устойчивой фотосферы  $\Delta < 1$  и фотосферы с истечением плазмы под действием силы радиационного давления в циклотронной линии  $\Delta > 1$ . Граница  $\Delta = 1$  изображена на Рис. 65 в плоскости  $\lg B_0 - \lg T_{\parallel}$ . Диаграммы на этом рисунке соответствуют случаю, когда магнитное поле  $B_0$  ориентировано вертикально к поверхности звезды. Как показал анализ, проведенный в [463], для наклонного магнитного поля положение кривых  $\Delta = \text{const}$  незначительно отличается от приведенных на Рис. 65.<sup>154</sup>

Согласно Рис. 65, а, истечение плазмы с поверхности изолированного белого карлика вполне возможно при  $T_{\parallel} \gtrsim 2 \cdot 10^4$  К и  $B_0 \sim 10^8$  —

<sup>153</sup> При расчетах давления излучения на корональную оболочку это обстоятельство практически несущественно. Дело в том, что ширина циклотронной линии в фотосфере значительно меньше доплеровского интервала (19.8) в короне из-за резкого различия в кинетических температурах фотосферы и короны.

<sup>154</sup> Отметим, что при построении приведенной на этом рисунке диаграммы влияние магнитного поля на величину эффективного числа столкновений  $\nu_{ei}$  не учитывалось.

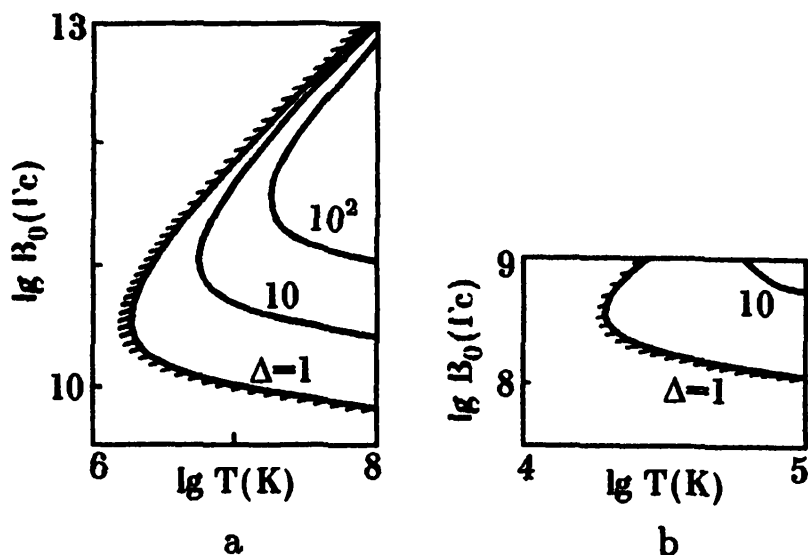


Рис. 65. Отношение силы радиационного давления к силе тяжести  $\Delta$  в верхних слоях атмосферы на диаграмме “магнитное поле – кинетическая температура”. Справа от кривой  $\Delta = 1$  расположена область параметров, соответствующих истечению плазмы под действием радиационного давления: (а) магнитные нейтронные звезды ( $g \approx 10^{14} \text{ см с}^{-2}$ ); (б) магнитные белые карлики ( $g \approx 10^8 \text{ см с}^{-2}$ ) [39, 439, 463]

$10^9$  Гс. Примерами таких карликов служат объекты GD 229 ( $T \approx (1.5 - 2) \cdot 10^4$  К и  $B_0 \gtrsim 5 \cdot 10^8$  Гс) и PG 1031+234 ( $T \approx 2.5 \cdot 10^4$  К и  $B_0 \gtrsim 5 \cdot 10^8$  Гс). Кроме того, мощное истечение плазмы возможно для молодых горячих карликов с  $T \gtrsim 10^5$  К в планетарных туманностях. Что касается нейтронных звезд, то то здесь эжекция плазмы под действием давления излучения может иметь место у молодых нейтронных звезд с магнитным полем  $B_0 \approx 10^{10} - 10^{11}$  Гс и температурой  $T \gtrsim 2 \cdot 10^6$  К, а также во время вспышек рентгеновских барстеров.

О роли рассеяния в континууме можно судить по величине  $T_{\text{сг}}$  для белых карликов и нейтронных звезд ( $6 \cdot 10^5$  К и  $2 \cdot 10^7$  К, соответственно). При  $T > T_{\text{сг}}$  радиационное давление при томсоновском рассеянии нарушает гидростатическое равновесие фотосферы в отсутствие магнитного поля на звезде. Из приведенных значений  $T_{\text{сг}}$  и Рис. 65 ясно, что магнитные поля на белых карликах и нейтронных звездах существенно уменьшают те значения максимальной температуры, при которых атмосфера может оставаться стабильной под действием радиационного давления. И в частности, становится возможным истечение плазмы с поверхности горячих белых карликов, которое в отсутствие магнитного поля совершенно нереально.

Покидающая фотосферу плазма может свободно двигаться вдоль силовых линий магнитного поля под совместным действием ра-

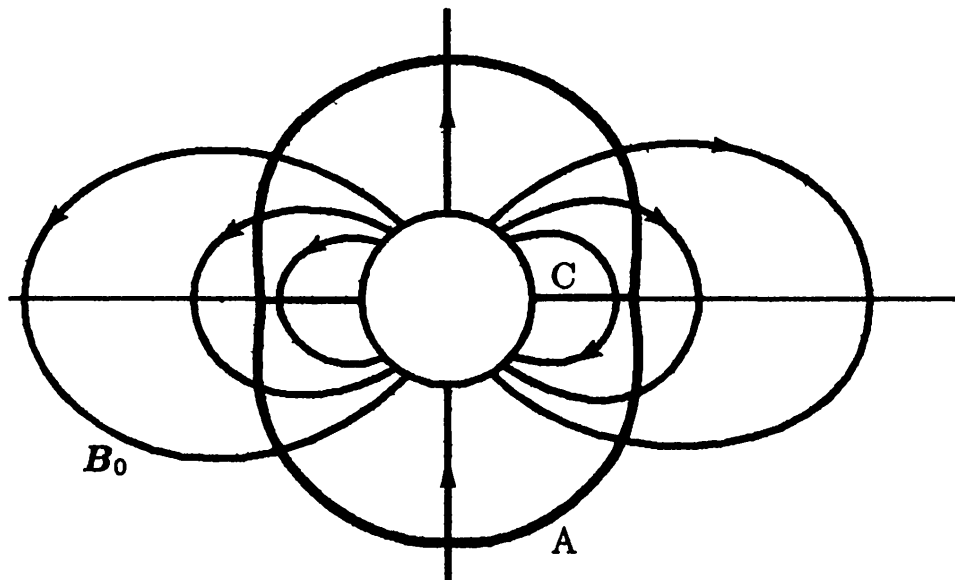


Рис. 66. Конфигурация плазменных образований вокруг магнитного белого карлика, поддерживаемых радиационным давлением [39]: *A* – оболочка вокруг звезды; *C* – экваториальный диск

диационного давления и силы тяжести. В то же время движение в поперечном направлении будет подавлено сильным магнитным полем белого карлика. Поэтому поперечные компоненты сил давления и тяжести могут вызвать только дрейфовые токи в плазменной оболочке, возникающей вокруг звезды.

Плазма, эжектируемая с поверхности звезды, образует два джета, ориентированных вдоль полярных направлений, протяженную оболочку вокруг звезды и экваториальный диск в магнитосфере белого карлика (см. Рис. 66). Наличие экваториальных дисков на изолированных звездах (то есть в отсутствие аккреции) дало основание назвать такие астрофизические объекты радиационными дисками [445].

Если джеты представляют собой плазму, ускоряемую силой радиационного давления, то плазменный диск сформируется близ магнитного экватора, то есть в области, соответствующей минимуму потенциала силы  $f_B - m_p g$  вдоль замкнутых силовых линий дипольного магнитного поля звезды.

Толщина диска  $D$  определяется из условия гидростатического равновесия плазмы в поле силы  $f_B - m_p g > 0$  [445]:

$$D \simeq 2 \left[ 2\kappa T_d r^3 / f_0 R_*^2 \right]^{1/2}. \quad (20.41)$$

Здесь  $T_d$  — температура плазмы в диске на расстоянии  $r$  от центра звезды. Выражение для  $D$  справедливо, если динамическое давле-

ние потока плазмы, падающей на диск,  $\rho v^2/2$ , мало по сравнению с кинетическим давлением в диске  $P = 2N\kappa T$ . В этом случае в диске реализуется обычное барометрическое распределение плотности плазмы вдоль силовых линий магнитного поля над и под экваториальной плоскостью. При получении формулы (20.41) предполагалось, что разность сил радиационного давления и гравитации меняется по закону

$$f_B - m_p g = f_0 (R_*/r)^2. \quad (20.42)$$

В этой формуле учитывается изменение силы давления излучения только за счет диллюции этого излучения. Однако по мере удаления от звезды вместе с уменьшением циклотронной частоты  $\omega_B$  уменьшается и та частота  $\omega \simeq \omega_B$  в спектре излучения фотосферы, которая резонансным образом рассеивается (создавая силу давления излучения). На достаточном расстоянии от звезды отношение  $f_B/m_p g$  существенно уменьшается, на поверхности *A* на Рис. 66 разность  $f_B - m_p g$  обращается в нуль, а далее становится отрицательной. Форма поверхности, на которой  $f_B = m_p g$ , исследовалась в [464, 465]. По оценкам [39, 466], равновесная поверхность на полюсах расположена на расстоянии  $r \simeq 3 R_*$ , на экваторе — на расстоянии  $r \simeq 2.2 R_*$  от центра звезды (для  $T \simeq 2 \cdot 10^4$  К,  $B_0 \simeq 10^9$  Гс, и ускорения свободного падения  $g \simeq 10^8$  см с<sup>-2</sup> на поверхности звезды — параметров, характерных для белого карлика GD 229). Профиль плотности плазмы, накапливающейся в потенциальной яме близ этой поверхности, имеет вид [39]

$$N(\xi) = N_0 \exp(-\xi^2/\mathcal{D}^2), \quad (20.43)$$

где  $\xi = (r - r_0)/R_*$ ,  $r_0$  — расстояние от данной точки равновесной поверхности до центра звезды и

$$\mathcal{D} \sim \sqrt{\frac{r_0}{R_*} \frac{2\kappa T_{||}}{m_p g R_*}} \quad (20.44)$$

— характерная ширина плазменного слоя.

Изложенные выше соображения о структуре плазменных образований в радиационном диске справедливы только для оптически тонких оболочек. Для этих оболочек оптическая толщина гирорезонансных слоев  $\omega \simeq \omega_B$  по циклотронному рассеянию  $\tau_g \ll 1$ . Если это условие не выполнено (оно, очевидно, нарушается по мере заполнения магнитосферы плазмой звездного ветра с поверхности звезды, так как  $\tau_g \propto N$  (см. (19.29)), то может возникнуть новое равновесное распределение — оптически толстая оболочка  $\tau_g \gg 1$ , простирающаяся от

фотосферы до расположенной выше равновесной поверхности  $A$ . Во всей этой оболочке имеет место условие [39, 466]:

$$f_B^{\parallel} \simeq m_p g \cos \delta, \quad (20.45)$$

где  $\delta$  — угол между радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  и магнитным полем  $\mathbf{B}_0$ ,  $f_B^{\parallel}$  — проекция силы давления излучения на направление  $\mathbf{B}_0$ . Оно реализуется при высоких значениях  $\tau_g$  благодаря тому, что сила давления излучения  $f_B \propto \tau_g^{-1}$  (см. (20.35)).

Окружающая практически всю звезду оптически толстая плазменная оболочка должна существенно деформировать наблюдаемый спектр излучения белого карлика. Такие спектры, обладающие широкими полосами поглощения в ультрафиолетовой области спектра, обнаружены у магнитных белых карликов GD 229 и PG 1031+234. Речь о влиянии плазменных оболочек на частотные спектры этих объектов уже шла в конце §19. Так же были указаны оценки минимальной электронной плотности плазмы, обеспечивающей формирование наблюдаемой депрессии в спектрах этих наиболее вероятных кандидатов в радиационные диски.

## §21. Комбинационное рассеяние в плазме

Выше в этой главе мы рассмотрели процессы рассеяния на частицах в плазме (см. §18, §19). В этом разделе будут рассмотрены эффекты рассеяния излучения на волнах в плазме, объединяемые в астрофизике под названием комбинационного рассеяния (в физике плазмы более обычным является термин “распады и слияния волн”). Указанные эффекты заключаются в появлении связи между амплитудами волн из-за нелинейного взаимодействия между ними. При этом обычно наиболее существенным оказывается процесс изменения энергии одной из волн (волновых пакетов) за счет энергии двух других волн, т. е. процесс трехволнового взаимодействия.<sup>155</sup>

Исследование комбинационного рассеяния в плазме началось с работы [467], в которой изучено рассеяние электромагнитных волн на плазменных колебаниях, и статьи [283], где была рассмотрена инверсия плазменных волн в электромагнитное излучение при рассеянии

<sup>155</sup> Как будет ясно из дальнейшего, этот эффект имеет квадратичный характер по плотности энергии излучения  $W_k$ . Если последняя не слишком велика, процессами взаимодействия с участием большего числа волн, появляющегося в более высоком приближении по степеням  $W_k$ , можно пренебречь, что и делается в дальнейшем.

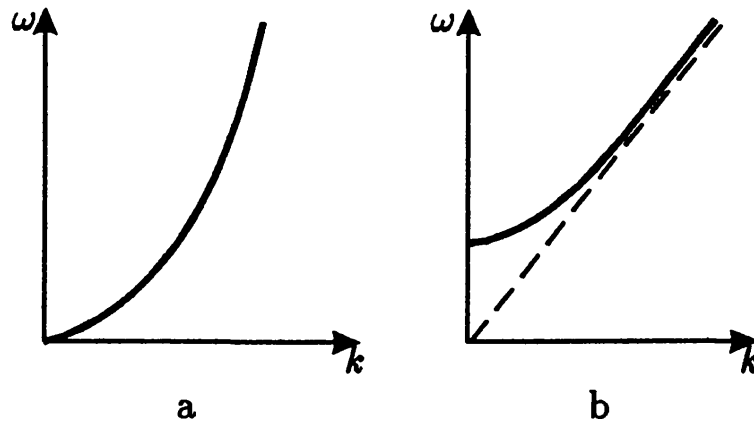


Рис. 67. Примеры распадного (а) и нераспадного (б) спектров

на плазменных же волнах и ее роль при объяснении некоторых компонент спорадического радиоизлучения Солнца. В настоящее время о комбинационном рассеянии в плазме существует обширная литература, среди которой следует особенно отметить монографии и обзоры [72, 89, 382–385, 468].

### 21.1. Законы сохранения при элементарных актах рассеяния

В естественных условиях астрофизической плазмы фазы волн, входящих в состав взаимодействующих волновых пакетов, имеют случайный характер. Благодаря этому обстоятельству вместо более сложного классического описания можно использовать элементарный квантовый подход, рассматривая рассеяние одних волн (волновых пакетов) на других как совокупность элементарных актов сияния двух фотонов (плазмонов) с появлением третьего кванта [283]. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что

$$\hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 = \hbar\omega, \quad \hbar k_1 + \hbar k_2 = \hbar k. \quad (21.1)$$

Наряду с процессом слияния  $k_1 + k_2 \rightarrow k$  возможен также обратный процесс распада одного кванта на два:  $k \rightarrow k_1 + k_2$  (при соблюдении законов сохранения в форме (21.1)). При классическом рассмотрении соотношения (21.1), называемые тогда условиями синхронизма, получаются как необходимые условия, обеспечивающие нелинейное трехволновое взаимодействие.

Поскольку фигурирующие в первом из условий синхронизма частоты являются (в соответствии с дисперсионными соотношениями для нормальных волн) функциями волновых векторов, возможность выполнения законов сохранения (21.1) (и тем самым, возможность процессов типа слияний и распадов) заранее не очевидна. В случае,

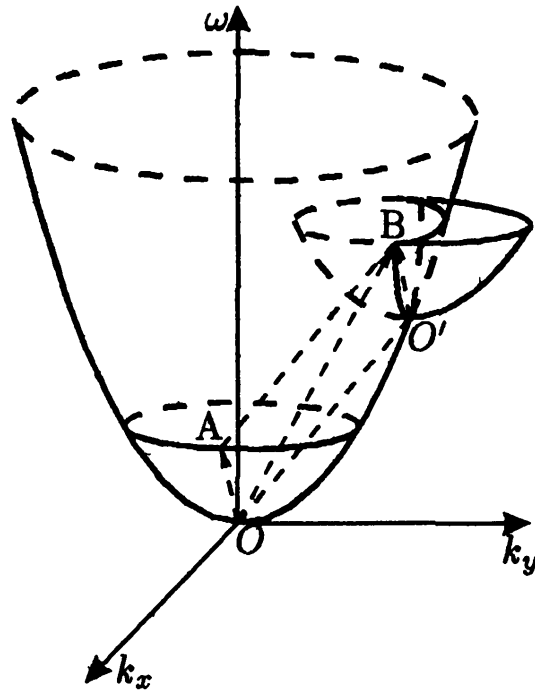


Рис. 68. Критерий распадного спектра

когда взаимодействующие волны относятся к одному типу и описываются общим дисперсионным соотношением  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ , для соблюдения законов сохранения необходимо, чтобы

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2). \quad (21.2)$$

Спектр частот  $\omega(\mathbf{k})$  тогда называется распадным; если же соотношению (21.2) удовлетворить нельзя, спектр — нераспадный. Примеры распадного и нераспадного спектров в изотропной среде (где  $\omega(\mathbf{k}) = \omega(k)$ ) приведены на Рис. 67.

Рецепт, позволяющий установить, к какому типу относится данный спектр  $\omega(\mathbf{k})$  заключается в следующем [310]. Из (21.1) следует, что векторы  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}$  лежат в одной плоскости; каждый вектор имеет в этой плоскости две компоненты,  $k_x$  и  $k_y$ . В качестве третьей координаты выберем частоту  $\omega$  (Рис. 68): В этом трехмерном пространстве каждый вектор характеризует волну с заданными значениями  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . Слияние двух волн в третью в соответствии с законами сохранения (21.1) отвечает сложению векторов в указанном пространстве (на Рис. 68 слияние волн, соответствующих векторам  $OA$  и  $OO'$ , дает волну, определяемую вектором  $OB$ ). С другой стороны, спектр  $\omega = \omega(k_x, k_y)$  определяет поверхность вращения с осью  $\omega$ ; поверхность, изображенная на Рис. 68, соответствует спектру Рис. 67, а. Спектр будет распадным, если можно построить параллелограмм с одной вершиной в начале координат, и с тремя вершинами, лежа-



щими на поверхности вращения  $\omega = \omega(k_x, k_y)$ . Рассматривая Рис. 68, нетрудно понять, что подобная операция возможна, если существует пересечение двух поверхностей: поверхности вращения  $\omega = \omega(k_x, k_y)$  и такой же поверхности, но построенной в новой системе координат, полученной параллельным переносом и имеющей начало в точке  $O'$ , расположенной на поверхности  $\omega = \omega(k_x, k_y)$ . Наличие пересечения таких поверхностей указывает на распадный характер спектра  $\omega = \omega(k)$ , если же пересечение невозможно, спектр нераспадный.

Для нас особый интерес представляет спектр на Рис. 67, b, поскольку он имеет такой же характер, как дисперсионные кривые электромагнитных и плазменных волн (см. (5.1) и (5.13)). Этот спектр — нераспадный, отсюда следует, что законами сохранения в изотропной плазме запрещены процессы слияния и распадов типа

$$t + t \leftrightarrow t, \quad l + l \leftrightarrow l, \quad (21.3)$$

(здесь через  $t$  и  $l$  символически обозначены поперечная и продольная волны). Вместе с тем законы сохранения разрешают трехволновые взаимодействия, в которых одна из волн другого типа, нежели остальные:

$$l + t \leftrightarrow t, \quad l + l \leftrightarrow t. \quad (21.4)$$

В неизотермической изотропной плазме возможны также трехволновые взаимодействия с участием ионно-звуковых волн: <sup>156</sup>  $l + s \leftrightarrow t$  и  $t + s \leftrightarrow l$ . Процесс  $t + t \leftrightarrow l$  снова запрещен законами сохранения. Дело в том, что частота плазменных волн  $\omega_{pl}$  близка к  $\omega_L$  и, следовательно, частоты сливающихся электромагнитных волн  $\omega_{em}$  должны быть меньше  $\omega_L$ . Это возможно лишь при мнимых  $k_{em}$ , которые не удовлетворяют закону сохранения импульса в (21.1) с действительным  $k_{pl}$ .

В космической плазме особенно важен процесс слияния двух плазменных волн в электромагнитную:  $l + l \leftrightarrow t$ . Поскольку частоты плазменных волн близки к  $\omega_L$ , частота электромагнитной волны

$$\omega = \omega_{em} \approx 2\omega_L, \quad (21.5)$$

— в соответствии с первым из законов сохранения (21.1). Далее в законе сохранения импульса при таком процессе следует учесть, что

$$k_{pl} = \omega_{pl}/v_{ph} \approx \omega_L/v_{ph}$$

<sup>156</sup> Последние мы не рассматриваем, хотя вполне возможно, что они играют определенную роль в космических условиях (см., например, [469]). О характере указанных процессов см. [10, 89].

(где  $v_{ph}$  — фазовая скорость плазменных волн) и

$$k_{em} = (\omega_{em}/c)n_{em}(\omega_{em}) \approx (2\omega_L/c)n_{em}(2\omega_L) = \sqrt{3}\omega_L/c.$$

Отсюда следует, что если для одной из сливающихся плазменных волн

$$v_{ph} \ll \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad (21.6)$$

то  $k_{em} \ll k_{pl}$  и закон сохранения импульса в (21.1) выполняется лишь при условии

$$k_1 \approx -k_2. \quad (21.7)$$

Итак, в случае (21.6) комбинационное рассеяние плазменных волн происходит на встречных плазменных волнах с близкими значениями фазовой скорости; при этом возникает электромагнитное излучение на удвоенной плазменной частоте [283]. Эффективность конверсии плазменных волн в электромагнитные существенно зависит от уровня плазменных волн, удовлетворяющих соотношению (21.7).

Заметим, что плазменные волны с высокими фазовыми скоростями

$$v_{ph} > \frac{2c}{\sqrt{3}}, \quad (21.8)$$

вообще не могут конвертироваться в электромагнитные, поскольку они не в состоянии удовлетворить закону сохранения импульса в (21.1): при условии (21.8)  $k_{em} > 2k_{pl}$ . Такие плазменные волны появляются, например, в результате их “перекачки” по спектру в область малых  $k_{pl}$  при эффективном индуцированном рассеянии на частицах (см. §18).

Появление в плазме электромагнитного излучения на частотах  $\omega \approx \omega_L$  и  $\omega \approx 2\omega_L$ , обязанного конверсии при рэлеевском и комбинационном рассеянии интенсивных плазменных волн, открыло возможность объяснить происхождение двух гармонических полос на динамических спектрах дрейфующих всплесков солнечного радиоизлучения II и III типа [283]. Эти полосы соответствуют радиоизлучению “основного тона” и “второй гармоники”; отношение частот в указанных полосах 1:2. Тесная связь этих особенностей динамического спектра с конверсией возбужденных плазменных волн служит одним из главных аргументов в пользу плазменного механизма излучения всплесков II и III типа.

Вместе с тем в солнечном радиоизлучении иногда наблюдается, хотя и очень редко, третья гармоника, соответствующая (в рамках

указанного механизма) излучению на частоте  $\omega \approx 3\omega_L$ . Такое излучение может возникнуть или при слиянии трех плазменных волн в электромагнитную (процесс четырехволнового взаимодействия типа  $l + l + l \rightarrow t$ ) или за счет слияния плазменных волн с электромагнитными волнами второй гармоники (процесс  $l + t \rightarrow t$ ; см. (21.4)). Последний процесс более эффективен, но, как показывают конкретные оценки [470], заметная третья гармоника в солнечном радиоизлучении появляется только при весьма высоком уровне плазменных волн (т.е. в случае высокой интенсивности наблюдаемого радиоизлучения). Частота третьей гармоники близка к  $3\omega_L$ ; фазовые скорости плазменных волн должны лежать в интервале  $c/(2\sqrt{2} + \sqrt{3}) < v_{pl} < c/(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$ . Последнее нетрудно установить, рассматривая законы сохранения (21.1) применительно к процессу  $l + t \rightarrow t$ .

## 21.2. Кинетическое уравнение для фотонов и уравнение переноса излучения

Процессы слияний и распадов можно включить в схему кинетических уравнений для фотонов (плазмонов), действуя так же, как в §18, где было получено кинетическое уравнение с учетом рассеяния излучения на частицах. Введем отнесенную к единице времени вероятность спонтанного распада кванта  $\hbar\omega$  на два  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$ , обозначив ее через  $w(k, k_1, k_2)$ . Тогда число распадов  $k \rightarrow k_1 + k_2$  в единицу времени из единицы фазового объема по  $k$  в фазовые объемы  $d^3k_1$  и  $d^3k_2$  составит  $(2\pi)^{-9}wN_k d^3k_1 d^3k_2$ . Здесь  $N_k$  — число квантов, входящих на одну моду в единице фазового объема.<sup>157</sup> Наряду со спонтанными распадами возможны также распады с вероятностью, пропорциональной числу плазмонов  $N_{k_1} + N_{k_2}$ , на которые распадается исходный квант, Указанный процесс имеет вынужденный (индуцированный) характер, поэтому в квантовой радиофизике такого рода распадные процессы принято называть вынужденным комбинационным рассеянием (ВКР).<sup>158</sup> Общее число распадов (индуцированных и спонтанных) в единицу времени и в единичных фазовых объемах по  $k, k_1$ , и  $k_2$ , очевидно, будет равно

$$wN_k(2\pi)^{-9} + \tilde{w}N_k(N_{k_1} + N_{k_2})(2\pi)^{-9}. \quad (21.9)$$

Наряду с процессом  $k \rightarrow k_1 + k_2$  существует обратный процесс сли-

<sup>157</sup> Величина  $N_k$  связана с плотностью энергии  $W_k$  в распадающихся волнах соотношением  $W_k = (2\pi)^{-3}\hbar\omega N_k$  (см. (2.14) и (14.28)).

<sup>158</sup> Коль скоро речь зашла о терминологии, отметим также, что рассеяние, сопровождаемое уменьшением частоты (при распадах  $\omega_1 - \omega_2 = \omega$ ), называется стоксовым, а увеличением частоты (при слияниях  $\omega_1 + \omega_2 = \omega$ ) — антистоксовым.

яния  $k_1 + k_2 \rightarrow k$ , эффективность которого пропорциональна произведению числа сливающихся квантов  $N_{k_1} N_{k_2}$ , т.е. произведению плотностей энергии  $W_{k_1} W_{k_2}$ ; соответствующее число слияний в единицу времени и в единичных фазовых объемах запишется в виде

$$\tilde{w} N_{k_1} N_{k_2} (2\pi)^{-9}. \quad (21.10)$$

На классическом языке процесс слияния (комбинационного рассеяния) заключается в нарастании слабой волны  $k$  за счет нелинейного взаимодействия двух сильных волн  $k_1$  и  $k_2$ . Этот процесс отсутствует, если плотность энергии одной из сливающихся волн положить равной нулю.

Связь между коэффициентами рассеяния  $w$ ,  $\tilde{w}$  и  $\tilde{\tilde{w}}$  нетрудно установить из условия баланса между числами актов распада и слияния в состоянии термодинамического равновесия. Действительно, предположим, что равновесное распределение числа квантов  $N_k$ ,  $N_{k_1}$ ,  $N_{k_2}$ , определяемое формулой Планка (18.6), поддерживается только за счет прямых и обратных процессов  $k_1 + k_2 \leftrightarrow k$ . Тогда число распадов (21.9) должно быть равно числу слияний (21.10). В области температур, для которых  $\hbar\omega \ll \kappa T$ , равновесное число квантов  $N_k = \kappa T / \hbar\omega$  (соответственно  $N_{k_1} = \kappa T / \hbar\omega_1$ ,  $N_{k_2} = \kappa T / \hbar\omega_2$ ). При этом баланс распадов и слияний требует, чтобы

$$\tilde{w} = \tilde{\tilde{w}}. \quad (21.11)$$

В области низких температур ( $\hbar\omega \gg \kappa T$ ) величины  $N_k = e^{-\hbar\omega/\kappa T}$ ,  $N_{k_1} = e^{-\hbar\omega_1/\kappa T}$ ,  $N_{k_2} = e^{-\hbar\omega_2/\kappa T}$ , и баланс между процессами  $k_1 + k_2 \leftrightarrow k$  ведет к условию

$$w = \tilde{\tilde{w}}. \quad (21.12)$$

Таким образом, коэффициенты  $w$ ,  $\tilde{w}$  и  $\tilde{\tilde{w}}$  должны быть одинаковы; поскольку они являются характеристиками каждого отдельного элементарного акта слияния или распада, их величина определяется нелинейными свойствами среды и не зависит от плотности энергии излучения. Последнее означает, что равенства (21.11), (21.12) справедливы и для неравновесного излучения.

Однако в отсутствие термодинамического равновесия баланс между процессами (21.9) и (21.10) будет, вообще говоря, нарушен и плотность числа квантов  $N_k$  станет изменяться во времени. При этом, очевидно,

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \int w(N_{k_1} N_{k_2} - N_{k_1} N_k - N_{k_2} N_k) \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6}. \quad (21.13)$$

Соответствующие уравнения для изменения  $N_{\mathbf{k}_1}$  и  $N_{\mathbf{k}_2}$  имеют вид<sup>159</sup>

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}_1}}{\partial t} = \int w(N_{\mathbf{k}_2}N_{\mathbf{k}} + N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}} - N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_2}) \frac{d^3k d^3k_2}{(2\pi)^6}, \quad (21.14)$$

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}_2}}{\partial t} = \int w(N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}} + N_{\mathbf{k}_2}N_{\mathbf{k}} - N_{\mathbf{k}_1}N_{\mathbf{k}_2}) \frac{d^3k_1 d^3k}{(2\pi)^6}. \quad (21.15)$$

В уравнениях (21.13)-(21.15) отброшен член  $wN_{\mathbf{k}}(2\pi)^{-6}$ , характеризующий спонтанные распады. Это вполне допустимо при условиях  $N_{\mathbf{k}_1} \gg 1$ ,  $N_{\mathbf{k}_2} \gg 1$ , которые в области Рэля-Джинса  $\hbar\omega \ll \kappa T$  справедливы даже для тепловых флуктуаций.

Написанные кинетические уравнения для распадных процессов могут быть представлены в форме уравнений переноса энергии излучения. Так, с учетом (14.28) уравнение (21.13) сводится к

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} + v_{gr} \frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial l} = \int w\omega \left( \frac{W_{\mathbf{k}_1}W_{\mathbf{k}_2}}{\omega_1\omega_2} - \frac{W_{\mathbf{k}_1}W_{\mathbf{k}}}{\omega_1\omega} - \frac{W_{\mathbf{k}_2}W_{\mathbf{k}}}{\omega_2\omega} \right) \frac{d^3k_1 d^3k_2}{\hbar(2\pi)^3}. \quad (21.16)$$

Левая часть (21.16) дополнена членом  $v_{gr}\partial W_{\mathbf{k}}/\partial l$ , учитывающим возможное изменение плотности энергии вдоль луча (см. (8.28)). Исходя из (21.14) и (21.15), нетрудно записать аналогичные уравнения, характеризующие пространственно-временное поведение  $W_{\mathbf{k}_1}$  и  $W_{\mathbf{k}_2}$ .

В уравнении (21.16) член

$$\alpha_{\mathbf{k}} = \int wW_{\mathbf{k}_1}W_{\mathbf{k}_2} \frac{\omega}{\omega_1\omega_2} \frac{d^3k_1 d^3k_2}{\hbar(2\pi)^3} \quad (21.17)$$

не зависит от  $W_{\mathbf{k}}$  и выступает в качестве излучательной способности для волны  $\mathbf{k}$ . Остальные слагаемые в правой части уравнения переноса пропорциональны  $W_{\mathbf{k}}$  с коэффициентом пропорциональности

$$\beta_{\mathbf{k}} = .2\gamma_{\mathbf{k}} = \int w \left( \frac{W_{\mathbf{k}_1}}{\omega_1} + \frac{W_{\mathbf{k}_2}}{\omega_2} \right) \frac{d^3k_1 d^3k_2}{\hbar(2\pi)^3}, \quad (21.18)$$

который описывает относительное уменьшение плотности энергии  $W_{\mathbf{k}}$  в единицу времени. Иными словами,  $\gamma_{\mathbf{k}}$  представляет собой декремент

<sup>159</sup> Исследование распадных процессов в плазме методом кинетического уравнения для волн было начато в [471, 472]; затем оно было продолжено в [310, 468, 473-476]. Кинетическое уравнение в наглядной "квантовой" форме (21.13)-(21.15) было представлено в [310].

излучения с волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Величина  $\gamma_{\mathbf{k}} \geq 0$ , что вполне естественно: этот декремент описывает распадный процесс  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ , отбирающий энергию от волны  $\mathbf{k}$ . Используя (21.14) и (21.15), не трудно записать декременты для сливающихся волн  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ :

$$\gamma_{\mathbf{k}_1} = \frac{1}{2} \int w \left( \frac{W_{\mathbf{k}_2}}{\omega_2} - \frac{W_{\mathbf{k}}}{\omega} \right) \frac{d^3 k d^3 k_2}{\hbar (2\pi)^3}, \quad (21.19)$$

$$\gamma_{\mathbf{k}_2} = \frac{1}{2} \int w \left( \frac{W_{\mathbf{k}_1}}{\omega_1} - \frac{W_{\mathbf{k}}}{\omega} \right) \frac{d^3 k d^3 k_1}{\hbar (2\pi)^3}. \quad (21.20)$$

Эти декременты будут отрицательными, если плотность излучения  $W_{\mathbf{k}}$  достаточно велика. Благодаря последнему обстоятельству приток энергии в волны  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  из-за распадов может превысить убыль энергии этих волн вследствие комбинационного рассеяния в волну  $\mathbf{k}$ . Таким образом, в процессах типа  $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  существует возможность появления неустойчивости и усиления на волнах  $\mathbf{k}_1$  или  $\mathbf{k}_2$ .

Эволюция во времени плотностей энергии  $W_{\mathbf{k}}$ ,  $W_{\mathbf{k}_1}$ ,  $W_{\mathbf{k}_2}$  определяется решением системы уравнений (21.13)-(21.15). Поскольку они описывают процессы с сохранением энергии и импульса взаимодействующих фотонов (21.1), плотности полной энергии излучения и полного импульса при этом не меняются в отличие от процессов, в которых излучение взаимодействует с частицами плазмы. Для учета такого рода процессов (поглощения, спонтанного и индуцированного излучения и рассеяния) в уравнение типа (21.16) следует включить члены с  $\alpha_{\mathbf{k}}$  и  $\beta_j$ , заданные выражениями (14.22), (14.23), (18.18) и (18.19). Ясно, что это еще более усложнит решение кинетических уравнений.

С другой стороны, анализ уравнения (21.16) значительно упрощается, если плотности энергии сливающихся волн  $W_{\mathbf{k}_1}$  и  $W_{\mathbf{k}_2}$  можно считать заданными (например, для процесса  $l + l \leftrightarrow t$  волны  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  — плазменные и их уровень может поддерживаться эффективной генерацией в потоках заряженных частиц).

В квазистационарном источнике большой протяженности величину  $W_{\mathbf{k}}$  тогда можно оценить из следующих соображений. Если плотности энергии  $W_{\mathbf{k}_1}$  и  $W_{\mathbf{k}_2}$  мало меняются за время  $\Delta t \sim 1/\gamma_{\mathbf{k}}$  и на расстоянии  $\Delta l \sim 1/\mu_j$  (где  $\mu_j = 2\gamma_{\mathbf{k}} v_{\text{gr}}^{-1}$  — “распадный” коэффициент поглощения вдоль луча), то плотность энергии  $W_{\mathbf{k}}$  устанавливается на уровне, при котором  $dW_{\mathbf{k}}/dt + v_{\text{gr}} dW_{\mathbf{k}}/dl \approx 0$ . Согласно (21.16), для этого достаточно, чтобы

$$\frac{T_1 T_2}{\omega_1 \omega_2} - \frac{T_1 T_b}{\omega_1 \omega} - \frac{T_2 T_b}{\omega_2 \omega} = 0, \quad (21.21)$$

где  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_b$  — яркостные температуры излучения, связанные с плотностью энергии соотношениями

$$W_{\mathbf{k}_1} = \frac{\kappa T_1}{(2\pi)^3}, \quad W_{\mathbf{k}_2} = \frac{\kappa T_2}{(2\pi)^3}, \quad W_{\mathbf{k}} = \frac{\kappa T_b}{(2\pi)^3} \quad (21.22)$$

(об определении яркостной температуры см. §2). Из (21.21) получаем, что [477]

$$T_b = \frac{\omega T_1 T_2}{\omega_1 T_2 + \omega_2 T_1}. \quad (21.23)$$

Это, очевидно, максимальная температура, которая может быть достигнута при данном уровне сливающихся волн, заданном эффективными температурами  $T_1$  и  $T_2$ .

Зависимость отношения  $T_b/T_1$  от  $T_2/T_1$  схематически представлена на Рис. 69. Из него ясно, что при одинаковых температурах сливающихся волн ( $T_1 = T_2$ ) эффективная температура возникающего излучения равна той же величине. Так, для процесса  $l + l \rightarrow t$ , когда частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  относятся к плазменным волнам ( $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_L$ ), а частота  $\omega \approx 2\omega_L$  — к электромагнитным, величина эффективной температуры последних  $T_b$  не превышает эффективной температуры плазменных волн  $T_1 = T_2$ . При слиянии волн с существенно различными частотами  $\omega_1 \gg \omega_2$  (например, плазменных волн с ионно-звуковыми волнами, вистлерами или модами Бернштейна) максимальная эффективная температура электромагнитного излучения  $T_b$  на частотах  $\omega = \omega_1 + \omega_2 \approx \omega_1$  соответствует уровню высокочастотных волн ( $T_b \sim T_1$ ) в широком интервале значений  $T_2/T_1 \gtrsim \omega_2/\omega_1$  и не превышает  $T_1$  при любых отношениях  $T_2/T_1$ .

Отметим, наконец, что в рамках трехволнового взаимодействия одна волна может одновременно участвовать в нескольких процессах (например, волна  $\mathbf{k}$  — в процессах  $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k} + \mathbf{k}_4 \leftrightarrow \mathbf{k}_5$ . Выше это обстоятельство не учитывалось. Если второй процесс также существен, правая часть уравнения (21.13) должна быть дополнена выражением

$$\int w' (N_{\mathbf{k}_4} N_{\mathbf{k}_5} + N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_5} - N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}_4}) \frac{d^3 k_4 d^3 k_5}{(2\pi)^6}, \quad (21.24)$$

где  $w'$  — вероятность спонтанного распада  $\mathbf{k}_5 \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{k}_4$ . Соответствующие изменения надо внести и в уравнение переноса (21.16), и в величины  $\alpha_{\mathbf{k}}$ ,  $\gamma_{\mathbf{k}}$  (21.17), (21.18).

В кинетических уравнениях (21.13)-(21.15) фигурирует вероятность спонтанного распада  $w(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ , которая зависит от характера

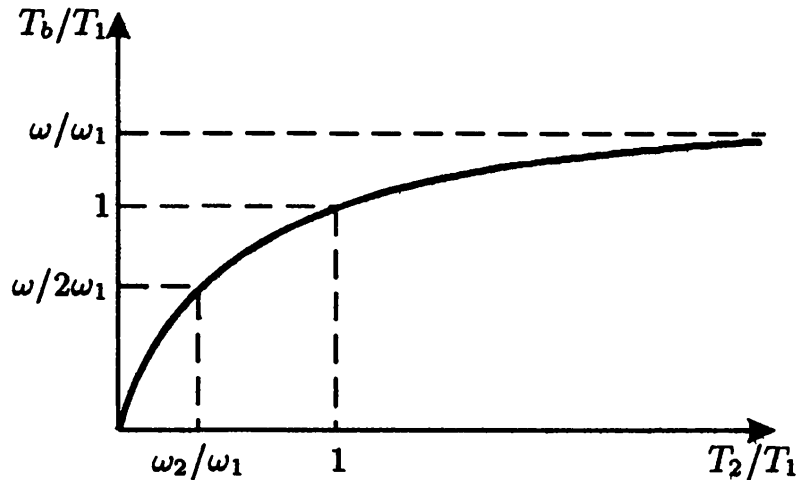


Рис. 69. Зависимость  $T_b/T_1$  от  $T_2/T_1$  в случае, когда  $\omega_2/\omega_1 < 1$

плазмы, типов взаимодействующих волн и т.п. Методика расчета  $w$  и результаты для различных вариантов трехволнового взаимодействия изложены в [89, 385] (см. также [478–480]). Мы их приводить не станем, ограничившись общими замечаниями о способе вычисления  $w$  и приведя в качестве примера вероятности процессов типа (21.4) в изотропной плазме.

Расчет  $\partial W_{\mathbf{k}}/\partial t$  в однородной системе при исчезающе малой плотности  $W_{\mathbf{k}}$  (когда  $\partial W_{\mathbf{k}}/\partial t = \alpha_{\mathbf{k}}$  (21.17)), позволяет установить вид  $w$ . Такой расчет может быть проведен квантовомеханическим путем. В квазиклассической области  $\hbar\omega \ll \kappa T$  ( $T$  — кинетическая температура плазмы) величина  $\alpha_{\mathbf{k}}$  может быть найдена также на основе классической электродинамики. В согласии с принципом соответствия результаты в этой области должны совпадать; это позволяет определить вероятность  $w$ , сопоставляя квантовую формулу (21.17) с классическим выражением для  $\alpha_{\mathbf{k}}$ . Расчет последнего проводится в два этапа: сначала находят нелинейный ток, наведенный волнами 1 и 2 в плазме, а затем излучение этого тока.

Поясним сказанное подробнее. Если в плазме существуют одновременно две волны, 1 и 2, то выражение для полного тока  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$  (4.75) запишется (в квазигидродинамическом приближении) в такой форме:

$$\mathbf{j}_{\text{tot}} = \mathbf{j}'_0 + \mathbf{j}'_{\text{nl}}, \quad \mathbf{j}'_{\text{nl}} = -eN'_1\mathbf{v}'_2 - eN'_2\mathbf{v}'_1. \quad (21.25)$$

Здесь  $N'_1$  и  $N'_2$  — отклонения электронной концентрации от невозмущенного значения  $N_0$ , а  $\mathbf{v}'_1$  и  $\mathbf{v}'_2$  — скорости электронов в волнах 1 и 2 соответственно. Величина  $\mathbf{j}'_0$  — это линейная часть полного тока (4.75);  $\mathbf{j}'_{\text{nl}}$  — его нелинейная составляющая, которая возникает при взаимодействии двух волн. В рамках метода возмущений  $\mathbf{j}'_{\text{nl}}$  можно найти, подставляя вместо  $N'_1$  и  $N'_2$  соответствующие выражения, най-



денные на основе линеаризованных уравнений (4.74). Они пропорциональны компонентам электрического поля  $E_1$  и  $E_2$  в этих волнах; поэтому  $j'_{nl}$  выражается через произведения компонент векторов  $E_1$  и  $E_2$ . Далее величину  $j'_{nl}$  можно рассматривать как сторонний ток, наведенный полями  $E_1$  и  $E_2$  в плазме, и найти мощность излучения этого тока в третью волну (величину  $\alpha_k = \partial W_k / \partial t$ ). Соответствующее выражение будет отлично от нуля, если выполнены условия синхронизма (21.1). Для взаимодействующих волн (волновых пакетов) со случайными фазами мощность излучения пропорциональна произведению  $W_{k_1} W_{k_2}$ . Сопоставляя полученное выражение с  $\alpha_k$  в форме (21.17), определяем искомую вероятность  $w$ .

### 21.3. Слияния и распады в изотропной плазме

Вероятность рассеяния в изотропной плазме для процесса типа  $l + l \leftrightarrow t$  описывается следующим выражением [474, 475]

$$w = w_t^{ll} = 2\pi^5 \frac{\hbar e^2}{m_e^2 \omega_L} \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2}{k^2} \frac{[k_1 \times k_2]^2}{k_1^2 k_2^2} \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2). \quad (21.26)$$

Разность  $k_1^2 - k_2^2$  в (21.26) связана с наличием двух членов в выражении для нелинейного тока (21.25), представляющих соответственно рассеяние волны 2 на неоднородностях электронной концентрации  $N'_1$ , обусловленных волной 1, и рассеяния волны 1 на неоднородностях  $N'_2$ , принадлежащих волне 2. При одинаковых по величине волновых векторах сливающихся плазменных волн ( $k_1 = k_2$ ) эти эффекты рассеяния компенсируются и вероятность  $w_t^{ll}$  обращается в нуль [481, 482].

Вычислим излучательную способность  $\alpha_k$  (21.17) и коэффициент распадного затухания  $\gamma_k$  (21.18) для электромагнитного излучения на частоте  $\omega \approx 2\omega_L$  при слиянии плазменных волн с частотами  $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_L$ . В соответствии с (21.26)

$$\alpha_k = 2\pi^2 \frac{e^2 k^2}{m_e^2 \omega_L^2} \int \frac{k_1^2}{k_2^2} \sin^2 \theta \left( \cos \theta - \frac{k}{2k_1} \right)^2 \times W_{k_1} W_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d^3 k_1 d^3 k_2, \quad (21.27)$$

$$\gamma_k = \frac{\pi^2}{2} \frac{e^2 k^2}{m_e^2 \omega_L^2} \int \sin^2 \theta \left( \cos \theta - \frac{k}{2k_1} \right)^2 (W_{k_1} + W_{k_2}) \times \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d^3 k_1 d^3 k_2. \quad (21.28)$$

Здесь учтено, что, согласно (21.1),  $(k_1^2 - k_2^2)^2 = 4k_1^2 k_2^2 (\cos \theta - k/2k_1)^2$  и  $[k_1 \times k_2]^2 = [k_1 \times k]^2 = k_1^2 k^2 \sin^2 \theta$ , где  $\theta$  — угол между  $k$  и  $k_1$ .

Пусть спектр плазменных волн — изотропный ( $W_{\mathbf{k}_1}$  и  $W_{\mathbf{k}_2}$  не зависят от направления  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ ), а плазменные волны в этом спектре сосредоточены в области (21.6), где  $k \ll k_1, k_2$  и  $\mathbf{k}_1 \approx -\mathbf{k}_2$ . Тогда из (21.27) получаем, взяв интеграл по  $d^3k_2$  с помощью дельта-функции по волновым векторам, что

$$\alpha_{\mathbf{k}} = 6\pi^2 \frac{e^2}{m_e^2 c^2} \int \sin^3 \theta \cos^2 \theta W_{\mathbf{k}_1} W_{-\mathbf{k}_1} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) k_1^2 d\theta d\phi dk_1. \quad (21.29)$$

Здесь учтено, что  $d^3k_1 = k_1^2 \sin \theta d\theta d\phi dk_1$ , где  $\phi$  — угол, определяющий положение проекции вектора  $-\mathbf{k}_1$  на плоскость, ортогональную  $\mathbf{k}$ . Поскольку  $k_1^2 W_{\mathbf{k}_1} W_{-\mathbf{k}_1}$  от углов  $\theta$  и  $\phi$  не зависит, интеграл в (21.29) легко взять по  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi$  и по  $\phi$  — в пределах от 0 до  $2\pi$ . Выполнив затем интегрирование по  $k_1$  с учетом того, что в дельта-функции по частотам значения  $\omega_1(\mathbf{k}_1)$  и  $\omega_2(-\mathbf{k}_1)$  связаны с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  дисперсионным соотношением (5.13), получаем

$$\alpha_{\mathbf{k}} = \frac{(2\pi)^3}{15} \frac{e^2 \omega_L k_1}{m_e c^2 v_T^2} W_{\mathbf{k}_1}^2. \quad (21.30)$$

Действуя аналогично, из выражения (21.28) найдем, что

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \frac{(2\pi)^3}{30} \frac{e^2 \omega_L k_1}{m_e c^2 v_T^2} W_{\mathbf{k}_1}. \quad (21.31)$$

В уравнении переноса интенсивности излучения (8.30) вместо  $\alpha_{\mathbf{k}}$  и  $\gamma_{\mathbf{k}}$  фигурируют излучательная способность  $a_{\omega} = k^2 \alpha_{\mathbf{k}} (|\cos \vartheta| v_{gr})^{-1}$  и коэффициент поглощения  $\mu = 2\gamma_{\mathbf{k}} v_{gr}^{-1}$ . В рассматриваемом случае эти величины определяются, очевидно, следующими выражениями:

$$a_{\omega} = \frac{2(2\pi)^3}{5\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega_L^4}{m_e^2 c^5 v_T^2 v_{ph}} W_{\mathbf{k}_1}^2, \quad (21.32)$$

$$\mu = \frac{2(2\pi)^3}{15\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega_L^2}{m_e^2 c^3 v_T^2 v_{ph}} W_{\mathbf{k}_1}, \quad (21.33)$$

(здесь принято во внимание, что для плазменных волны  $k_1 \approx \omega_L / v_{ph}$ , для электромагнитного излучения с частотой  $\omega \approx 2\omega_L$  величины  $k = \sqrt{3}\omega_L / c$ ,  $v_{gr} = \sqrt{3}c/2$  и что в изотропной плазме  $\cos \vartheta = 1$ ).

В однородном стационарном источнике, содержащем плазменные волны с изотропным спектром  $W_{\mathbf{k}_1}$ , яркостная температура электромагнитного излучения  $T_b$  достигнет величины  $T_1 = (2\pi)^3 W_{\mathbf{k}_1} / \kappa$ , если  $\mu L \gg 1$  ( $L$  — линейный размер источника, а  $\mu$  задано выражением

(21.33)). Иными словами,  $T_b$  поднимется до максимального уровня, определяемого эффективной температурой плазменной турбулентности  $T_1$ , если источник — оптически толстый по отношению к распадам электромагнитных волн на две плазменные (см. в этой связи замечания, сделанные выше при обсуждении формулы (21.23)). Интенсивность электромагнитного излучения на частоте  $\omega \approx 2\omega_L$ , выходящая из оптически тонкого объекта,

$$\mu L = \frac{2}{15\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega_L^2 \kappa T_1}{m_e^2 c^3 v_T^2 v_{ph}} L \ll 1, \quad (21.34)$$

существенно ниже:  $I_\omega \approx a_\omega L$ . При пересчете на яркостную температуру (2.17) это соответствует значениям (см. (21.22) и (21.32))

$$T_b \approx \frac{2}{15\sqrt{3}} \frac{e^2 \omega_L^2 \kappa T_1^2}{m_e^2 c^3 v_T^2 v_{ph}} L \ll T_1. \quad (21.35)$$

В условиях солнечной короны можно принять, что  $v_T \sim 4 \cdot 10^8 \text{ см с}^{-1}$ ,  $\omega_L \sim 2\pi \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ , и  $v_{ph} \sim c/5$ . Тогда из (21.34) следует неравенство  $T_1 L \ll 5 \cdot 10^{22} \text{ К} \cdot \text{см}$ . Полагая, что распадное поглощение электромагнитного излучения существенно в слое толщиной  $L \sim 10^8 \text{ см}$  (см. об этой оценке [470]), получаем критерий  $T_1 \ll 5 \cdot 10^{14} \text{ К}$ , при котором в короне величина эффективной температуры радиоизлучения на второй гармонике плазменной частоты  $T_b \ll T_1$  и для расчета можно использовать формулу (21.35). Если же  $T_1 > 5 \cdot 10^{14} \text{ К}$ , источник становится оптически толстым и эффективная температура  $T_b$  — сравнимой с  $T_1$ . Однако, судя по наблюдениям, в солнечном радиоизлучении столь высокие значения  $T_b$  не реализуются или реализуются крайне редко. Поэтому в короне процесс конверсии плазменных волн в электромагнитные (за счет слияний типа  $l + l \rightarrow t$ ), как правило, сопровождается существенным снижением величины эффективной температуры:  $T_b/T_1 \ll 1$ .

Для радиоизлучения пульсаров ситуация существенно иная: благодаря высокой интенсивности излучения в источнике конверсия плазменных волн в электромагнитное излучение при комбинационном рассеянии может оказаться более эффективной (конечно, при условии, что там действует плазменный механизм радиоизлучения). Об этом обстоятельстве шла речь в [346, 347], но применительно к индуцированной конверсии плазменных волн при рассеянии на частицах. Что касается комбинационного рассеяния, то в сказанном нетрудно убедиться, считая для ориентировки параметры  $v_T$ ,  $v_{ph}$ ,  $\omega$  и  $L$  в магнитосферах нейтронных звезд того же порядка, что и в короне Солнца.

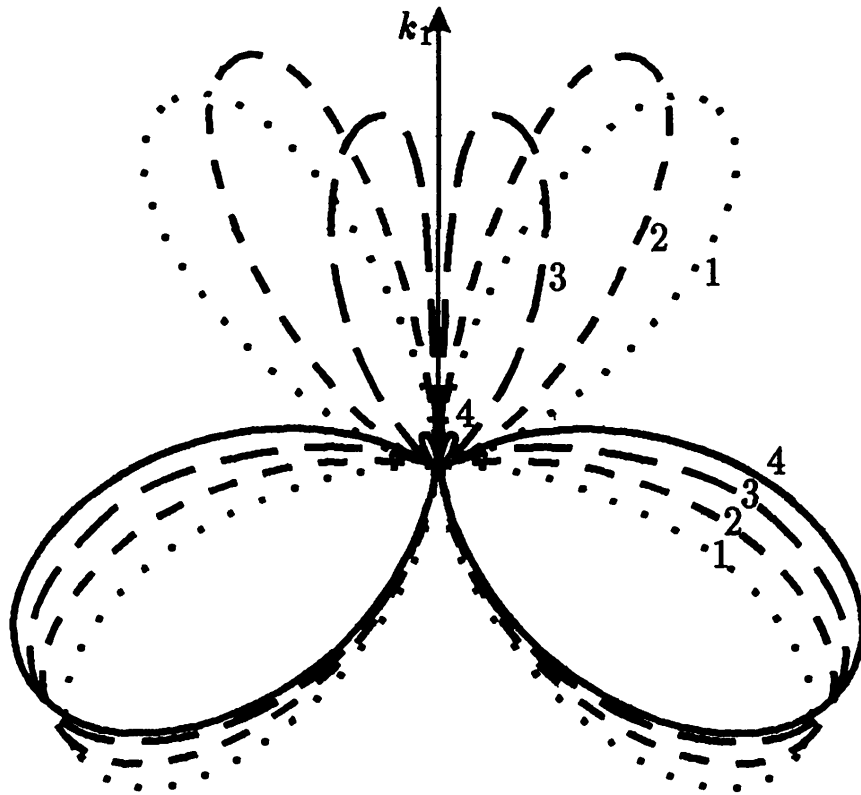


Рис. 70. Диаграмма направленности радиоизлучения  $\Psi(\theta_0)$  на второй гармонике плазменной частоты в однородной плазме: 1 -  $v_{ph}/c=0.2$ , 2 -  $v_{ph}/c=0.4$ , 3 -  $v_{ph}/c=0.6$ , 4 -  $v_{ph}/c=0.8$

Тогда мы вновь получаем критерий сильной конверсии  $T_b \sim T_1$  в виде  $T_1 \gtrsim 5 \cdot 10^{14}$  К. Для пульсаров он хорошо выполняется, поскольку эффективные температуры их радиоизлучения достигают  $10^{30}$  К.

Следует заметить, что предположение об изотропии спектра возбужденных плазменных волн, положенное в основу вывода формул для  $\alpha_\omega$  и  $\mu$  (21.32), (21.33), существенно ограничивает область их применимости. В астрофизической плазме вполне реальны условия, когда указанный спектр обладает существенной анизотропией. Примером может служить область генерации быстродрейфующих всплесков III типа в солнечной короне, где спектр возбуждаемых электронными потоками плазменных волн скорее всего имеет квазиодномерный характер (см. §15). В модели источника всплесков III типа, содержащего возбужденные плазменные волны с волновыми векторами  $\mathbf{k}_1$ , ориентированными вдоль средней скорости потока  $v_S$ , вторая гармоника радиоизлучения (на частоте  $\omega \approx 2\omega_L$ ) возникает за счет слияния этих волн с плазменными волнами, обладающими широким угловым спектром  $W_{\mathbf{k}_2}$ . В первоначальной теории всплесков III типа [283] в состав спектра  $W_{\mathbf{k}_2}$  были включены лишь плазменные волны теплового (флуктуационного) происхождения. В дальнейшем было учтено [337, 338], что более эффективный вклад в  $W_{\mathbf{k}_2}$  вносят плазменные

волны, возникающие в результате рэлеевского рассеяния плазменных волн, возбужденных потоком частиц (см. §18). Форма диаграммы радиоизлучения на второй гармонике была рассчитана в [483, 484].

В указанной модели излучательную способность для радиоизлучения на второй гармонике можно найти из (21.27), полагая, что спектр возбужденных плазменных волн описывается выражением вида (18.26), содержащим дельта-функцию по направлениям волновых векторов  $k_1$ . Подставив этот спектр в (21.27) и интегрируя, получим

$$\alpha_k = \frac{\pi^2 e^2 \omega_L}{m_e^2 c^2 v_T^2 k_1} \Psi(\theta_0) W(k_1) W_{k_2}(k_1, \Omega_0). \quad (21.36)$$

Тогда излучательная способность определяется выражением:

$$a_\omega = 2\sqrt{3}\pi^2 \frac{e^2 \omega_L v_{ph}}{m_e^2 c^5 v_T^2} \Psi(\theta_0) W(k_1) W_{k_2}(k_1, \Omega_0), \quad (21.37)$$

в котором

$$\Psi(\theta_0) = \frac{\sin^2 \theta_0 (\cos \theta_0 - k/2k_1)^2}{1 + k^2/k_1^2 - 2(k/k_1) \cos \theta_0}, \quad (21.38)$$

$v_{ph}$  — фазовая скорость плазменных волн в составе одномерного спектра,  $\theta_0$  — угол между  $k$  и  $\Omega_0$  — направлением волновых векторов  $k_1$  из одномерного спектра. Плотность энергии  $W_{k_2}$  зависит от величины  $k_1$  и угла  $\theta_0$ , даже если спектр  $W_{k_2}$  изотропный: дело в том, что согласно законам сохранения (21.1)  $k_2^2 = k_1^2 + k^2 - 2k_1 k \cos \theta_0$ . Однако зависимостью от  $\theta_0$  можно пренебречь, если отношение  $k/k_1 \equiv \sqrt{3}v_{ph}/c \ll 1$  (т.е. при условии (21.6)). В этом случае

$$a_\omega(\theta_0) \propto \Psi(\theta_0) \approx \sin^2 \theta_0 \cos^2 \theta_0, \quad (21.39)$$

т.е. диаграмма радиоизлучения на частоте  $\omega \approx 2\omega_L$  обладает четырьмя одинаковыми лепестками.

При возбуждении плазменных волн с более высокими фазовыми скоростями  $v_{ph}$  зависимостью  $W_{k_2}$  от угла  $\theta_0$  можно пренебречь, когда спектр  $W_{k_2}(k_2)$  достаточно слабо зависит от величины  $k_2$ . При этом диаграмма излучения вновь описывается функцией  $\Psi(\theta_0)$ . Из Рис. 70 ясно, что для  $v_{ph}/c \gtrsim 1/\sqrt{3}$  симметрия диаграммы излучения исчезает, причем лепестки, обращенные назад (по отношению к направлению возбужденных плазменных волн  $k_1$ ), становятся больше передних лепестков. Указанный эффект позволяет регистрировать вторую гармонику солнечных радиовсплесков в излучении, отраженном от более глубоких слоев короны [30].

# Список литературы

1. Гинзбург В.Л., Сыроватский С.И. (1963) *Происхождение космических лучей*. — М.: Изд. АН СССР.
2. Каплан С.А., Пикельнер С.Б. (1970) *Межзвездная среда*. — Физматгиз.
3. Железняков В.В. (1964) *Радиоизлучение Солнца и планет*. — М.: Наука.
4. Kundu M.R. (1965) *Solar Radio Astronomy*. Interscience Publ., New York
5. Шкловский И.С. (1968) *Сверхновые звезды*. — М.: Наука.
6. Pacholczyk A.G. (1970) *Radio Astrophysics*. Freeman, San Francisco.
7. Krüger A. (1979) *Introduction to Solar Radio Astronomy Radio Physics*. D. Reidel Publ., Dordrecht.
8. Benz A.O. (1993) *Plasma Astrophysics*. Kluwer Academic Publ., Dordrecht.
9. Beskin V., Gurevich A., Istomin Ya. (1993) *Physics of the Pulsar Magnetosphere*. Cambridge Univ. Press
10. Каплан С.А., Цытович В.Н. (1972) *Плазменная астрофизика*. — М.: Наука.
11. Melrose D.B. (1980) *Plasma Astrophysics*, Vol. I, II. Gordon Breach, New York.
12. Железняков В.В. (1977) *Электромагнитные волны в космической плазме*. — М.: Наука.
13. Langmuir I. (1929) *Phys. Rev.* **33**, p. 954
14. Goldreich P., Julian W.H. (1969) *Astrophys. J.*, **157**, p. 869
15. Mathewson D.S., Milne D.K. (1964) *Nature*, **203**, p. 1273
16. Mathewson D.S., Milne D.K. (1968) *Astrophys. J. Lett.*, **153**, p. 47
17. Разин В.А., Хижнякова И.П. (1969) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, **12**, с. 379
18. Dalgarno A., McCray R.A. (1972) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **10**, p. 375
19. Mezger P.G. (1974) in: *Proc. ESO/SRC/CERN Conf. on Research Programmes for the New Large Telescopes Geneva*. p. 79
20. Woltjer L. (1972) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **10**, p. 129
21. Field G.B. (1972) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **10**, p. 227
22. Ness N.F. (1968) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **6**, p. 79
23. Carr T.D., Gulkis S. (1969) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **7**, p. 577
24. McCulloch P.M., Komesaroff M.M. (1973) *Icarus*, **19**, p. 83
25. Mohajan K.K., Kar J. (1988) *Space Sci. Rev.*, **47**, p. 303
26. Bagenal F. (1992) *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, **20**, p. 289
27. Belcher J.W., McNutt R.L. (Jr.), Richardson, J.D. (1990) *Adv. Space Res.*, **10**, p. 5
28. Dessler A.J. (Ed.) (1983) *Physics of Jovian Magnetosphere*. Cambridge Univ. Press.
29. Newkirk G. (1961) *Astrophys. J.*, **133**, p. 983
30. Wild J.P., Smerd S.F., Weiss A.A. (1963) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **1**, p. 291
31. Linsky J.F., Serio S. (Eds.) (1993) *Physics of Stellar Coronae: G. S. Vaiana Memorial Symposium. Proc. Conference. Palermo, Italy*. Kluwer Acad. Publ.
32. Newkirk G., Altschuler M.D., Harvey J. (1969) *Solar Phys.*, **9**, p. 131
33. Eddy J.A. (1973) *Solar Phys.*, **30**, p. 385
34. Michaud G., Megessier C., Charland Y. (1981) *Astron. Astrophys.*, **103**, p. 244
35. Drake C.A., Abbot D.C., Bastian T.S., Bieging J.H., Churchwell E., Dulk G., Linsky J.L. (1987) *Astrophys. J.*, **322**, p. 902
36. Willson R.F., Lang K.R., Foster P. (1988) *Astron. Astrophys.*, **199**, p. 255
37. Zheleznyakov V.V., Tikhomirov Yu.V. (1984) *Astrophys. Space Sci.*, **102**, p. 189
38. Schmidt G.D. (1989) in: G.Wegner (Ed.) *White Dwarfs. Proc. IAU Colloquium No. 114* Springer-Verlag. p. 305
39. Zheleznyakov V.V., Serber A.V. (1994) *Space Sci. Rev.*, **68**, p. 275

40. Cavallo R., Arnaud K.A., Trimble V. (1993) *J. Astrophys. Astron.*, **14**, p. 141
41. Zheleznyakov V.V., Litvinchuk, A.A. (1984) *Astrophys. Space Sci.*, **105**, p. 73
42. Manchester R.N., Taylor J.H. (1977) *Pulsars*. Freeman, San Francisco.
43. Гинзбург В.Л. (1964) *ДАН СССР*, **156**, с. 43
44. Trumper J., et.al. (1976) *Ann. N.-Y. Acad. Sci.*, **302**, p. 538
45. Trumper J., et.al. (1978) *Astrophys. J.*, **219**, p. L105
46. Wheaton W.A., et.al. (1979) *Nature*, **282**, p. 240
47. Мазец Е.П., et.al. (1980) *Письма в Астрон. журн.*, **6**, с. 706
48. Murakami T., Fujii M., Hayashida K., Itoh M., Nishimura J., Yamagami T., Conner J.P., Evans W.D., Fenimore E.E., Klebesadel R.W., Yoshida A., Kondo I., Kawai N. (1988) *Nature*, **335**, p. 234
49. Barat C., Atteia J.L., Jourdain E., Vedrenne G., Sunyaev R., Blinov N., Kuznetsov A., Lvov M., Terekhov O. (1991) *Planet. Space Sci.*, **39**, p. 67
50. Paciesas W., Fishman G. (Eds.) *Gamma-Ray Bursts. AIP Conf. Proc. No. 265* New York, AIP.
51. Hurley K., (1994) *Astrophys. J. Suppl.*, **90**, p. 857
52. Sturrock P.A. (1970) *Nature*, **227**, p. 465
53. Sturrock P.A. (1971) *Astrophys. J.*, **164**, p. 529
54. Железняков В.В., Сербер А.В. (1993) *Астрон. журн.* **37**, с. 1002
55. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. (1964) *Статистическая Физика* — М.: Наука.
56. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. (1988) *Теория поля* — М.: Наука.
57. Zheleznyakov V.V. (1968) *Astrophys. Space Sci.*, **2**, p. 403
58. Cohen M.H. (1958) *Proc. IRE*, **46**, p. 183
59. Zheleznyakov V.V. (1971) *Astrophys. Space Sci.* **13**, p. 74
60. Сорокин Ю.М. (1974) *Изв. ВУЗов. Радиофизика*, **17**, с. 338
61. Mirabel I.F., Rodriguez L.F. (1994) *Nature*, **371**, p. 46
62. Rees M.J. (1966) *Nature*, **211**, p. 468
63. Ginzburg V.L., Zheleznyakov V.V. (1975) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **13**, p. 511
64. Smith F.G. (1970) *MNRAS*, **149**, p. 1
65. Epstein R.I., Feldman P.A. (1967) *Astrophys. J. Lett.*, **150**, p. 109
66. Гинзбург В.Л., Сазонов В.Н., Сыроватский С.И. (1968) *УФН*, **94**, с. 63
67. Takakura T., Uchida Y. (1968) *Astrophys. Lett.*, **1**, p. 147
68. Zheleznyakov V.V., Shaposhnikov, V.E. (1972) *Astrophys. Space Sci.*, **18**, p. 141
69. Гинзбург В.Л., Железняков В.В. (1961) *Астрон. журн.*, **38**, с. 3
70. Ginzburg V.L., Zheleznyakov V.V. (1970) *Comments Astrophys. Space Sci.*, **2**, 167, 197
71. Гинзбург В.Л. (1967) *Распространение электромагнитных волн в плазме.* — М.: Наука.
72. *Электродинамика плазмы.* Под ред. А.И. Ахиезера (1974) — М.: Наука.
73. Михайловский А.Б. (1970) *Теория плазменных неустойчивостей*, I. — М.: Атомиздат.
74. Mandelshtam L.I. (1941) *J. Phys. USSR*, **4**, p. 9
75. Гинзбург В.Л. (1949) *Теория распространения радиоволн в ионосфере.* — Гостехиздат.
76. Кадомцев Б.Б. (1957) *ЖЭТФ*, **33**, с. 151
77. Герценштейн М.Е. (1952) *ЖЭТФ*, **22**, с. 303
78. Силин В.П. Рухадзе А.А. (1961) *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред.* — М.: Атомиздат.
79. Железняков В.В. (1959) *Изв. ВУЗов Радиофизика* **2**, с. 14
80. Шафранов В.Д. (1963) В сб: *Вопросы теории плазмы*, вып. 3. — М.: Атом-

- издат.
81. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А., (1975) *Волны в магнитоактивной плазме.* — М.: Наука.
  82. Шафранов В.Д. (1958) В сб: *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. 4.* — Изд. АН СССР, с. 416
  83. Ландау Л.Д. (1946) *ЖЭТФ*, 16, с. 574
  84. Андронов А.А., Железняков В.В., Петелин М.И. (1964) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 7, с. 251
  85. Бекефи Дж. (1971) *Радиационные процессы в плазме.* — М.: Мир.
  86. Михайловский А.Б. (1963) В сб.: *Вопросы теории плазмы*, вып. 3. — М.: Атомиздат.
  87. Сизоненко В.Л., Степанов К.Н. (1971) *УФЖ*, 15, с. 438
  88. Bernstein I.V. (1958) *Phys. Rev.*, 109, p. 10
  89. Цытович В.Н. (1967) *Нелинейные эффекты в плазме.* — М.: Наука.
  90. Roevleim H. (1961) *Phys. Fluids*, 4, p. 397
  91. Гершман Б.Н. (1964) *ЖТФ*, 34, с. 1351
  92. Storey L.R.O. (1953) *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A246, p. 113
  93. Альфвен Г., Фельхаммер К.-Г. (1967) *Космическая электродинамика.* — М.: Мир.
  94. Гершман Б.Н. (1960) *ЖЭТФ*, 38, с. 912
  95. Tataronis J.A., Crawford F.W. (1970) *J. Plasma Phys.*, 4, p. 231
  96. Zheleznyakov V.V., Zlotnik E.Ya. (1975) *Solar Phys.*, 43, p. 431
  97. Zheleznyakov V.V., Zlotnik E.Ya. (1975) *Solar Phys.*, 44, p. 447
  98. Zheleznyakov V.V., Zlotnik E.Ya. (1975) *Solar Phys.*, 44, p. 461
  99. Ломинадзе Д.Г. (1975) *Циклотронные волны в плазме.* — Мецниереба.
  100. Суворов Е.В., Чугунов Ю.В. (1975) *Астрофизика*, 11, с. 305
  101. Adler, S.L. (1971) *Ann. Phys.*, N.Y., 67, p. 599
  102. Novick, R., Weisskopf, M.C., Angel, J.R.P., Sutherland P.G. (1977) *Astrophys. J.*, 215, L117
  103. Гнедин Ю.Н., Павлов Г.Г., Шибанов Ю.А. (1978) *Письма в ЖЭТФ*, 27, с. 325
  104. Железняков В.В. (1980) *Астрофизика*, 16, с. 539
  105. Павлов Г.Г., Шибанов Ю.А., (1979) *ЖЭТФ*, 76, с. 1457
  106. Барабаненков Ю.Н., Кравцов Ю.А., Рытов С.М., Татарский В.И. (1970) *УФН*, 102, с. 3
  107. Лотова Н.А. (1968) *УФН*, 95, с. 293
  108. Scheuer, P.A. (1968) *Nature*, 218, p. 920
  109. Salpeter, E.E. (1969) *Nature*, 221, p. 31
  110. Ерухимов Л.М., Писарева В.В. (1969) *Изв. ВУЗов. Радиофизика*, 12, с. 900
  111. Ерухимов Л.М. (1972) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 15, с. 821
  112. Rankin J.M., Counselman C.C. (1973) *Astrophys. J.*, 181, p. 875
  113. Шишов В.И. (1974) *Астрон. журн.*, 50, с. 941
  114. Железняков В.В., Злотник Е.Я. (1962) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 5, с. 644
  115. Железняков В.В., Злотник Е.Я. (1963) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 6, с. 634
  116. Гинзбург В.Л., Железняков В.В. (1959) *Астрон. журн.*, 36, с. 233
  117. Татарский В.И. (1967) *Распространение волн в турбулентной атмосфере.* — М.: Наука.
  118. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. (1992) *Электродинамика сплошных сред.* — М.: Наука.
  119. Reule A. (1952) *Naturforsch.*, A7, p. 234
  120. Hewish A., Bell S.J., Pilkington D.H., Scott P.F., Collins R.A. (1968) *Nature*, 217, p. 709



121. Lyne A.G., Rickett B.J. (1968) *Nature*, **218**, p. 326
122. Manchester R.N., Taylor J.H. (1972) *Astrophys. Lett.*, **10**, p. 67
123. Гершман Б.Н., Угаров В.А. (1960) *УФН*, **72**, с. 235
124. Helliwell R.A., Cary J.H., Pope H., Smith J. (1956) *J. Geophys. Res.*, **61**, p. 139
125. Ginzburg V.L. (1943) *J. Phys. USSR*, **7**, p. 289
126. Гинзбург В.Л. (1948) *ЖЭТФ*, **18**, с. 487
127. Голант В.Е., Пилия А.Д. (1971) *УФН*, **104**, с. 413
128. Ерохин Н.С., Моисеев С.С. (1973) В сб: *Вопросы теории плазмы*, вып. 7. — М.: Атомиздат.
129. Кравцов Ю.А. (1968) *ДАН СССР*, **183**, с. 74
130. Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В. (1979) *ЖЭТФ*, **77**, с. 101
131. Cohen M.H. (1960) *Astrophys. J.*, **131**, p. 664
132. Суворов Е.В. (1972) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, **15**, с. 1320
133. Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В. (1980) *Физика плазмы*, **6**, с. 565
134. Кравцов Ю.А., Найда О.Н. (1976) *ЖЭТФ*, **71**, с. 237
135. Budden, K.G. (1952) *Proc. Roy. Soc.*, **215**, p. 215
136. Budden K.G. (1961) *Radio Waves in the Ionosphere*. Cambridge Univ. Press.
137. Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В. (1983) *УФН*, **141**, с. 257
138. Железняков В.В. (1977) *ЖЭТФ*, **73**, с. 560
139. Melrose D.V. (1974) *Australian J. Phys.*, **27**, p. 31
140. Melrose D.V. (1974) *Australian J. Phys.*, **27**, p. 43
141. Железняков В.В., Злотник Е.Я. (1963) *Астрон. журн.*, **40**, с. 633
142. Бреховских Л.М. (1973) *Волны в слоистых средах*. — М.: Наука.
143. Хединг Дж. (1965) *Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)*. — М.: Мир.
144. Stückelberg E.C. (1932) *Helv. Phys. Acta*, **5**, p. 369
145. Денисов Н.Г. (1956) *ЖЭТФ*, **29**, с. 380
146. Денисов Н.Г. (1957) *Уч. зап. Горьк. ун-та. Физика*, **35**, с. 3
147. Железняков В.В., Злотник Е.Я. (1978) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, **20**, N 9
148. Zheleznyakov V.V., Kocharovskii V.V., Kocharovskii V.I. (1996) *Astron. Astrophys.*, **308**, p. 685
149. Harris E.G. (1962) *Nuovo Cim.*, **23**, p. 115
150. Rankin J.M., Campbell D.B., Backer D.C. (1974) *Astrophys. J.*, **188**, p. 609
151. Tanaka H., Kakinuma T. (1959) in: *Paris Symp. on Radio Astronomy*. Stanford Univ. Press. p. 215
152. Cohen M.H. (1961) *Astrophys. J.*, **133**, p. 978
153. Sheridan K.V., McLean D.J., Smerd S.F. (1973) *Astrophys. Lett.*, **15**, p. 139
154. White S.M., Thejappa G., Kundu M.R. (1992) *Solar Phys.*, **138**, p. 163
155. Петерова Н.Г., Ахмедов Ш.Б. (1973) *Астрон. журн.*, **50**, с. 1220
156. Melrose, D.V. (1973) *Proc. Astron. Soc. Australia*, **2**, p. 208
157. Schindler, K.J. (1974) *J. Geophys. Res.*, **79**, p. 2803
158. Galeev, A.A. (1983) in: A.Nishina (Ed.) *Magnetospheric Plasma Physics*. Center for Acad. Publ. Japan, Tokyo. Ch.3, p. 143
159. Gopalswamy, N., Zheleznyakov V.V., White, S.M., Kundu, M. (1994) *Solar Phys.*, **155**, p. 339
160. Шкловский И.С. (1946) *Астрон. журн.*, **23**, с. 333
161. Martyn, D.F. (1947) *Nature*, **159**, p. 26
162. Железняков В.В. (1958) *Астрон. журн.*, **35**, с. 230
163. Железняков В.В. (1965) *Астрон. журн.*, **42**, с. 798
164. Гинзбург В.Л., Озерной Л.М. (1966) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, **9** с. 221

165. Железняков В.В. (1958) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 1 с. 32
166. Железняков В.В. (1959) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 2 с. 858
167. Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский Вл.В. (1980) *ЖЭТФ*, 79, с. 1735
168. Павлов Г.Г., Шибанов Ю.А. (1979) *ЖЭТФ*, 76, с. 1457
169. Железняков В.В., Литвинчук А.А. (1983) *Физика плазмы*, 9, с. 55?
170. Haggis E.G. (1965) *Phys. Rev.*, 138, p. 479
171. Железняков В.В. (1966) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 9, с. 1057
172. Smerd S.F., Westfold K.C. (1949) *Phil. Mag.*, 40, p. 831
173. Pomraning G.C. (1968) *Astrophys. J.*, 153, p. 321
174. Соболев В.В. (1985) *Курс теоретической астрофизики*. — М.: Наука.
175. Соболев В.В. (1956) *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*. — М.: Наука.
176. Соболев В.В. (1972) *Рассеяние света в атмосферах планет*. — М.: Наука.
177. Михалас Д. (1982) *Звездные атмосферы*. — М.: Мир.
178. Dicke R.H., Peebles P.J.E., Roll P.G., Wilkinson D.T. (1965) *Astrophys. J.*, 142, p. 414
179. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. (1967) *Релятивистская астрофизика*. — М.: Наука.
180. Zheleznyakov V.V. (1969) *Astrophys. J.*, 155, p. 1129
181. Mercier R.P. (1964) *Proc. Phys. Soc.*, 83, p. 811
182. Лонгейр М.С., Сюняев Р.А. (1971) *УФН*, 105, с. 41
183. Zheleznyakov V.V. (1983) *Astrophys. Space Sci.*, 97, p. 229
184. Zheleznyakov V.V. (1981) *Astrophys. Space Sci.*, 77, p. 279
185. Зельдович Я.Б., Шакура Н.Н. (1969) *Астрон. журн.*, 46, с. 225
186. Hatanaka T. (1956) *Publ. Astron. Soc. Japan*, 8, p. 73
187. Akabane K., Cohen M.H. (1961) *Astrophys. J.*, 33, p. 258
188. Alissandrakis C.E., Chuideri-Drago F. (1994) *Astrophys. J.*, 428, p. L73
189. Разин В.А. (1958) *Астрон. журн.*, 35, с. 241
190. Гетманцев Г.Г., Разин В.А. (1956) В сб: *Труды 5-го совещания по вопросам космогонии*. — Изд. АН СССР. С. 496
191. Kawabata K. (1964) *Publ. Astron. Soc. Japan*, 16, p. 30
192. Железняков В.В., Суворов Е.В., Шапошников В.Е. (1974) *Астрон. журн.*, 51, с. 243
193. Pacholczyk A.G., Swihart T.L. (1970) *Astrophys. J.*, 161, p. 415
194. Pacholczyk A.G., Swihart T.L. (1975) *Astrophys. J.*, 196, p. 125
195. Сазонов В.Н. (1969) *ЖЭТФ*, 56, с. 1075
196. Сазонов В.Н. (1974) *Астрофизика*, 10, с. 405
197. Сазонов В.Н., Цытович В.Н. (1968) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 11, с. 1287
198. Шапошников В.Е. (1977) *Астрофизика*, 13, с. 385
199. Ерухимов Л.М., Кириш П.И. (1973) *Изв. ВУЗов. Радиофизика*, 16, с. 1783
200. Гельфрейх Г.Б. (1964), *Изв. ГАО*, 23, N. 5, с. 59
201. Ginzburg V.L., Syrovatskii S.I. (1969) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 7, p. 375
202. Ramaty R. (1969) *Astrophys. J.*, 158, p. 753
203. Гнедин Ю.Н., Павлов Г.Г. (1973) *ЖЭТФ*, 65, с. 1806
204. Сазонов В.Н. (1975) *Астрон. журн.*, 52, с. 71
205. Долгинов А.З., Гнедин Ю.Н., Силантьев Н.А. (1979) *Распространение и поляризация излучения в космической среде*. — М.: Наука.
206. Зельдович Я.Б., Левич Е.В., Сюняев Р.А. (1972) *ЖЭТФ*, 62, с. 1392
207. Галеев А.А., Сюняев Р.А. (1972) *ЖЭТФ*, 62, с. 1392
208. Гинзбург В.Л. (1987) *Теоретическая физика и астрофизика*. — М.: Наука.
209. Ginzburg V.L. (1993) in: E.Wolf (ed.) *Progress in Optics*. Elsevier Science Publ.

- 32, p. 267
210. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. (1989) *Квантовая электродинамика*. — М.: Наука.
  211. Гайтлер В. (1956) *Квантовая теория излучения*. — ИЛ.
  212. Melrose D.V. (1972) *Astrophys. Space Sci.*, 18, p. 267
  213. Цытович В.Н. (1973) *Физика плазмы. Труды ФИАН*, 66.
  214. Eidmann K. (1975) *Plasma Phys.*, 17, p. 121
  215. Акопян А.В., Цытович В.Н. (1975) *Физика плазмы*, 1, с. 673
  216. Гинзбург В.Л. (1940) *ЖЭТФ*, 10, с. 589
  217. Андронов А.А. (1961) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 4, с. 861
  218. Cohen M.H. (1961) *Phys. Rev.*, 123, p. 711
  219. Ситенко А.Г., Коломенский А.А. (1956) *ЖЭТФ*, 30, с. 511
  220. Эйдман В.Я. (1961) *ЖЭТФ*, 41, с. 1971
  221. Железняков В.В. (1984) *Итоги науки и техники. Астрономия*, 22, с. 135
  222. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. (1989) *Квантовая механика*. — М.: Наука.
  223. Melrose D.V., Zheleznyakov V.V. (1981) *Astron. Astrophys.*, 95, p. 86
  224. Цытович В.Н. (1951) *Вестник МГУ*, N. 11, с. 27
  225. Гинзбург В.Л., Франк И.М. (1947) *ДАН СССР*, 56, с. 583
  226. Гинзбург В.Л., Эйдман В.Я. (1959) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 2, с. 331
  227. Suvorov E.V., Chugunov Yu.V. (1973) *Astrophys. Space. Sci.*, 23, p. 189
  228. Эйдман В.Я. (1958) *ЖЭТФ*, 34, с. 131
  229. Эйдман В.Я. (1959) *ЖЭТФ*, 36, с. 1335
  230. Железняков В.В. (1964) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 7, с. 67
  231. Гинзбург В.Л., Железняков В.В. (1958) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 1, с. 59
  232. Степанов К.Н., Пахомов В.И. (1960) *ЖЭТФ*, 38, с. 1564
  233. Kirpenheuer K.O. (1950) *Phys. Rev.*, 79, p. 738
  234. Гинзбург В.Л. (1951) *ДАН СССР*, 76, с. 377
  235. Гордон И.М. (1954) *ДАН СССР*, 94, с. 813
  236. Шкловский И.С. (1953) *ДАН СССР*, 90, с. 983
  237. *Синхротронное излучение*. (1966) Под ред. А.А.Соколова и И.М.Тернова. — М.: Наука.
  238. Иваненко Д.Д., Соколов А.А. (1951) *Классическая теория поля*. — Гостехиздат.
  239. Schwinger J. (1949) *Phys. Rev.*, 75, p. 1912
  240. Westfold K.C. (1959) *Astrophys. J.*, 130, p. 241
  241. Джексон Дж. (1965) *Классическая электродинамика*. — М.: Мир.
  242. Гинзбург В.Л. (1953) *УФН*, 51, с. 343
  243. Ginzburg V.L. (1954) *Forschrifte d. Physik*, 1, p. 659
  244. Гинзбург В.Л. (1959) *УФН*, 69, с. 537
  245. Разин В.А. (1960) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 3, с. 584
  246. Разин В.А. (1960) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 3, с. 594
  247. Гинзбург В.Л., Сыроватский С.И. (1966) *УФН*, 87, с. 65
  248. Железняков В.В., Трахтенгерц В.Ю. (1965) *Астрон. журн.*, 42, с. 1005
  249. Каплан С.А., Трахтенгерц В.Ю. (1967), *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 10, с. 14
  250. Feenberg E., Primakoff H. (1948) *Phys. Rev.*, 73, p. 449
  251. Peterson A.M., Hower G.L. (1966) in: В.М.McCormac (Ed.) *Radiation Trapped in the Earth Magnetic Field*. D.Reidel Publ. Co., p. 714
  252. Chugunov Yu.V., Eidman B.A., Suvorov E.V. (1975) *Astrophys. Space. Sci.*, 32, p. 7
  253. Goldreich P., Pacini F., Rees M.J. (1972) *Comments Astrophys. Space Sci.*, 4, p. 23
  254. Greene J. (1959) *Astrophys. J.*, 130, p. 693

255. Гинзбург В.Л., Сыроватский С.И. (1965) *УФН*, 84, с. 201
256. Трубников Б.А. (1958) *ДАН СССР*, 118, с. 913
257. Hirshfield J.L., Baldwin D.E., Brown S.C. (1961) *Phys. Fluids*, 4, p. 198
258. Gnedin Yu.N., Sunyaev R.A. (1973) *Astron. Astrophys.*, 25, p. 233
259. Petrosian V. (1981) *Astrophys. J.*, 251, p. 727
260. Абрамовиц М., Стиган И.А. (1979) *Справочник по специальным функциям*. — М.: Наука
261. Ramaty R., Lingenfelter R.E. (1967) *J. Geophys. Res.*, 72, p. 879
262. Ramaty R., Petrosian V. (1972) *Astrophys. J.*, 178, p. 241
263. Lamb D.Q., Masters A.R. (1979) *Astrophys. J.*, 234, p. L117
264. Trubnikov B.A. (1961) *Phys. Fluids*, 4, p. 195
265. Petrosian V., McTiernan J.M. (1983) *Phys. Fluids*, 26, p. 3023
266. Dulk G.A., Marsh K.A. (1982) *Astrophys. J.*, 259, p. 350
267. Robinson P.A., Melrose D.B. (1984) *Austral. J. Phys.*, 37, p. 675
268. Wild J.P., Hill E.R. (1971) *Austral. J. Phys.*, 24, p. 43
269. Endeau V.G., Allen J.E. (1970) *Nature*, 228, p. 348
270. Гарибян Г.М., Гольдман И.И. (1954) *Изв. АН Арм. ССР*, 7, p. 31
271. Гетманцев Г.Г. (1952) *ДАН СССР*, 83, с. 557
272. Daniel R.R., Stephens C.A. (1970) *Space Sci. Rev.*, 10, p. 599
273. Zheleznyakov V.V., Belyanin A.A. (1994) *Astron. Astrophys.*, 287, p. 782
274. Шкловский И.С. (1953) *ДАН СССР*, 90, с. 983
275. Гинзбург В.Л. (1954) В сб: *Труды 3-го совещания по вопросам космогонии*. — М.: Изд. АН СССР.
276. Гинзбург В.Л. (1946) *ДАН СССР*, 52, с. 491
277. Martyn D.F. (1946) *Nature*, 158, p. 632
278. Martyn D.F. (1948) *Nature*, 193, p. 44
279. Smerd S.F. (1950) *Austral. J. Sci. Res.*, A3, p. 34
280. Bohm D., Gross E.P. (1949) *Phys. Rev.*, 75, p. 1851
281. Bohm D., Gross E.P. (1949) *Phys. Rev.*, 75, p. 1864
282. Шафранов В.Д. (1958) *ЖЭТФ*, 34, с. 1475
283. Гинзбург В.Л., Железняков В.В. (1958) *Астрон. журн.*, 35, с. 694
284. Злотник Е.Я. (1968) *Астрон. журн.*, 45, с. 310
285. Злотник Е.Я. (1968) *Астрон. журн.*, 45, с. 585
286. Силин В.П. *ЖЭТФ*. 1960. Т.38. С.1771.
287. Герцман Б.Н. (1953) *ЖЭТФ*, 24, с. 659
288. Степанов К.Н. (1959) *ЖЭТФ*, 35, с. 283
289. Ахизер А.И., Ахизер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н. (1975) *Коллективные колебания в плазме*. — Атомиздат.
290. Суворов Е.В., Фрайман А.А. (1977) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 20, N. 1
291. Павлов Г.Г., Шибанов Ю.А., Гнедин Ю.Н. (1979) *Письма в ЖЭТФ*, 30, с. 137
292. Zheleznyakov V.V., Zlotnik, E.Ya. (1971) *Solar Phys.*, 20, p. 85
293. Lamb F.K., Sutherland P.G. (1974) in: C.T.Hansen (Ed.) *Physics of Dense Matter*. D. Reidel Publ. Comp., p. 265
294. Field G.B. (1959) *J. Geophys. Res.*, 61, p. 1169
295. Hewitt R.G., Melrose D.B., Rönnmark K.G. (1982) *Austral. J. Phys.*, 35, p. 447
296. Wu C.S. (1985) *Space Sci. Rev.*, 41, p. 215
297. Торка К., Marsh K.A. (1982) *Astrophys. J.*, 254, p. 641
298. Gary D.E., Lynsky J.L. (1981) *Astrophys. J.*, 250, p. 284
299. Железняков В.В. (1963) *Астрон. журн.*, 40, с. 829
300. Железняков В.В. (1962) *Астрон. журн.*, 39, с. 5
301. Kakinuma T., Swarup G. (1962) *Astrophys. J.*, 136, p. 975

302. Zheleznyakov V.V., Zlotnik, E.Ya. (1980) *Solar. Phys.*, **68**, p. 317
303. Железняков В.В., Злотник Е.Я. (1980) *Астрон. журн.*, **57**, с. 778
304. Zheleznyakov V.V., Tikhomirov Yu.V. (1981) *Solar Phys.*, **81**, p. 121
305. Willson, R.F. (1989) *Astrophys. J.*, **298**, p. 911
306. Zheleznyakov V.V., Zlotnik, E.Ya. (1989) *Solar Phys.*, **121**, p. 449
307. Титчмарш Е. (1948) *Введение в теорию интегралов Фурье*. — Гостехиздат.
308. Twiss R.Q. (1951) *Proc. Phys. Soc.*, **B64**, p. 654
309. Sturrock P.A. (1959) *Phys. Rev.*, **112**, p. 1488
310. Веденов А.А. (1963) В сб: *Вопросы теории плазмы*, вып. 3, с. 229
311. Twiss R.Q. (1958) *Austral. J. Phys.*, **11**, p. 564
312. Железняков В.В. (1966) *ЖЭТФ*, **51**, с. 570
313. McCray, R. (1966) *Science*, **154**, p. 1320
314. Litvak A.G., Permitin G.V., Suvorov E.V., Frajman A.A. (1977) *Nucl. Fusion*, **17**, p. 659
315. Zheleznyakov V.V., Serber A.V. (1992) in: W.S.Paciesas G.J.Fishman (Eds.) *Gamma-Ray Bursts. AIP Conf. Proc. No. 265*. AIP, New York. p. 262
316. Сербер А.В. (1990) *Астрон. журн.*, **67**, с. 582
317. Романов Ю.А., Филиппов Г.Ф. (1961) *ЖЭТФ*, **40**, с. 123
318. Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. (1961) *УФН*, **73**, с. 701
319. Drummond, W.E., Pines, D. (1962) *Nucl. Fusion Suppl.*, **3**, p. 1049
320. Ахиезер А.И., Файнберг Я.Б. (1949) *ДАН СССР*, **69**, с. 555
321. Ахиезер А.И., Файнберг Я.Б. (1951) *ЖЭТФ*, **21**, с. 1262
322. Ginzburg V.L., Zheleznyakov V.V. (1965) *Phys. Mag.*, **11**, p. 197
323. Buneman O. (1959) *Phys. Rev.*, **115**, p. 603
324. Сагдеев Р.З. (1964) *Вопросы теории плазмы*, вып. 4. — Атомиздат.
325. Зайцев В.В. (1969) *Изв. ВУЗов. Радиофизика*, **12**, с. 622
326. Rosenbluth M.N., Post R.F. (1965) *Phys. Fluids*, **8**, p. 547
327. Трахтенгерц В.Ю. (1968) *Геомагнетизм и астрономия*, **8**, с. 332
328. Zaitsev V.V., Stepanov A.V. (1975) *Astron. Astrophys.*, **45**, p. 135
329. Galeev A.A. (1967) *J. Plasma Phys.*, **1**, p. 105
330. Иванов А.А., Рудаков Л.И. (1966) *ЖЭТФ*, **51**, с. 1522
331. Веденов А.А., Рютов Д.Д. (1972) В сб.: *Вопросы теории плазмы*, вып. 6. — М.: Атомиздат.
332. Сизоненко В.Л., Степанов А.В. (1965) *ЖЭТФ*, **49**, с. 1197
333. Иванов А.А., Соболева Т.К., Юшманов П.Н. (1975) *ЖЭТФ*, **69**, с. 2023
334. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. (1965) *Физика плазмы*. — Киев. С. 92
335. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д., Шевченко В.И. (1969) *ЖЭТФ*, **57**, с. 966
336. Файнберг Я.Б., Шапиро В.Д. (1964) *ЖЭТФ*, **47**, с. 1389
337. Железняков В.В., Зайцев В.В. (1970) *Астрон. журн.*, **47**, с. 60
338. Железняков В.В., Зайцев В.В. (1970) *Астрон. журн.*, **47**, с. 308
339. Рютов Д.Д., Сагдеев Р.З. (1970) *ЖЭТФ*, **31**, с. 396
340. Zaitsev V.V., Mityakov N.A., Rapoport V.O. (1972) *Solar Phys.*, **24**, p. 444
341. Зайцев В.В., Кунилов М.В., Митяков Н.А., Рапопорт В.О. (1974) *Астрон. журн.*, **51**, с. 252
342. Зайцев В.В. (1974) *Астрон. журн.*, **51**, с. 801
343. Пикельнер С.Б., Гинзбург М.А. (1963) *Астрон. журн.*, **40**, с. 842
344. Зайцев В.В. (1965) *Астрон. журн.*, **42**, с. 740
345. Степанов А.В. (1973) *Астрон. журн.*, **50**, с. 1243
346. Гинзбург В.Л., Железняков В.В., Зайцев В.В. (1969) *УФН*, **98**, с. 201
347. Ginzburg V.L., Zheleznyakov V.V., Zaitsev V.V. (1969) *Astrophys. Space Sci.*, **4**, p. 464
348. Sen H.K. (1952) *Phys. Rev.*, **88**, p. 816

349. Pearlstein L.D., Rosenbluth M.N., Chang D.B. (1966) *Phys. Fluids*, 9, p. 953
350. Slottje C. (1972) *Solar Phys.*, 25, p. 210
351. Kuijpers J. (1975) *Thesis*. Utrecht.
352. Harris E.G. (1959) *Phys. Rev. Lett.*, 2, p. 34
353. Злотник Е.Я. (1973) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 16, с. 1652
354. Злотник Е.Я. (1974) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 17, с. 17
355. Hirschfield J., Bekefi G. (1963) *Nature*, 198, p. 20
356. Schneider J. (1959) *Phys. Rev. Lett.*, 2, p. 504
357. Гапонов А.В. (1959) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 2, с. 450
358. Гапонов А.В. (1959) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 2, с. 836
359. Сагдеев Р.З., Шафранов В.Д. (1960) *ЖЭТФ*, 39, с. 181
360. Железняков В.В. (1960) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 3, с. 57
361. Железняков В.В. (1960) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 3, с. 180
362. Железняков В.В. (1961) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 4, с. 619
363. Железняков В.В. (1961) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 4, с. 849
364. Ковнер М.С. (1960) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 3, с. 631
365. Ковнер М.С. (1960) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 3, с. 746
366. Петелин М.И. (1961) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 4, с. 455
367. Zayed K.E., Kitsenko A.V. (1968) *Plasma Phys.*, 10, с. 147
368. Михайловский А.Б. (1972) В сб: *Вопросы теории плазмы, вып. 6.* — Атомиздат.
369. Братман В.Л., Суворов Е.В. (1968) *ЖЭТФ*, 55, с. 1415
370. Шкловский И.С. (1969) *Астрон. циркуляр*, No. 527, с. 1
371. Железняков В.В. (1969) *УФН*, 99, с. 524
372. Bekefi G., Hirschfield J.L., Brown S.C. (1961) *Phys. Rev.*, 122, p. 1037
373. Железняков В.В. (1967) *Астрон. журн.*, 44, с. 42
374. Железняков В.В., Суворов Е.В. (1968) *ЖЭТФ*, 54, с. 627
375. Сазонов В.Н. (1970) *Астрон. журн.*, 46, с. 1016
376. Neuvaearts M.J. (1968) *Ann. d'Astrophys.*, 31, p. 129
377. Zheleznyakov V.V., Suvorov, E.V. (1972) *Astrophys. Space Sci.*, 15, p. 3
378. Горева Т.А., Суворов Е.В. (1972) *ЖЭТФ*, 62, с. 2147
379. Братман В.Л., Бычков В.В. (1970) *Уч. зап. Горк. ун-та. Сер. радиофиз.*, N. 124, с. 9
380. Wu C.S. (1985) *Space Sci. Rev.*, 41, p. 215
381. Chaikov Yu.E., Mosunov A.N., Prokorpjev A.V. (1993) *Solar Phys.*, 147, 157
382. Кадомцев Б.Б. (1964) В сб.: *Вопросы теории плазмы, вып. 4.* — Атомиздат.
383. Коврижных Л.М. (1966) *Физика плазмы. Труды ФИАН*, 32, с. 173
384. Цытович В.Н. (1971) *Теория турбулентной плазмы.* — Атомиздат.
385. Пустовалов В.В., Силин В.П. (1972) В сб: *Физика плазмы. Труды ФИАН*, 61, с. 42
386. Pauli W. (1923) *Z. Phys.*, 18, p. 272
387. Плачек Г. (1935) *Рэлееское рассеяние и раман-эффект.* — Гостехиздат Украины.
388. Гайлитис А., Цытович В.Н. (1964) *ЖЭТФ*, 46, с. 1455
389. Гайлитис А., Цытович В.Н. (1964) *ЖЭТФ*, 47, с. 1468
390. Melrose D.B., Sy W.N. (1972) *Astrophys. Space Sci.*, 17, p. 343
391. Melrose D.B., Sy W.N. (1972) *Australian. J. Phys.*, 25, p. 387
392. Горбунов Л.М., Силин В.Н. (1964) *Sov. Phys. JETP*, 20, с. 135
393. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. (1984) *Переходное излучение и переходное рассеяние.* — М.: Наука
394. Компанеец А.С. (1956) *ЖЭТФ*, 31, с. 876
395. Цытович В.Н., Шапиро В.Д. (1965) *Ядерный синтез*, 5, с. 228

396. Андронов А.А. (1968) *Диссертация*, Горьковский университет.
397. Трахтенгерц В.Ю. (1968) *Геомагнетизм и астрономия*, 8, с. 966
398. Zaitsev V.V. (1971) *Solar Phys.*, 20, p. 95
399. Зайцев В.В. (1974) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 17, 1438
400. Зайцев В.В. (1970) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 13, с. 837
401. Зайцев В.В., Степанов А.В. (1975) В сб.: *Исследования по геомагнетизму, астрономии и физике Солнца*, вып. 37. — Наука. С. 11
402. Smith D.F., Fung P.C.W. (1971) *J. Plasma Phys.*, 5, p. 1
403. Smith D.F. (1973) *Solar Phys.*, 33, p. 213
404. Bardwell S., Goldman M.V. (1976) *Astrophys. J.*, 209, p. 912
405. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. (1973) *ЖЭТФ*, 65, с. 1818
406. Андронов А.А., Городинский Г.В. (1962) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, 5, с. 234
407. Герценштейн М.Е. (1952) *ЖЭТФ*, 23, с. 678
408. Гинзбург В.Л., Сыроватский С.И. (1964) *ЖЭТФ*, 46, с. 1865
409. Felten J.E., Morrison P. (1966) *Astrophys. J.*, 146, p. 686
410. Blumenthal G.R., Gould R.J. (1970) *Rev. Mod. Phys.*, 42, p. 237
411. Каплан С.А., Цытович В.Н., Чихачев А.С. (1970) *Астрофизика*, 6, с. 463
412. Melrose D.B. (1971) *Astrophys. Space Sci.*, 13, p. 56
413. Зельдович Я.Б. (1975) *УФН*, 115, с. 161
414. Getmantsev G.G., Tokarev, Ю.В. (1972) *Astrophys. Space Sci.*, 18, p. 135
415. Gunn J.E., Ostriker J.P. (1971) *Astrophys. J.*, 165, p. 523
416. Rees M.J. (1971) *Nature*, 229, p. 312
417. Rees M.J. (1971) *Nature Phys. Sci.*, 230, p. 55
418. Weyman R. (1965) *Phys. Fluids*, 8, p. 2112
419. Weyman R. (1966) *Astrophys. J.*, 145, p. 560
420. Sunyaev, R.A., Titarchuk, L.G. (1980) *Astron. Astrophys.*, 86, p. 121
421. Поздняков Л.А., Соболев И.М., Сюняев Р.А. (1982) В сб.: *Итоги науки и техники. Астрономия.*, 21. — М.: ВИНТИ. с. 238
422. Sunyaev R.A., Zel'dovich Ya.B. (1980) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 18, p. 537
423. Felten J.E., Rees M.J. (1972) *Astron. Astrophys.*, 17, p. 226
424. Илларионов А.Ф., Сюняев Р.А. (1972) *Астрон. журн.*, 49, p. 58
425. Arons J. (1972) *Astrophys. J.*, 164, p. 437
426. Zel'dovich, Ya.B., Shakura N.N. (1969) *Астрон. журн.*, 13, с. 175
427. Zel'dovich Ya.B., Sunyaev R.A. (1969) *Astrophys. Space Sci.*, 4, p. 301
428. Chaplin G., Stevens J. (1973) *Astrophys. J.*, 184, p. 1041
429. Shapiro S., Lightman A., Eardley D. (1976) *Astrophys. J.*, 204, p. 187
430. Sunyaev R.A., Trümper I. (1979) *Nature*, 279, p. 506
431. Соболев И.М. (1973) *Численные методы Монте-Карло*. — М.: Наука.
432. Canuto V., Lodenguai J. Ruderman M. (1971) *Phys. Rev. D*, 3, p. 2303
433. Chandrasekhar S. (1945) *Rev. Mod. Phys.*, 17, p. 138
434. Zheleznyakov V.V., Litvinchuk, A.A. (1986) in: *Plasma Astrophysics. Proc. Joint Varenna-Abastumani Int. School Workshop*. ESA Publ. Division, Noordwijk. p. 375
435. Соболев В.В. (1947) *Движущиеся оболочки звезд*. — Ленинград: Изд-во ЛГУ
436. Castor J. (1970) *MNRAS*, 149, p. 111
437. Wang J.C.L., Lamb D.Q., Loredo T.J., et al. (1989) *Phys. Rev. Lett.*, 63, p. 1550
438. Роуландс Дж., Сизоненко В.Л., Степанов К.Н. (1966) *Sov. Phys. JETP*, 23, с. 661
439. Железняков В.В., Сербер А.В. (1991) *Письма в Астрон. журн.*, 17, с. 419
440. Green R.F., Liebert J. (1981) *Publ. Astron. Soc. Pacific*, 93, p. 105
441. Schmidt G.D., Latter W.B., Foltz C.B. (1990) *Astrophys. J.*, 350, p. 758
442. Angel J.P.P. (1974) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 16, p. 487

443. Liebert J. (1976) *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **88**, p. 490
444. Arnaud K.A., Zheleznyakov V.V., Trimble V. (1992) *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **104**, p. 239
445. Беспалов П.А., Железняков В.В. (1990) *Письма в Астрон. журн.*, **16**, с. 1030
446. Murakami, T., (1989) in: *Proc. 29rd ESLAB Symp. on Two Topics in X-ray Astron.* ESA SP-296. p. 173
447. Gnedin Yu.N., Sunyaev R.A. (1974) *Astron. Astrophys.*, **36**, p. 379
448. Железняков В.В. (1987) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, **30**, с. 144
449. Zheleznyakov V.V. (1982) *Astrophys. Space Sci.*, **83**, 81
450. Basko, M.M., Sunyaev, R.A. (1976) *MNRAS*, **175**, p. 395
451. Klein R.I., Stockman H.S., Shevalier R.A. (1980) *Astrophys. J.*, **237**, p. 912
452. Stellingwerf R.F., Buff J. (1982) *Astrophys. J.*, **260**, p. 755
453. Wang Y.-M. (1982) *Astron. Astrophys.*, **112**, p. 24
454. Burger H.L., Katz J.I. (1983) *Astrophys. J.*, **265**, p. 393
455. Соболев В.В. (1957) *Астрон. журн.*, **34**, с. 879
456. Lucy L.B., Solomon P.M. (1970) *Astrophys. J.*, **159**, p. 879
457. Lucy L.B. (1971) *Astrophys. J.*, **163**, p. 95
458. Castor J.I. (1974) *MNRAS*, **169**, p. 279
459. Castor J.I., Abbott D.C., Klein R.I. (1975) *Astrophys. J.*, **195**, p. 157
460. Cassinelli J.R. (1979) *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **17**, p. 273
461. Железняков В.В., Литвинчук А.А. (1987) *Астрон. журн.*, **64**, с. 306
462. Mitrofanov, I.G., Pavlov, G.G. (1982) *MNRAS*, **200**, p. 1033
463. Zheleznyakov V.V., Serber A.V. (1994) *Astrophys. J. Suppl.*, **90**, p. 783
464. Dermer C.D., Sturmer S.J. (1991) *Astrophys. J.*, **382**, p. L23
465. Sturmer S.J., Dermer C.D. (1992) in: W.S.Paciesas G.J.Fishman (Eds.) *Gamma-Ray Bursts. AIP Conf. Proc. No. 265*. AIP, New York. p. 277
466. Zheleznyakov V.V., Serber A.V., Kuijpers, J. (1996) *Astron. Astrophys.* **308**, p. 465
467. Ахиезер А.И., Прохода И.Г., Ситенко А.Г. (1957) *ЖЭТФ*, **33**, с. 750
468. Галеев А.А., Карпман В.И., Сагдеев Р.З. (1965) *Nuclear Fusion*, **5**, с. 20
469. Fernandes F.C.R., Sawant H.S., Zheleznyakov V.V. (1996) *Solar Phys.* **168**. P. 159
470. Zheleznyakov V.V., Zlotnik, E.Ya. (1974) *Solar. Phys.*, **36**, p. 443
471. Кадомцев В.В., Петвиашвили В.И. (1963) *ЖЭТФ*, **43**, с. 2234
472. Самас М., Kantrowitz A.R., Litvak M.M., Patrick R.M., Petchek H.E. (1962) *Nucl. Fusion Suppl.*, Part 2, p. 423
473. Горбунов Л.М., Пустовалов В.В., Силин В.П. (1964) *ЖЭТФ*, **47**, с. 1437
474. Альтшуль Л.М., Карпман В.И. (1965) *ЖЭТФ*, **47**, с. 1552
475. Ахиезер И.А., Данелия Н.Л., Цинцадзе Н.Н. (1964) *ЖЭТФ*, **46**, с. 300
476. Коврижных Л.М., Цытович В.Н. (1964) *ЖЭТФ*, **47**, с. 1454
477. Smith D.F., Sturrock P.A. (1971) *Astrophys. Space Sci.*, **12**, p. 411
478. Melrose D.B. (1975) *Austral. J. Phys.*, **28**, p. 101
479. Злотник Е.Я. (1976) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, **19**, с. 481
480. Трахтенгерц В.Ю. (1970) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, **13**, с. 884
481. Силин В.П. (1964) *ПМТФ*, **1**, с. 31
482. Terashima Y., Yajima N. (1964) *Progr. Theor. Phys.*, **30**, p. 443
483. Зайцев В.В. (1970) *Изв. ВУЗов Радиофизика*, **13**, с. 837
484. Zlotnik E.Ya. (1981) *Astron. Astrophys.*, **101**, p. 250