Российская академия наук
Институт прикладной физики

# Сборник олимпиадных задач по физике

## Нижний Новгород 2004—2013 годы

Нижний Новгород
ИПФ РАН
2014

УДК 53(076)
ББК 22.3я7
С23

С о с т а в и т е л и:

*А. В. Афанасьев, канд. физ.-мат. наук В. В. Клиньшов,
канд. физ.-мат. наук А. М. Рейман*

Под редакцией

*канд. физ.-мат. наук **А. М. Реймана***

С23 **Сборник** олимпиадных задач по физике, Нижний Новгород, 2004—2013 годы / составители: А. В. Афанасьев, В. В. Клиньшов, А. М. Рейман ; под ред. А. М. Реймана. — Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2014. — 116 с.

ISBN 978-5-8048-0090-2

Сборник содержит условия и развернутые решения теоретических и экспериментальных задач, которые предлагались на городских олимпиадах по физике Нижнего Новгорода в 2004—2013 гг., проводившихся Институтом прикладной физики РАН и Департаментом образования администрации г. Нижнего Новгорода.

Сборник может быть полезен учащимся 8—11-х классов общеобразовательных школ, лицеев и гимназий, заинтересованным в углубленном изучении курса физики и подготовке к выступлениям на олимпиадах по физике, а также учителям и студентам младших курсов физических специальностей высших учебных заведений.

**УДК 53(076)**
**ББК 22.3я7**

**ISBN 978-5-8048-0090-2**

## Содержание

## *ПРЕДИСЛОВИЕ*

Десять лет назад, в 2004 году, было принято решение о возрождении городских олимпиад по физике, которые в нашем городе не проводились достаточно давно. Инициаторами проведения таких олимпиад стали дирекция Института прикладной физики РАН и Департамент образования и социально-правовой защиты детства администрации Нижнего Новгорода. Целями и задачами олимпиады являются: пропаганда научных знаний и развитие у учащихся интереса к научной деятельности; создание необходимых условий для выявления одаренных детей; активизация работы факультативов, спецкурсов, кружков; повышение уровня преподавания предметов естественнонаучного цикла в школах Нижнего Новгорода.

За эти десять лет олимпиада стала хорошей городской традицией, а ее первые призеры — студентами и аспирантами. Первое издание сборника задач вышло к первому «юбилею» олимпиады — пятилетию. В это издание мы решили включить не только задачи нового пятилетия (авторы задач — В. В. Клиньшов и А. В. Афанасьев), но и задачи из первого издания.

Предметная комиссия олимпиады признательна директору ИПФ РАН академику А. Г. Литваку и научному руководителю ИПФ РАН академику А. В. Гапонову-Грехову за постоянную поддержку. Мы благодарны оргкомитету олимпиады – профессору А. И. Смирнову, Т. А. Фейгиной, сотрудникам Департамента образования администрации Нижнего Новгорода И. Б. Тарасовой, С. Л. Сидоркиной, М. И. Цветкову, И. Л. Бовкун, без которых невозможно было бы организовать и провести эти мероприятия, собирающих каждый год 150—170 участников. Мы благодарим неизменных участников проверки работ А. В. Кочетова (ИПФ РАН), студентов ВШОПФ ННГУ и аспирантов ИПФ РАН, призеров олимпиад по физике прошлых лет.

Настоящий сборник содержит задачи и авторские решения за все 10 лет. Задачи сгруппированы и пронумерованы по классам и годам (первая цифра номера задачи — класс, вторая — номер задачи в текущем году, третья цифра — год олимпиады: например, 8.1-06 означает первую задачу 2006 года для 8-го класса).

Надеемся, что этот сборник окажется полезен школьникам и учителям при подготовке к олимпиадам различных уровней.

*А. М. Рейман,*
председатель предметной
комиссии олимпиады

# УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

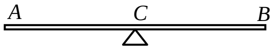
## 8 КЛАСС

### 8.1-04. Три тела (*8 баллов*)

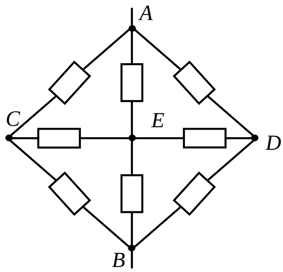
Имеются три тела одинаковой теплоемкости, нагретые до разных температур. Если первое тело привести в тепловой контакт со вторым телом, то устанавливается температура $T_1$. Если первое тело привести в тепловой контакт не со вторым, а с третьим телом, то устанавливается температура $T_2$. Если же в контакт привести второе и третье тела, то устанавливается температура $T_3$. Какой будет установившаяся температура при тепловом контакте всех трех тел?

### 8.2-04. Стержень (*10 баллов*)

Тонкий стержень длиной 2 м уравновешен на подставке в точке $C$: $AC = CB = 1$ м. Участок стержня $AC$, согнув посередине, сложили вдвое. На сколько нужно сдвинуть точку опоры, чтобы восстановить равновесие?




### 8.3-04. Схема (*12 баллов*)




В схеме, приведенной на рисунке, все резисторы имеют одинаковые номиналы и напряжение подведено к точкам $A$ и $B$. Токи, протекающие через резисторы, близки к предельно допустимым, и в некоторый момент перегорает резистор $AE$. Во сколько раз уменьшится мощность, выделяющаяся в схеме? (***2 балла***) Через некоторое время вслед за $AE$ перегорает резистор $AD$. Какой резистор перегорит следующим? (***3 балла***) В случае, если вторым перегорит резистор $BD$, какой перегорит следующим? (***7 баллов***).

### 8.4-04. Тяжелая цепочка (*10 баллов*)

Тяжелая цепочка, переброшенная через невесомый блок, начинает проворачивать его, когда длины свешивающихся концов отличаются на 0,2 общей длины цепочки. Эту же цепочку перебрасывают через блок симметрично. Какую часть цепочки следует отделить от одного из концов, чтобы снова вызвать проворачивание блока? Считать, что цепочка не проскальзывает по блоку и сила трения в оси блока пропорциональна весу цепочки.

### 8.1-05. Трубки (*8 баллов*)

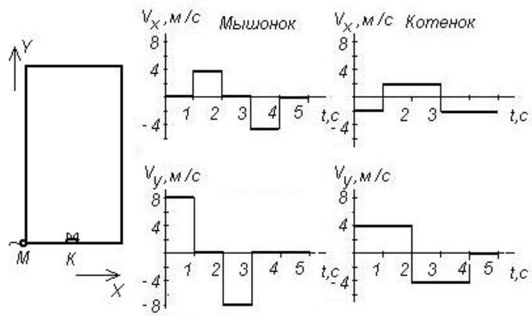
Необходимые для некоторых исследований (например, для операций в живой клетке) микротрубки изготавливают при помощи многократного растягивания стеклянной заготовки соответствующего профиля, нагретой до температуры размягчения; при этом за одно растягивание диаметр можно уменьшить в 100 раз. Во сколько раз увеличилась бы длина трубки с первоначальным диаметром 10 см за четыре операции, если заготовку не обламывать по мере растягивания? Можно ли повторить подобную операцию 5 раз? Считайте, что нагретое стекло практически полностью сохраняет свой объем при деформации.

### 8.2-05. Плотик из пузырей (*10 баллов*)

Пустой закупоренный двухлитровый пластиковый пузырь из-под напитков, плавая, вытесняет около 100 мл воды. Сколько таких закупоренных пузырей потребуется связать вместе, чтобы удержать на плаву ребенка массой 40 кг? Предложите конструкцию плотика, который позволит ребенку плавать, не намочив одежду, если на воде рябь высотой до 5 см.

### 8.3-05. Мышонок и котенок (*10 баллов*)

На полу пустого хранилища прямоугольной формы размером 4 × 8 м в углу (точка *M*) сидит в своей норке мышонок, а в точке *K* на середине короткой стороны — котенок (см. рисунок). В момент времени $t$ = 0 они одновременно начинают бежать. Зависимость проекций их скоростей на координатные оси от времени показана на рисунке. Сумеет ли котенок перехватить мышонка за указанное на рисунке время? На сколько короче путь котенка?




### 8.4-05. Соль (*12 баллов*)

Кристалл соли, подвешенный на пружинных весах, опускают в пробирку с водой. Во сколько раз будут различаться показания весов сразу после погружения и после того, как растворится половина кристалла, если известно, что объем воды в пробирке втрое больше первоначального объема кристалла, а при растворении соли в воде объем раствора равен сумме объемов воды и соли?

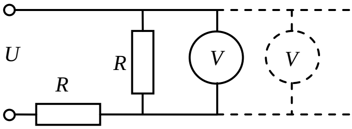
### 8.1-06. Две баржи (*8 баллов*)

У пристани пришвартованы две баржи одинаковой формы, одна из которых имеет в три раза большие ширину и длину. Когда груз погрузили на малую баржу, ее осадка (глубина погружения) увеличилась на 18 см. Как изменится осадка второй баржи, если на нее погрузить груз вдвое большего веса?

### 8.2-06. Плотность пены (*12 баллов*)

В пузырьке из-под шампуня осталось немного жидкости. Какой будет плотность пены, получившейся после встряхивания пузырька, если известно, что масса газа (воздуха) составляет долю $\alpha = 0{,}5$ от массы всего содержимого? Плотность газа $\rho_г = 1{,}3$ г/л, плотность жидкости $\rho_ж = 1100$ г/л.

### 8.3-06. Вольтметры (*12 баллов*)

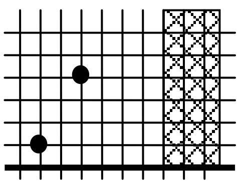



В схеме, приведенной на рисунке, напряжение источника питания $U$ = 100 В, сопротивления резисторов $R$ = 10 Ом. Подключенный к одному из сопротивлений вольтметр показывает напряжение $U_1$ = 49,75 В. Что покажет последний вольтметр, если их подключить $n$ = 10 штук? Все вольтметры одинаковые.

### 8.4-06. Способ охлаждения салона автомобиля (*8 баллов*)

В жаркий солнечный день основное количество тепла в кабину автомобиля поступает в виде энергии излучения солнца — почти $J_0 \approx 1$ кВт/м$^2$. Укроем крышу автомобиля слоем испарителя, впитывающим влагу. Какое минимальное количество воды нужно испарять за 1 час, чтобы температура в салоне оставалась постоянной? Укажите возможные недостатки такого способа охлаждения. Площадь крыши около 2 м$^2$, удельная теплота испарения воды 2,4 МДж/кг.

### 8.1-07. Внук и дедушка (*8 баллов*)



Внук и дедушка живут в соседних деревнях, расположенных в поле. Внук решил отправиться к дедушке в гости, но перед этим искупаться в реке и набрать немного ягод на опушке леса. На карте изображены дома внука и дедушки (темные точки), река (жирная линия) и лес (заштрихованная область). Координатная сетка имеет шаг, равный 500 м. Нарисуйте траекторию, по которой должен двигаться внук, чтобы пройти как можно меньший путь, и найдите этот путь.

### 8.2-07. Волк и заяц (*10 баллов*)

Старый волк караулит зайца, который в некоторый момент должен выбежать из одной норки и добежать до другой. Норки расположены на некотором расстоянии друг от друга в поле. Волк бегает в два раза медленнее зайца. Нарисуйте на поле область, в которой должен находиться волк, чтобы поймать зайца.

### 8.3-07. Корабль в шлюзе (*10 баллов*)

Во время нахождения судна в шлюзе в трюме образовалась течь, которая была замечена, когда судно погрузилось в воду на 10 см ниже ватерлинии. Воду из трюма сразу стали откачивать насосами со скоростью 1000 литров в минуту. Площадь шлюза равна 2000 м$^2$, площадь сечения судна — 500 м$^2$. Определить скорость изменения уровня воды в шлюзе. (***5 баллов***) Через какое время ватерлиния судна покажется из-под воды? (***5 баллов***)

### 8.4-07. Калориметр (*12 баллов*)

В калориметр налили 500 г воды при 10 °С, положили в воду льдинку массой 160 г при 0 °С, а на нее — кусочек стали массой 10 г, разогретый до 100 $^{\circ}$С. Утонет ли льдинка со сталью после установления равновесия? Считать, что льдинка не переворачивается. Теплоемкость воды равна 4200 Дж/(кг · °С), стали — 460 Дж/(кг · °С), теплота плавления льда равна 3,3 · 10$^5$ Дж/кг, плотность льда — 900 кг/м$^3$, плотность стали — 7800 кг/м$^3$.

### 8.1-08. Автобус (*14 баллов*)

Автобус двигается по кольцевому маршруту $A$-$B$-$C$-$A$. Все расстояния между пунктами остановок равны ($AB = BC = CA$). Средняя скорость движения из $A$ в $C$ через $B$ равна $V_1$. Средняя скорость движения из $B$ в $A$ через $C$ равна $V_2$. Средняя скорость движения из $C$ в $B$ через $A$ равна $V_3$. Найти среднюю скорость прохождения каждого расстояния между остановками ($AB$, $BC$, $CA$) (***10 баллов***) и всего круга маршрута целиком (***4 балла***).

### 8.2-08. Ледяной кубик (*8 баллов*)

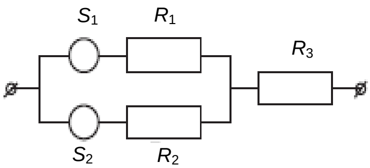
Ко дну стакана площадью 40 см$^2$ (диаметром примерно 7 см) приморожен ледяной кубик с длиной ребра 4 см. Стакан заливают теплой водой так, что она покрывает кубик. Как изменится уровень воды в стакане после того, как кубик всплывет и растает? Плотность воды 1 г/см$^3$, плотность льда — 0,9 г/см$^3$.

## 8.3-08. Паровой двигатель (*10 баллов*)

Котел экспериментального парового двигателя имеет объем $V$ = 10 л и вначале полностью заполнен водой. Котел нагревается с помощью сжигания угля, при этом к нему подводится мощность $P$ = 10 кВт. Образующийся пар совершает работу в паровом двигателе, и 95 % его массы возвращаются в котел в виде воды при температуре 20 ºС. Определить, через какое время котел опустеет наполовину. Теплота парообразования воды $L$ = 2,26 МДж/кг, удельная теплоемкость воды $c$ = 4200 Дж/(кг · ºС).

## 8.4-08. Электрическая схема (*8 баллов*)

Электрик собрал следующую схему, где $R_1$ = 1 кОм, $R_2$ = 2 кОм, $R_3$ = 1 кОм, $S_{1,2}$ — плавкие предохранители, рассчитанные на максимальный ток 100 мА. На схему подают напряжение $U$, начиная с нулевого значения и постепенно его увеличивая. Построить график тока через схему в зависимости от напряжения. Сопротивлением предохранителей пренебречь.




## 8.1-09. Гудки поезда (*8 баллов*)

Поезд, движущийся от станции $A$ к станции $B$ по прямой со скоростью $v$ = 33 м/с, издает короткие гудки с интервалом $T$ = 10 с. С какой периодичностью слышны эти гудки на станции $A$? (***4 балла***) На станции $B$? (***4 балла***) Скорость звука в воздухе равна 330 м/с.

## 8.2-09. Река (*10 баллов*)

Рыбак переплыл реку на моторной лодке, направляя нос лодки перпендикулярно течению, за $t_1$ = 10 мин. Затем он плыл вдоль берега против течения в течение $t_2$ = 5 мин, после чего снова переплыл реку тем же способом и обнаружил, что оказался в исходной точке. Какова скорость течения реки, если скорость движения лодки по неподвижной воде составляет $v$ = 10 км/ч?

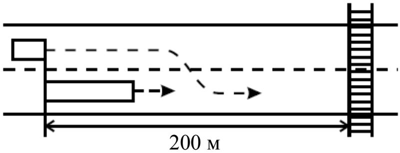
## 8.3-09. Кубик в стакане (*12 баллов*)

В стакан с площадью сечения 50 см$^2$ налиты слой воды толщиной 10 см и слой масла толщиной 1 см. Плотность воды равна 1 г/см$^3$, а плотность масла — 0,8 г/см$^3$. В стакан опускается кубик с длиной ребра 5 см, сделанный из дерева плотностью 0,5 г/см$^3$. Найти, на какую высоту кубик будет выступать из масла.

## 8.4-09. Эксперимент с плавлением льда (*10 баллов*)

Экспериментатор пытается определить удельную теплоемкость льда. Для этого он охлаждает $m_1$ = 0,1 кг льда до температуры $t_1 < 0$ °С и помещает в термостат, где находится $m_2$ = 0,2 кг горячей воды, после чего измеряет установившуюся температуру воды $t_2$. После проведения серии экспериментов, в которой вода каждый раз нагревалась до одной и той же температуры, а температура льда $t_1$ менялась, оказалось, что установившаяся температура воды в градусах Цельсия выражается следующим образом: $t_2 = 40 + 0{,}167t_1$. Определить удельную теплоемкость льда, если удельная теплоемкость воды $c_2$ = 4200 Дж/(кг · К), а теплоемкость термостата пренебрежимо мала.

## 8.1-10. Обгон (*8 баллов*)




Правила дорожного движения запрещают совершать обгон с выездом на полосу встречного движения менее чем за 100 метров до железнодорожного переезда. Также запрещено движение со скоростью более 60 км/ч в населенных пунктах.

Водитель легкового автомобиля решил начать обгон грузовика, движущегося со скоростью 55 км/ч, находясь на расстоянии 200 м до переезда в населенном пункте (см. рисунок). Сможет ли он завершить маневр, не нарушив правил? Длина легкового автомобиля составляет 3 м, а грузовика — 7 м.

## 8.2-10. Велосипедист и щенок (*8 баллов*)

Велосипедист едет по окружности радиуса $r$ с постоянной по модулю скоростью $v$. Щенок замечает велосипедиста, находясь в центре окружности, и начинает бежать к нему. В дальнейшем щенок всегда бежит по направлению к велосипедисту с постоянной по модулю скоростью $u$. Определить, по какой траектории будет двигаться щенок спустя большой промежуток времени, если известно, что догнать велосипедиста ему так и не удалось.

## 8.3-10. Стакан в сосуде (*12 баллов*)

Порожний стакан емкостью 200 мл плавает в большом сосуде, до краев заполненном водой. После того как в стакан долили некоторое количество масла, через края большого сосуда вылилось 140 мл воды, а стакан погрузился в воду до краев. Определить массу стакана. Плотность воды равна 1000 кг/м$^3$, масла — 800 кг/м$^3$, стекла — 2500 кг/м$^3$.

## 8.4-10. Калориметр (*12 балов*)

В калориметр поместили 1 кг льда при неизвестной температуре, после чего содержимое калориметра нагрели на $\Delta t$ = 10 °С, подведя к нему некоторое количество теплоты $Q$. Определите, в каких пределах может находиться величина $Q$. Известными считать следующие величины: теплоемкость льда 2,1 кДж/(кг · °C), теплоемкость воды 4,2 кДж/(кг·°C), теплота плавления льда 330 кДж/кг.

### 8.1-11. Миротворец (*8 баллов*)

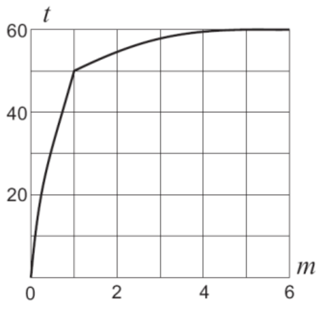
Вася и Петя двинулись друг навстречу с противоположных концов улицы длиной 100 м с твердым намерением подраться, причем Вася шел со скоростью 3 км/ч, а Петя — со скоростью 2 км/ч. Проходивший в это время мимо Васи Миша решил примирить приятелей и не допустить драки. Для этого он побежал от Васи к Пете, от Пети — сразу же обратно к Васе, и продолжал таким образом бегать со скоростью 10 км/ч от одного противника к другому, уговаривая их решить конфликт мирным путем. В конце концов, благодаря миротворческим усилиям Миши, Вася и Петя передумали драться и остановились на расстоянии 25 м друг от друга. Какое расстояние пробежал за это время Миша?

### 8.2-11. Кораблик (*8 баллов*)

Мальчик построил игрушечный кораблик, вбив в центр тонкой прямоугольной доски площадью 140 см$^2$ в качестве мачты гвоздь массой 55 г. Когда кораблик спустили на воду, палуба находилась на высоте 5 мм от поверхности воды. В результате волнения кораблик перевернулся. На какой высоте над уровнем воды будет находиться дно кораблика, когда волнение стихнет? Плотность железа 7,874 г/см$^3$.

### 8.3-11. Теплоемкость жидкости (*12 баллов*)

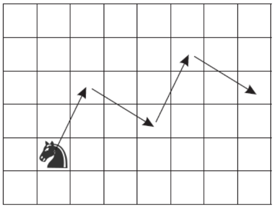
Про некоторую жидкость известно, что ее удельная теплоемкость равна $c_1$ при температуре меньше некоторой величины $t_0$ и равна $c_2$ при температуре, превышающей $t_0$. Для исследования свойств данной жидкости проводится следующий эксперимент: берут два термостата с жидкостью при различных температурах и постепенно переливают жидкость из второго термостата в первый, измеряя зависимость температуры $t$ в первом термостате от массы $m$ перелитой жидкости. График зависимости имеет вид, представленный на рисунке. Температура отложена в градусах Цельсия, масса — в килограммах. Определить величину $t_0$ (***4 балла***) и отношение $c_1/c_2$ (***8 баллов***). Известно, что в первом термостате изначально был 1 кг жидкости.



### 8.4-11. Поездка (*12 баллов*)

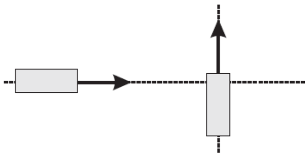
Водитель начинает движение по длинному прямолинейному участку дороги ровно в полдень. Он решает двигаться таким образом, чтобы проезжать километровые столбы каждую минуту (в 12:01,12:02 и т. д.). Проезжая очередной столб, водитель проверяет соответствие реального и запланированного времени его проезда. В случае отставания от графика он рассчитывает скорость дальнейшего движения таким образом, чтобы компенсировать отставание к моменту проезда следующего столба. Эта скорость устанавливается на спидометре и не меняется до следующего столба. Через некоторое время водитель заметил, что, несмотря на такую корректировку, он подъезжает к каждому столбу с постоянным опозданием $\tau$. Определить величину $\tau$, если спидометр автомобиля показывает скорость на 10 % больше реальной (водителю об этом неизвестно).

### 8.1-12. Конь (*10 баллов*)



По бесконечной шахматной доске, состоящей из клеток размером 5 × 5 см, передвигается конь. При первом ходе конь перемещается на одну клетку вправо и две вверх, при втором ходе — на две клетки вправо и одну вниз, третий ход повторяет первый, четвертый повторяет второй и т. д. Каждую минуту конь совершает десять ходов. Определить расстояние, на которое переместится конь за один час.

### 8.2-12. Перестрелка (*10 баллов*)



При тестировании новейшего вооружения два броневика двигались со скоростями 72 км/ч во взаимно перпендикулярных направлениях. Один из броневиков открыл огонь из секретного оружия в направлении движения, после чего на борту второго было обнаружено несколько следов от пуль, расположенных на расстоянии 76 см друг от друга. Определить темп стрельбы оружия, если скорость вылета пуль из его ствола составляет 500 м/с.

### 8.3-12. Воздушный шар (*10 баллов*)

Воздушный шар, наполненный гелием, летел на постоянной высоте, когда в его оболочке внезапно образовалась дыра, из которой с постоянной скоростью 10 м/с начал выходить гелий. Воздухоплаватель для поддержания шара на постоянной высоте вынужден был высыпать из корзины песок — по 40 кг песка в час. Определить площадь дыры. Плотность гелия равна 0,18 кг/м$^3$, а плотность воздуха 1,29 кг/м$^3$.

### 8.4-12. Нагреватель (*10 баллов*)

В теплоизолированный сосуд с водой высыпали некоторое число одинаковых железных дробинок, температура которых была на 10 градусов ниже температуры воды. Для восстановления исходной температуры в сосуде на некоторое время был включен нагревательный элемент. Если бы число дробинок было на 100 больше, то нагреватель необходимо было бы включить на полминуты дольше. Определить мощность нагревателя. Удельная теплоемкость железа равна 460 Дж/(кг · ºС), масса одной дробинки 3 г.

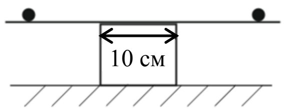
### 8.1-13. Бегун (*10 баллов*)

Бегун бежит по периметру квадрата с постоянной по модулю скоростью. Через минуту после начала движения из угла квадрата модуль средней скорости бегуна по перемещению оказался в два раза меньше его средней путевой скорости. За какое время бегун обежит весь квадрат?

### 8.2-13. Суп (*10 баллов*)

Сосуд с $m_в$ = 10 кг воды, в которой растворено $m_с$ = 200 г соли, нагревают с постоянной мощностью $P$ = 9,375 кВт. В момент закипания воды в нее поместили тело неизвестной плотности, которое погрузилось на дно сосуда. Через $t$ = 20 мин после закипания воды тело всплыло на поверхность. Определить плотность тела. Плотность соленой воды при температуре кипения определяется формулой $\rho = \rho_0(1 + \alpha s)$, где $\rho_0$ = 958 кг/м$^3$, $\alpha = 75 \cdot 10^{-5}$, $s$ — соленость воды в промилле, то есть масса соли в граммах, приходящаяся на единицу массы воды в килограммах. Температура кипения и теплота парообразования $L$ = 2250 кДж/кг не зависят от солености воды.

### 8.3-13. Жуки (*10 баллов*)




На прямоугольной коробке шириной 10 см лежит невесомая жесткая соломинка, на обеих сторонах которой находятся два жука разной массы. Жук слева сидит в одной точке на расстоянии 10 см от ближайшего к нему края коробки, а жук справа может перемещаться по соломинке. Если правый жук приблизится к коробке ближе, чем на 5 см, соломинка потеряет устойчивость и начнет переворачиваться против часовой стрелки в плоскости рисунка. Определить наибольшее расстояние, на которое правый жук может удалиться от коробки так, чтобы соломинка не перевернулась.

### 8.4-13. Моторная лодка (*10 баллов*)

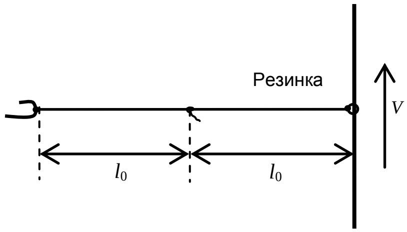
На спокойной воде моторная лодка развивает скорость 20 км/ч. За какое время она сможет переплыть реку шириной 1 км так, чтобы попасть в точку на противоположном берегу, находящуюся строго напротив исходной точки? Скорость течения составляет 10 км/ч.

## 9 КЛАСС

### 9.1-04. Схема (*10 баллов*)

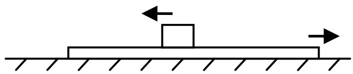
См. условие задачи 8.3-04 (за последний вопрос ***5 баллов***).

### 9.2-04. Резинка (*8 баллов*)



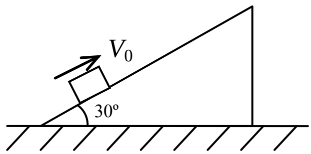

Кольцо, привязанное к неподвижному крючку с помощью связанных между собой шнура и резинки, может скользить без трения по прямой спице (см. рисунок). Длина резинки в недеформированном состоянии и длина шнура одинаковы и равны $l_0$, расстояние от крючка до спицы $2l_0$. Кольцо двигают по спице с постоянной скоростью $V$. Считая, что при $t = 0$ кольцо находилось на кратчайшем расстоянии от крючка, найти момент времени, в который скорость узелка составляет 1/3 от скорости кольца.

### 9.3-04. Брусок (*10 баллов*)



На горизонтальном столе находится доска, на которую положили брусок. Доске и бруску сообщили одинаковые по величине и противоположные по направлению скорости (см. рисунок). Коэффициент трения между бруском и доской в 4 раза превышает коэффициент трения между доской и столом. При каком отношении масс бруска и доски перемещение бруска относительно стола окажется в итоге равным нулю?

### 9.4-04. Клин (*12 баллов*)

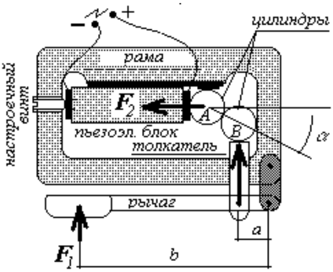



Кубику сообщили скорость $V_0$ вверх вдоль поверхности гладкого клина (см. рисунок). Угол при основании клина 30°, массы кубика и клина одинаковы, трение между клином и горизонтальной поверхностью стола отсутствует. Какого минимального значения достигает скорость кубика при его скольжении по поверхности клина?

## 9.1-05. Два тягача (*10 баллов*)

Тягач мощностью 1000 л. с. может на ровной дороге сообщить груженой платформе скорость до 40 км/ч. Какой мощности тягач нужно поставить последовательно в сцепку с имеющимся, чтобы повысить скорость перевозки платформы до 60 км/ч? Считайте, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, с коэффициентом пропорциональности, одинаковым для обоих тягачей.

## 9.2-05. Зажигалка (*10 баллов*)



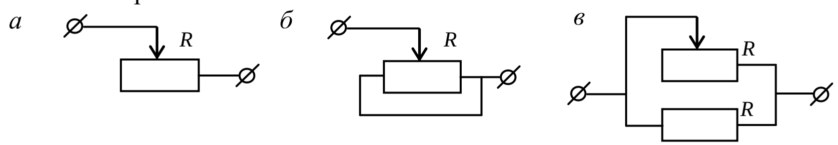

Искра в кухонной пьезоэлектрической зажигалке образуется при сильном, но плавном сжатии в продольном направлении блока из кристаллического материала (титанат-цирконат свинца), при этом между его посеребренными торцами возникает большое электрическое напряжение (около 15 кВ). Механизм создания значительной силы сжатия упрощенно изображен на рисунке. При нажатии на рычаг толкатель нажимает на первый из пары цилиндров из закаленной стали ($B$), а тот в свою очередь упирается в раму и в другой цилиндр ($A$), имеющий контакт с торцом пьезоэлектрического блока. Рассчитайте по приведенным данным, во сколько раз сила $F_2$ больше силы $F_1$. Параметры зажигалки: $a$ = 10 мм, $b$ = 80 мм, угол между осью конструкции и линией, соединяющей центры цилиндров, $\alpha$ = 10°.

## 9.3-05. Сосульки (*12 баллов*)

На краю крыши висят две геометрически подобные сосульки конической формы разной длины. После резкого потепления от $t_1$ = 0 °C до $t_2$ = 10 °C меньшая сосулька длиной $l$ = 10 см растаяла за время $\tau$ = 2 ч. За какое время $\tau_1$ растает бо́льшая сосулька длиной $L$ = 30 см, если внешние условия не изменятся?

## 9.4-05. Реостат (*8 баллов*)

Ученику поручили исследовать сопротивление схемы с реостатом. Он собрал несколько схем, представленных на рисунке, и нарисовал графики зависимостей общего сопротивления схемы от сопротивления правой части реостата (после движка). Какие зависимости получил ученик и какие графики он построил?



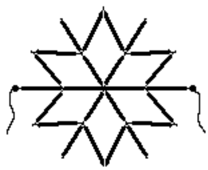
**9.1-06. Полет Винни-Пуха (*10 баллов*)**

Винни-Пух висит на воздушном шарике на некоторой высоте. После выстрела Пятачка Пух начинает падать вниз так, что его ускорение увеличивается на всем пути линейно от нуля до ускорения свободного падения $g$ = 10 м/с. Через 2 секунды Винни-Пух с ускорением $g$ шлепается на землю. Найдите скорость приземления Пуха.

**9.2-06. Бруски (*8 баллов*)**

Маленький брусок соскальзывает с горки и проходит до основания расстояние $S_1$. У основания этой горки он сталкивается с другим неподвижным бруском и останавливается. При этом второй брусок начинает двигаться с той же скоростью, которую имел первый брусок перед столкновением, и проходит до остановки путь $S_2$. Определите ускорения тел на обоих участках, если полное время движения оказалось равным $T$.

**9.3-06. Горячая снежинка (*10 баллов*)**



Для обогревания зала используются 24 трубчатых электронагревательных элемента мощностью по 3,5 кВт каждый при напряжении 220 В. К празднованию Нового года все нагреватели решили собрать в красивую снежинку. На приведенном рисунке показана схема включения этой гирлянды. Какую общую мощность будет иметь такая горячая снежинка? Какие нагреватели в ней будут нагреты сильнее всего?

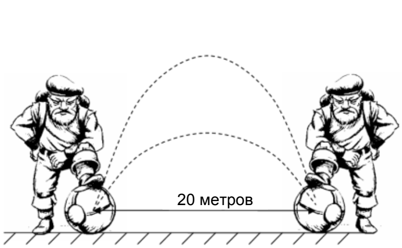
**9.4-06. Провод на морозе (*12 баллов*)**

Провод, натянутый между двумя опорами, расположенными на расстоянии 50 м друг от друга, при температуре воздуха –30 °С провисает на 20 см. Как изменится глубина провисания, когда на улице потеплеет до 0 °С? Во сколько раз изменится при этом натяжение провода? Форму провисания считайте для удобства треугольной. Коэффициент линейного расширения материала провода $17 \cdot 10^{-6}$ °С$^{-1}$.

**9.1-07. Волк и заяц (*8 баллов*)**

См. условие задачи 8.2-07.

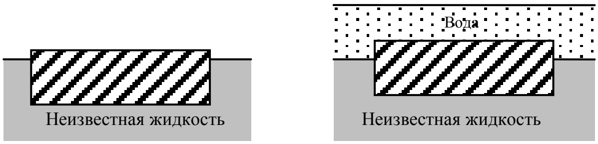
**9.2-07. Два гнома (*10 баллов*)**




Два гнома находятся на горизонтальной площадке на расстоянии $L$ = 20 м друг от друга. Они одновременно бросают друг другу шары одинакового размера с равными по величине начальными скоростями. При этом каждый шар в итоге попадает точно в исходное положение бросания другого шара. Шары изготовлены из особых магических веществ, таких что при соприкосновении этих шаров происходит сильнейший взрыв. Один из гномов всегда бросает шар под углом 40° к горизонту. Определить максимально возможный размер шаров, чтобы королевство гномов жило спокойно.

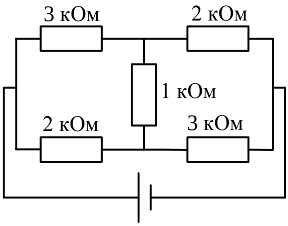
## 9.3-07. Плавающий брусок (*10 баллов*)

Брусок из неизвестного материала плавает в некоторой неизвестной жидкости, выступая над ее поверхностью на $\alpha = 20$ %. Сверху аккуратно долили слой воды так, что жидкости не смешались. Брусок всплыл. В новом положении он выступает на $\beta = 40$ % над уровнем неизвестной жидкости, но в то же время полностью находится под свободной поверхностью воды. Определить плотности бруска и неизвестной жидкости (***5 баллов***). Откачав частично слой воды, оставив только слой толщиной 1 см, заметили, что брусок погрузился в неизвестную жидкость до уровня $\gamma = 30$ %. Определить толщину бруска (***5 баллов***).




## 9.4-07. Электрический мост (*12 баллов*)

К мостовой схеме с заданными номиналами резисторов (см. рисунок) подключен источник питания с ЭДС 170 В. Определить токи, текущие через резисторы (***8 баллов***). Через некоторое время резистор с сопротивлением 1 кОм перегорает. Во сколько раз изменится мощность, потребляемая схемой? (***4 балла***)



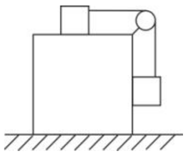

## 9.1-08. Два тела (*8 баллов*)

Два тела начинают равноускоренное движение по прямой из точки $A$ в точку $B$. Первое тело достигает точки $B$ за вдвое большее время, чем второе. Найти расстояние $AB$, если известно, что через секунду после начала движения скорость второго тела была на 6 м/с больше скорости первого, а конечная скорость второго тела больше конечной скорости первого на 10 м/с.

## 9.2-08. Скользящий треугольник (*12 баллов*)

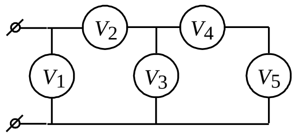
Равносторонний треугольник $ABC$ скользит по гладкому столу. В некоторый момент скорость вершины $A$, равная $V$, оказалась вдвое меньше, чем скорость вершины $B$, причем обе скорости оказались перпендикулярными стороне $AB$. Чему была равна скорость вершины $C$?

## 9.3-08. Кубики (*12 баллов*)



Три кубика имеют равные массы и могут скользить друг по другу без трения. Два кубика связаны идеальной нитью, перекинутой через идеальный блок. Систему вначале удерживают в положении, показанном на рисунке, а затем отпускают. При каком коэффициенте трения между столом и большим кубиком последний будет оставаться неподвижным?

## 9.4-08. Вольтметры (*8 баллов*)




У одного из пяти одинаковых вольтметров на схеме погнута стрелка у самого основания, и его показания неверны. Показания вольтметров следующие: $V_1$ = 5 В, $V_2$ = 4 В, $V_3$ = 2 В, $V_4$ = $V_5$ = 1 В. Какой вольтметр неисправен (***6 баллов***) и чему равно истинное напряжение на нем (***2 балла***)?

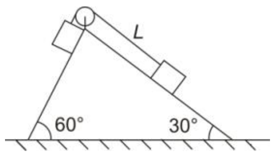
## 9.1-09. Время движения (*10 баллов*)

Тело двигалось вдоль оси $x$ от начального положения $x_1$ = 1 м до конечного положения $x_2$ = 2 м, причем его скорость $v_x$ зависела от координаты следующим образом: $v_x = a/x$, где $a$ = 1 м$^2$/с. Найти время движения тела.

## 9.2-09. Две пружины (*8 баллов*)

Небольшая бусинка массой $m$ может без трения перемещаться по стержню длиной $3/2L$ и прикреплена к его концам двумя пружинами, которые имеют в недеформированном состоянии равные длины $L$. Когда стержень поставили на стол вертикально, бусинка оказалась на высоте $L/2$ над столом, а после того, как стержень перевернули, — на высоте $2/3L$ над столом. Чему равны коэффициенты жесткости пружинок?

## 9.3-09. Неподвижный клин (*12 баллов*)




На боковые грани невесомого клина с углами при основании 30° и 60° поставлены два грузика, с одинаковой массой, соединенные нитью, перекинутой через блок, закрепленный на вершине клина. Длина нити равна $L$, как и длина меньшей стороны клина. Боковые грани клина гладкие, нижняя грань шершавая. Систему сначала удерживают в положении, когда левый грузик находится вплотную рядом с блоком, затем отпускают, причем клин, удерживаемый силой трения, остается неподвижным. Через какое время левый грузик достигнет поверхности стола? (***8 баллов***) Каков минимальный коэффициент трения между нижней гранью клина и поверхностью стола? (***4 балла***) Нить и блок идеальные, размерами блока и грузиков можно пренебречь.

## 9.4-09. Эксперимент с электрической ванной (*10 баллов*)

В лаборатории проводится эксперимент: в прямоугольную диэлектрическую ванну с металлизированными противоположными гранями наливают проводящую жидкость. Изначально жидкость имеет комнатную температуру. К металлизированным граням прикладывается постоянное напряжение, через жидкость идет ток, нагревающий ее. После нагревания до температуры кипения жидкость начинает кипеть и испаряться. В ходе эксперимента измеряются следующие величины: время, прошедшее с момента начала эксперимента до закипания жидкости $T_0$, скорость парообразования (в граммах в секунду) сразу после закипания $\mu_0$ и время полного выкипания жидкости $T_1$. Как изменятся эти величины, если: 1) увеличить начальный уровень жидкости вдвое? 2) увеличить длину ванны вдвое? Теплоотдачей жидкости пренебречь.

## 9.1-10. Два камня (*8 баллов*)

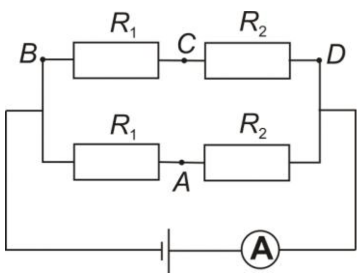
Два человека стоят рядом и подбрасывают два камня вертикально вверх с одной и той же скоростью $v$, причем второй камень бросают через время $\tau$ после начала движения первого. Через какое время после броска второго камня оба камня окажутся на одной высоте? **(*4 балла*)** Какого максимального значения достигает относительная скорость камней в течение времени, когда оба они находятся в полете? **(*4 балла*)** Сопротивлением воздуха пренебречь, считать, что в момент броска второго камня первый еще не упал.

## 9.2-10. Спортивный зал (*12 баллов*)

Спортивный зал имеет высоту 7,2 м. Игрок ударяет мяч, который начинает движение с уровня пола со скоростью 20 м/с. На каком максимальном расстоянии от начальной точки мяч может упасть на пол? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с$^2$.

## 9.3-10. Четыре резистора (*12 баллов*)

Если в схеме из четырех попарно равных резисторов, изображенной на рисунке, соединить проводом точки $A$ и $B$, амперметр покажет значение тока 250 мА. Если же соединить точки $A$ и $C$, показания амперметра составят 200 мА. Что покажет амперметр, если соединить точки $A$ и $D$? Сопротивления амперметра, элемента питания и соединительных проводов пренебрежимо малы.



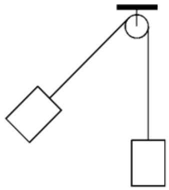
## 9.4-10. Поезд (*8 баллов*)

Поезд, состоящий из 20 одинаковых вагонов массой по 50 т и локомотива, трогается со станции. Известно, что сила натяжения сцепки между последним и предпоследним вагонами равна 12 кН. Определить силу натяжения сцепки между первым вагоном и локомотивом. (***4 балла***) Чему равно ускорение состава, если сила трения качения, действующая на каждый вагон, равна 2 кН? (***4 балла***)

## 9.1-11. Дедушка и поезд (*8 баллов*)

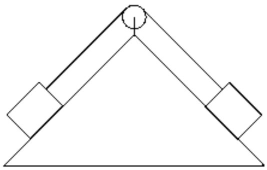
Дедушка посадил внука на поезд и отошел на 14 метров от двери вагона в направлении против хода поезда, после чего вспомнил, что забыл отдать внуку билет. В этот момент поезд тронулся и начал двигаться с постоянным ускорением, равным 1/3 м/с$^2$. Дедушка побежал за поездом с начальной скоростью 5 м/с, но годы были уже не те, поэтому он бежал равнозамедленно с ускорением 1/2 м/с$^2$. Успеет ли дедушка передать билет внуку, который стоит в двери вагона?

## 9.2-11. Блок и два груза (*12 баллов*)



Через блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой привязаны два груза, массы которых одинаковы и равны $m$. Вначале грузы удерживают в положении, когда один из концов нити расположен вертикально, а второй отклонен от вертикали на 45°, а затем отпускают. Найти силу натяжения нити сразу после отпускания грузов.

## 9.3-11. Клин и два бруска (*12 баллов*)

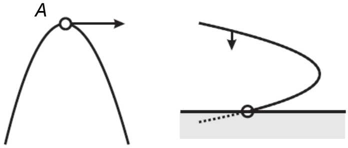


Клин представляет собой в разрезе равнобедренный прямоугольный треугольник, гипотенуза которого изначально горизонтальна. К прямому углу клина прикреплен блок, через который перекинута нерастяжимая нить, привязанная своими концами к двум брускам, при этом бруски движутся. После того как клин стали медленно поворачивать в плоскости рисунка, скольжение брусков сразу прекратилось и возобновилось только после того, как клин повернули на 45°. Определить коэффициент трения брусков о поверхность клина, одинаковый для обоих брусков. Трением в блоке пренебречь.

## 9.4-11. Указка и стекло (*8 баллов*)

Ученик направил луч лазерной указки под углом 60° к горизонту на вертикальную стену через лист стекла, расположенный параллельно данной стене. При этом на стене наблюдается несколько ярких точек, расположенных друг от друга на расстоянии 1 см. Определить показатель преломления стекла, если его толщина равна 5 мм, а луч указки лежит в плоскости, перпендикулярной стене и стеклу.

### 9.1-12. Проволока (*10 баллов*)




Ученик согнул проволоку в форме некоторой симметричной фигуры, расположенной в вертикальной плоскости, и надел на нее бусинку. Когда он придал бусинке, расположенной в вершине фигуры (в точке $A$), скорость 1 м/с в направлении вдоль проволоки, она стала двигаться, не оказывая давления на проволоку. После этого ученик повернул проволоку на 90° в ее плоскости и стал медленно опускать ее вертикально в воду со скоростью 1 см/с. Бусинка при этом все время находилась на поверхности воды. Определить полное ускорение бусинки при прохождении точки $A$.

### 9.2-12. Жук (*10 баллов*)

Жук начинает движение по окружности радиусом $R$, причем его начальная скорость равна нулю, а ускорение постоянно по модулю и равно $a$. Определить максимальную скорость, до которой может разогнаться жук, и оценить время, за которое он может достичь данной скорости.

### 9.3-12. Микросхема (*10 баллов*)

Для правильной работы микросхемы на нее необходимо подать постоянное напряжение питания 0,3 В, при этом она потребляет мощность 0,6 Вт. Исследователь запитал микросхему от батарейки, но при этом напряжение на микросхеме оказалось выше требуемого номинального значения. Затем исследователь подключил вместо одной три такие же батарейки последовательно, и напряжение на микросхеме оказалось равным требуемому значению. Определить внутреннее сопротивление батарейки, если при подключении к ней идеального вольтметра его показания составляют 1,5 В.

### 9.4-12. Доска (*10 баллов*)

На гладкой горизонтальной поверхности находится доска, на которой расположены два кубика, соединенные пружиной. Масса одного из кубиков равна массе доски $m$, масса второго вдвое больше. Пружину сначала удерживают в сжатом положении, а затем отпускают. Найти ускорение доски сразу после этого, если сила упругости сжатой пружины равна $T$, а коэффициент трения кубиков о доску равен $\mu$.

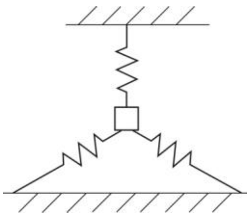
## 9.1-13. Схема (*10 баллов*)

В распоряжении исследователя имеется батарейка, амперметр и два резистора. При подключении к батарейке амперметра последовательно с одним из резисторов его показания составляют 0,18 А, при подключении последовательно со вторым резистором — 0,21 А, а при последовательном подключении с обоими резисторами — 0,14 А. Каковы будут показания амперметра при подключении его к батарейке накоротко?

## 9.2-13. Пила *(10 баллов)*

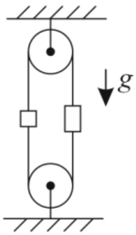
Тело движется по прямой, его ускорение постоянно по модулю и равно 1 м/с$^2$, но меняет свое направление на противоположное раз в секунду в моменты времени $t$ = 0, 1, 2, … с. Определить начальную скорость тела, если за 10 с его перемещение составило 10 м.

## 9.3-13. Груз (*10 баллов*)



Груз массой 1 кг подвешен на системе трех пружинок, одна из которых расположена вертикально, а две других — под углами 30° к горизонту. Верхняя пружина растянута, сила ее натяжения составляет 20 Н. Определить ускорение тела сразу после разрыва верхней пружины; одной из двух других пружин. Ускорение свободного падения принять равным $g$ = 10 Н/кг.

## 9.4-13. Блоки (*10 баллов*)



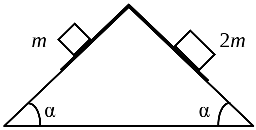

В системе двух блоков, изображенной на рисунке, обе нити натянуты, а массы грузов составляют $m$ и $2m$. Определить силу натяжения нижней нити, если для верхней нити она равна $T$. Трением в блоках и растяжением нитей пренебречь, стойки блоков жесткие, а сами блоки невесомые.

## 10 КЛАСС

### 10.1-04. Кольцо (*8 баллов*)

См. условие задачи 9.2-04 (***4 балла***). Определить зависимость от времени: силы, с которой нужно действовать на кольцо вдоль спицы для обеспечения его равномерного движения (***2 балла***); работы этой силы (***2 балла***).

### 10.2-04. Призма (*8 баллов*)

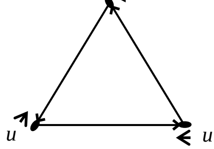



Через вершину неподвижной гладкой призмы с равными углами α при горизонтальном основании переброшена легкая лента. По разные стороны от вершины на ленту поставлены два бруска массой $m$ и $2m$ (см. рисунок). Считая коэффициент трения между лентой и обоими брусками одинаковым и равным μ, найти ускорение ленты.

### 10.3-04. Цилиндр (*12 баллов*)

В цилиндрическом сосуде находятся ν молей идеального одноатомного газа, отделенного от атмосферы легким поршнем. Давление и температура атмосферного воздуха равны $p_0$ и $T_0$ соответственно, температура газа $2T_0$. Газ и атмосферу используют в качестве нагревателя и холодильника тепловой машины Карно. Найти изменение внутренней энергии газа (***1 балл***) и работу атмосферы над газом (***1 балл***) за бесконечное время работы машины. Какую работу можно получить от машины? (***10 баллов***) При расчете работы машины площадь криволинейной трапеции можно найти приближенно (используя бумагу в клетку или заменив гиперболу отрезком прямой). Непосредственный теплообмен газа с атмосферой исключен; трением между поршнем и стенками пренебречь.

### 10.4-04. Жучки на треугольнике (*12 баллов*)




Правильный треугольник со стороной $a$, сделанный из невесомой жесткой проволоки, лежит на гладком горизонтальном столе. По проволоке из вершин треугольника одновременно начинают бежать три жучка равной массы с одинаковыми скоростями $u$ относительно проволоки (см. рисунок). Через какое время после начала движения скорости жучков относительно стола обратятся в нуль? (***3 балла***) Чему равна в этот момент угловая скорость треугольника? (***3 балла***) Чему равно в этот момент ускорение жучков? (***6 баллов***)

### 10.1-05. Гололедица (*8 баллов*)

Водитель разгоняет автомобиль на горизонтальном участке дороги до скорости 100 км/ч и далее, не выключая двигателя, пытается преодолеть подъем с уклоном 0,15. Оцените, какой путь по подъему сможет пройти автомобиль до остановки, если коэффициент трения шин о дорогу 0,1. Как изменится этот путь, если двигатель на подъеме выключить? Сопротивлением воздуха пренебречь.

*Примечание.* Уклоном дороги называется угол, который она составляет с горизонтом, выраженный в радианах.

### 10.2-05. Цепочка в трубке (*10 баллов*)

В трубке, расположенной под углом 30° к горизонту, неподвижно лежит вдоль ее оси цепочка. Если трубку медленно повернуть вокруг оси, то цепочка выскользнет из трубки. На какой угол достаточно повернуть трубку, если коэффициент трения цепочки о стенки трубки равен 0,59?

### 10.3-05. Термос (*12 баллов*)

Давление между стенками колбы литрового термоса $10^{-5}$ атм. Оцените время, в течение которого чай в термосе остынет с 90 до 70 °C, если площадь внутренней поверхности колбы около 600 см$^2$. Теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · К), молярная масса воздуха $M$ = 29 г/моль.

### 10.4-05. Две модели (*10 баллов*)

Две модели самолета сделаны из латуни и имеют одинаковую форму, но вторая модель имеет втрое большие размеры. Перед покраской их одновременно поместили в печь на короткий промежуток времени для обезжиривания, затем вынули и поставили остывать. Первая модель остыла на два градуса за 30 с. За какое время на столько же градусов остынет большая модель, если внешние условия не изменятся?

### 10.1-06. Теплоемкость (*9 баллов*)

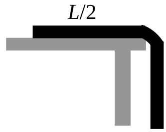
При измерениях теплоемкости 1 кг некоторого вещества путем измерения зависимости температуры $t$ от количества подведенного тепла $Q$ были получены данные, приведенные в таблице. Определите удельную теплоемкость вещества.

| $t$, ºC | 100 | 200 | 250 | 300 | 400 | 500 | 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q$, кДж | 0,0 | 14,0 | 21,0 | 35,0 | 74,0 | 95,0 | 116,0 |

## 10.2-06. Артиллерия (*9 баллов*)

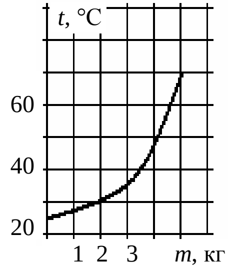
Пушка и цель находятся на одном уровне на расстоянии $L$ друг от друга. Через какое время после выстрела снаряд с начальной скоростью $V_0$ достигнет цели? При какой начальной скорости возможно попадание в цель? Сопротивлением воздуха пренебречь.

## 10.3-06. Трос (*12 баллов*)



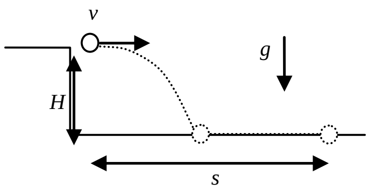

Отрезок троса длиной $L$ удерживают наполовину свисающим с гладкого стола. Какую скорость он будет иметь в момент, когда соскользнет уже полностью? Какую скорость он будет иметь в момент, когда соскользнет, если стол не гладкий, а коэффициент трения троса о поверхность равен $\mu$?

## 10.4-06. Компрессор (*10 баллов*)




В баллон в течение 5 мин закачивают 5 кг воздуха компрессором, мощность которого 1 кВт. На приведенном масштабном графике видно, как увеличивалась температура газа по мере увеличения массы воздуха в баллоне. Оцените, какое количество теплоты получил газ. КПД компрессора составляет 50 %.

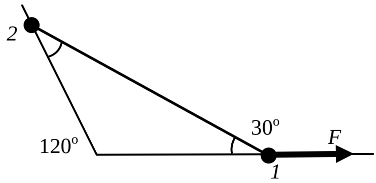
## 10.1-07. Полет мешка (*10 баллов*)




Со стенки высотой $H$ горизонтально бросают мешок со скоростью $v$. После неупругого удара о пол мешок некоторое время скользит по нему и останавливается. Найти расстояние от стенки $s$, на котором остановится мешок, если коэффициент трения между ним и полом равен $\mu$.

## 10.2-07. Бусинки (*12 баллов*)

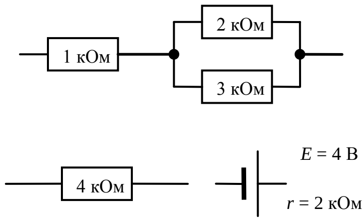
На гладкую проволоку, согнутую под углом 120°, надеты две одинаковые бусинки массой $m$, связанные нерастяжимой нитью длиной $L$, как показано на рисунке (проекция на горизонтальную плоскость). В начальный момент, когда нить натянута и образует угол 30° с проволокой, на первую бусинку начинает действовать постоянная сила $F$, направленная вдоль проволоки. Определите силу натяжения нити сразу



после этого (***6 баллов***). Определите скорости движения бусинок в момент перед ударом второй бусинки о место сгиба проволоки (***6 баллов***).

### 10.3-07. Схема с резистором (*8 баллов*)

Некто спаял схему, состоящую из трех резисторов. Два резистора номиналом 3 и 2 кОм соединены параллельно, последовательно с ними включен еще один резистор номиналом 1 кОм. В запасе имеется резистор номиналом 4 кОм. Кроме того, для питания схемы есть источник тока с ЭДС 4 В, обладающий внутренним сопротивлением 2 кОм. Как подключить имеющиеся схему и резистор к источнику так, чтобы во всей внешней по отношению к источнику цепи выделилась наибольшая мощность? Чему равна эта мощность? Разбирать схему из трех резисторов нельзя, однако подключать дополнительный резистор можно к любым ее точкам.




### 10.4-07. ТЭЦ на реке (*10 баллов*)

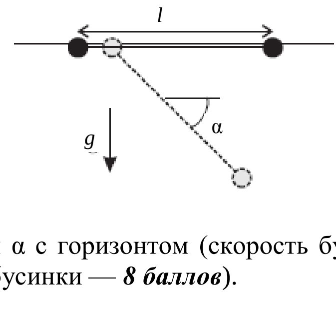
На берегу реки расположена тепловая станция, турбины которой работают по обратимому циклу Карно. Произведенный пар подается в турбины при температуре 250 °С, а израсходованная вода сливается в реку при температуре 20 °С. При какой температуре забирается вода выше станции по течению реки, если мощность станции 1000 МВт, а скорость расхода речной воды составляет $q = 40$ м$^3$/с?

### 10.1-08. Шарик (*8 баллов*)

Маленький шарик падает с большой высоты с установившейся скоростью 10 м/с. Оцените скорость шарика через 0,1 с после отскока от твердой поверхности, считая удар абсолютно упругим. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с$^2$.

### 10.2-08. Две бусинки (*14 баллов*)

Две бусинки с равной массой соединены невесомым стержнем длиной $l$. Одна из бусинок может без трения скользить по горизонтально натянутой нити. В начальный момент времени стержень удерживается в горизонтальном положении, затем отпускается. Найти скорости бусинок в тот момент, когда стержень составляет угол α с горизонтом (скорость бусинки на нити — ***6 баллов***, скорость второй бусинки — ***8 баллов***).



### 10.3-08. Нарезаем резьбу (*8 баллов*)

Воротком с метчиком нарезают резьбу в медной пластине площадью $S = 2 \times 3$ см$^2$. Шаг резьбы $h = 0{,}75$ мм, момент сил, приложенных к воротку, равен $M = 35$ Н · м. На сколько градусов нагреется пластина, если резьба нарезается насквозь и достаточно быстро? Удельная теплоемкость меди $c = 0{,}38$ кДж/(кг · ºС), плотность $\rho = 8{,}9$ г/см$^3$.

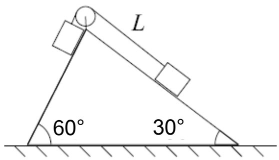
### 10.4-08. Поршень (*10 баллов*)

Цилиндрический сосуд высотой $H$ разделен на две части теплопроводящим поршнем массой $m$, который может скользить по стенкам сосуда без трения. Сосуд расположен вертикально, в обеих его частях находится одинаковое количество идеального одноатомного газа. Вначале поршень находится на высоте $H/4$ над дном сосуда. После нагревания газа поршень поднимается до высоты $H/3$. Найти количество тепла $Q$, сообщенное газу.

### 10.1-09. Бильярд (*8 баллов*)

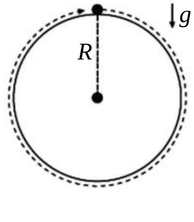
На оси симметрии бильярдного стола, параллельной его длинной стороне, расположены два шара. По одному из них наносится удар, после чего он начинает движение со скоростью $v_0 = 1$ м/с и ударяется о другой шар. После удара скорости шаров оказываются равными, причем оба шара попали в лузы. Через какое время после столкновения это произошло? Размерами шаров и трением пренебречь. Размеры бильярдного стола: $l_1 = 3550$ мм, $l_2 = 1775$ мм.

### 10.2-09. Невесомый клин (*12 баллов*)




На боковые грани невесомого клина с углами при основании 30° и 60° поставлены два грузика с равными массами, соединенные нитью, перекинутой через блок, закрепленный на вершине клина. Длина нити равна $L$, как и длина меньшей стороны клина. Систему сначала удерживают в положении, когда левый грузик находится вплотную рядом с блоком, затем отпускают. Через какое время левый грузик достигнет поверхности стола? Нить и блок идеальные, размерами блока и грузиков можно пренебречь, трения в системе нет.

### 10.3-09. Вокруг сферы (*10 баллов*)




Заряженное тело массой $m$ соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой закрепленной диэлектрической сферы, в центре которой расположен точечный заряд, равный по модулю и противоположный по знаку заряду тела $q$. При каком максимальном радиусе сферы тело может сделать вокруг нее полный оборот и не оторвется от ее поверхности в процессе движения?

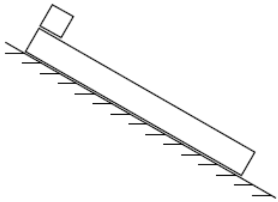
### 10.4-09. Эксперимент с неидеальным газом (*10 баллов*)

При исследовании неидеального газа (в количестве 1 моль) обнаружено, что уравнение его состояния имеет вид $(p + a/V^2)V = RT$. При изохорном нагревании оказалось, что его молярная теплоемкость совпадает с молярной теплоемкостью идеального одноатомного газа $3/2\,R$, а при изобарном расширении количество переданной теплоты связано с увеличением объема как $Q = 5/2\, p\Delta V$. Зависит ли внутренняя энергия газа от объема, и если да, то каким образом?

### 10.1-10. Дальность полета (*8 баллов*)

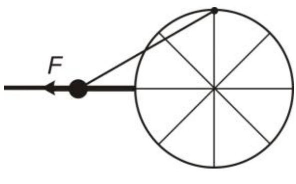
После изучения закона всемирного тяготения ученик понял, что при расчете полета тела в поле силы тяжести считать ускорение свободного падения постоянным можно лишь приближенно. Оцените ошибку определения дальности полета, связанную с данным приближением, если тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с.

### 10.2-10. Кубик на доске (*10 баллов*)



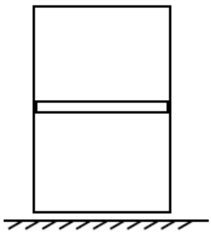
На ровной поверхности стола, наклоненной под углом α к горизонту, в направлении наибольшего уклона расположена доска длиной $L$ (см. рисунок). На верхнем краю доски стоит небольшой кубик, причем его масса равна массе доски. Коэффициент трения нижней поверхности доски о стол равен μ, верхняя поверхность доски гладкая. Изначально система удерживается в описанном положении, затем отпускается. Найти время, через которое кубик достигнет нижнего края доски.

### 10.3-10. Бусинка и обруч (*12 баллов)*



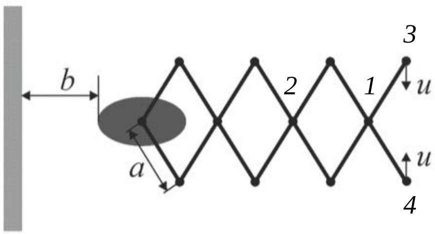

Бусинка массой $m$ может двигаться по неподвижной горизонтальной направляющей (см. рисунок). Обруч с той же массой и радиусом $r$ с помощью легких спиц закреплен на оси и может вращаться вокруг нее. Обруч и спица находятся в одной плоскости, причем ось вращения обруча находится на одной высоте с направляющей. Бусинка связана нерастяжимой нитью с гвоздем на обруче. Сначала гвоздь находится в крайнем правом положении, нить натянута, бусинка касается обруча. К бусинке начинают прикладывать постоянную горизонтальную силу $F$. Найти угловую скорость вращения обруча в момент, когда гвоздь будет проходить верхнее (***6 баллов***) и крайнее левое (***6 баллов***) положение. Трением в системе пренебречь.

### 10.4-10. Сосуд в атмосфере (*10 баллов*)



Закрытый цилиндрический сосуд разделен на две части массивным поршнем, который может скользить по его стенкам без трения (см. рисунок). Температура окружающей сосуд атмосферы постоянна и равна $T$. В обе части сосуда помещают по одному молю идеального одноатомного газа. Газ в одной части сосуда нагревают до температуры $2T$, а в другой — до температуры $3T$, при этом поршень оказывается точно посередине сосуда. Какое количество теплоты уйдет из сосуда в атмосферу, когда закончится теплообмен с атмосферой? Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь.

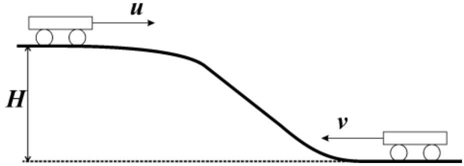
### 10.1-11. Лягушка (*12 баллов*)




Детская игрушка «лягушка» изображена на рисунке, размер $a$ известен. Изначально лягушка находится на полу на расстоянии $b=\frac{7a}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ от стены, а точки *1* и *2* располагаются на расстоянии $a$ друг от друга. Затем точки *3* и *4* начинают сближать с постоянными скоростями $u$. Определить, через какое время (***6 баллов***) и с какой скоростью (***6 баллов***) лягушка ударится об стену.

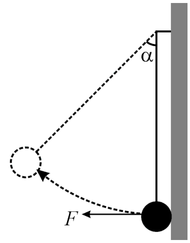
### 10.2-11. Горка (*10 баллов*)

Первая тележка начинает движение с горки высотой $H$ с начальной скоростью $u$. Вторая тележка начинает движение с подножия этой горки с начальной скоростью $v$ навстречу первой. Определить минимальное значение скорости $v$, при котором обе тележки могут остановиться после абсолютно неупругого столкновения. Отношение массы первой тележки к массе второй задано и равно $k$. Трением пренебречь, момент старта второй тележки может быть произвольным.



## 10.3-11. Отклонение груза (*10 баллов*)

Тяжелый груз массой $m$ висит на стержне, прикрепленном шарнирно к вертикальной стене. Рабочий хочет пробить этим грузом в стене брешь, для чего он отклоняет груз в сторону и затем отпускает. Рабочий может действовать на груз с силой, не превышающей по модулю $F$. Определить минимальную величину $F$, которая необходима для того, чтобы отклонить груз на угол α.




## 10.4-11. Сжатие газа (*8 баллов*)

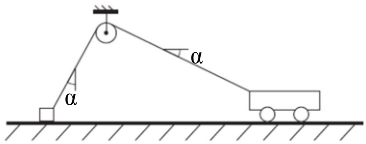
Идеальный газ сжимают вдвое при постоянной температуре, при этом совершается работа $A$. Какую работу теперь надо совершить, чтобы сжать газ изотермически еще вдвое? (***4 балла***) Тот же вопрос, если перед повторным сжатием охладить газ в четыре раза при постоянном объеме (***4 балла***).

## 10.1-12. Ящик (*10 баллов*)

В цилиндрическом ящике радиусом 2 м и высотой 4 м создано постоянное электрическое поле, направленное горизонтально. Какую минимальную скорость необходимо придать заряженному шарику, находящемуся в центре дна ящика, чтобы он мог покинуть его? Известно, что электрическое поле действует  на шарик с силой, вдвое превышающей силу тяжести. Считать $g$ = 10 м/с$^2$.

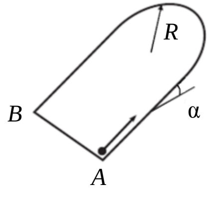
## 10.2-12. Блок (*10 баллов*)

Груз массой 200 кг привязан к полноприводному автомобилю массой 1 т легким нерастяжимым тросом, перекинутым через блок. Углы, которые составляют части троса с горизонтом, равны α и 90º – α соответственно. Определить, при каком минимальном коэффициенте трения между покрышками автомобиля и асфальтом груз может оторваться от земли сразу после начала движения автомобиля, если tg α = 0,5.



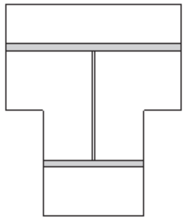

## 10.3-12. Пинбол (*10 баллов*)

Плоский ящик представляет собой в сечении квадрат, сопряженный с полукругом радиусом $R$. По периметру ящик окружен гладкими бортиками. Ящик находится в наклонном положении таким образом, что его нижний борт $AB$ расположен горизонтально, а дно наклонено под углом α к горизонту. Маленький



гладкий шарик массой $m$ начинает движение из точки $A$ вдоль правого борта. Какую минимальную энергию необходимо придать шарику, чтобы он мог без отрыва от бортиков достигнуть точки $B$?

### 10.4-12. Пружина (*10 баллов*)



Система состоит из двух соединенных цилиндрических сосудов с площадями сечения, отличающимися вдвое, и двух жестко соединенных поршней с суммарной массой $m$. Трения в системе нет, между поршнями помещен идеальный газ, а вне поршней — вакуум. Расстояние между поршнями равно $2h$, а в состоянии покоя верхний поршень находится на высоте $h$ над местом соединения сосудов. Было замечено, что при небольших изотермических отклонениях поршней от положения равновесия система ведет себя как пружина — смещение поршней пропорционально величине приложенной к ним вертикальной силы. Определить коэффициент жесткости данной пружины.

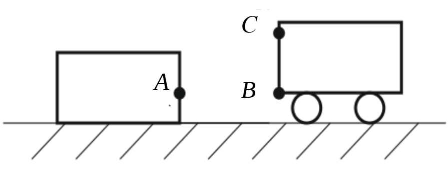
*Примечание.* Воспользоваться соотношением $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ при малых $x$.

### 10.1-13. Снаряд (*10 баллов*)

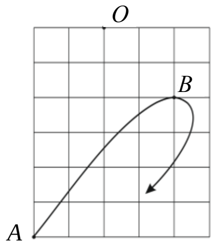
Через 20 с после выстрела снаряд разорвался в воздухе на две равные части, первая из которых полетела горизонтально, а вторая — вертикально. Первая часть снаряда упала на землю через 50 с после выстрела. Через какое время после выстрела упадет вторая часть? Сопротивлением воздуха пренебречь.

### 10.2-13. Буксир (*10 баллов*)

Полноприводной автомобиль тянет тяжелый груз по горизонтальной поверхности. При закреплении легкого нерастяжимого троса между точками $A$ и $B$, находящимися на одной высоте, удается везти груз, масса которого вдвое больше массы автомобиля. Если же закрепить трос между точками $A$ и $C$, где точка $C$ находится на один метр выше точки $B$, удается везти груз, уже вчетверо превышающий массу автомобиля. Определить коэффициент трения шин автомобиля о поверхность, если трос имеет длину 2 м.



## 10.3-13. Траектория (*10 баллов*)




Тело массой $m$ = 1 кг подвешено за упругий жгут к точке $O$. Жесткость жгута составляет $k$ = 8 Н/м, длина в недеформированном состоянии равна $l_0$ = 80 см. Тело отпускают без начальной скорости в точке $A$, после чего оно движется по траектории, изображенной на рисунке. Определите кривизну данной траектории в наивысшей точке $B$. Ускорение свободного падения принять равным $g$ = 9,8 м/с$^2$, шаг координатной сетки составляет 50 см.

## 10.4-13. Пленка (*10 баллов*)

Узкий теплоизолированный сосуд разделен на две равные половины тонкой теплонепроницаемой пленкой. Изначально в двух частях сосуда находятся две различные смеси идеальных газов при одинаковой температуре, а пленка не натянута. Если включить нагреватель, расположенный в одной части сосуда, то пленка лопнет через 2 минуты, а если включить нагреватель той же мощности, расположенный во второй части сосуда, то пленка лопнет через 3 минуты. Через какое время лопнет пленка, если одновременно включить оба нагревателя? Прочность пленки не зависит от температуры.

# ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

## 8 КЛАСС

### 8.1-04. Три тела

Пусть температуры первого, второго и третьего тел были соответственно $T_x$, $T_y$ и $T_z$, а теплоемкости тел *C*. Тогда закон сохранения энергии дает:

при контакте первого тела со вторым: $C \cdot T_x + C \cdot T_y = 2C \cdot T_1$; (1)

при контакте первого тела с третьим: $C \cdot T_x + C \cdot T_z = 2C \cdot T_2$; (2)

при контакте второго тела с третьим: $C \cdot T_y + C \cdot T_z = 2C \cdot T_3$; (3)

при контакте всех трех тел: $C \cdot T_x + C \cdot T_y + C \cdot T_z = 3C \cdot T$, (4)

где *T* — искомая температура. Складывая равенства (1), (2) и (3), получаем $T_x + T_y + T_z = T_1 + T_2 + T_3$. Подставляя это равенство в (4), получаем $T = (T_1 + T_2 + T_3)/3$.

***Ответ:*** $(T_1 + T_2 + T_3)/3$.

### 8.2-04. Стержень

При равновесии такого стержня его центр масс находится на точке опоры (моменты сил уравновешиваются). Легко подсчитать его положение после перегибания одного из концов. Если масса и длина четверти стержня равны *m* и *l* соответственно, а начало координат оси, направленной вправо и проходящей вдоль стержня, взять в точке *C*, то новое положение центра масс:

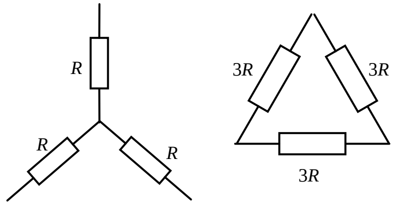
$$X_C = \frac{-2m \cdot \frac{l}{2} + 2m \cdot l}{4m} = \frac{l}{4}.$$

Таким образом, точку опоры нужно сдвинуть вправо на расстояние, равное 1/16 длины стержня, то есть 0,125 м.

***Ответ:*** Вправо на 12,5 см.

### 8.3-04. Схема

Так как данная задача была рассчитана на 8 класс, то никаких «правил Кирхгофа» применять не будем. Основной идеей задачи является преобразование системы из трех элементов, собранных в виде звезды, в систему из трех элементов, собранных в виде треугольника так, чтобы внешние элементы «ничего об этом не узнали». Можно проверить, что данное преобразование выглядит так, как показано на рисунке.




Также стоит учесть, что в начальной схеме токи через резисторы *CE* и *ED* не идут (что следует из симметрии схемы), эти резисторы можно убрать. Тогда легко считается сопротивление цепи: $R_{1AB} = \frac{2}{3}R.$

1. После перегорания резистора *AE* схему из трех резисторов (*CE*, *DE* и *BE*), соединенных в виде звезды, можно преобразовать так, как говорилось выше. Тогда легко считается общее сопротивление во втором случае $R_{2AB} = \frac{7}{8}R$ и соответственно отношение мощностей в первом и втором случаях: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{7/8R}{2/3R} = \frac{21}{16}$. Можно получить тот же результат, не прибегая к преобразованию «звезда — треугольник», а представляя резистор *BE* как два параллельно соединенных резистора сопротивлением $2R$ и разделяя схему на две симметричные части.

2. Для того чтобы узнать, какой резистор перегорит следующим, нужно найти резистор, через который течет наибольший ток, но для этого не обязательно находить токи, проходящие через все резисторы. В данном случае ток, идущий через резистор *AC*, в точке *C* будет разветвляться на меньшие токи; аналогично ток, идущий через резистор *CE*, также в точке *E* будет разветвляться на меньшие токи. Таким образом, наибольший ток будет течь через резистор *AC*, он и перегорит следующим.

3. В случае, когда вторым перегорит резистор *BD*, опять же надо найти резистор, через который течет наибольший ток. В данном случае можно воспользоваться известным нам преобразованием из треугольника в звезду для резисторов *CE*, *BC* и *BE*. Так как резисторы *AC* и *AD* ничего об этом не «узнают», то напряжения на них сохранятся, соответственно сохранятся и токи, тогда после преобразования легко находятся силы тока: $I_{AC} = \frac{7U}{13R}$, $I_{AD} = \frac{4U}{13R}$, где $U$ — напряжение между точками *A* и *B*.

Дальше будем рассуждать так же, как и в предыдущем случае. Понятно, что $I_{ED} = I_{AD}$, $I_{CE} < I_{AC}$, $I_{CB} < I_{AC}$, а вот резистор *BE* нужно рассмотреть подробнее. Так как ветви *ACB* и *ADEB* соединены параллельно, то $I_{AC} \cdot R + I_{BC} \cdot R = I_{AD} \cdot 2R + I_{BE} \cdot R,$ откуда, учтя предыдущие соотношения, находим $I_{BE} < I_{AC}$. Таким образом, наибольший ток течет через резистор *AC*, он перегорит следующим.

Также в решении задачи учитывалось, что резисторы перегорают, если ток через них не только наибольший, но и превышает предельно допустимый ток, который легко находится в первом случае $I_0 = \frac{U}{2R}$.

***Ответ:*** Уменьшится в 16/21 раз; *AC*; *AC*.

## 8.4-04. Тяжелая цепочка

Пусть длина цепочки равна *l*, а разность длин свешивающихся концов *x*. Учитывая, что момент силы трения в оси блока пропорционален массе цепочки (в случае однородной цепочки — ее длине), а момент силы тяжести, действующей на цепочку, — разности масс свешивающихся концов (опять же — разности длин), а также то, что проворачивание начинается плавно, и, значит, моменты этих сил равны, получаем, что величины *x* и *l* пропорциональны: $x = k \cdot l$, где $k$ — постоянный коэффициент. Тогда для первого и второго случаев верны соотношения (*m* — искомая величина):

$$0{,}2 \cdot l = k \cdot l \quad \text{(первый случай)},$$

$$m \cdot l = k \cdot l \cdot (1 - m) \quad \text{(второй случай)}.$$

Деля эти равенства одно на другое, находим искомую величину *m* = 1/6.

***Ответ:*** 1/6.

## 8.1-05. Трубки

Запишем условие постоянства первоначального объема стеклянной заготовки через длину и диаметр для первой операции растягивания: $L_0 \cdot D_0^2 = L_1 \cdot D_1^2$ или $L_0 \cdot D_0{}^2 = L_1 \cdot \left(D_0/100\right)^2$. Отсюда $L_1 = L_0 \cdot 10000$, то есть за одно растягивание длина вырастает в $10^4$ раз. При этом диаметр уменьшается в 100 раз, то есть с 10 см = 100 мм уменьшится до 1 мм.

Вторая операция растягивания даст следующие результаты: длина увеличится в $10^8$ раз по сравнению с первоначальной, а диаметр уменьшится в $10^4$ раз — до 0,01 мм = 10 мкм = $10^{-5}$ м.

Третья операция: длина увеличится в $10^{12}$ раз по сравнению с первоначальной, а диаметр уменьшится в $10^6$ раз — до 0,01 мкм = $10^{-7}$ м.

На четвертой операции длина увеличится в $10^{16}$ раз по сравнению с первоначальной, а диаметр уменьшится в $10^8$ раз — до 1 нм = $10^{-9}$ м.

В ходе следующей операции диаметр уменьшился бы до $10^{-11}$ м.

Учтя, что размер атома составляет единицы ангстрем (1 Å = $10^{-10}$ м), получаем, что следующий этап оказывается невозможным с точки зрения современного знания. Необходимо заметить, что и предыдущий этап сделался осуществимым лишь в последние годы, когда стал возможен контроль процессов получения структур с размерами в несколько атомов.

***Ответ:*** В $10^{16}$ раз; нельзя.

**8.2-05. Плотик из пузырей**

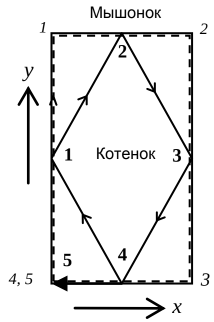
Равновесие пустого пузыря: $m_0 g = \rho \cdot V_0 g$ . Массу груза, который утопит полностью один пузырь, можно определить из условия плавания: $(m + m_0)g = \rho \cdot Vg$ , откуда, с учетом первого соотношения, $m = \rho \cdot (V - V_0)$ . Тогда минимальное число пузырей $N = \dfrac{M}{\rho \cdot (V - V_0)} = \dfrac{40}{1000 \cdot 1900 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}} =$ = 21 шт. Таким образом, нужно прочно связать вместе не менее чем 21 закупоренный пузырь!

Для решения второй части задачи надо оценить, удобно ли находиться на плоту, связанном из такого количества пузырей. Диаметр двухлитрового пузыря примерно 10 см, высота цилиндрической части не менее 20 см. Если связывать пузыри в вертикальном положении (например, 5 × 5), получится маленькая площадка, на которой плавать неудобно. Выгоднее сложить пузыри горизонтально, при этом над водой должна возвышаться половина пузыря. Проводя такие же вычисления, получим $N_1 = \dfrac{M}{\rho \cdot (0{,}5V - V_0)} =$

$$= \frac{40}{1000 \cdot 900 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}} = 45 \text{ шт.}$$

***Ответ:*** 21; 45 горизонтально.

**8.3-05. Мышонок и котенок**




Видно, что мышонок быстро, за четыре секунды, обегает периметр амбара 24 м и скрывается в норке на секунду раньше, чем к ней подбегает котенок, пытавшийся перехватить мышонка, делая диагональные рывки на пути длиной 18 м, то есть на 6 м меньше. Средняя скорость движения мышонка 6 м/с, котенка – 4,5 м/с.

***Ответ:*** Не сумеет; на 6 м.

**8.4-05. Соль**

1. Показания весов сразу же после опускания в воду кристалла определяются условием равновесия силы натяжения весов $P_1$, силы тяжести и силы Архимеда в воде, действующих на кристалл:

$$P_1 = \rho_К \cdot g \cdot V_0 - \rho_В \cdot g \cdot V_0 = (\rho_К - \rho_В) \cdot g \cdot V_0.$$

Здесь $\rho_В$, $\rho_К$ — плотности воды и вещества кристалла соответственно, $V_0$ — первоначальный объем кристалла.

Показания весов после растворения половины кристалла определяются условием равновесия силы натяжения весов $P_2$, силы тяжести половины кристалла и силы Архимеда в растворе, действующих на половинный объем:

$$P_2 = (\rho_К \cdot g \cdot V_0 - \rho_Р \cdot g \cdot V_0)/2 = (\rho_К - \rho_Р) \cdot g \cdot V_0 / 2,$$

где $\rho_Р$ — плотность раствора.

2. Для определения плотности раствора запишем факт сохранения полной массы до и после растворения:

$$\rho_Р \cdot (3V_0 + V_0/2) = \rho_К \cdot V_0/2 + \rho_В \cdot 3V_0.$$

Отсюда $\rho_Р = \dfrac{\rho_К \cdot V_0/2 + \rho_В \cdot 3V_0}{(3V_0 + V_0/2)} = \dfrac{\rho_К + 6 \cdot \rho_В}{7}$.

Теперь получим окончательную формулу для расчета:

$$P_2 = (\rho_К \cdot g \cdot V_0 - \frac{\rho_К + 6 \cdot \rho_В}{7} \cdot g \cdot V_0)/2 = \frac{3}{7} \cdot g \cdot V_0(\rho_К - \rho_В) = 0,45 P_1.$$

Таким образом, показания весов изменятся не в два раза, а несколько меньше из-за увеличившейся плотности жидкости.

***Ответ:*** В 0,45 раза.

**8.1-06. Две баржи**

Если поместить на баржи одинаковый груз, то обе они вытеснят одинаковый объем: $mg = \rho \cdot \Delta V \cdot g$.

Этот объем можно представить произведением высоты (осадка) на площадь: $\Delta V = S_1 \cdot h_1 = S_2 \cdot h_2$.

Поскольку ширина и длина второй баржи втрое больше, чем у первой, то площадь второй баржи в девять раз больше. Значит, при таком же объеме погружения осадка второй баржи будет меньше, чем у первой, в девять раз и составит 2 см. Для груза вдвое большего осадка увеличится вдвое и станет равной 4 см.

***Ответ:*** Увеличится на 4 см.

## 8.2-06. Плотность пены

Плотность пены можно определить как отношение массы смеси к ее объему: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{m_{\text{Г}} + m_{\text{Ж}}}{V}$. Чтобы в это соотношение ввести плотности веществ, его необходимо преобразовать: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{\rho_{\text{Г}} \cdot V_{\text{Г}} + \rho_{\text{Ж}} \cdot V_{\text{Ж}}}{V_{\text{Г}} + V_{\text{Ж}}}$.

Рассмотрим заданную в задаче величину массовой доли газа $\alpha = \alpha_{\text{Г}} = \frac{m_{\text{Г}}}{m_{\text{Ж}} + m_{\text{Г}}} = \frac{\rho_{\text{Г}} V_{\text{Г}}}{\rho_{\text{Ж}} V_{\text{Ж}} + \rho_{\text{Г}} V_{\text{Г}}}$.

Очевидно, что массовая доля жидкости $\alpha_{\text{Ж}} = 1 - \alpha = \frac{\rho_{\text{Ж}} V_{\text{Ж}}}{\rho_{\text{Ж}} V_{\text{Ж}} + \rho_{\text{Г}} V_{\text{Г}}}$.

Рассмотрим для удобства величину, обратную плотности:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V_{\text{Г}} + V_{\text{Ж}}}{\rho_{\text{Г}} \cdot V_{\text{Г}} + \rho_{\text{Ж}} \cdot V_{\text{Ж}}} = \frac{V_{\text{Г}}}{\rho_{\text{Г}} \cdot V_{\text{Г}} + \rho_{\text{Ж}} \cdot V_{\text{Ж}}} + \frac{V_{\text{Ж}}}{\rho_{\text{Г}} \cdot V_{\text{Г}} + \rho_{\text{Ж}} \cdot V_{\text{Ж}}},$$

отсюда получаем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\rho_{\text{Г}} \cdot V_{\text{Г}}}{\rho_{\text{Г}} \cdot (\rho_{\text{Г}} \cdot V_{\text{Г}} + \rho_{\text{Ж}} \cdot V_{\text{Ж}})} + \frac{\rho_{\text{Ж}} \cdot V_{\text{Ж}}}{\rho_{\text{Ж}} \cdot (\rho_{\text{Г}} \cdot V_{\text{Г}} + \rho_{\text{Ж}} \cdot V_{\text{Ж}})} = \frac{\alpha}{\rho_{\text{Г}}} + \frac{1-\alpha}{\rho_{\text{Ж}}}.$$

Окончательно получим $\rho = \frac{\rho_{\text{Ж}} \cdot \rho_{\text{Г}}}{\rho_{\text{Г}} + \alpha \cdot (\rho_{\text{Ж}} - \rho_{\text{Г}})} = \frac{1100 \cdot 1{,}3}{1{,}3 + \frac{1100}{2}} \approx 2{,}6$ г/л.

***Ответ:*** 2,6 г/л.

## 8.3-06. Вольтметры

Рассмотрим случай, когда в цепь включен один вольтметр с внутренним сопротивлением *r*. Тогда ток в цепи равен $I = \frac{U}{R_{\text{общ}}} = \frac{U(R+r)}{R(R+2r)}$. С другой стороны, можно записать $U = IR + U_1$. Отсюда можно получить выражение

$$\frac{U - U_1}{R} = \frac{U(R+r)}{R(R+2r)} \qquad (*)$$

и для внутреннего сопротивления: $r = R\frac{U_1}{U - 2U_1}$.

В случае, когда к схеме подключили $n$ = 10 одинаковых вольтметров, они будут показывать одно и то же напряжение, так как подключены параллельно. Тогда их можно рассматривать как один эквивалентный вольтметр с внутренним сопротивлением, в $n$ раз меньшим, чем у одного вольтметра: $r' = r/n$. Воспользуемся уже полученным выражением (*): $\frac{U - U'_1}{R} = \frac{U(R + r')}{R(R + 2r')}$, откуда $U'_1 = U\frac{r'}{R + 2r'}$. Тогда значение, которое будет показывать десятый (как и все остальные) вольтметр, равно:

$$U'_1 = \frac{UU_1}{nU - 2U_1(n-1)} \approx 47{,}61 \text{ В.}$$

***Ответ:*** 47,61 В.

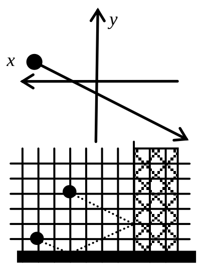
## 8.4-06. Способ охлаждения салона автомобиля

Представим, что вода просто налита на крышу слоем толщиной $h$. Именно этот слой воды и должен испариться благодаря поступающей к автомобилю «излишней» энергии: $J_0 S\Delta t = r\rho_0 Sh$, откуда $h = \frac{J_0\Delta t}{r\rho_0}$ ~ 1,5 мм, то есть $V = Sh$ ~ 3 л/ч.

*Примечание.* Всем хорош способ, если применять его в чистом городе. На трассе возникнут неудобства из-за пыли, забивающейся в материал испарителя, необходимости возить на себе эту грязную жижу, да и расход топлива из-за торможения увеличится. Возможно, что кондиционер и окупит себя при желании решить указанную проблему.

***Ответ:*** 3 л/ч.

## 8.1-07. Внук и дедушка

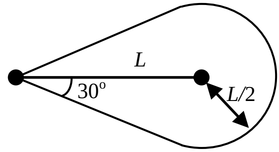



Направим ось $x$ вдоль реки, а ось $y$ — вдоль кромки леса, причем выберем 0 осей в месте их пересечения. Будем изображать траекторию внука необычным образом: после купания в реке дальнейшее движение изображается отраженным относительно оси $x$, после сбора грибов на опушке леса дальнейшее движение изображается отраженным относительно оси $y$.

Тогда траектория внука проходит по всем четырем координатным углам, достижение реки или леса равнозначно пересечению оси $x$ или $y$. Точки с координатами ($x$, $y$), ($-x$, $y$), ($x$, $-y$), ($-x$, $-y$) эквивалентны. Тогда внук должен достигнуть точки, соответствующей дому дедушки, в области отрицательных значений $x$ и $y$. Очевидно, кратчайший путь в эту точку соответствует движению по прямой. Тогда из теоремы Пифагора нетрудно найти длину данного отрезка прямой: она равна примерно 5590 м. Чтобы изобразить траекторию внука «обычным» способом, то есть в области положительных $x$ и $y$, необходимо отразить ее обратно относительно осей $x$ и $y$ (см. рисунок).

***Ответ:*** 5590 м.

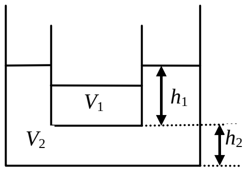
**8.2-07. Волк и заяц**




Рассмотрим такой процесс: пусть заяц бежит из второй норки в первую, а на его пути постоянно попадаются волки, которые разбегаются от него во все стороны (своего рода обратная задача). Тогда область, куда успеют добежать эти волки, и есть искомая область. Эта область представляет собой совокупность окружностей с радиусами от $L/2$ до нуля и с центрами, расположенными на отрезке, соединяющем заячьи норы. Граница области состоит из касательных к этим окружностям, которые образуют угол 30° с линией, соединяющей норы, и дуги самой большой окружности.

***Ответ:*** См. рисунок.

**8.3-07. Корабль в шлюзе**




Обозначим площадь сечения корабля $S_1$, шлюза — $S_2$, глубину посадки корабля — $h_1$, расстояние от дна шлюза до дна корабля — $h_2$, объем воды в трюме — $V_1$, объем воды в шлюзе — $V_2$. Тогда из условия плавания корабля на воде получим

$$mg = \rho V_1 g + \rho S_1 h_1 g,$$

где $m$ — масса корабля, $\rho$ — плотность воды.

При откачивании воды из трюма объем $V_1$ изменяется, и для его изменения $\Delta V_1$ в течение некоторого времени $\Delta t$ справедливо $\Delta V_1 = -S_1 \Delta h_1$. Поделив обе части равенства на $\Delta t$, получим значение скорости $v_1$ изменения глубины $h_1$:

$$v_1 = \frac{\Delta V_1 / \Delta t}{S_1} = \frac{1000 \text{ л/мин}}{500 \text{ м}^2} = 2 \text{ мм/мин}.$$

Соответственно ватерлиния покажется из-под воды за время

$$t_1 = \frac{10 \text{ см}}{2 \text{ мм/мин}} = 50 \text{ мин}.$$

Для определения скорости изменения воды в шлюзе найдем также скорость $v_2$ изменения величины $h_2$. Для объема $V_2$ справедливо

$$V_2 = S_2\, h_2 + (S_2 - S_1)\, h_1,$$

и для его изменения $\Delta V_2$ за время $\Delta t$:

$$\Delta V_2 = S_2\,\Delta h_2 + (S_2 - S_1)\,\Delta h_1 = S_2\,\Delta h_2 + (S_2 - S_1)\,\Delta V_1 / S_1.$$

Так как вода из трюма выливается в шлюз, $\Delta V_1 = -\Delta V_2$, и после несложных преобразований получим $v_2 = -(\Delta V_1/\Delta t) / S_1 = -v_1$.

Видим, что сумма величин $h_1 + h_2$ не меняется, поэтому уровень воды в шлюзе постоянен.

***Ответ:*** 2 мм/мин; 50 мин.

### 8.4-07. Калориметр

Определим, какая масса льда $m_1$ растаяла:

$$m_1 \cdot 3{,}3 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг} = 0{,}5 \text{ кг} \cdot 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)} \cdot 10\,{}^\circ\text{C} +$$
$$+ 0{,}01 \text{ кг} \cdot 460 \text{ Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)} \cdot 100\,{}^\circ\text{C}; \quad m_1 = 0{,}065 \text{ кг}.$$

Таким образом, останется льдинка массой 95 г и кусочек стали массой 10 г на ней. Средняя плотность льдинки и стали составляет

$$\rho = (95 \text{ г} + 10 \text{ г}) / (95 \text{ г} / 0{,}9 \text{ г/см}^3 + 10 \text{ г} / 7{,}8 \text{ г/см}^3) =$$
$$= 105 \text{ г} / 106{,}84 \text{ см}^3 = 0{,}983 \text{ г/см}^3,$$

то есть меньше плотности воды. Значит, льдинка со сталью не утонут.

***Ответ:*** не утонет.

### 8.1-08. Автобус

Пусть расстояние между остановками равно $L$. Обозначим среднюю скорость движения из $A$ в $B$ через $V_x$, среднюю скорость движения из $B$ в $C$ через $V_y$, среднюю скорость движения из $C$ в $A$ через $V_z$.


*I способ:* По условию задачи

$$V_1 = \frac{2L}{L/V_x + L/V_y}; \; V_2 = \frac{2L}{L/V_y + L/V_z};$$

$$V_3 = \frac{2L}{L/V_z + L/V_x}.$$

Преобразуем к виду $\frac{2}{V_1} = \frac{1}{V_x} + \frac{1}{V_y}$, $\frac{2}{V_2} = \frac{1}{V_y} + \frac{1}{V_z}$, $\frac{2}{V_3} = \frac{1}{V_z} + \frac{1}{V_x}$.

Сложим первое равенство и третье, а затем вычтем второе равенство:

$$\frac{2}{V_1} + \frac{2}{V_3} - \frac{2}{V_2} = \frac{1}{V_x} + \frac{1}{V_y} + \frac{1}{V_z} + \frac{1}{V_x} - \frac{1}{V_y} - \frac{1}{V_z}; \qquad \frac{2}{V_1} + \frac{2}{V_3} - \frac{2}{V_2} = \frac{2}{V_x};$$

$\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_2} = \frac{1}{V_x}$; откуда $V_x = 1/\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_2}\right)$. Аналогично

$V_y = 1/\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3}\right)$; $V_z = 1/\left(\frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_1}\right)$. Кстати, на обратные величины данных скоростей должны быть наложены ограничения типа «неравенства треугольника».

$$V_{\text{ср}} = \frac{3L}{L/V_x + L/V_y + L/V_z} = 3/\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_1}\right),$$

$$V_{\text{ср}} = 3/\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}\right) = \frac{3V_1V_2V_3}{V_1V_2 + V_1V_3 + V_2V_3}.$$

*II способ:* Намотаем 2 круга, тогда

$$V_{\text{ср}} = \frac{6L}{2L/V_1 + 2L/V_3 + 2L/V_2};\ V_{\text{ср}} = 3/\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}\right) = \frac{3V_1V_2V_3}{V_1V_2 + V_1V_3 + V_2V_3}.$$

Теперь для одного круга: дополним участок, на котором ищем скорость, до полного круга путем из 2 остановок, на котором средняя скорость дана по условию

$$V_{\text{ср}} = \frac{3L}{L/V_x + 2L/V_2} = \frac{3}{1/V_x + 2/V_2}, \text{ откуда } \frac{1}{V_x} = \frac{3}{V_{\text{ср}}} - \frac{2}{V_2} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_2};$$

$V_x = 1/\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_2}\right)$. Аналогично $V_y = 1/\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3}\right)$; $V_z = 1/\left(\frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_1}\right)$.

***Ответ:*** $1/\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_2}\right)$; $1/\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_3}\right)$; $1/\left(\frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} - \frac{1}{V_1}\right)$; $3/\left(\frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} + \frac{1}{V_1}\right)$.

### 8.2-08. Ледяной кубик

Объем воды до таяния кубика будет равен $V_0 = V_\text{в} + V_i = S \cdot X_0$. Здесь $V_\text{в}$ — объем залитой воды, $V_i = a^3$ — объем кубика, $X_0$ — уровень воды до таяния льда. Объем воды после таяния кубика будет равен $V = V_\text{в} + V_{\text{в}1} = S \cdot X$. Здесь $V_{\text{в}1}$ — объем воды, получившейся после таяния льда, $X$ — новый уровень воды. Из закона сохранения массы $\rho_i V_i = \rho_\text{в} V_{\text{в}1}$, откуда $V_{\text{в}1} = \frac{\rho_i \cdot a^3}{\rho_\text{в}}$. Вычитая уравнение для $V_0$ из уравнения для $V$, получим $S(X - X_0) = V_{\text{в}1} - V_i = (\rho_i / \rho_\text{в} - 1)a^3$, откуда искомое изменение уровня $X - X_0 = (\rho_i / \rho_\text{в} - 1)a^3 / S = -0{,}16$ см. Таким образом, уровень воды понизится.

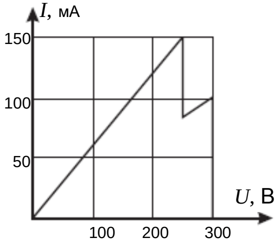
***Ответ:*** Уровень понизится.

**8.3-08. Паровой двигатель**

Пусть за единицу времени в котле испаряется масса воды μ. Тогда возвращается из двигателя в единицу времени масса 0,95μ. Мощность нагревателя расходуется на испарение и нагревание вернувшейся воды до 100 ºС, поэтому $P = L\mu + 0{,}95c\mu(100\ ^\circ\mathrm{C} - 20\ ^\circ\mathrm{C})$, откуда μ = 3,88 · $10^{-3}$ кг/с. Так как скорость убывания воды составляет 0,05μ, котел опустеет наполовину за время $T$ = 5 [кг] / 0,05μ = 25792 с ≈ 7 ч 10 мин.

***Ответ:*** 7 ч 10 мин.

**8.4-08. Электрическая схема**




Когда оба предохранителя целы, сопротивление схемы составляет 5/3 кОм, поэтому ток в цепи в миллиамперах равен $3U/5$, где $U$ измеряется в вольтах. Ток через $R_1$ равен $2U/5$. При $U$ = 250 В ток через $R_1$ превысит 100 мА и первый предохранитель сгорит. Сопротивление схемы станет равным 3 кОм, и ток через схему равен $U/3$. При $U$ = 300 В сгорит второй предохранитель, и при дальнейшем увеличении напряжения ток будет равен нулю.

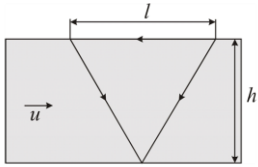
***Ответ:*** См. график.

**8.1-09. Гудки поезда**

Введем ось $x$ в направлении движения поезда, пусть в нулевой момент времени он издает гудок, находясь в точке $x$ = 0, а расстояние до станции $B$ составляет $L$. Тогда данный гудок будет слышен на станции $B$ в момент времени $t_1 = L/c$. Следующий гудок поезд издаст в момент времени $T$, находясь на расстоянии $L - vT$ от станции $B$. Второй гудок будет слышен на станции $B$ в момент времени $t_2 = T + (L - vt)/c$. Таким образом, гудки на станции $B$ будут слышны с периодичностью $t_2 - t_1 = T(1 - v/c)$ = 9 с. Аналогично находим, что на станции $A$ гудки будут слышны с периодичностью $T(1 + v/c)$ = 11 с.

***Ответ:*** 11 с; 9 с.

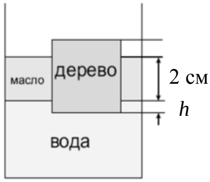
**8.2-09. Река**




Траектория движения лодки изображена на рисунке и представляет собой равнобедренный треугольник. Его высота равна ширине реки $h = vt_1$, а длина основания $l = (v - u)t_2$, где $u$ — скорость течения реки. За время, пока лодка переплывала реку, ее снесло вдоль течения на расстояние $ut_1$, которое равно половине длины основания треугольника $l/2$. Таким образом, $ut_1 = 0{,}5(v - u)t_2$, откуда $u = vt_2/(2t_1 + t_2) = 2$ км/ч.

***Ответ:*** 2 км/ч.

**8.3-09. Кубик в стакане**


Кубик полностью погрузится в масло и частично — в воду (это необходимо проверить!). Площадь сечения слоя масла после погружения в него кубика составит $50 - 25 = 25$ см$^2$, поэтому, так как объем масла сохраняется, толщина слоя возрастет вдвое и составит 2 см. Объем части кубика, погруженной в масло, составит $V_М = 5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$ см$^3$, а части кубика, погруженной в воду, $V_В = 5 \cdot 5 \cdot h$ см$^3$, где $h$ — глубина погружения кубика в воду в сантиметрах. Объем кубика равен $V_Д = 5^3 = 125$ см$^3$. Записывая условие плавания, то есть равенство сил Архимеда (воды и масла) и силы тяжести, получим $\rho_Д V_Д g = \rho_В V_В g + \rho_М V_М g$ или $0{,}5 \cdot 125 = 1 \cdot 25 \cdot h + 0{,}8 \cdot 50$, откуда $h = 0{,}9$ см.

Выступающая из масла часть кубика по высоте равна $5 - 2 - h = 2{,}1$ см.

***Ответ:*** 2,1 см.

**8.4-09. Эксперимент с плавлением льда**

При помещении в термостат лед нагревается от температуры $t_1$ до 0 градусов Цельсия, затем плавится, и образовавшаяся вода нагревается до температуры $t_2$. Горячая вода охлаждается от своей начальной температуры $t_0$ до температуры $t_2$. Запишем уравнение теплового баланса:

$$c_2m_2(t_0 - t_2) = c_1m_1(0 - t_1) + \lambda m_1 + c_2m_1(t_2 - 0),$$

где $\lambda$ — удельная теплота плавления, а $c_1$ — искомая удельная теплоемкость льда. Отсюда

$$t_2 = \frac{c_2m_2t_0 - \lambda m_1}{c_2(m_1 + m_2)} + \frac{c_1m_1}{c_2(m_1 + m_2)}t_1 = \text{const} + \frac{c_1m_1}{c_2(m_1 + m_2)}t_1 .$$

По результатам эксперимента коэффициент при $t_1$ равен 0,167, следовательно,

$$c_1 = 0{,}167c_2\frac{m_1 + m_2}{m_1} = 0{,}5c_2 = 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

***Ответ:*** 2100 Дж/(кг · К).

### 8.1-10. Обгон

Пусть легковой автомобиль движется с предельно допустимой скоростью 60 км/ч, тогда относительно грузовика его скорость составляет 5 км/ч. Для обгона грузовика легковой автомобиль должен проехать относительно него расстояние, равное сумме длин автомобилей, то есть 10 м. Определим, какое расстояние проедет легковой автомобиль за это время относительно дороги: $L = \dfrac{60\ \text{км/ч}\ \cdot\ 10\ \text{м}}{5\ \text{км/ч}} = 120$ м. То есть к концу обгона легковой автомобиль будет находиться на расстоянии 80 м до переезда, нарушив тем самым правила.

***Ответ:*** Не сможет.

### 8.2-10. Велосипедист и щенок

Очевидно, установившаяся траектория движения щенка представляет собой окружность, концентрическую с траекторией велосипедиста. Доказать этот факт можно, мысленно повернув плоскость, в которой происходит движение, на произвольный угол относительно центра окружности, по которой движется велосипедист. Тогда траектория велосипедиста переходит сама в себя, следовательно траектория щенка также должна перейти сама в себя, а таким свойством обладает только концентрическая окружность. Для нахождения радиуса окружности $r$ учтем, что за время полного оборота велосипедиста щенок также должен совершать полный оборот, следовательно, $2\pi R/v = 2\pi r/u$, отсюда $r = Ru/v$.

***Ответ:*** Окружность радиуса $Ru/v$.

### 8.3-10. Стакан в сосуде

Обозначим плотности стекла и воды как $\rho_с$ и $\rho_в$. Сначала определим массу долитого масла $m_м$. Для этого заметим, что сила давления воды на дно большого сосуда с одной стороны равна $\rho_в gSh$, где $S$ и $h$ — площадь дна и высота воды в сосуде, а с другой стороны — $mg$, где $m$ — масса *всего содержимого* сосуда, включая плавающие в воде тела. Так как после доливания в стакан масла уровень воды в сосуде не изменился, следовательно не изменилась и масса содержимого сосуда, значит масса долитого масла равна массе вылившейся воды, то есть $m_м = 140$ г.

Запишем условия плавания стакана с маслом в воде:

$$(m_м + m_с)g = (V_с + E)\rho_в g = \left(\frac{m_с}{\rho_с} + E\right)\rho_в g\ ,$$

где $m_с$ — искомая масса стакана, а $E$ — его емкость. Отсюда

$$m_с = (E\rho_с - m_м)\frac{\rho_с}{\rho_с - \rho_в} = 100\ \text{г}.$$

***Ответ:*** 100 г.

**8.4-10. Калориметр**

Обозначим удельные теплоемкости льда и воды как $c_л$ и $c_в$, удельную теплоту плавления льда — λ. Возможны следующие варианты развития событий: 1) если исходная температура льда была ниже –10 °С, лед нагревается и не плавится; 2) если лед изначально был теплее –10 °С, он сначала нагревается до 0 °С, затем плавится, и образовавшаяся вода снова нагревается. В первом случае подведенное тепло $Q = Q_1 = c_л m\Delta t$ ; во втором

$$Q = Q_2 = c_л m(0 - t) + \lambda m + c_в m(t + \Delta t - 0) = \lambda m + c_в m\Delta t + (c_в - c_л)mt,$$

где $m$ — масса, а $t$ — начальная температура льда. Очевидно, что $Q_2 > Q_1$ при любом значении $t$ в интервале от –10 до 0 °С, а максимальное значение $Q_2$ достигается при $t = 0$. Подставляя числовые значения, получаем

$$Q_{min} = c_л m\Delta t = 21 \text{ кДж}; \; Q_{max} = \lambda m + c_в m\Delta t = 372 \text{ кДж}.$$

***Ответ:*** От 21 до 372 кДж.

**8.1-11. Миротворец**

Скорость сближения Васи и Пети составляет $v_с = 5$ км/ч, а изменение расстояния между ними за время движения составляет $l = 75$ м. Отсюда можно найти их время движения навстречу друг другу $t = l/v_с$. Все это время Миша бежал со скоростью $u = 10$ км/ч, следовательно он преодолел расстояние $s = ut = ul/v = 150$ м.

***Ответ:*** 150 м.

**8.2-11. Кораблик**

Сила тяжести, действующая на кораблик, после переворачивания не изменится. Из условия плавания следует, что не должен измениться и объем его части, погруженной в воду. Так как после переворачивания в воду погрузится гвоздь объемом $V = 55$ г : 7,874 г/см$^3$, объем погруженной части доски должен уменьшиться на ту же величину. При этом доска поднимется над поверхностью воды на высоту $h = V$ / 140 см$^2$ = 0,5 мм.

***Ответ:*** 5,5 мм.

**8.3-11. Теплоемкость жидкости**

Очевидно, что до переливания, то есть при $m = 0$, температура $t$ равна начальной температуре жидкости в первом термостате $t_1$. Отсюда $t_1 = 0$ °С. При больших значениях $m$ килограммом жидкости, который был в первом сосуде изначально, можно пренебречь, и температура $t$ будет близка к начальной температуре жидкости во втором термостате $t_2$. Отсюда $t_2 = 60$ °С. Также легко понять, что температура в точке излома графика равна величине $t_0$, так как уравнения теплового баланса и, следовательно, выражения для $t$ будут иметь разный вид при $t < t_0$ и $t > t_0$. Отсюда $t_0 = 50$ °C. Записывая уравнение теплового баланса для $t = t_0$, получим выражение $m_1c_1(t_0 - t_1) = m_2c_2(t_2 - t_0)$, где $m_1 = 1$ кг — начальная масса воды в первом сосуде, $m_2 = 1$ кг — масса перелитой воды в точке излома. Получаем $c_1/c_2 = 1/5$.

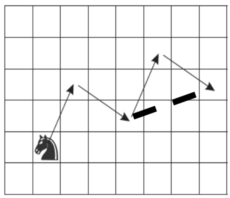
***Ответ:*** 0,2.

**8.4-11. Поездка**

По плану водитель должен проезжать каждый километр пути за одну минуту. Подъезжая к очередному столбу с опозданием $\tau$, он рассчитывает дальнейшую скорость так, чтобы проехать километр за время $1 - \tau$. Эта скорость равна $1/(1 - \tau)$ км/мин, значит реальная скорость движения составит $0{,}9/(1 - \tau)$. Так как через некоторое время отставание от графика стало постоянным, реальная скорость движения составила 1 км/мин, откуда получаем $\tau = 0{,}1$ мин = 6 с.

***Ответ:*** 6 с.

**8.1-12. Конь**



Нетрудно видеть из рисунка, что за каждые два хода конь передвигается на расстояние, равное длине пунктирного отрезка. Эта длина равна $5 \cdot \sqrt{1 + 3^2} = 5\sqrt{10}$ см. Число таких пар ходов за минуту равно 5, а за час – 300. Тогда общее перемещение коня составит $1500\sqrt{10} \approx 4743\,\text{см} \approx 47{,}4$ м.

***Ответ:*** 47,4 м.

**8.2-12. Перестрелка**

Пусть первый броневик движется со скоростью $v$, пуля летит со скоростью $u$, а в момент времени вылета первой пули, попадающей во второй броневик, первый находится на расстоянии $x$ от точки пересечения. Найдем время полета пули до попадания во второй броневик: $t_1 = \dfrac{x}{v + u}$. Следующий выстрел производится через интервал времени $\tau$. Время полета второй пули $t_2 = \dfrac{x - v\tau}{v + u}$. Тогда интервал времени между попаданиями $\Delta t = t_1 + \tau - t_2 = \dfrac{u\tau}{v + u}$. Расстояние между следами $l = v\Delta t = \dfrac{vu\tau}{v + u}$. Отсюда находим темп стрельбы $N = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{uv}{l(v+u)}$. Подставляя числовые значения, получаем 25 выстрелов в секунду, или 1500 выстрелов в минуту.

***Ответ:*** 1500 выстрелов в минуту.

**8.3-12. Воздушный шар**

По мере выхода гелия из оболочки она сжимается. Рассмотрим интервал времени $\Delta t$. За это время объем оболочки уменьшится на $\Delta V = Sv\Delta t$, где $S$ — площадь дыры, $v$ — скорость выходящего газа. Из-за уменьшения объема шара уменьшаются архимедова сила и масса гелия в оболочке. Изменение силы Архимеда должно компенсироваться изменением суммарной силы тяжести, действующей на шар и груз в корзине: $\rho_г g\Delta V + \mu\Delta t g = \rho_в g\Delta V$. Здесь индексы «в» и «г» относятся к воздуху и гелию, $\mu$ — скорость изменения массы песка. Отсюда выражаем площадь дыры $S = \dfrac{\mu g}{(\rho_в - \rho_г)v}$ = 0,001 м$^2$ = = 10 см$^2$.

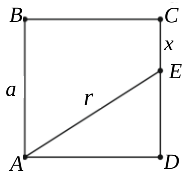
***Ответ:*** 10 см$^2$.

**8.4-12. Нагреватель**

Запишем уравнение теплового баланса для двух действий с водой и дробью в первом опыте — высыпания дробинок и последующего подогрева. По сути, подводимое тепло расходуется на нагрев дробинок до температуры воды. Поэтому $Pt = Nmc\Delta T$, где $P$ — мощность нагревателя, $t$ — время его работы, $N$ — число дробинок, $m$ и $c$ — масса и удельная теплоемкость дробинки, $\Delta T$ — разность температур воды и дробинок. Применим полученное выражение ко второму опыту: $P(t+\Delta t) = (N+\Delta N)mc\Delta T$. Исключая неизвестные из двух уравнений, получим $P = \dfrac{\Delta N mc\Delta T}{\Delta t}$ = 46 Вт.

***Ответ:*** 46 Вт.

**8.1-13. Бегун**




Пусть бегун начал движение из точки $A$, а через минуту он добежал до точки $E$. Тогда по условию задачи перемещение $r = AE$ бегуна к этому моменту в два раза меньше его пути $s = AB + BC + CE$. Обозначив сторону квадрата $AB = a$, а расстояние $CE = x$, получим $s = 2a + x$, $r = \sqrt{a^2 + (a-x)^2}$, и квадратное уравнение для $x$: $3x^2 - 12ax + 4a^2 = 0$.

Отсюда $x=\left(2-\sqrt{8/3}\right)a\approx 0,367a$, путевая скорость движения бегуна равна $v=\dfrac{2a+x}{t}=2,367\dfrac{a}{t}$, где $t$ = 60 с. Время, за которое бегун вернется в исходную точку, составляет $T=4a/v\approx 101,4$ с.

***Ответ:*** 101,4 с.

**8.2-13. Суп**

Тело всплывет на поверхность в момент, когда плотность соленой воды сравняется с его плотностью. За 20 минут после закипания масса воды уменьшится на количество выкипевшей воды, которое определяется формулой $m_т=\dfrac{Pt}{L}=5$ кг. Количество соли в воде при этом не изменится, и соленость воды составит $s=\dfrac{m_с}{m_в-m_т}=40$ ‰. Плотность соленой воды при этом находится по приведенной формуле и составит 987 кг/м$^3$, чему и равна искомая плотность тела.

***Ответ:*** 987 кг/м$^3$.

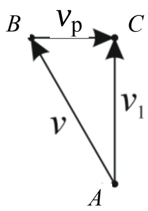
**8.3-13. Жуки**

При приближении второго жука на 5 см к коробке соломинка опирается только на левый угол коробки и сбалансирована на нем, поэтому из условия равенства моментов сил, действующих на соломинку, получаем $m_1 \cdot 10$ см = $= m_2 \cdot 15$ см, откуда $m_1 = 1,5m_2$. Когда второй жук удаляется на максимально возможное расстояние $l$ от коробки, соломинка опирается только на правый угол коробки. Из условия ее сбалансированности имеем $m_1 \cdot 20$ см = $= m_2 \cdot l$, откуда $l$ = 30 см.

***Ответ:*** 30 см.

**8.4-13. Моторная лодка**

Скорость лодки в неподвижной системе отсчета $v_1$ складывается из ее скорости относительно воды $v$ и скорости течения реки $v_р$. Векторное сложение данных скоростей проиллюстрировано на рисунке. Треугольник $ABC$ является прямоугольным, катет $BC$ в нем в два раза меньше гипотенузы, откуда следует, что угол $BAC$ равен 30°, а величина скорости $v_1=v\,\mathrm{ctg}\,30^\circ=v\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 17,3$ км/ч. С такой скоростью один километр лодка преодолеет за 3 мин 28 с.




***Ответ:*** 3 мин 28 с.

# 9 КЛАСС

**9.1-04. Схема**

См. решение задачи 8.3-04.

**9.2-04. Резинка**

Так как нитка нерастяжима, то ее скорость направлена перпендикулярно ей самой. Отметим, что в рассматриваемый момент времени движение кольца можно представить как сумму движений вдоль резинки и перпендикулярно ей. При этом узелок и кольцо будут вращаться относительно крючка с одной и той же угловой скоростью (резинка и нитка всегда находятся на одной прямой).

Запишем данное условие:

$$\frac{V/3}{l_0} = \frac{V\cos\alpha}{2l_0/\cos\alpha}, \qquad (1)$$

где α — угол между радиус-векторами, проведенными от крючка в начальное и конечное положения кольца.

Несложно также заметить, что

$$\cos\alpha = \frac{2l_0}{\sqrt{(2l_0)^2 + (Vt)^2}}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем $t = \sqrt{2}\cdot l_0/V$.

***Ответ:*** $\sqrt{2}\cdot l_0/V$.

**9.3-04. Брусок**

До того как скорости бруска и доски сравняются, брусок двигался с ускорением $a_1 = 4\mu g$ (ускорение создается силой трения между бруском и доской), а доска двигалась с ускорением $a_2 = \frac{\mu(m_1 + m_2)g}{m_2} + \frac{4\mu m_1 g}{m_2}$ (ускорение создается двумя силами трения: между доской и столом, между доской и бруском). Здесь μ — коэффициент трения между доской и столом, $m_1$ и $m_2$ — массы бруска и доски соответственно.

Найдем момент времени, когда скорости бруска и доски станут равны: $V_0 - a_1 t = -V_0 + a_2 t$, где $V_0$ — начальная скорость бруска и доски. Получим

$t = \dfrac{2V_0}{a_1 + a_2}$. Тогда можно найти и скорость бруска к этому моменту времени: $V = V_0 - a_1 t$. После того как скорости бруска и доски сравняются, вся система «брусок — доска» будет двигаться с ускорением $a_3 = \mu g$.

До того как скорости бруска и доски сравнялись, перемещение бруска относительно стола было равно $x_1 = V_0 t - \dfrac{a_1 t^2}{2}$. После того как скорости бруска и доски сравнялись, брусок переместился еще на $x_2 = \dfrac{V^2}{2\mu g}$. По условию задачи $x_1 = x_2$, подставляя выражения для $x_1$ и $x_2$, получаем $\dfrac{m_2}{m_1} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

***Ответ:*** $1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

**9.4-04. Клин**

На кубик действует сила нормальной реакции $N$ со стороны клина, направленная перпендикулярно поверхности клина, и сила тяжести $mg$. В свою очередь на клин со стороны кубика также действует сила, величина которой равна $N$, а направление противоположно направлению силы $N$. Эта сила сообщает клину горизонтальное ускорение, равное $a = \dfrac{N \sin 30°}{m} = \dfrac{N}{2m}$. Для того чтобы найти горизонтальное ($a_x$) и вертикальное ($a_y$) ускорения кубика, перейдем в систему отсчета, связанную с клином. В этой системе отсчета появляется еще одна сила ( $N_1 = ma = N/2$ ), действующая на кубик. Учтем, что кубик все время находится на поверхности клина, тогда сумма проекций всех сил, действующих в этой системе отсчета на кубик, на направление, перпендикулярное поверхности клина, равна нулю:

$$N + N_1 \sin 30° = mg \cos 30° \Rightarrow N = \frac{2\sqrt{3}}{5} mg .$$

Тогда в лабораторной системе отсчета ускорение кубика определяется законами динамики (ось $Ox$ направлена вправо, ось $Oy$ — вертикально вверх):

$$a_x = -\frac{N \sin 30°}{m} = -\frac{\sqrt{3}}{5} g; \quad a_y = -\frac{mg - N \cos 30°}{m} = -\frac{2}{5} g .$$

Для горизонтальной и вертикальной составляющей скорости кубика имеем

$$V_x = V_0 \cos 30° + a_x t = \frac{\sqrt{3}}{2} V_0 - \frac{\sqrt{3}}{5} gt; \; V_y = V_0 \sin 30° + a_y t = \frac{1}{2} V_0 - \frac{2}{5} gt .$$

Для полной скорости кубика получаем выражение

$$V = \sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}V_0 - \frac{\sqrt{3}}{5}gt\right)^2 + \left(\frac{1}{2}V_0 - \frac{2}{5}gt\right)^2}\ .$$

Под корнем стоит квадратный трехчлен, который легко исследуется на минимальное значение. Итак, $V_{\min} = \frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ .

***Ответ:*** $\frac{V_0}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ .

**9.1-05. Два тягача**

Движение с постоянной скоростью возможно при взаимном равенстве силы тяги, определяемой силой трения покоя между дорогой и колесами, и силой сопротивления движению: $F_{\text{тр}} = \alpha \cdot V^2$, где $\alpha$ — неизвестный коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления. Пока отсутствует проскальзывание, сила трения может быть различной (до значения $\mu \cdot mg$) и ее можно, например, выразить через мощность двигателя и скорость движения: $\frac{N}{V} = \alpha \cdot V^2$. Так, по данным для имеющегося тягача можно определить коэффициент $\alpha$: $\frac{N_1}{V_1} = \alpha \cdot V_1^2 \Rightarrow \alpha = \frac{N_1}{V_1^3}$ .

Сцепив два тягача, мы суммируем приложенную силу: $\frac{N_1}{V} + \frac{N_2}{V} = \alpha \cdot V^2$. Теперь искомую мощность можно найти преобразованием формулы:

$$N_2 = N_1\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^3 - 1\right] = 1000 \cdot \left(\frac{27-8}{8}\right) \approx 2400 \text{ л. с.}$$

Как видим, увеличение скорости дается нелегко — такого тягача можно и не найти.

***Ответ:*** 2400 л. с.

**9.2-05. Зажигалка**

Рычаг, имеющий плечи $a$ и $b$, служит для промежуточного увеличения силы руки $F_1$ до значения $F$. На этом этапе вычисления можно воспользоваться известным соотношением:

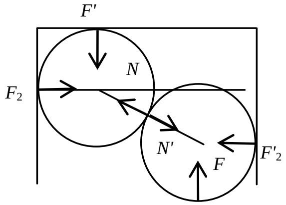
$$F \cdot a = F_1 \cdot b. \qquad (1)$$

Далее можно использовать условие равновесия двух цилиндров *A* и *B*. Равенство нулю сил, приложенных к цилиндрам, дает очевидные, но важные соотношения:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}' + \vec{N} + \vec{N}' + \vec{N}' + \vec{F}'_2 + \vec{F} = 0.$$

Отсюда по координатам: $F = F'$; $F_2 = F'_2$.

Теперь запишем в координатах условие равновесия для верхнего цилиндра (цилиндр *A*): $N \cdot \cos\alpha = F'_2$; $N \cdot \sin\alpha = F'$.




Отсюда $F_2 = \dfrac{F}{\operatorname{tg}\alpha}$, или с учетом (1) $F_2 = \dfrac{F_1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \dfrac{b}{a}$.

Подставляя численные значения и приближенно вычисляя тангенс угла, получим $F_2 = \dfrac{10}{10} \cdot \dfrac{80}{10} \dfrac{180}{\pi} \approx 480$ Н. Как видим, конструкция дает усиление силы нажатия почти в 50 раз.

***Ответ:*** В 50 раз.

**9.3-05. Сосульки**

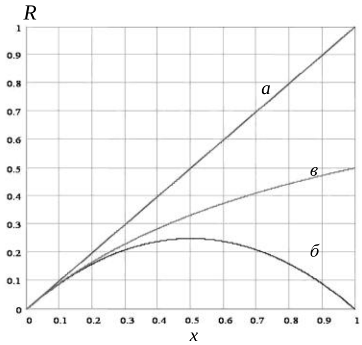
Особенность этой задачи состоит в том, что энергия, необходимая для таяния льда, поступает от воздуха через поверхность сосульки, а количество льда определяется объемом сосульки. Обозначим через *P* (Вт/м$^2$) величину плотности теплового потока от воздуха к поверхности сосульки. По условию задачи за все время таяния метеоусловия не меняются. Поэтому можно предположить, что величина *P* будет оставаться постоянной, ибо она в первом приближении пропорциональна разности температуры воздуха и льда. Теперь для малой сосульки можно составить уравнение теплового баланса: $P \cdot S \cdot \tau = \rho \cdot V \cdot \lambda$, где $S$ — площадь поверхности сосульки, $V$ — ее объем, $\rho$ — плотность льда, $\lambda$ — удельная теплота плавления льда.

Аналогичное уравнение будет выполняться и для большой сосульки: $P \cdot S_1 \cdot \tau_1 = \rho \cdot V_1 \cdot \lambda$. Деля второе уравнение на первое, получим $\dfrac{S_1}{S} \cdot \dfrac{\tau_1}{\tau} = \dfrac{V_1}{V}$, откуда найдем время $\tau_1$: $\tau_1 = \tau \dfrac{V_1}{V} \cdot \dfrac{S}{S_1}$. Осталось сравнить объемы и поверхности сосулек. Из геометрии известно, что объем любого тела пропорционален третьей степени его характерного размера, площадь поверхности — квадрату характерного размера. Поэтому

$$V = k_V l^3, \quad V_1 = k_V L^3, \quad S = k_S l^2, \quad S_1 = k_S L^2,$$

где $k_V$ и $k_S$ — коэффициенты пропорциональности, зависящие от геометрической формы тела, но неизменные для всех геометрически подобных фигур одного типа (в данном случае для конусов). Тогда $\tau_1 = \tau \dfrac{k_V L^3}{k_V l^3} \cdot \dfrac{k_S l^2}{k_S L^2} = \tau \dfrac{L}{l} = 2 \cdot \dfrac{30}{10} = 6$ ч.

***Ответ:*** 6 ч.



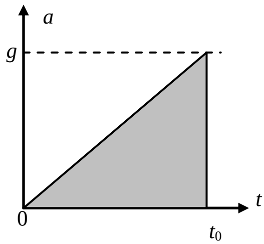

### 9.4-05. Реостат

Переходя к безразмерному сопротивлению $x = r / R$ $(0 < x < 1)$, получим формулы и построим графики функций (см. рисунок):

$$R_а = xR\,,\quad R_б = Rx(1-x)\,,\quad R_в = \frac{Rx}{1+x}\,.$$

***Ответ:*** См. рисунок.

### 9.1-06. Полет Винни-Пуха




Следует обратить внимание на то, что ускорение не постоянно, поэтому пользоваться привычными формулами кинематики здесь нельзя. Однако можно воспользоваться аналогиями из кинематики равнопеременного движения, только учесть, что вместо линейно возрастающей скорости будет линейно возрастающее ускорение, а вместо квадратичной зависимости перемещения от времени будет такая же зависимость для скорости. Можно также решить эту задачу графически, учитывая, что скорость в конечной точке будет численно равна площади под графиком. Если $a = \gamma t$, где $\gamma = g / t_0$, то $v = \gamma t^2 / 2$ и в момент падения $v_n = g t_0 / 2 = 10$ м/с.

***Ответ:*** 10 м/с.

### 9.2-06. Бруски

Для каждого тела можно записать по два соотношения, известных для равнопеременного движения:

$$V_1 = \sqrt{2a_1 S_1} \text{ и } t_1 = \sqrt{\frac{2S_1}{a_1}}\,;\; V_2 = \sqrt{2a_2 S_2} \text{ и } t_2 = \sqrt{\frac{2S_2}{a_2}}.$$

Добавим условия $V_2 = V_1$ и $T = t_1 + t_2$ и решим систему уравнений, получившуюся после подстановки соотношений в эти условия.

Получим $a_1 = 2\dfrac{(S_1 + S_2)^2}{S_1 \cdot T^2}$ и $a_2 = 2\dfrac{(S_1 + S_2)^2}{S_2 \cdot T^2}$.

***Ответ:*** $2\dfrac{(S_1 + S_2)^2}{S_1 \cdot T^2}$, $2\dfrac{(S_1 + S_2)^2}{S_2 \cdot T^2}$.

### 9.3-06. Горячая снежинка

Учитывая симметрию схемы, соединим точки в плоскости симметрии и перечертим схему. Сначала так, как показано на рис. 1 (здесь, кроме того, убраны лишние элементы, по которым не идет ток). А затем так, как показано на рис. 2.

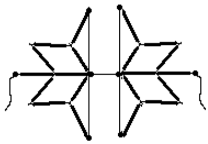


**Рис. 1**

Теперь общее сопротивление считается легко, по следующей формуле:

$$R = 2 \cdot \left\{ r + \frac{r \cdot \frac{1}{2}\left[2r + \frac{r}{2}\right]}{r + \frac{1}{2}\left[2r + \frac{r}{2}\right]} \right\} = 2 \cdot \left\{ r + \frac{5r \cdot r}{9r} \right\} = \frac{28 \cdot r}{9},$$

где $r = \dfrac{220 \cdot 220}{3500} \approx 13{,}8$ Ом. Таким образом, $R$ = 43,0 Ом, и тогда мощность схемы оказывается равной $P = \dfrac{U^2}{R} = \dfrac{220 \cdot 220}{43{,}0} \approx 1125$ Вт.

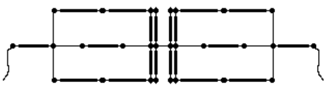


**Рис. 2**

Новая мощность оказалась равной всего одной трети мощности одного элемента, в 75 раз меньше, чем исходная. Красивая идея оказалась крайне неудачной.

Для ответа на второй вопрос отметим, что полный ток в цепи оказывается равным примерно 5,1 А, и он проходит полностью лишь по концевым нагревателям. Значит, мощность концевых нагревателей равна по $P_1 = 5{,}1^2 \cdot 13{,}8 =$ 360 Вт на каждом из них — в них и выделяется две трети всей мощности гирлянды.

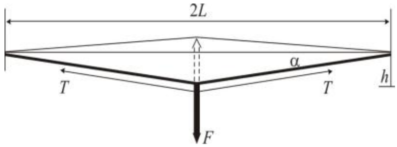
***Ответ:*** 1125 Вт; 360 Вт.

### 9.4-06. Провод на морозе

1. Запишем известные соотношения. Если при температуре 0 °C длина равна $L_0$, то при охлаждении до температуры –30 °C длина изменится на

$\Delta L_t = L_0 \cdot \alpha \cdot t$. Так, если на морозе провод имеет длину 25 м, то при изменении температуры до нуля его удлинение составит $\Delta L_t = 25 \cdot 30 \cdot 17 \cdot 10^{-6} \approx$ $\approx 12{,}75$ мм (можно считать, что длина провисающего провода практически равна половине расстояния между опорами).

2. Получим соотношение, связывающее провисание $h$ с длиной провода $L + \Delta L$: $(L + \Delta L)^2 = L^2 + h^2$. Отсюда $2L \cdot \Delta L \approx h^2$. Здесь для оценки учтены лишь основные слагаемые.




По этой формуле получаем, что если на морозе половина висящего провода удлинена на 1 мм относительно 25 м, то при увеличении этой длины на 12,75 мм при повышении температуры глубина провисания станет равной примерно 80 см.

3. Если провод подвергается нагрузке $F$, то его натяжение определяется по правилу разложения сил и оказывается равным $T = \dfrac{F}{2\sin\alpha} \approx \dfrac{F \cdot L}{2 \cdot h}$.

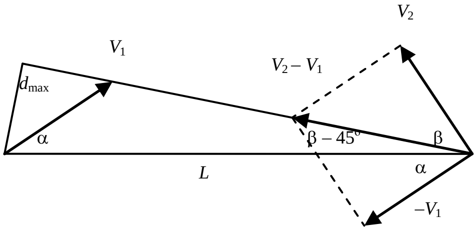
Отсюда получаем, что натяжения провода при указанных температурах относятся как $\dfrac{T_t}{T_0} \approx \dfrac{h_0}{h_t} = 4$.

***Ответ:*** 4.

### 9.1-07. Волк и заяц

См. решение задачи 8.2-07.

### 9.2-07. Два гнома




Так как шары одинаковые, то минимальное расстояние чуть превышает максимально допустимый диаметр шара (удвоенный радиус). Определим минимальное расстояние, на котором шары пролетают один над другим. Перейдем в систему отсчета, связанную с шаром, летящим снизу. Тогда другой шар в этой системе отсчета движется без ускорения, с постоянной скоростью, равной $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Так как дальность полета одинакова, то начальные углы, которые составляют скорости с горизонтом, связаны соотношением $\alpha = 90° - \beta$.

(Дальность полета $L = V\cos\alpha \cdot \dfrac{2V\sin\alpha}{g} = \dfrac{V^2}{g}\sin 2\alpha$, $180° - 2\beta = 2\alpha$ .) При $\alpha = 40°$ угол $\beta = 50°$, а максимальный размер шаров $d_{\max} = L\sin 5° \approx$ $\approx 20\text{ м}\cdot\dfrac{5\pi}{180} \approx 1{,}7$ м.

***Ответ:*** 1,7 м.

## 9.3-07. Плавающий брусок

Исходя из равенства давлений на одном уровне, можно записать соотношения:

$$\frac{\rho_{\text{бруска}}}{\rho_{\text{НЖ}}} = 1-\alpha\ ;\ \beta\rho_{\text{воды}} + (1-\beta)\rho_{\text{НЖ}} = \rho_{\text{бруска}}\ ;$$

$$\rho_{\text{НЖ}} = \frac{\beta\rho_{\text{воды}}}{(1-\alpha)-(1-\beta)} = 2000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\ ;\ \ \rho_{\text{бруска}} = \frac{(1-\alpha)\beta\rho_{\text{воды}}}{\beta-\alpha} = 1600\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\ .$$

Записав равенство давлений на нижней границе бруска, получаем для последнего случая:

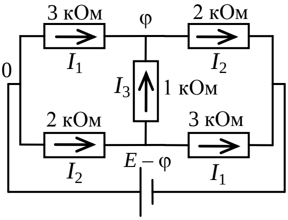
$$\rho_{\text{бруска}}H = (1-\gamma)H\rho_{\text{НЖ}} + \rho_{\text{воды}}h\ ;$$

$$H = h\frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{бруска}} - (1-\gamma)\rho_{\text{НЖ}}} = 1\text{ см}\cdot\frac{1000}{1600-1400} = 5\text{ см} = 0{,}05\text{ м}.$$

***Ответ:*** 5 см.

## 9.4-07. Электрический мост

Введем обозначения для токов, проходящих через резисторы, и потенциалов узлов с учетом симметрии схемы (см. рисунок). Тогда $I_1 = \varphi/3$, $I_2 = (170 - \varphi)/2$, $I_3 = 2\varphi - 170$.




Сопротивление указано в килоомах, ток — в миллиамперах, напряжение — в вольтах.

Так как заряд в узле схемы не может накапливаться, сумма токов, втекающих в узел $\varphi$, равна сумме вытекающих токов, и $I_2 = I_1 + I_3$, то есть $\varphi/3 = (170 - \varphi)/2 + (170 - 2\varphi)$, откуда $\varphi = 90$ В, $I_1 = 30$ мА, $I_2 = 40$ мА, $I_3 = 10$ мА.

Чтобы определить, во сколько раз упала мощность в цепи после перегорания центрального резистора, достаточно определить изменение тока через ЭДС. До перегорания ток равен $I_1 + I_2 = 70$ мА. После перегорания сопротивление цепи станет равным 2,5 кОм и ток через ЭДС будет равен 68 мА. Таким образом, мощность изменится в 34/35 раза, то есть упадет примерно на 3 %.

***Ответ:*** 3 %.

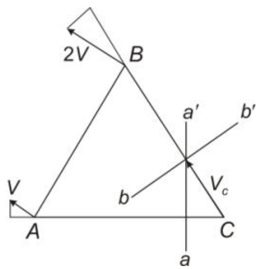
### 9.1-08. Два тела

Обозначим искомое расстояние через $x$, ускорения тел — через $a_1$ и $a_2$, время прохождения расстояния вторым телом $t$. Тогда $x = \frac{a_1(2t)^2}{2} = \frac{a_2 t^2}{2}$, откуда $a_2 = 4a_1$. Через секунду после начала движения скорости тел равны соответственно $a_1 \cdot 1$ с и $4a_1 \cdot 1$ с, поэтому $3a_1 \cdot 1$ с = 6 м/с, $a_1 = 2$ м/с$^2$. Конечные скорости тел равны $\sqrt{2xa_1}$ и $\sqrt{2x(4a_1)}$ соответственно, поэтому $\sqrt{8xa_1} - \sqrt{2xa_1} = 10$ м/с, откуда $x = 25$ м.

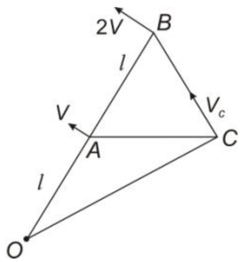
***Ответ:*** 25 м.

### 9.2-08. Скользящий треугольник

*I способ.* Рассмотрим рисунок, на котором изображены скорости вершин $V_A = V$ и $V_B = 2V$. Поскольку тело твердое, то проекции скоростей точек $A$ и $C$ на прямую, соединяющую их, должны быть равны (иначе тело должно разорваться — иногда это положение называют теоремой о проекциях скоростей твердого тела). Это же соображение относится и к паре точек $B$ и $C$, и вообще к любым парам жестко связанных точек. Применим это условие жесткой связи к точкам $A$ и $C$. Тогда можно выделить целую прямую $aa'$, на которой могут располагаться концы векторов скорости точки $C$ для выполнения требований теоремы. Аналогично жесткая связь точек $B$ и $C$ определяет возможную прямую $bb'$. Значит, для выполнения одновременно двух условий конец вектора искомой скорости точки $C$ должен располагаться на пересечении двух выделенных прямых. Нетрудно убедиться, что эта точка пересечения лежит на прямой $BC$. Теперь видно, что скорость $V_C = \sqrt{3}\,V$.




*II способ.* Пусть длина стороны треугольника равна $l$. Найдем мгновенный центр вращения треугольника. Эта точка характеризуется тем, что скорости всех точек твердого тела перпендикулярны и пропорциональны радиус-векторам, проведенным из мгновенного центра вращения. Очевидно, что мгновенный центр вращения $O$ расположен на прямой $AB$ на расстоянии $l$ от точки $A$. Тогда угловая скорость вращения тела $\omega = V / l$ и скорость точки $C$ равна $\omega \cdot OC$. Из очевидных геометрических соображений (например, из теоремы Пифагора) $OC = l\sqrt{3}$, следовательно скорость $V_C = \sqrt{3}\,V$.




*Примечание.* В приведенном решении рассмотрен только случай, когда скорости точек $A$ и $B$ сонаправлены. Однако возможен и другой случай, когда они противоположны по направлению. Оба способа решения пригодны и в этом случае, а $V_C = \sqrt{7}\,V$.

***Ответ:*** $\sqrt{3}\,V$.

### 9.3-08. Кубики

Расставим векторы сил на рисунке. Из нерастяжимости нити следует, что ускорения первого и второго кубиков равны. Запишем второй закон Ньютона для кубиков и блока с нитью.

$1,\ x$: $T = ma$,

$1,\ y$: $N_1 = mg$,

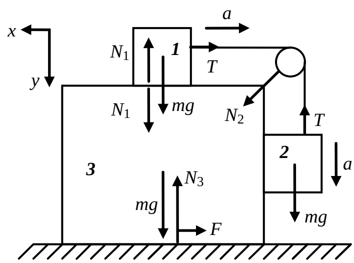
$2,\ y$: $mg - T = ma$,

$3,\ x$: $F = N_{2x}$,

$3,\ y$: $N_1 + mg + N_{2y} = N_3$,

блок + нить, $x$: $T = N_{2x}$,

блок + нить, $y$: $T = N_{2y}$.




Из этих уравнений следует, что $F = mg/2$, $N_3 = 5mg/2$. По закону Кулона — Амонтона коэффициент трения должен быть не меньше $\mu_{\min} = F / N_3 = 0{,}2$.

***Ответ:*** 0,2.

### 9.4-08. Вольтметры

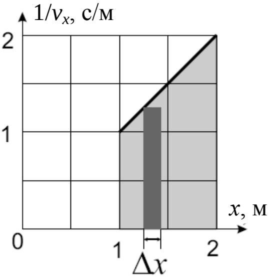
Напряжение на первом вольтметре должно быть равно сумме напряжений на втором и третьем, а это не так, значит один из них неисправен. Напряжение на третьем вольтметре должно быть равно сумме напряжений на четвертом и пятом, и это так и есть, значит, третий вольтметр исправен. Ток, проходящий через второй вольтметр, должен быть равен сумме токов, проходящих через третий и четвертый, а так как вольтметры одинаковы, то ток пропорционален напряжению. Следовательно, сумма напряжений на третьем и четвертом вольтметре должна быть равна напряжению на втором, а это не так. Третий и четвертый вольтметры исправны, значит неисправен второй. Истинное напряжение на нем равно сумме напряжений на третьем и четвертом вольтметрах, то есть 3 В.

***Ответ:*** 3 В.

**9.1-09. Время движения**

Определим, сколько времени понадобится телу на прохождение небольшого расстояния $\Delta x$, в пределах которого его скорость практически постоянна. Очевидно,

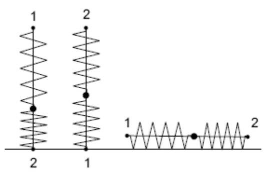
$$\Delta t = \Delta x / v_x = \frac{1}{v_x}\Delta x\ .$$




Построим график зависимости величины, обратной скорости тела, от его координаты (см. рисунок). Тогда $\Delta t$ будет равно площади выделенного на рисунке прямоугольника. Суммируя все промежутки времени $\Delta t$, получим, с одной стороны, искомое время движения, а с другой — площадь под графиком, изображенным на рисунке. Таким образом, время движения равно площади трапеции, которая равна 1,5 с.

***Ответ:*** 1,5 с.

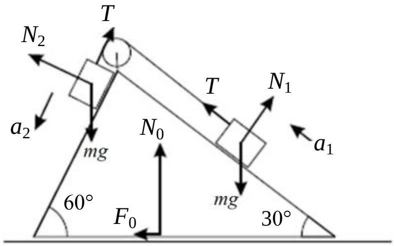
**9.2-09. Две пружины**




Обозначим пружины и концы стержня, к которым они прикреплены, цифрами 1 и 2. Две пружины действуют как одна «эффективная пружина» с коэффициентом жесткости $k_1 + k_2$. Очевидно, если положить стержень горизонтально, бусинка займет среднее положение между положениями в описанных в условии случаях — эффективная пружина находится в положении равновесия. Бусинка при этом будет находиться на расстоянии 5/6$L$ от первого конца стержня. В этом случае силы давления первой и второй пружин на нее уравновешивают друг друга, причем первая сжата на 1/6$L$, а вторая — на 1/3$L$, поэтому $\frac{1}{6}k_1L = \frac{1}{3}k_2L$ , то есть $k_1 = 2k_2$. При вертикальном положении стержня удлинение эффективной пружины по сравнению с положением ее равновесия составляет $1/6L$, поэтому $\frac{1}{6}(k_1+k_2)L=mg$, откуда $k_1=\frac{4mg}{L}$, $k_2=\frac{2mg}{L}$.

***Ответ:*** $\frac{4mg}{L}$; $\frac{2mg}{L}$.

**9.3-09. Неподвижный клин**




Запишем второй закон Ньютона в проекции на нить для первого и второго грузиков (ускорения их по модулю равны из-за нерастяжимости нити, $a_1 = a_2 = a$).

$$ma = mg\cos 30^\circ - T = T - mg\cos 60^\circ,$$

откуда

$$a = g\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Движение кубиков было равноускоренным, пройденное расстояние равно $L$, поэтому

$$t=\sqrt{\frac{2L}{a}}=2\sqrt{\frac{L(\sqrt{3}+1)}{g}}.$$

Для ответа на второй вопрос проще всего записать второй закон Ньютона для всей системы в целом:

$$2m\vec{a}_c = 2m\vec{g}+\vec{N}_0+\vec{F}_0,$$

где $\vec{a}_c$ — ускорение центра масс системы, $\vec{F}_0$ — сила трения покоя. Ускорение центра масс находится как среднее арифметическое ускорений кубиков (так как их массы равны):

$$\vec{a}_c=\frac{\vec{a}_1+\vec{a}_2}{2},$$

в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси

$$2m\frac{a(\cos 30^\circ+\cos 60^\circ)}{2}=F_0,$$

$$2m\frac{a(\sin 30^\circ-\sin 60^\circ)}{2}=2mg-N_0,$$

откуда

$$F_0=\frac{1}{4}mg,\ N_0=\frac{6+\sqrt{3}}{4}mg,$$

и так как максимальная сила трения покоя равна $\mu N_0$, минимальный коэффициент трения

$$\mu = \frac{F_0}{N_0} = \frac{6-\sqrt{3}}{33}.$$

**Ответ:** $2\sqrt{\frac{L(\sqrt{3}+1)}{g}}$, $\frac{6-\sqrt{3}}{33}$.

### 9.4-09. Эксперимент с электрической ванной

Введем следующие обозначения: $l$ — длина ванны, $s$ — ширина, $h$ — высота налитой жидкости, $\rho$ — ее плотность, $\rho_e$ — удельное сопротивление, $U$ — напряжение, $c$ — удельная теплоемкость жидкости, $\theta$ — разность температуры кипения и комнатной температуры, $L$ — удельная теплота парообразования. Выделяемая тепловая мощность равна $P = \frac{U^2}{R}$, где $R$ — сопротивление слоя жидкости, $R = \rho_e \frac{l}{hs}$.

Время закипания $T_0$ находится из соотношения $PT_0 = mc\theta = \rho lhsc\theta$, откуда $T_0 = \frac{\rho\rho_e c\theta}{U^2} l^2$.

Скорость парообразования сразу после закипания $\mu_0$ находится из соотношения $P = L\mu_0$, откуда $\mu_0 = \frac{U^2}{\rho_e L}\frac{hs}{l}$.

Время выкипания жидкости можно оценить как время, за которое кончится жидкость массой $m$, убывающая со скоростью $\mu_0$: $\mu_0 T_1 = m$, откуда

$$T_1 = \frac{\rho}{\rho_e L U^2} l^2.$$

***Ответ:*** 1) $T_0$ и $T_1$ не изменятся, $\mu_0$ возрастет вдвое; 2) $T_0$ и $T_1$ увеличатся вчетверо, $\mu_0$ уменьшится вдвое.

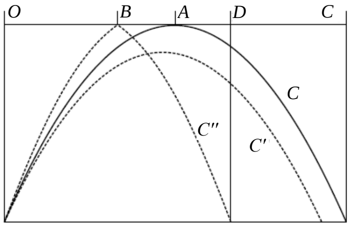
### 9.1-10. Два камня

В момент броска второго камня скорость первого камня относительно Земли в проекции на вертикальную ось, направленную вверх, составляет величину $v - g\tau$, а высота его подъема $h = v\tau - 0{,}5g\tau^2$. Перейдем в систему отсчета, связанную со вторым камнем. В данной системе отсчета ускорение первого камня равно нулю, он движется с постоянной скоростью $u = g\tau$, направленной вертикально вниз. Таким образом, относительная скорость камней постоянна и равна $u$. Время, через которое оба камня окажутся на одной высоте, это то время, за которое первый камень пройдет расстояние $h$ в системе отсчета, связанной со вторым, то есть $t = h/u = v/g - 0{,}5\tau$.

***Ответ:*** $v/g - 0{,}5\tau$; $g\tau$.

**9.2-10. Спортивный зал**

Первым шагом решения задачи может стать проверка того, заденет ли мяч потолок, будучи направлен по траектории, обеспечивающей максимальную дальность полета на открытом воздухе, то есть под углом 45°. В этом случае дальность полета $L_0 = v^2/g =$ 40 м, а высота подъема $h_0 = v^2/4g$ = 10 м превышает высоту зала ($v$ = 20 м/с — начальная скорость мяча). Таким образом, при ударе под углом 45° мяч задевает потолок.




Покажем, что оптимальной траекторией будет траектория *C*, касающаяся потолка (см. рисунок). Пусть при этом мяч запускается под углом α к горизонту, тогда, очевидно, $\alpha < 45°$, а дальность полета $L = v^2 \sin 2\alpha/g$. Сравним дальность полета мяча по данной траектории с дальностями, соответствующими начальным углам β, большим (траектория *C'*) или меньшим (траектория *C''*), чем α. Если β < α, то дальность полета *L'* меньше $L_\alpha$ по известному свойству баллистических траекторий, так как β < α < 45°. Рассмотрим β > α. Тогда мяч ударится в потолок в некоторой точке *B*, лежащей левее точки *A* касания потолка траекторией *C*. После упругого удара мяч продолжит движение по симметричной кривой, поэтому дальность полета $L'' = OB + BD = 2OB < 2OA = L$. Таким образом, $L > L'$ и $L > L''$, то есть *C* — оптимальная траектория.

Определим угол α. Высота полета мяча, движущегося по траектории *C*, $h = v^2 \sin^2 \alpha/2g$ и равна высоте зала *H*, откуда $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2gH}}{v} = \dfrac{3}{5}$ и дальность полета $L = \dfrac{2v^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}$ = 38,4 м.

***Ответ:*** 38,4 м.

**9.3-10. Четыре резистора**

Изначально в схеме из соображений симметрии потенциалы точек *A* и *C* равны, поэтому при соединении этих точек проводом токи в схеме не изменяются. То есть ток через амперметр в изначальной схеме равен 200 мА, и из-за симметрии через верхнюю и нижнюю пары последовательно соединенных резисторов протекает по 100 мА. При замыкании точек *A* и *B* через верхнюю пару резисторов по-прежнему идет ток 100 мА, значит через резистор $R_2$ идет ток 150 мА. Таким образом, сопротивление резистора $R_2$ в полтора раза меньше суммы $R_1+R_2$, то есть $R_2 = 2R_1$. Поэтому при замыкании точек $A$ и $D$ через резистор $R_1$ пойдет ток 300 мА, а через всю цепь — 400 мА.

***Ответ:*** 400 мА.

**9.4-10. Поезд**

Запишем второй закон Ньютона для последнего вагона и для всех 20 вагонов:

$$ma = T_0 - F; \quad 20ma = T_1 - 20F,$$

где $m$ — масса одного вагона, $a$ — ускорение поезда, $T_0$ — сила натяжения сцепки между последним и предпоследним вагонами, $T_1$ — сила натяжения сцепки между первым вагоном и локомотивом, $F$ — сила трения качения, действующая на каждый вагон. Из данных уравнений получаем $T_1 = 240$ кН, $a = 0{,}2$ м/с$^2$.

***Ответ:*** 240 кН; 0,2 м/с$^2$.

**9.1-11. Дедушка и поезд**

Перейдем в систему отсчета, связанную с поездом. В этой системе дедушка движется равнозамедленно с ускорением 1/2 + 1/3 = 5/6 м/с$^2$. Записывая уравнение движения, для координаты дедушки получим

$$x = 14 - 5\,t + 5/12\,t^2,$$

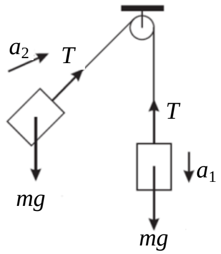
где ось направлена против хода поезда, ее начало совпадает с дверью вагона. Дискриминант квадратного уравнения $x = 0$ положителен, следовательно, дедушка достигнет в процессе движения двери вагона.

***Ответ:*** Успеет.

**9.2-11. Блок и два груза**

Запишем второй закон Ньютона для грузов в проекции на нить (см. рисунок):

$$ma_1 = mg - T\,,\ \ ma_{2H} = T - mg\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

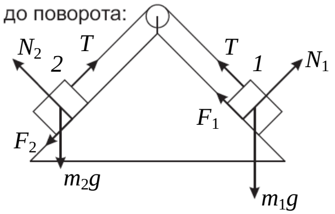


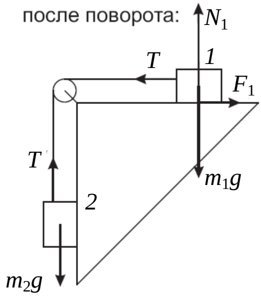

Из условия нерастяжимости нити следует равенство проекций на нее скоростей грузов. В начальный момент времени скорости грузов пропорциональны их ускорениям: $\vec{v}_i = \vec{a}_i \Delta t$ .

Следовательно, в начальный момент времени проекции ускорений на нить также равны: $a_1 = a_{2H}$. Решая систему уравнений, получаем $T = mg\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ .

***Ответ:*** $mg\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ .

### 9.3-11. Клин и два бруска




Бруски изначально движутся, но при малейшем повороте клина движение прекращается. Значит, ускорение брусков изначально равно нулю. Также оно равно нулю при повороте бруска на 45°. Пусть в первом случае бруски движутся вправо, тогда, очевидно, клин поворачивали против часовой стрелки. Запишем второй закон Ньютона для брусков до поворота:

$$m_1 g \frac{\sqrt{2}}{2} = T + \mu N_1,$$

$$m_1 g = \mu N_1,$$

$$m_2 g \frac{\sqrt{2}}{2} = T - \mu N_2,$$

$$m_2 g = \mu N_2.$$

Здесь уже учтено, что силы трения скольжения подчиняются закону $F_i = \mu N_i$. Из этой системы получаем уравнение $(1 + \mu)m_2 = (1 - \mu)m_1$. Теперь запишем второй закон Ньютона для брусков после поворота:

$$m_1 g = N_1,$$

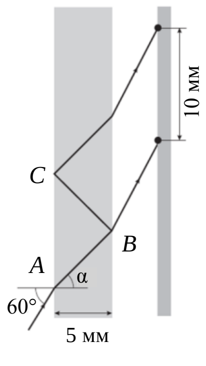
$$T = \mu N_1,$$

$$m_2 g = T.$$

Из этой системы получаем $m_2 = \mu m_1$, подставляем в полученное уравнение и находим $\mu = \sqrt{2} - 1$.

***Ответ:*** $\sqrt{2} - 1$.

### 9.4-11. Указка и стекло




Точки возникают из-за серии частичных отражений луча от поверхности стекло — воздух (см. рисунок). Из очевидных геометрических соображений треугольник *ABC* является равнобедренным. Его высота равна половине основания, следовательно угол α равен 45°. Из закона Снеллиуса показатель преломления стекла

$$n = \sin 60° / \sin\alpha = \sqrt{3/2}.$$

***Ответ:*** $\sqrt{3/2}$ .

**9.1-12. Проволока**

Для начала разберемся с формой проволоки. Так как на бусинку в первом случае действует лишь сила тяжести, то траектория ее движения в пространстве будет такой же, как у тела, брошенного горизонтально. Записав уравнения движения и исключив из них время, получим форму проволоки $y = gx^2/2v_0^2$. Во втором случае бусинка перемещается по проволоке, также повторяя ее форму, то есть ее траектория полностью повторяет траекторию в первом случае с точностью до поворота на 90º. Поэтому, если в формулу траектории вместо $v_0$ и $g$ надо подставлять скорость проволоки $v_1$ и искомое ускорение $a$, она не должна измениться. Так как $v_1 = 0{,}01v_0$, то $a = 10^{-4}g = 1$ мм/с$^2$.

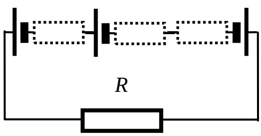
***Ответ:*** 1 мм/с$^2$.

**9.2-12. Жук**

Чтобы жук начал двигаться, его ускорение должно иметь тангенциальную составляющую. Поскольку нас интересует достижение максимальной скорости, в первый момент все ускорение должно быть направлено по касательной. Затем, чтобы удерживаться на окружности, требуется появление нормальной составляющей ускорения. В момент времени, когда скорость достигает наибольшего значения, тангенциальное ускорение обращается в ноль, и полное ускорение равно нормальному. Отсюда получим $a = v_{\max}^2/R$; таким образом, $v_{\max} = \sqrt{aR}$. Вычисление времени существенно сложнее, но поскольку требуется его оценить, можно грубо принять $v_{\max} = a_\tau^{\text{ср}} t$, а поскольку тангенциальное ускорение меняется от $a$ до 0, то считаем $a_\tau^{\text{ср}} = a/2$. Тогда оценка времени движения $t = 2v_{\max}/a = 2\sqrt{R/a}$.

***Ответ:*** $\sqrt{aR}$; $2\sqrt{R/a}$.

**9.3-12. Микросхема**




Для начала найдем силу тока, необходимую для правильной работы микросхемы: $I = P / U_м = 2$ А. Затем обратим внимание на то, что при подключении одной батарейки напряжение на микросхеме больше требуемого. Значит, при последовательном подключении трех батареек с одинаковой последовательностью полюсов не стоит ожидать ничего хорошего – напряжение на микросхеме станет еще больше. Следовательно, надо сделать так, чтобы внутренние сопротивления батареек складывались, а напряжения, создаваемые ими, нет. Этот эффект можно получить, развернув одну из батареек противоположно двум другим. Тогда внутренние сопротивления будут по-прежнему складываться, а напряжения, создаваемые двумя из трех источников, из-за противоположности полярностей компенсируют друг друга. Таким образом, напряжение, создаваемое тремя источниками, будет эквивалентно напряжению, создаваемому одним из них. Тогда можем записать $U_0 = 3Ir + U_м$, откуда получим искомое значение 0,2 Ом.

***Ответ:*** 0,2 Ом.

### 9.4-12. Доска

Расставим силы и выберем направление горизонтальной оси. В дальнейшем придется рассмотреть три различных случая, связанных с разными значениями силы упругости $T$: оба кубика неподвижны относительно доски; движется один кубик; движутся оба кубика.

1) Силы упругости недостаточно для того, чтобы преодолеть силы трения покоя. При этом оба кубика покоятся. Условие для силы упругости: $T = F_1 \le \mu mg$, $T = F_2 \le 2\mu mg$. В этом случае $a_1 = a_2 = a_Д = 0$ при $T \le \mu mg$.

2) Силы упругости достаточно, чтобы преодолеть силу трения покоя $F_1$, то есть $T > \mu mg$. При этом первый кубик начинает скользить по доске влево, доска приходит в движение вправо, второй кубик движется вместе с доской. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось $x$ для второго кубика и доски: $ma_Д = F_2 - F_1$; $2ma_Д = T - F_2$, сложим эти уравнения и учтем соотношение $F_1 = \mu mg$ для силы трения скольжения. Получим $a_Д = (T - \mu mg)/3m$. Подставляя полученное ускорение в любое из исходных уравнений, получим выражение для силы трения покоя $F_2$ и наложим условие на ее максимальное значение: $F_2 = (T + 2\mu mg)/3 \le 2\mu mg$. Отсюда найдем верхнюю границу для силы упругости $T \le 4\mu mg$.

3) Силы упругости достаточно, чтобы преодолеть обе силы трения покоя, то есть $T > 4\mu mg$. Тогда обе силы трения скольжения имеют фиксированные значения и, записав второй закон Ньютона в проекции на ось $x$ для доски, получим $ma_Д = F_2 - F_1 = \mu mg$, $a_Д = \mu g$.

***Ответ:*** 1) $a_Д = 0$ при $T \le \mu mg$; 2) $a_Д = (T - \mu mg)/3m$ при $\mu mg < T \le 4\mu mg$; 3) $a_Д = \mu g$ при $T > 4\mu mg$.

### 9.1-13. Схема

Обозначим сопротивления резисторов как $R_1$ и $R_2$, внутреннее сопротивление батарейки (плюс сопротивление амперметра) как $r$, а ЭДС батарейки как $E$. Записывая закон Ома для трех описанных случаев подключения резисторов, имеем

$$0{,}18\text{ А} = \frac{E}{R_1 + r},\quad 0{,}21\text{ А} = \frac{E}{R_2 + r},\quad 0{,}14\text{ А} = \frac{E}{R_1 + R_2 + r}.$$

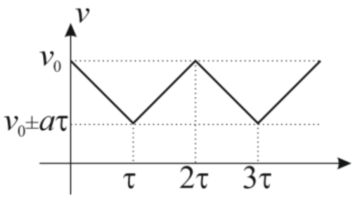
Переписывая данные уравнения в более удобном виде, получим

$$R_1 + r = \frac{700E}{126},\quad R_2 + r = \frac{600E}{126},\quad R_1 + R_2 + r = \frac{900E}{126}.$$

Из данной системы получаем $R_1 = \frac{300E}{126}$, $R_2 = \frac{200E}{126}$, $r = \frac{400E}{126}$. При подключении к батарейке амперметра накоротко его показания составят $I = \frac{E}{r} = \frac{126}{400} = 0{,}315\text{ А}$.

***Ответ:*** 315 мА.

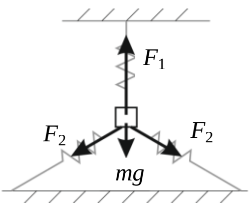
**9.2-13. Пила**




Наиболее простой способ решения задачи — графический. График зависимости скорости тела от времени представляет собой пилообразную ломаную линию. Перемещение тела соответствует площади под данным графиком. Площадь под каждым участком ломаной составляет по формуле площади трапеции $s = \frac{1}{2}\tau(v_0 + v_0 \pm a\tau)$, где $a$ = 1 м/с$^2$, τ = 1 с, а $v_0$ — искомая начальная скорость. Знак «+» соответствует направлению ускорения в течение первой секунды, совпадающему с начальной скоростью, знак «–» — противоположному начальной скорости. Из условия задачи $s$ = 1 м, откуда для значения скорости получаем $v_0 = (1 \pm 0{,}5)$ м/с.

***Ответ:*** 0,5 м/с или 1,5 м/с.

**9.3-13. Груз**




Силы натяжения пружин направлены вдоль пружин, при этом силы натяжения нижних пружин одинаковы. Найдем эти силы из условия равновесия груза до разрыва пружины (второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось):

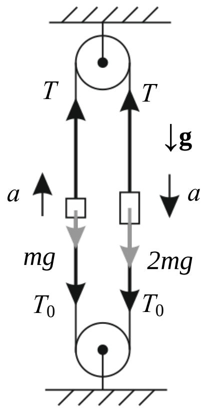
$$0 = F_1 - mg - 2F_2 \sin 30^\circ,$$

где $F_1$ — сила натяжения верхней пружины, $F_2$ — сила натяжения нижней пружины. Отсюда получим значение $F_2$ = 10 Н.

После разрыва верхней пружины перестает действовать только сила $F_1$, а остальные силы в первый момент времени не изменяются, следовательно равнодействующая всех сил становится равной $-F_1$. Из второго закона Ньютона в этом случае следует $ma_1 = -F_1$, откуда $a_1 = 20$ м/с$^2$. Во втором случае из аналогичных соображений равнодействующая всех сил становится равной $-F_2$, откуда получим $a_2 = 10$ м/с$^2$.

***Ответ:*** 20 м/с$^2$; 10 м/с$^2$.

**9.4-13. Блоки**




Обозначим силу натяжения нижней нити $T_0$ и запишем второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось для каждого из тел:

$$ma = T - mg - T_0, \quad -2ma = T - 2mg - T_0,$$

где $a$ — модуль ускорения грузов. Поделив первое из уравнений на второе, исключим неизвестное ускорение. Из полученного уравнения выразим искомую силу натяжения: $T_0 = T - \dfrac{4}{3}mg$.

***Ответ:*** $T - \dfrac{4}{3}mg$.

# 10 КЛАСС

## 10.1-04. Кольцо

1. Так как нитка нерастяжима, то ее скорость направлена перпендикулярно ей самой. Отметим, что в рассматриваемый момент времени движение кольца можно представить как сумму движений вдоль резинки и перпендикулярно ей. При этом узелок и кольцо будут вращаться относительно крючка с одной и той же угловой скоростью (резинка и нитка всегда находятся на одной прямой).

Запишем данное условие:

$$\frac{V/3}{l_0} = \frac{V\cos\alpha}{2l_0/\cos\alpha}, \tag{1}$$

где $\alpha$ — угол между радиус-векторами, проведенными от крючка в начальное и конечное положения кольца.

Несложно также заметить, что

$$\cos\alpha = \frac{2l_0}{\sqrt{(2l_0)^2 + (Vt)^2}}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем $t = \sqrt{2}l_0/V$.

2. Пусть жесткость резинки равна $k$, тогда модуль искомой силы равен модулю проекции силы упругости резинки на направление спицы. В свою очередь сила упругости резинки равна $F_{\text{упр}} = k(\sqrt{(2l_0)^2 + (Vt)^2} - 2l_0)$. Тогда искомая сила равна

$$F(t) = F_{\text{упр}}\sin\alpha = k\left(\sqrt{(2l_0)^2 + (Vt)^2} - 2l_0\right)\cdot\frac{Vt}{\sqrt{(2l_0)^2 + (Vt)^2}} = kVt\cdot\left(1 - \frac{2l_0}{\sqrt{(2l_0)^2 + (Vt)^2}}\right).$$

3. Несложно заметить, что работа этой силы идет на изменение энергии резинки (учтем, что вначале резинка не деформирована):

$$A(t) = \frac{k}{2}(\sqrt{(2l_0)^2 + (Vt)^2} - 2l_0)^2.$$

**Ответ:** $\sqrt{2}l_0/V$; $kVt\cdot\left(1 - \frac{2l_0}{\sqrt{(2l_0)^2 + (Vt)^2}}\right)$; $\frac{k}{2}\left(\sqrt{(2l_0)^2 + (Vt)^2} - 2l_0\right)^2$.

**10.2-04. Призма**

Очевидно, что один из брусков скользить по ленте не будет (иначе бы на легкую ленту действовали конечные силы, сообщающие ей бесконечное ускорение), очевидно также, что это будет тяжелый брусок (так как сила трения со стороны правого груза равна $2\mu mg\cos\alpha$, а сила трения со стороны левого груза не может превышать $\mu mg\cos\alpha$). Очевидно также, что правый брусок и лента поедут вправо, причем ускорение ленты будет не больше ускорения правого бруска, иначе силы трения, действующие на ленту, будут направлены влево. Далее возможны только два случая.

1. Если левый брусок не скользит, то $a = \dfrac{2mg\sin\alpha - mg\sin\alpha}{3m} = \dfrac{g\sin\alpha}{3}$ (второй закон Ньютона для системы брусков и ленты). А значение коэффициента трения, при котором левый брусок не скользит, определяется вторым законом Ньютона для него: $F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha = ma = mg\sin\alpha/3$, причем $F_{\text{тр}} \le \mu mg\cos\alpha$. Из этих двух уравнений получаем, что $\mu \ge \dfrac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha$.

2. Если второй брусок скользит ($\mu \le \dfrac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha$), то ускорение ленты определяется из второго закона Ньютона для системы второго бруска и ленты: $a = \dfrac{2mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{2m} = g\sin\alpha - \dfrac{1}{2}\mu g\cos\alpha$.

***Ответ:*** $g\sin\alpha/3$; $g\sin\alpha - \dfrac{1}{2}\mu g\cos\alpha$.

**10.3-04. Цилиндр**

За бесконечно большое время температура газа сравняется с температурой атмосферного воздуха (при этом считаем, что с воздухом ничего не произошло из-за большой его теплоемкости — воздуха же много). Тогда изменение внутренней энергии газа равно: $\Delta U = \dfrac{3}{2}\nu RT_0 - \dfrac{3}{2}\nu R(2T_0) = -\dfrac{3}{2}\nu RT_0$. Работа атмосферы над газом равна (атмосферное давление постоянно): $A = -p_0\Delta V = -p_0\left(\dfrac{\nu RT_0}{p_0} - \dfrac{\nu R(2T_0)}{p_0}\right) = \nu RT_0$.

Понятно, что цикл Карно можно будет производить по тех пор, пока температуры «холодильника» и «нагревателя» не сравняются. Пусть в некоторый момент температура газа равна $T_1$, тогда КПД очередного цикла Карно равен: $\eta = 1 - \dfrac{T_0}{T_1} = \dfrac{dA}{dQ}$, где $dA$ — приращение работы, $dQ$ — тепло, переданное «машине», которое уйдет на нагрев газа. Для газа имеем

$$dQ = -\left(\frac{3}{2}\nu R dT_1 + p_0 dV\right) = -\left(\frac{3}{2}\nu R dT_1 + \nu R dT_1\right) = -\frac{5}{2}\nu R dT_1,$$

тогда $dA = \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) dQ = -\frac{5}{2}\nu R\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) dT_1$.

Учтя, что температура газа менялась от $2T_0$ до $T_0$, после интегрирования получаем $A = \frac{5}{2}(1 - \ln 2)\nu R T_0$.

***Ответ:*** $\frac{5}{2}(1 - \ln 2)\nu R T_0$.

### 10.4-04. Жучки на треугольнике

Очевидно, что при данном движении жучков треугольник будет только вращаться. Проведем радиус-вектор из центра треугольника к одному из жучков. Скорость жучка относительно стола складывается из скорости $u$, направленной вдоль стороны треугольника, и скорости, связанной с вращением, направленной перпендикулярно проведенному радиус-вектору. Ясно, что в таком случае скорость жучка относительно стола может обратиться в нуль, только когда наш радиус-вектор перпендикулярен стороне треугольника, то есть когда жучок пройдет относительно проволоки расстояние $a/2$, тогда искомое время $t = a/(2u)$.

Так как длина радиус-вектора в этот момент равна $d = \frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}$, то угловая скорость треугольника $\omega = \frac{u}{d} = \frac{6u}{\sqrt{3}a} = \frac{2\sqrt{3}u}{a}$.

Так как в данный момент времени движение жучка есть сумма двух движений — поступательного движения с постоянной скоростью и вращательного движения, то ускорение жучка создается только вращательным движением: $w = \omega^2 d = \frac{2\sqrt{3}u^2}{a}$.

***Ответ:*** $a/2u$; $2\sqrt{3}u/a$; $2\sqrt{3}u^2/a$.

### 10.1-05. Гололедица

Рассмотрим поведение автомобиля, когда он въехал на наклонную поверхность. Ведущие колеса проскальзывают, но вращаются, задавая направление силы трения скольжения вверх по склону — в сторону движения автомобиля. В результате действия этой силы и скатывающей составляющей силы тяжести скорость будет падать по закону равнопеременного движения. Запишем изменение кинетической энергии:

$$0-\frac{mV^2}{2}=A_N+A_\mu+N_g=\mu\cdot mgS\cdot\cos\alpha-mgH=$$
$$=\mu\cdot mgS\cdot\cos\alpha-mgS\cdot\sin\alpha.$$

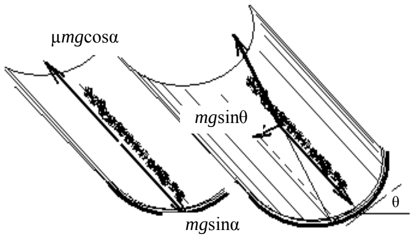
Учитывая малость угла уклона, получаем $\frac{mV^2}{2}=mgS\cdot(\alpha-\mu)$, откуда $S=\frac{V^2}{2g\cdot(\alpha-\mu)}$, что для наших значений дает около 770 м.

Если двигатель выключить, то сила трения скольжения либо окажется направленной вниз по склону (колеса заблокированы), либо станет пренебрежимо малой (свободный накат). Теперь длина участка определится по формуле $S=\frac{V^2}{2g\cdot(\alpha+\mu)}$ и составит около 154 м (в первом случае) либо около 257 м по формуле $S=\frac{V^2}{2g\cdot\alpha}$. Таким образом, длина пройденного участка сократится в три — пять раз, а значит, ведущие колеса создают тягу, даже когда проскальзывают на дороге.

***Ответ:*** 770 м; 154 или 257 м.

### 10.2-05. Цепочка в трубке

На цепочку, лежащую вдоль оси неподвижной трубки, действует синусная составляющая силы тяжести $mg\cdot\sin\alpha$ (скатывающая сила) и сила трения. Причем изначально численное значение скатывающей силы немного меньше максимального значения силы трения покоя (силы трения скольжения): $mg\cdot\sin\alpha<\mu\cdot mg\cdot\cos\alpha$.




При осевом повороте трубки на угол θ появляется новая составляющая силы — $mg\cdot\sin\theta$, и вектор силы трения поворачивается так, чтобы уравновесить возникшую векторную сумму сил $mg\cdot\sin\theta$ и $mg\cdot\sin\alpha$ (см. рисунок). При увеличении угла поворота результирующая сила увеличивается и может сравниться по модулю со значением силы трения скольжения $\mu\cdot mg\cdot\cos\alpha$. Однако осевая компонента силы трения при этом уменьшается, в нашем случае до значения скатывающей силы $mg \cdot \sin\alpha$: $(\mu \cdot mg \cdot \cos\alpha)^2 = (mg \cdot \sin\alpha)^2 + (mg \cdot \sin\theta)^2$.

Для данных задачи получаем (с учетом малости угла θ): $\left(\mu \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$ $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \theta^2$, откуда $\theta = \sqrt{\frac{3\mu^2 - 1}{4}} \approx 0{,}1 \approx 6^\circ$.

***Ответ:*** $6^\circ$.

**10.3-05. Термос**

Отвод тепла от внутренней стенки колбы осуществляется молекулами остаточного газа. Сталкиваясь с горячей стенкой, молекулы приобретают в среднем энергию поступательного движения, пропорциональную температуре этой стенки $E_{\text{гор}} = \frac{3}{2} kT_{\text{гор}}$, затем эти молекулы, практически не сталкиваясь между собой (вакуум!), переносят эту энергию на внешнюю стенку, теряя энергию $\Delta E = E_{\text{гор}} - E_0 = \frac{3}{2} k(T_h - T_0)$, здесь $T_0$ и $E_0$ — комнатная температура и энергия теплового движения в комнате. Разность температур все время изменяется, однако интервал изменения $(T_{h1} - T_{h2}) = (363 - 343)$ К = = 20 К невелик. Поэтому для оценки вполне можно принять для горячей стенки среднюю температуру интервала $T_h = 353$ К.

Число молекул, сталкивающихся со стенкой за время $\Delta t$, пропорционально величине $N \sim \frac{1}{2} n V_{\text{Т}} S \Delta t$, где $V_{\text{Т}}$ — средняя скорость хаотического (теплового) движения, $V_{\text{Т}} = \sqrt{\frac{3kT_h}{m_1}} = \sqrt{\frac{3RT_h}{M}}$. Эти молекулы заберут у чая энергию $\Delta W = N \cdot \Delta E_h = \frac{3}{4} n V_{\text{Т}} S k (T_h - T_0) \cdot \Delta t$.

Если интервал времени достаточен для требуемого в задаче изменения внутренней энергии $\Delta W = cm(T_{\text{гор}} - T_{\text{хол}})$, то получим соотношение для определения интервала времени:

$$\frac{3}{4} n V_{\text{Т}} S k (T_h - T_0) \cdot \Delta t = cm(T_{\text{гор}} - T_{\text{хол}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{4cm(T_{\text{гор}} - T_{\text{хол}})}{3 n V_{\text{Т}} S k (T_h - T_0)}.$$

Учтя, что $n = p/kT_h$, получим окончательно

$$\Delta t = \frac{4cm(T_{\text{гор}} - T_{\text{хол}})T_h}{3pV_{\text{т}}S(T_h - T_0)}.$$

Для оценок примем $m$ = 1 кг, $M$ = 29 г/моль, и тогда $\Delta t > 10$ ч.

***Ответ:*** 10 часов.

### 10.4-05. Две модели

Задача направлена на повышение роли асимптотических понятий в школьном курсе как наиболее отвечающих реальному миру, против устоявшейся привычки к точным расчетам в весьма приближенных моделях. Здесь форма тела сложна и неизвестна, но оценка вполне возможна.

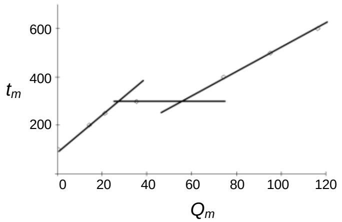
Сравним процессы нагревания обоих тел при одинаковом тепловом потоке из печи в тела моделей $q$. Первая модель успела нагреться до температуры $T_1$: $q \cdot \tau \cdot L^2 \sim \rho \cdot L^3(T_1 - T_0)$. Модель втрое больших размеров успела нагреться до температуры $T_2$: $q \cdot \tau \cdot 9L^2 \sim \rho \cdot 27L^3(T_2 - T_0)$. Теперь оба тела остывают от полученных температур на одно и то же число градусов $\Delta T$:

$$L^3 \cdot \Delta T \sim L^2 \cdot t_1(T_1 - T_0);\ 27L^3 \cdot \Delta T \sim 9L^2 \cdot t_2(T_1 - T_0).$$

Сравнивая, получаем $t_2 = 9 \cdot t_1$, то есть вторая модель остынет на те же два градуса за 4,5 мин.

***Ответ:*** 4,5 мин.

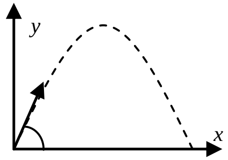
### 10.1-06. Теплоемкость




Из известной формулы (определения удельной теплоемкости вещества) следует, что зависимость температуры вещества от количества подведенной теплоты линейна: $t = t_0 + \frac{1}{cm}Q$ в случае, когда агрегатное состояние не изменяется. Построим график по заданным точкам. Видно, что группы точек в интервале температур 100...250 ºС и 400...600 ºС лежат на прямых с различными наклонами. Точка графика, соответствующая 300 ºС, не принадлежит ни одной из прямых. Таким образом, можно утверждать, что при температуре 300 ºС происходит переход из одного агрегатного состояния в другое, например это может быть кристаллическое вещество с температурой плавления 300 ºС. Для прямолинейных участков можно выразить удельную теплоемкость через тангенс угла наклона прямой: $c = \dfrac{\Delta Q}{m\Delta t}$, тогда получим на одном участке 140 Дж/(кг · К), а на другом – 210 Дж/(кг · К).

***Ответ:*** 140 Дж/(кг · К); 210 Дж/(кг · К).

**10.2-06. Артиллерия**




Запишем закон изменения во времени координат снаряда: $x = (V_0 \cos\alpha)t$, $y = (V_0 \sin\alpha)t - gt^2/2$.

Условием достижения цели являются соотношения $L = (V_0 \cos\alpha)t_x$, $0 = (V_0 \sin\alpha)t_x - gt_x^{\,2}/2$.

Выразим из этих уравнений тригонометрические функции неизвестного начального угла α, возведем их в квадрат и сложим:

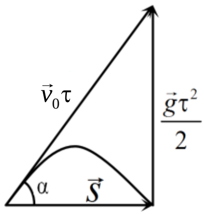
$$\left(\frac{L}{V_0 t_x}\right)^2 + \left(\frac{gt_x}{2V_0}\right)^2 = 1,$$

то есть

$$t_x^4 - 4\frac{V_0^2}{g^2}t_x^2 + 4\frac{L^2}{g^2} = 0. \qquad (1)$$

Решая полученное биквадратное уравнение, находим искомое время полета снаряда:

$$t_x = \frac{V_0}{g}\sqrt{2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{L^2 g^2}{V_0^4}}\right)}.$$



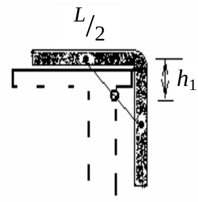

Это выражение имеет физический смысл только при неотрицательных значениях подкоренного выражения, то есть условием попадания в цель является неравенство $V_0 \ge \sqrt{gL}$. Знаки «+» и «–» означают, что снаряд при одной и той же скорости может попасть в цель по двум различным траекториям — настильной (α < 45º) и навесной (α > 45º).

*Примечание*. Можно найти еще более простое решение этой задачи, если использовать векторные величины. Достаточно посмотреть на рисунок, тогда из прямоугольного треугольника сразу получаем уравнение (1).

***Ответ:*** $\dfrac{V_0}{g}\sqrt{2\left(1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{L^2 g^2}{V_0^4}}\right)}$; при $V_0 \ge \sqrt{gL}$.

### 10.3-06. Трос

Главное — в записи теоремы о кинетической энергии не ошибиться с начальным положением центра масс: здесь $h_2 = \frac{L}{2}$, а вот $h_1 = \frac{L}{8}$.




А дальше просто:

$$\frac{MV^2}{2} = -(Mgh_1 - Mgh_2) + \mu \cdot \frac{M}{L} \cdot g \cdot \int_{x=0}^{x=\frac{L}{2}} \left(\frac{L}{2} - x\right) dx .$$

Выполним интегрирование:

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{3}{8} MgL - \frac{\mu MgL}{8} = \frac{MgL}{8} \cdot (3-\mu) .$$

Отсюда $V = \frac{\sqrt{gL \cdot (3-\mu)}}{2}$.

Этот же результат можно получить суммированием, если записать начальное выражение в теореме о кинетической энергии для элементарных перемещений:

$$\frac{MV_2^2}{2} - \frac{MV_1^2}{2} = -Mg\Delta h + \mu \cdot \frac{M}{L} \cdot g \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) \Delta x.$$

Далее, при выполнении суммирования нужно будет заметить аналогию между выражением $\mu \cdot \frac{M}{L} \cdot g \cdot x\Delta x$ и записью для работы упругой силы $k \cdot x \Delta x$, которая при суммировании на конечном перемещении дает выражение $\frac{k \cdot x^2}{2}$. Можно также выполнить графическое интегрирование.

Если трения нет, то задача становится совсем простой.

*Примечание.* На самом деле не такой и простой. Обсуждение проблем, возникающих при решении, можно найти в журнале «Квант» за 1993 год (№ 1, с. 55—56).

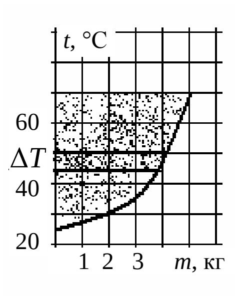
***Ответ:*** $\frac{\sqrt{gL \cdot (3-\mu)}}{2}$.

### 10.4-06. Компрессор

Запишем выражение первого начала термодинамики для элементарного процесса:

$$\Delta Q = \frac{5}{2} R \cdot \frac{m(T)}{M} \cdot \Delta T + \Delta A.$$

Для проведения суммирования по всему процессу заметим, что работа, совершенная газом, численно равна полезной работе компрессора $A = \eta \cdot N \cdot \tau$ (КПД, мощность, время соответственно), а изменение внутренней энергии пропорционально сумме $\Delta U = \frac{5}{2}\frac{R}{M} \cdot \sum\limits_i m_i(T) \cdot \Delta T_i$ , которую можно вычислить, зная площадь под графиком.

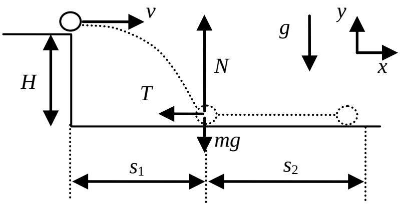



В нашем случае эта площадь оказывается равной 160 кг · °С.

Получаем (в единицах СИ): $\Delta Q = \frac{5 \cdot 8{,}31 \cdot 160}{2 \cdot 29 \cdot 10^{-3}} + 0{,}5 \cdot 500 \cdot 300 \approx$ 114621 + + 150000 ≈ 264 кДж.

***Ответ:*** 264 кДж.

**10.1-07. Полет мешка**




Обозначим как $s_1$ расстояние от стены до места падения мешка. Тогда, очевидно, $s_1 = v\sqrt{\frac{2H}{g}}$ . Перед падением мешок имел горизонтальную составляющую скорости $v$ и вертикальную $\sqrt{2gH}$ . Рассмотрим процесс неупругого удара мешка о землю.

Во время удара на него действуют вертикальная сила нормальной реакции опоры $N$, сила трения $T = \mu N$ и сила тяжести $mg$. По закону изменения импульса $\Delta p_y = (N - mg)\Delta t$, $\Delta p_x = -\mu N \Delta t$.

Из-за того, что удар происходит быстро, то есть $\Delta t$ мало, а вертикальный импульс меняется на конечную величину $\Delta p_y = m\sqrt{2gH}$ , сила $N$ достигает больших значений, и $mg$ по сравнению с ней можно пренебречь (вообще говоря, сила $N$ не остается постоянной за время удара, однако это не влияет на результат). Поэтому за время удара имеет место соотношение $\Delta p_x = -\mu$; $\Delta p_y = -\mu m\sqrt{2gH}$ , и горизонтальная проекция скорости уменьшается до значения $v_1 = v - \mu\sqrt{2gH}$ .

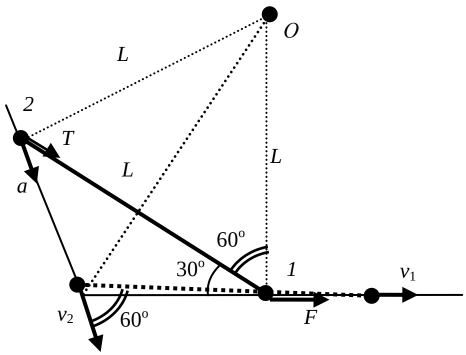
Для момента остановки мешка из закона изменения кинетической энергии имеем

$$\frac{mv_1^2}{2} = \mu mgs_2, \qquad s_2 = \frac{\left(v - \mu\sqrt{2gH}\right)^2}{2\mu g}.$$

Окончательно: $s = s_1 + s_2 = v\sqrt{\dfrac{2H}{g}} + \dfrac{\left(v - \mu\sqrt{2gH}\right)^2}{2\mu g}$.

***Ответ:*** $v\sqrt{\dfrac{2H}{g}} + \dfrac{\left(v - \mu\sqrt{2gH}\right)^2}{2\mu g}$.

**10.2-07. Бусинки**




Для начального момента найдем мгновенный центр вращения *O*, который лежит в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных к проволоке из точек расположения бусинок (см. рисунок). Треугольник *O12* является равносторонним.

Относительно точки *O* момент инерции бусинок равен $2mL^2$, момент силы $F$ равен $FL$, поэтому угловое ускорение нитки с бусинками будет равно $\varepsilon = \dfrac{F}{2mL}$. Соответственно линейное ускорение бусинок равно $a = F/(2m)$. Из второго закона Ньютона для второй бусинки в проекции на проволоку ($T$ — искомая сила натяжения нити): $ma = T\cos 30°$, $T = F/\sqrt{3}$.

В момент перед ударом второй бусинки о место сгиба для скоростей бусинок $v_1$ и $v_2$ из условия нерастяжимости нити имеем $v_1 = v_2 \cos 60°$, то есть $v_2 = 2\,v_1$.

Из закона сохранения энергии $mv_1^2/2 + mv_2^2/2 = F(L - L\ \sec 30°/2) =$ $= FL\,(1 - 1/\sqrt{3})$, и окончательно: $v_1 = \sqrt{\dfrac{2(\sqrt{3}-1)FL}{5\sqrt{3}m}}$, $v_2 = 2v_1$.

***Ответ:*** $F/\sqrt{3}$; $\sqrt{\dfrac{2(\sqrt{3}-1)FL}{5\sqrt{3}m}}$, $2\cdot\sqrt{\dfrac{2(\sqrt{3}-1)FL}{5\sqrt{3}m}}$.

**10.3-07. Схема с резистором**

Сначала определим, каким должно быть сопротивление внешней цепи $R$, чтобы при подключении в ней выделялась наибольшая мощность.

$$I = \frac{E}{r+R};\ W = I^2R = E^2\frac{R}{(r+R)^2} = \frac{E^2}{\dfrac{r^2}{R} + 2r + R} = \frac{E^2}{2r + r\left(\dfrac{r}{R} + \dfrac{R}{r}\right)};$$

тогда $W_{\max} = \dfrac{E^2}{4r}$ при $R = r$. Включим дополнительный резистор параллельно резистору с сопротивлением 1 кОм и получим искомое соотношение сопротивлений. Тогда $W_{\max}$ = 2 мВт.

Перебором, рассмотрев шесть вариантов подключений, можно получить тот же ответ.

***Ответ:*** 2 мВт.

### 10.4-07. ТЭЦ на реке

Для цикла Карно справедливо соотношение между совершенной работой $A$ и полученным от котла теплом $Q_i$, температурой нагревателя $T_h$ (пар) и холодильника $T_c$ (вода в реке): $\dfrac{A}{Q_i} = 1 - \dfrac{T_c}{T_h}$. Кроме того, ясно, что $A = Q_i - Q_p$, причем отдаваемое тепло $Q_p$ в конечном счете (через цепочку преобразований «нагревание — пар — конденсация — охлаждение») нагревает воду на $\Delta T$, что можно оценить как $Q_p = c \cdot \rho \cdot q \cdot t \cdot \Delta T$.

Используя эти соотношения, а также выражение для мощности $N = A/t$, получаем $\Delta T = \dfrac{N \cdot T_c}{c \cdot \rho \cdot q \cdot (T_h - T_c)} \approx 7{,}5$ °C.

Значит, вода забирается при температуре 12,5 °C.

***Ответ:*** 12,5 °C.

### 10.1-08. Шарик

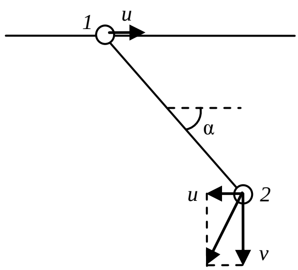
При установившейся скорости падения тела сила сопротивления воздуха равна силе притяжения Земли, но направлена вертикально вверх, то есть выполняется равенство $F_c = mg$. Сразу после удара обе силы будут направлены вниз, так как скорость тела изменилась на противоположную. Сила сопротивления зависит только от скорости шарика, поэтому, предполагая, что эта скорость не меняется существенно за 0,1 с, можно считать эту силу приблизительно постоянной. Тогда при движении вверх $-ma = -mg - F_c = -2mg$. Таким образом, ускорение торможения станет равным $a = -2g$. Считая, что это соотношение останется приближенно верным в течение некоторого времени, получаем для оценки

$$V \approx V_0 - 2g \cdot t = 10 - 20 \cdot 0{,}1 = 8 \text{ м/с}.$$

*Примечание.* Поощряется проверка правомерности допущения о примерном постоянстве силы сопротивления в течение 0,1 с.

***Ответ:*** 8 м/с.

**10.2-08. Две бусинки**




Пусть скорость первой бусинки равна $u$, тогда по закону сохранения импульса горизонтальная проекция скорости второй бусинки также равна $u$. Пусть вертикальная проекция этой скорости равна $v$. Тогда из кинематической связи (нерастяжимость нити) $u\cos\alpha = v\sin\alpha - u\cos\alpha$, откуда $v = 2u\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Из закона сохранения энергии

$$\frac{m}{2}u^2 + \frac{m}{2}(u^2 + v^2) = mgl\sin\alpha\,,$$

откуда получаем

$$u = \sqrt{\frac{gl\sin\alpha}{1 + 2\mathrm{ctg}^2\alpha}}\,, \qquad v = 2\mathrm{ctg}\,\alpha\sqrt{\frac{gl\sin\alpha}{1 + 2\mathrm{ctg}^2\alpha}}\,.$$

Скорость первой бусинки равна $u$, а второй

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\frac{gl\sin\alpha(1 + 4\mathrm{ctg}^2\alpha)}{1 + 2\mathrm{ctg}^2\alpha}}\,.$$

***Ответ:*** $\sqrt{\dfrac{gl\sin\alpha}{1 + 2\mathrm{ctg}^2\alpha}}$; $\sqrt{\dfrac{gl\sin\alpha(1 + 4\mathrm{ctg}^2\alpha)}{1 + 2\mathrm{ctg}^2\alpha}}$.

**10.3-08. Нарезаем резьбу**

Сила, приложенная к вороту метчика, уравновешивает силу трения и совершает работу, равную работе силы трения. Практически одновременно работа силы трения преобразуется во внутреннюю энергию, идущую на нагрев пластины. Пренебрегая потерями тепла (процесс быстрый), запишем $cm\cdot\Delta t = F\cdot R\varphi = M\cdot\varphi$. Здесь $R$ — радиус (плечо) действия силы, $\varphi$ — полный угол поворота метчика при нарезании резьбы. Его можно приближенно оценить как $\varphi = 2\pi\cdot\dfrac{H}{h}$. Тогда перепишем формулу в виде $c\cdot\rho\cdot S\cdot H\cdot\Delta t =$ $= M\cdot 2\pi\cdot\dfrac{H}{h}$, где $H$ — толщина пластины.

Отсюда получаем

$$\Delta t = \frac{2\pi\cdot M}{c\cdot\rho\cdot S\cdot h} = \frac{35\cdot 2\pi}{0{,}38\cdot 10^3\cdot 8{,}9\cdot 10^3\cdot 6\cdot 10^{-4}\cdot 75\cdot 10^{-5}} \approx 144\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Здесь стоит отметить, что момент может создавать не одна сила, а несколько (так и есть на самом деле) и плечи этих сил могут быть разными, однако работа при повороте остается равной $M \cdot \varphi$.

***Ответ:*** На 144 ºС.

**10.4-08. Поршень**

Пусть количество газа в каждой части сосуда равно $\nu$, температура до нагревания равна $T_1$, а после нагревания $T_2$. Тогда, записывая условие равновесия поршня до и после нагревания, получим $\frac{\nu RT_1}{SH/4} - \frac{\nu RT_1}{3SH/4} =$ $= \frac{\nu RT_2}{SH/3} - \frac{\nu RT_2}{2SH/3} = \frac{mg}{S}$, откуда $T_1 = \frac{3mgH}{8\nu R}$, $T_2 = \frac{2mgH}{3\nu R}$.

Изменение внутренней энергии газа в сосуде

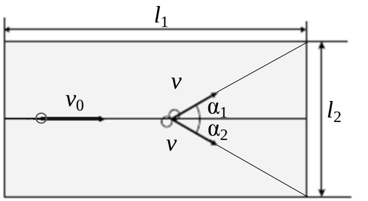
$$\Delta U = \frac{3}{2} 2\nu R(T_2 - T_1) = \frac{7}{8} mgH .$$

Работа газа равна изменению потенциальной энергии поршня: $A = mg(H/3 - H/4) = mgH/12$.

Из первого начала термодинамики $Q = \Delta U + A = 23mgH/24$.

***Ответ:*** $23mgH/24$.

**10.1-09. Бильярд**




Пусть скорости шаров после столкновения равны $v$ и направлены под углами $\alpha_1$ и $\alpha_2$ к оси симметрии стола. Запишем законы сохранения энергии и импульса (в проекции на стороны стола):

$$2m\frac{v^2}{2} = m\frac{v_0^2}{2};$$

$$mv\sin\alpha_1 = mv\sin\alpha_2;$$

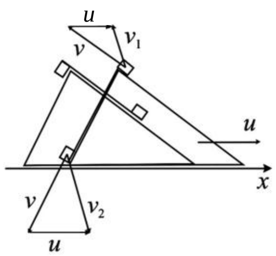
$$mv\cos\alpha_1 + mv\cos\alpha_2 = mv_0,$$

откуда $v = v_0/\sqrt{2}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 45°$, и из очевидных геометрических соображений

$$t_1 = t_2 = \frac{l_2/2}{v\cos 45^\circ} = \frac{l_2}{v_0} = 1{,}775 \text{ с.}$$

***Ответ:*** 1,775 с.

**10.2-09. Невесомый клин**




Пусть в конечный момент времени клин движется со скоростью $u$. Перейдем в систему отсчета, связанную с клином. В данной системе отсчета грузики движутся с равными по модулю скоростями $v$ (из-за нерастяжимости нити), направ-ленными вдоль соответствующих сторон клина. В лабораторной системе отсчета скорости грузиков $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ находятся прибавлением вектора скорости клина $\vec{u}$ .

По закону сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось $v_{1x} = -v_{2x}$, или $v\sin 60^\circ - u = u - v\sin 30^\circ$, откуда $u = \frac{\sqrt{3}+1}{4}v$ .

По теореме косинусов найдем модули векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$:

$$v_1^2 = v^2 + u^2 - 2vu\cos 60^\circ = \frac{8-\sqrt{3}}{8}v^2 \quad ,$$

$$v_2^2 = v^2 + u^2 - 2vu\cos 30^\circ = \frac{4-\sqrt{3}}{8}v^2 \ .$$

Из закона сохранения энергии

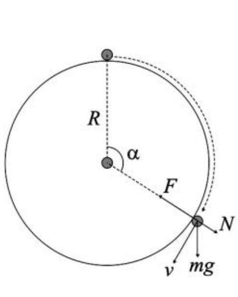
$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = mgL\frac{\sqrt{3}-1}{2} \ .$$

Движение кубиков было равноускоренным, в системе отсчета, связанной с клином, конечные скорости у них равны $v$, пройденное расстояние равно $L$, поэтому

$$t = \frac{2L}{v} = \sqrt{\frac{L}{g}\frac{5\sqrt{3}+3}{2}} \ .$$

***Ответ:*** $\sqrt{\frac{L}{g}\frac{5\sqrt{3}+3}{2}}$ .

**10.3-09. Вокруг сферы**




Запишем закон сохранения энергии для начального положения тела и положения, когда оно прошло дугу α по поверхности сферы:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1-\cos\alpha).$$

Второй закон Ньютона в проекции на радиус сферы:

$$ma_c = F + mg\cos\alpha - N,$$

где $F$ — сила кулоновского притяжения зарядов, $F = \frac{kq^2}{R^2}$, $a_c$ — центростремительное ускорение тела, $a_c = \frac{v^2}{R}$.

Выразим из приведенных равенств силу нормальной реакции $N$:

$$N = \frac{kq^2}{R^2} + mg\cos\alpha - 2mg(1-\cos\alpha) = \frac{kq^2}{R^2} + mg(3\cos\alpha - 2)\,.$$

Для того чтобы не произошло отрыва тела от сферы, $N$ должно быть положительным при любом α, то есть

$$\frac{kq^2}{R^2} > 5mg\text{, или } R < q\sqrt{\frac{k}{5mg}}\,.$$

***Ответ:*** $q\sqrt{\frac{k}{5mg}}$ .

**10.4-09. Эксперимент с неидеальным газом**

При изохорном нагревании газа по первому началу термодинамики

$$Q = \Delta U = c_V \Delta T = \frac{3}{2} R\Delta T\,.$$

Отсюда следует, что выражение для внутренней энергии газа

$$U = \frac{3}{2}RT + f(V)\,,$$

где $f(V)$ — неизвестная функция.

При изобарном расширении имеем

$$Q = A + \Delta U = p(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + f(V_2) - f(V_1) = \frac{5}{2}p(V_2 - V_1)\,,$$

откуда очевидно, что $f(V) = a/V$ и внутренняя энергия газа

$$U = \frac{3}{2}RT + \frac{a}{V}\,.$$

***Ответ:*** Зависит; $\frac{3}{2}RT + f(V)$.

**10.1-10. Дальность полета**

Пусть $h$ и τ — высота и длительность полета, найденные по приближенным формулам равноускоренного движения:

$$h = \frac{V^2}{2g} = 80\text{ м;}\quad \tau = \frac{2V}{g} = 80\text{ с.}$$

На самом деле в течение полета ускорение тела $a$ будет меняться. Оно максимально в нижней точке и равно $g$, а минимально в верхней точке и равно

$$g' = g\frac{R^2}{(R+h)^2} \approx g\left(1 - \frac{2h}{R}\right),$$

где $R$ — радиус Земли. Если ускорение постоянно и равно $g$, время полета будет равно $\tau$. Если бы ускорение было постоянно и равно $g'$, время полета равнялось бы

$$\tau' = \frac{2V}{g'} = \tau\frac{g}{g'} \approx \tau\left(1 + \frac{2h}{R}\right).$$

Очевидно, реальное значение времени полета находится в интервале от $\tau$ до $\tau'$, поэтому ошибку его определения можно оценить как

$$\Delta\tau \sim \tau' - \tau = 2\tau\frac{h}{R} \approx 2\cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

***Ответ:*** $2\cdot 10^{-4}$ с.

**10.2-10. Кубик на доске**

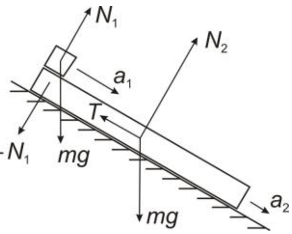
Запишем второй закон Ньютона для кубика и доски в проекциях на плоскость стола и на ось, перпендикулярную столу (обозначения сил приведены на рисунке):

$$ma_1 = mg\sin\alpha,\; N_1 = mg\cos\alpha,\; ma_2 = mg\sin\alpha - T,\; N_2 = mg\cos\alpha + N_1.$$

Из приведенных уравнений следует, что

$$a_1 = g\sin\alpha,\; a_2 = g\sin\alpha - T/m,\; N_2 = 2mg\cos\alpha.$$

Возможны два варианта.




1) Доска не проскальзывает по столу, $a_2 = 0$, $T = mg\sin\alpha$. Это возможно, когда сила трения $T$ не превышает максимальную силу трения покоя $2\mu mg\cos\alpha$, то есть $\mu > 0{,}5\operatorname{tg}\alpha$.

2) Доска проскальзывает по столу, сила трения $T$ равна силе трения скольжения $2\mu mg\cos\alpha$, $a_2 = g\sin\alpha - 2\mu g\cos\alpha$. Это происходит при $\mu < 0{,}5\operatorname{tg}\alpha$.

Ускорение кубика относительно доски равно $a_1 - a_2$, и время, через которое он достигнет нижнего края доски, равно

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_1 - a_2}} = \sqrt{\frac{2L}{g\min(\sin\alpha, 2\mu\cos\alpha)}}.$$

***Ответ:*** $\sqrt{\dfrac{2L}{g\min(\sin\alpha, 2\mu\cos\alpha)}}$.

**10.3-10. Бусинка и обруч**

Запишем закон сохранения механической энергии системы. Для определения кинетической энергии обруча учтем, что все его точки движутся относительно Земли с одной и той же скоростью $\omega r$, где $\omega$ — угловая скорость его вращения:

$$m\frac{\omega^2 r^2}{2}+m\frac{v^2}{2}=Fx,$$

где $v$ — скорость движения бусинки, $x$ — ее перемещение.

Когда гвоздь проходит верхнее положение, нить направлена под углом 30° к горизонту, и из простейших геометрических соображений $x=r(\sqrt{3}-1)$. Из нерастяжимости нити следует равенство проекций скоростей бусинки и гвоздя на нить, то есть $v = \omega r$. Тогда из закона сохранения энергии следует

$$\omega=\sqrt{\frac{F(\sqrt{3}-1)}{mr}}.$$

Когда гвоздь проходит крайнее левое положение, $x = 2r$, а бусинка имеет нулевую скорость, поэтому

$$\omega=2\sqrt{\frac{F}{mr}}.$$

***Ответ:*** $\sqrt{\frac{F(\sqrt{3}-1)}{mr}}$; $2\sqrt{\frac{F}{mr}}$.

**10.4-10. Сосуд в атмосфере**

Как в начале, так и после выравнивания температур газа и атмосферы поршень покоится, поэтому справедливо равенство $mg + p_1S = p_2S$, где $m$ — масса поршня, $p_1$ и $p_2$ — давления в верхней и нижней частях сосуда, $S$ — площадь сечения сосуда. Из закона Клапейрона — Менделеева в начальный момент следует

$$p_1=\frac{2RT}{0{,}5V},\quad p_2=\frac{3RT}{0{,}5V},$$

где $V$ — объем сосуда. После выравнивания температур поршень опустится, и закон Клапейрона — Менделеева запишется как

$$p_1'=\frac{RT}{V-V_1},\quad p_2'=\frac{RT}{V_1},$$

где $V_1$ — объем газа под поршнем после выравнивания температур. Из приведенных соотношений следует

$$\frac{RT}{V_1}-\frac{RT}{V-V_1}=\frac{mg}{S}=\frac{3RT}{0{,}5V}-\frac{2RT}{0{,}5V}=\frac{2RT}{V}.$$

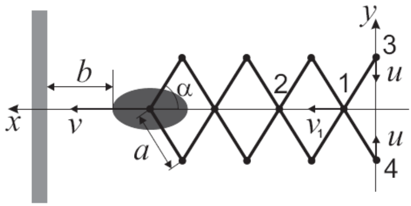
Решая квадратное уравнение, получаем $V_1 = (1 - 0{,}5\sqrt{2})V$.

Из первого начала термодинамики следует, что отведенная от газа теплота $Q$ равна

$$Q = -\Delta U - A_{\Gamma} = \frac{3}{2}R(3T + 2T - T - T) + (p_2 - p_1)(0{,}5V - V_1) = \left(\frac{7}{2} + \sqrt{2}\right)RT .$$

***Ответ:*** $\left(\frac{7}{2} + \sqrt{2}\right)RT$.

### 10.1-11. Лягушка




Введем систему координат (см. рисунок). Тогда, очевидно, координата $x$ лягушки связана с углом α соотношением $x = 7a \cos \alpha$. В начале движения $x = x_H = 7/2a$, а в конце

$$x = x_{\text{К}} = x_{\text{Н}} + b = \frac{7\sqrt{3}}{2}a.$$

Отсюда найдем конечный угол $\alpha_{\text{К}} = 30°$.

Теперь рассмотрим движение точки 3. Ее координата $y = a \sin \alpha$ изменяется от величины $y_{\text{Н}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ до величины $y_{\text{К}} = a/2$. Так как точка 3 движется с постоянной скоростью $u$, время движения находится как $t = (y_{\text{Н}} - y_{\text{К}})/u = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2u}$.

Для ответа на второй вопрос обратим внимание, что точки 1 и 3 связаны жестким стержнем, и поэтому их скорости в проекции на данный стержень равны: $v_1 \cos \alpha = u \sin \alpha$. Так как координата $x$ лягушки всегда в семь раз больше координаты $x$ точки 1, их скорости тоже различаются в 7 раз.

Отсюда скорость лягушки в конечный момент

$$v = 7v_1 = 7u \operatorname{tg} \alpha_{\text{К}} = \frac{7\sqrt{3}u}{3}.$$

***Ответ:*** $\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2u}$; $\frac{7\sqrt{3}u}{3}$.

### 10.2-11. Горка

Пусть перед столкновением тележки имеют скорости $u'$ и $v'$ соответственно. Тогда из закона сохранения импульса следует, что для полной остановки необходимо выполнение соотношения $v' = ku'$. Пусть столкновение тележек произойдет на некоторой высоте $h$. Запишем закон сохранения энергии в момент перед столкновением:

$$m_1gH + \frac{m_1u^2}{2} + \frac{m_2v^2}{2} = (m_1 + m_2)gh + \frac{m_1u'^2}{2} + \frac{m_2v'^2}{2}.$$

Учитывая, что $m_1/m_2 = v'/u' = k$, получаем

$$v = \sqrt{k^2u^2 + 2k^2gH + 2gh(1-k^2)}.$$

Высота $h$ может изменяться в пределах от 0 до $H$. При $k < 1$ величина $v$ возрастает при росте $h$, значит минимальное значение $v$ достигается при $h = 0$ и равно $k\sqrt{u^2 + 2gH}$. При $k > 1$, напротив, $v$ уменьшается при росте $h$, и минимальное значение $v$ достигается при $h = H$ и равно $\sqrt{ku^2 + 2gH}$.

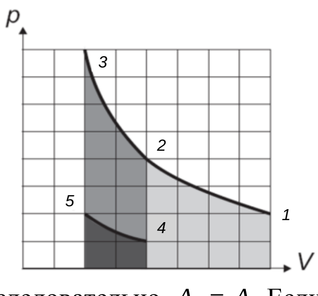
***Ответ:*** $k\sqrt{u^2 + 2gH}$ при $k < 1$ и $\sqrt{ku^2 + 2gH}$ при k > 1.

### 10.3-11. Отклонение груза

Чтобы отклонить груз на максимальный угол, рабочему следует совершить над ним максимальную работу. Работа будет максимальной, если сила действия рабочего на груз всегда максимальна по модулю и направлена вдоль его траектории, то есть перпендикулярно стержню. Тогда при отклонении груза на угол α его перемещение по дуге составит $l\alpha$, и рабочий совершит работу $A = Fl\alpha$. Потенциальная энергия груза возрастет на $W = mgl(1 - \cos\alpha)$. Из закона сохранения энергии $A = W$, откуда получаем $F = mg(1 - \cos\alpha)/\alpha$.

***Ответ:*** $mg(1 - \cos\alpha)/\alpha$.

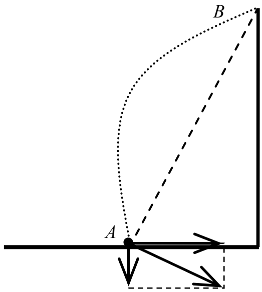
### 10.4-11. Сжатие газа




Проще всего решать данную задачу графически. Изобразим все описанные процессы на плоскости $pV$ (см. рисунок). Работа $A$ равна площади фигуры под кривой *1-2*. При сжатии газа еще вдвое работа $A_1$ равна площади фигуры под кривой *2-3*. Очевидно, если сжать эту фигуру вдвое вдоль оси ординат и растянуть вдвое вдоль оси абсцисс, она полностью совпадет с фигурой под кривой *1-2*. Площадь фигуры при этом не изменится, следовательно, $A_1 = A$. Если же перед сжатием газ в четыре раза охладить, работа по его сжатию $A_2$ будет равна площади фигуры под кривой *4-5*. Эта фигура получается сжатием фигуры под кривой *2-3* в четыре раза вдоль оси ординат. Следовательно, $A_2 = A_1/4 = A/4$.

***Ответ:*** $A$; $A/4$.

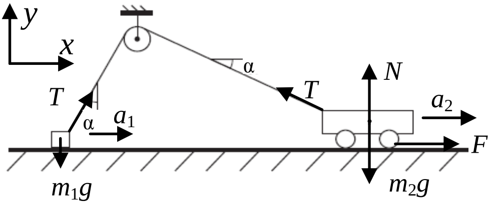
## 10.1-12. Ящик




Шарик будет двигаться в скрещенных полях — электрическом и гравитационном. Каждое из этих полей придает шарику ускорение — $g$ и $2g$ соответственно. Складывая векторно эти ускорения, получим эффективное ускорение $a = g\sqrt{5}$. Проведем отрезок из точки вылета шарика $A$ в край стенки ящика $B$. Нетрудно видеть, что вектор ускорения перпендикулярен этому отрезку. Если повернуть рисунок на угол $\alpha = \text{arctg}\, 2 \approx 63{,}4^\circ$ по часовой стрелке, то вектор эффективного ускорения будет направлен вниз, а отрезок $AB$ станет горизонтальным. Тогда наша задача сводится к вопросу: с какой наименьшей скоростью необходимо бросить шарик, чтобы он достиг точки $B$? Очевидно, что $L = AB = 2\sqrt{5}$ м должно быть расстоянием наибольшей дальности полета, для которой известно выражение $L = v_0^2 / a$, а вектор начальной скорости должен быть направлен под углом 45° к отрезку $AB$. Отсюда получаем $v_0 = \sqrt{aL}$ = 10 м/с.

***Ответ:*** 10 м/с.

## 10.2-12. Блок




Расставим силы и выберем систему координат. Сила нормальной реакции опоры, действующая на груз, равна нулю по условию отрыва. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси для груза и автомобиля:

$$T\sin\alpha = m_1 a_1; \quad T\cos\alpha = m_1 g;$$

$$m_2 a_2 = F - T\cos\alpha; \quad N + T\sin\alpha = m_2 g.$$

Запишем также кинематическую связь ускорений (нить нерастяжима) $a_1 \sin\alpha = a_2 \cos\alpha$. Выразим из этой системы силы $F$ и $N$ и учтем соотношение между ними на грани проскальзывания $F = \mu \cdot N$. Отсюда получим $\mu = \dfrac{m_2 g \cdot \text{tg}^2\alpha + m_1 g}{m_2 g - m_1 g\, \text{tg}\,\alpha} = \dfrac{1}{2}.$

***Ответ:*** 0,5.

**10.3-12. Пинбол**

Чтобы шарик смог достичь точки $B$, он должен в верхней точке иметь скорость $u$, достаточную, чтобы не оторваться от стенки. На грани отрыва единственная сила, действующая на шарик в плоскости стола, — проекция силы тяжести на наклонную плоскость, которая создает нормальное ускорение: $m\frac{u^2}{R} = mg\sin\alpha$. Запишем также закон сохранения механической энергии, принимая за нулевой уровень потенциальной энергии тяготения уровень $AB$ и учитывая, что в системе не действуют диссипативные силы: $W = 3mgR\sin\alpha + 0{,}5mu^2$. С учетом выражения для скорости $W = 3mgR\sin\alpha + 0{,}5mu^2 = 3mgR\sin\alpha + 0{,}5mgR\sin\alpha = 3{,}5mgR\sin\alpha.$

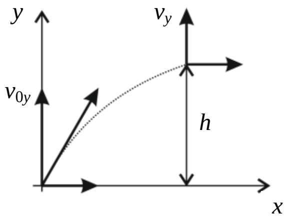
***Ответ:*** $3{,}5mgR\sin\alpha$.

**10.4-12. Пружина**

Запишем условие равновесия поршней: $p_0(2S - S) = mg$. Пусть поршни отклонились вниз на малую величину $x$. Тогда запишем условие изотермичности процесса: $p_0(2Sh + Sh) = p(S(h + x) + 2S(h - x))$. Отсюда найдем модуль вертикальной силы, исключая неизвестные величины $S$ и $p_0$ и пользуясь формулой приближенных вычислений при $x \ll h$: $F = pS - mg \approx mgx/(3h) = kx$. Отсюда $k = mg/(3h)$.

***Ответ:*** $mg/(3h)$.

**10.1-13. Снаряд**



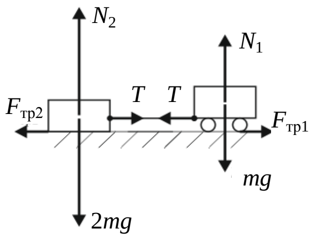

Пусть $h$ — высота, на которой разорвался снаряд (см. рисунок), $t_0$ — время полета снаряда до разрыва, причем $h = v_{0y}t_0 - \frac{gt_0^2}{2}$, где $v_{0y}$ — вертикальная составляющая начальной скорости. Поскольку первый осколок не имел вертикальной составляющей скорости в момент разрыва, то высота $h$ связана с временем свободного падения первого осколка $t_1$: $h = \frac{gt_1^2}{2}$. Отсюда находим величину $v_{0y} = \frac{g(t_1^2 + t_0^2)}{2t_0}$. Найдем также значение вертикальной составляющей скорости снаряда в момент разрыва: $v_y = v_{0y} - gt_0 = \frac{g(t_1^2 - t_0^2)}{2t_0}$.

Учтем теперь, что при разрыве снаряда должны сохраняться проекции импульса системы на обе оси, поэтому начальная скорость второго осколка будет вдвое больше вертикальной проекции скорости снаряда: $v_{0в} = 2v_y$.

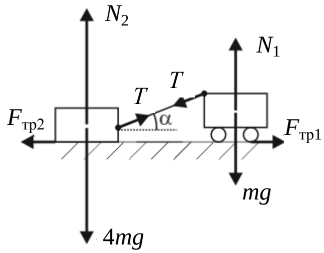
Запишем теперь уравнение для вертикальной координаты второго осколка: $y = h + v_{0в}\tau - g\tau^2/2$, причем $y = 0$ в момент времени $\tau$ после разрыва, и подставим в это уравнение найденные значения начальной координаты и начальной скорости. Получим квадратное уравнение для $\tau$ с учетом числовых значений: $\tau^2 - 50\tau - 900 = 0$, откуда найдем $\tau = 64$ с. Тогда полное время от выстрела до падения второго осколка $T = \tau + t_0 = 84$ с.

***Ответ:*** 84 с.

### 10.2-13. Буксир




Предельный случай, когда груз только сдвигается, соответствует движению с постоянной скоростью и нулевым ускорением. Тогда в первом случае из второго закона Ньютона для автомобиля $F_{тр1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg = T$; для груза $T = F_{тр2} = \mu_2 N_2 = 2\mu_2 mg$. Здесь $\mu_1$ и $\mu_2$ — коэффициенты трения шин и груза об асфальт. Отсюда получим соотношение $\mu_1 = 2\mu_2$.




Для второго случая запишем второй закон Ньютона для автомобиля и груза в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$F_{тр1} = T\cos\alpha = \mu_1 N_1$, $N_1 = mg + T\sin\alpha$,

$F_{тр2} = T\cos\alpha = \mu_2 N_2$, $N_2 = 4mg - T\sin\alpha$.

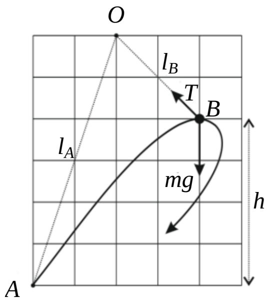
Исключая неизвестные и учитывая связь коэффициентов трения между собой, получим $\mu_1 = \dfrac{2\cos\alpha}{5\sin\alpha} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0{,}7$.

***Ответ:*** 0,7.

### 10.3-13. Траектория

Кривизна траектории $R$ определяется скоростью в данной точке и нормальным ускорением: $a_n = \dfrac{v^2}{R}$. В точке $B$ вектор скорости горизонтален, следовательно нормальное ускорение направлено вертикально и определяется вертикальными проекциями сил, действующих на материальную точку, – силой тяжести и вертикальной проекцией силы упругости жгута. Из второго закона Ньютона получаем

$$a_n = \frac{mg - T\cos 45^\circ}{m} = g - \frac{kx_B}{m\sqrt{2}},$$




где $x_B = l_B - l_0$ — удлинение жгута в точке $B$.

Скорость в точке $B$ найдем из закона сохранения полной механической энергии тела, так как все силы, действующие на тело, консервативны: $\frac{mv^2}{2} = \frac{k(x_A^2 - x_B^2)}{2} - mgh$, где $x_A = l_A - l_0$ — удлинение жгута в точке $A$, $h$ — перепад высот между точками $B$ и $A$.

Подставляя числовые значения, получим $R$ = 38 см.

***Ответ:*** 38 см.

### 10.4-13. Пленка

Пленка рвется, когда разность давлений газов по разные стороны пленки превышает некоторое критическое значение $p_{кр}$. Запишем выражение для количества теплоты, полученного газом в первом опыте, выразив его через мощность нагревателя $N$ и переходя с помощью уравнения состояния от приращения температуры к давлению и объему: $Nt_1 = Q_1 = \nu C_1 \Delta T_1 = \frac{C_1}{R} p_{кр} V$. Здесь $C_1$ — молярная теплоемкость первого газа в изохорном процессе, $V$ — объем газа, $t_1$ — время до разрыва пленки. Аналогично для второго опыта $Nt_2 = Q_2 = \nu C_2 \Delta T_2 = \frac{C_2}{R} p_{кр} V$. В третьем опыте необходимо учесть, что изменяется давление с обеих сторон, поэтому $\frac{R}{C_1} Nt_3 - \frac{R}{C_2} Nt_3 = p_{кр} V$.

Выражая из этих трех уравнений времена и сокращая неизвестные величины, получим $t_3\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) = 1$, откуда найдем искомое значение $t_3$ = 6 мин.

***Ответ:*** 6 мин.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ТУР

### 8-05. Пластилин

Задание: Определить плотность пластилина.

Оборудование: кусок пластилина, цилиндрический стеклянный сосуд, вода, линейка, динамометр.

### 8-06. Стакан

Задание: Определить массу и плотность стеклянного стакана известной емкости.

Оборудование: Цилиндрический прозрачный сосуд, стеклянный стакан известной емкости (емкость указана на наклейке), вода, линейка (цена деления 1 мм).

### 8-07. Пшено

Задание: Определить число зернышек в стакане. Придумать метод, пригодный для измерений при любом объеме емкости (например, вагон).

Оборудование: Стакан пшена, пустой стакан, крышка от пластиковой бутылки.

### 8-08. Дробь

Задание: Определить массу металлической дробинки.

Оборудование: Пластиковая емкость для воды, вода, 15 одинаковых дробинок, 2 пластмассовые соломинки, ножницы, 2 линейки, кусочек пластилина.

Указание: Соломинки можно разрезать на любое количество частей.

### 8-09. Клетки

Задание: Определить массу одной тетрадной клеточки.

Оборудование: Лист бумаги в клетку, груз известной массы (монета).

Указания: Размер стороны одной клетки листа составляет 5,0 мм, масса монеты 2,0 г. Листы бумаги можно делить на любое количество частей.

### 8-10. Винт

Задание: Определить глубину резьбы винта.

Оборудование: Длинный винт, мерная линейка, нитка, бумага в клетку, ручка.

Указание: Бумагу и нитку можно делить на любое количество частей, наносить необходимые отметки ручкой.

### 8-11. Листы бумаги

Задание: Определить толщину одного листа.

Оборудование: Линейка, пачка листов бумаги с клейкой полосой.

### 8-12. Скрепка

Задание: Определить как можно точнее диаметр проволоки канцелярской скрепки.

Оборудование: Канцелярская скрепка, нитка, линейка.

Указание: Менять форму скрепки можно.

### 8-13. Монеты

Задание: Определить плотность материала монет 10 копеек каждого сорта. Высказать предположение о материале монет.

Оборудование: 20 монет достоинством 10 копеек (с гладким ребром и с насечкой на ребре), линейка, груз известной массы (монета 5 рублей, масса 6,45 г).

### 9-05. Проволока

Задание: Определить удельное сопротивление куска проволоки.

Оборудование: Набор точных резисторов, кусок тонкой проволоки, соединительные провода, батарейка, амперметр, линейка, карандаш, нож.

### 9-06. Вермишель

Задание: Определить средний диаметр вермишели в пачке.

Оборудование: Пачка вермишели, катушка ниток, линейка (цена деления 1 мм).

### 9-07. Плотность тела

Задание: Определить плотность тела неправильной формы.

Оборудование: Вода, соль, пластиковый стакан известного объема с риской, небольшое тело неправильной формы, 2 линейки, 2 донышка от пластиковых стаканов, ложка, 3 груза известной массы (монеты).

Указания: Объем стакана по риске — 100 мл; монета 2 руб. — 5,0 г; монета 50 коп. — 3,0 г; монета 10 коп. — 2,0 г.

### 9-08. Бумага

Задание: Определить прочность (необходимую силу) на разрыв полосы тонкой бумаги шириной 10 мм.

Оборудование: Линейка, ножницы, широкий скотч (липкая лента), груз известной массы (100 г), тонкая бумага (широкий лист).

### 9-09. Карандаш

Задание: Определить коэффициенты трения покоя и скольжения материала линейки по окрашенной цилиндрической поверхности карандаша.

Оборудование: Линейка, два одинаковых круглых карандаша, бумага в клетку.

Указание: Бумагу можно сгибать и делить на любое количество частей.

### 9-10. Фигура

Задание: Определить массу картонной фигуры и каждой из ее частей, разделенных линией.

Оборудование: Картонная фигура неправильной формы, разделенная чертой на 2 части, мерная линейка, груз известной массы (монета), ручка.

Указания: Гнуть картонную фигуру можно, разрывать на части нельзя! Можно делать отметки ручкой на картонной фигуре. Масса монеты (1,85 ± 0,03) г.

### 9-11. Дробь в пластилине

Задание: Определить количество дробин в куске пластилина.

Оборудование: Кусок пластилина, содержащий внутри инородные включения в виде дробин, мерная линейка, груз известной массы (монета), несколько дробин отдельно, кусок чистого пластилина, ручка.

Указания: Извлекать дробины из куска пластилина не разрешается! Менять форму пластилина можно. Масса одной монеты (1,85 ± 0,03) г.

### 9-12. Резиновые кольца

Задание: Определить коэффициент упругости резинового жгута длиной 1 м, из которого изготовлены кольца.

Оборудование: Несколько колец из резины, линейка, небольшие металлические скобки, груз известной массы.

Указания: Разрывать кольца можно. Масса груза 88 г.

### 9-13. Линза

Задание: Определить фокусное расстояние линзы. Определить радиус кривизны поверхности линзы, используя отраженный свет от границы «стекло — воздух».

Оборудование: Линза, линейка, лист бумаги в клетку, лист белой бумаги.

Дополнительные сведения: Показатель преломления стекла равен 1,5. Формула тонкой линзы через радиусы кривизны: $\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. Зеркало с радиусом кривизны $R$ собирает отраженные лучи на расстоянии $F = \frac{R}{2}$. Для системы близко стоящих линз работает правило $\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}$.

## 10-05. Спички

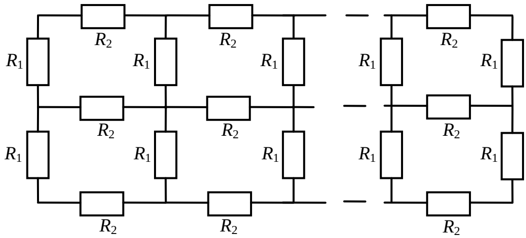
Задание: Определить коэффициент трения спичечной головки о шероховатую поверхность спичечного коробка.

Оборудование: Коробка со спичками, динамометр, набор грузов, лист бумаги, линейка, нить.

## 10-06. Решетка резисторов

Задание: Электрическая схема в виде прямоугольной решетки состоит из резисторов номиналами $R_1$ и $R_2$ (см. рисунок). Найти значения $R_1$ и $R_2$.

Оборудование: Решетка резисторов, мультиметр.




Указания: Запрещается вносить изменения в схему, то есть закорачивать различные точки в схеме или разрывать соединительные провода.

## 10-07. Черный ящик

Задание: Определить эквивалентную схему и параметры ее элементов. Предложить различные варианты включения резисторов с наименьшим их числом.

Оборудование: «Черный ящик», содержащий схему из резисторов, имеющий четыре вывода, мультиметр, зачищенный провод.

Указание: Запрещается вскрывать «черный ящик».

## 10-08. Сталь и нить

Задание: Определить коэффициент трения стали о нить.

Оборудование: Нить, 2 линейки, груз со стальной проушиной (масса груза равна 100 г).

## 10-09. Дробь

Задание: Определить коэффициент трения качения дробины о бумагу (аналог коэффициента трения, обеспечивающий замедление тела при его качении по горизонтальной поверхности).

Оборудование: Лист бумаги в клетку, линейка, дробина (1 шт.).

### 10-10. Маятник

Задание: Определить зависимость периода колебаний маятника, составленного из полосы картона с закрепленным на конце болтом с гайкой, от положения на полосе второго болта с гайкой; найти положения максимального и минимального периода и их значения.

Оборудование: Полоса картона с дырками вдоль всей длины, два болта с гайками, кусок проволоки, линейка, секундомер.

### 10-11. Бумага

Задание: Определить толщину листа бумаги.

Оборудование: Металлический шарик, линейка, ручка, лист бумаги.

### 10-12. Атмосфера

Задание: Определить атмосферное давление. Оценить давление, которое способны создать Вы, выдыхая воздух.

Оборудование: Прозрачная чистая гибкая трубка длиной около 1 метра, линейка, сосуд с чистой водой, небольшая дробина.

### 10-13. Скольжение и покой

Задание: Определить коэффициент трения скольжения и коэффициент трения покоя дробины о лист плотной бумаги.

Оборудование: 8 дробин, лист плотной бумаги (перфокарта), линейка, пластилин.

Указание: Перфокарты можно сгибать и разрывать необходимое количество раз.

# КОММЕНТАРИИ К ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

**8-05. Пластилин**

1. Погружаем в сосуд с водой кусок пластилина и измеряем линейкой изменение уровня $h_1$ жидкости в сосуде. Изготавливаем из пластилина «кораблик» и пускаем его плавать в сосуде с водой. Вновь измеряем изменение уровня $h_2$ в сосуде с водой. Плотность пластилина находим по формуле

$$\rho_{\text{пл}} = m_{\text{пл}}/V_{\text{пл}} = \rho_{\text{воды}}\, Sh_2/Sh_1 = \rho h_2/h_1.$$

2. В качестве теста перед тем, как оторвать кусок пластилина от палочки, измеряем ее размеры, считая, что она имеет форму прямоугольного параллелепипеда, а массу определяем с помощью динамометра.

**8-06. Стакан**

Вылив стакан воды емкостью $V_1$ = 200 мл в сосуд и измерив высоту ее уровня $h$, определим площадь сечения сосуда $S_{\text{с}} = \dfrac{V_1}{h}$. Нальем в сосуд достаточно много воды и погрузим в нее стакан полностью. Измерив изменение уровня воды $\Delta h$, определим объем стакана $V_{\text{ст}} = S_{\text{с}}\Delta h.$ Выльем воду из стакана и, пустив его плавать в сосуде, будем доливать в него воду до тех пор, пока стенки стакана не окажутся на одном уровне с водой. Тогда сила Архимеда, действующая на стакан, равна $F_{\text{А}} = (V_{\text{ст}} + V_1)\rho_0 g$, а сила тяжести равна $F_{\text{т}} = (m_{\text{ст}} + \rho_0 V_{\text{в}})g,$ где $\rho_0$ = 1 г/мл — плотность воды, $g$ = 9,8 м/с$^2$ — ускорение свободного падения, $m_{\text{ст}}$ — масса стакана, $V_{\text{в}}$ — объем воды внутри стакана, который необходимо впоследствии измерить. Так как $F_{\text{т}} = F_{\text{А}}$, масса стакана $m_{\text{ст}} = \rho_0(V_{\text{ст}} + V_1 - V_{\text{в}})$, а его плотность $\rho = \dfrac{m_{\text{ст}}}{V_{\text{ст}}}$.

**8-07. Пшено**

Определить, сколько зерен надо для заполнения одного ряда в крышке, затем определить число рядов в крышке. Далее крышками измерить количество пшена в стакане, пересыпая его в другой стакан.

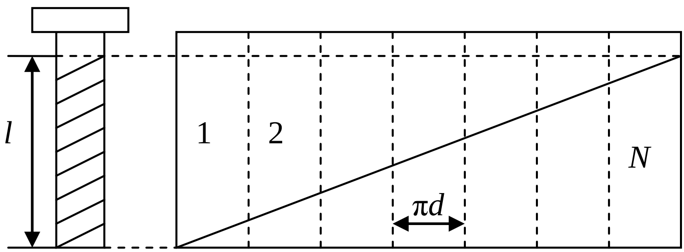
**8-08. Дробь**

Из кусочка трубки и пластилина сделать открытый поплавок. С помощью линейки измерять глубину опускания поплавка в сосуд при разном числе дробинок. Так как на трубочке нет рисок, можно измерять глубину по опусканию верхнего конца относительно края стакана (двумя линейками). Для измерения площади сечения поплавка разрезать кусочек трубочки и развернуть вдоль линейки.

**8-09. Клетки**

Запрашиваемым ответом является масса одной клетки 1,7 мг (плотность используемой бумаги примерно 67 г/м$^2$), поэтому разумным ответом считался диапазон 1,2...2,0 мг. Основную трудность в измерениях составляло отсутствие весов, но данное достаточно большое количество бумаги позволяло изготовить рычажные весы из бумаги. При взвешивании необходимо было разместить по возможности дальше (для повышения точности) от точки опоры весов монету и свернутый многократно лист бумаги. Поскольку монета и бумага являлись распределенными телами, то важен учет центра масс каждого тела. Из правила рычагов следует $m_{\text{монеты}} \cdot l_1 = m_{\text{бумаги}} \cdot l_2$, откуда находится масса бумажного листа, свернутого многократно. Разделив полученное значение массы на количество клеток листа, получим искомую массу одной тетрадной клеточки. Для подтверждения достоверности необходимо было провести серию измерений. Приветствовались градуировка весов, изготовление ленточной линейки, замечания по поводу неоднородности бумаги и т. д.

**8-10. Винт**



Развертка

Основную сложность задачи составляет то, что линейкой нельзя измерить глубину резьбы, но метод рядов с применением нитки позволяет в несколько приемов определить внутренний и внешний диаметры резьбы. Внешний диаметр $D$ проще всего измерить, например, прокатывая винт в несколько оборотов по поверхности стола. А внутренний диаметр $d$ можно определить, намотав нитку на винт строго внутри канавки.

$L^2 = (N\pi d)^2 + l^2$, где $L$ — длина нитки, $N$ — число оборотов вокруг винта, $d$ — искомый внутренний диаметр, $l$ — длина части резьбы с намоткой.

$$d = \sqrt{L^2 - l^2} / (N\pi).$$

Искомая глубина резьбы равна $(D - d)/2$.

Рассуждения по поводу толщины наматываемой нитки, неоднородности резьбы и т. д. приветствовались.

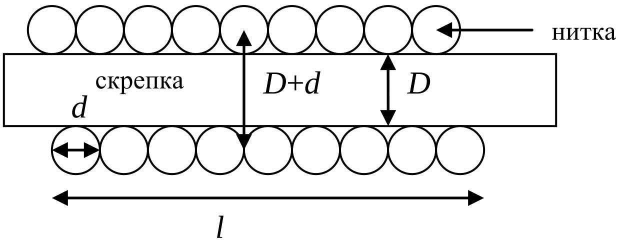
**8-11. Листы бумаги**

Основным методом измерений является метод рядов, заключающийся в измерении толщины большого количества листов бумаги. В выданных пачках специально было неравное число листов для сохранения индивидуальности работы каждого участника. Требовалось аккуратно пересчитать выданное количество листов, измерить толщину пачки и затем делением найти толщину одного листа. Важно проведение неоднократных измерений.

Приветствовалась проверка идентичности листов путем деления пачки пополам (или аналог). Хорошим считался результат, попавший в 15 % от истинного для выданных листов (0,095 мм = 95 мкм). Оценивались также попытки улучшить точность (двойная толщина), другие способы измерения, замечания по поводу влияния клейкой полосы и сжатия пачки.

**8-12. Скрепка**

Основным методом измерений является метод рядов, реализованный путем намотки достаточно длинной нитки плотно на скрепку. Но по сравнению с проводимыми обычно измерениями данным способом необходимо было учесть и толщину наматываемой нитки, поскольку диаметр скрепки $D$ всего в несколько раз превосходил диаметр нитки $d$. Соответственно, метод рядов применялся дважды: для определения диаметра нитки и для определения суммарного диаметра скрепки и нитки.




Подробный вывод формулы для диаметра цилиндра винтовой линии см. в задаче 8-10.

$$D + d = \sqrt{L^2 - l^2} \,/\, (N\pi).$$

При этом $d = l / N$. Окончательно получаем $D = (\sqrt{L^2 - l^2} / \pi - l) / N$.

Приветствовались замечания по поводу натяжения нитки, проведение неоднократных измерений при различных условиях намотки, проверка однородности проволоки путем намотки в разных местах, попытки улучшить точность, другие способы измерения.

**8-13. Монеты**

Монеты достоинством 10 копеек, выпущенные в разные годы, изготовлялись из различных сплавов: монеты с гладким ребром — из стали с плотностью около 7800 кг/м$^3$ и монеты с насечкой на ребре — из латуни с плотностью около 8300 кг/м$^3$. При этом из-за покрытия монеты выглядят практически одинаково и имеют одинаковые размеры. Масса монет составляет соответственно 1,85 г и 1,95 г. Для изготовления весов необходимо воспользоваться  линейкой. При взвешивании нужно учитывать расположение центра масс монет и по возможности максимально увеличивать плечи весов для улучшения точности взвешивания. Для нахождения объема монеты нужно толщину монеты умножить на площадь лицевой стороны (круг). Методом рядов необходимо найти толщину, поделив высоту стопки монет на число монет в стопке, при этом полученное значение окажется завышенным (а плотность окажется меньше настоящей). Способы оценки глубины тиснения рисунка монеты приветствовались. Итоговая формула для определения плотности

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{h \cdot \pi d^2}.$$

**9-05. Проволока**

Так как сопротивление резистора и нихромовой проволоки порядка десятков ом, то внутренним сопротивлением батарейки можно пренебречь. Тогда, поочередно измеряя силу тока через резистор и проволоку, определим сопротивление нихромовой проволоки. Длину ее измеряем линейкой. Чтобы определить диаметр $d$ проволоки, намотаем ее на круглый карандаш плотно, виток к витку и разделим длину намотки, измеренной линейкой, на число витков $n$. Удельное сопротивление материала проволоки находим по формуле: $\rho = I_0\pi d^2R_0/I_14L$, где $I_0$ — сила тока через резистор $R_0$, $I_1$ — сила тока через проволоку.

**9-06. Вермишель**

Для определения диаметра вермишели необходимо обернуть всю пачку двумя нитками и натянуть их таким образом, чтобы пачка приняла вид цилиндра. Измерив длину охватывающей части нити $L$, можно получить площадь его сечения $S = \frac{L^2}{4\pi}$. Суммарная площадь сечения вермишели относится к площади сечения цилиндра как площадь круга к площади описанного вокруг него шестиугольника, то есть как $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}83$. Таким образом, площадь сечения вермишели определяется как $S_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\frac{S}{N}$, где $N$ — число вермишели в пачке. Отсюда можно определить диаметр вермишели $D_1 = 2\sqrt{\frac{S_1}{\pi}}$.

Допускается также измерение методом рядов.

**9-07. Плотность тела**

Тело сделано из материала, близкого по плотности к воде (пластмасса). Путем растворения некоторого количества соли в воде можно определить плотность по всплыванию исследуемого тела. Требуется контролировать, не меняется ли уровень жидкости при растворении соли, тщательно перемешивать раствор, следить, чтобы к телу не прилипали пузырьки воздуха. Соль отмеряется с помощью рычажных весов, сделанных из линейки и грузов, уложенных в донышки от стаканов.

**9-08. Бумага**

В качестве образца использовались рулонные бумажные полотенца. Из бумаги вырезаются фигурки, похожие на песочные часы с постепенным обужением перешейка до обрыва, в качестве зажима используется широкий скотч, груз прицепляется к песочным часам, прочность на 1 см вычисляется пропорцией.

**9-09. Карандаш**

Искомый коэффициент трения покоя составлял 0,29, трения скольжения — 0,26. Допустимыми по измерениям значениями являлись 0,2—0,4. Коэффициент трения покоя определялся, например, по максимальному углу наклона покоящейся на карандашах линейке.

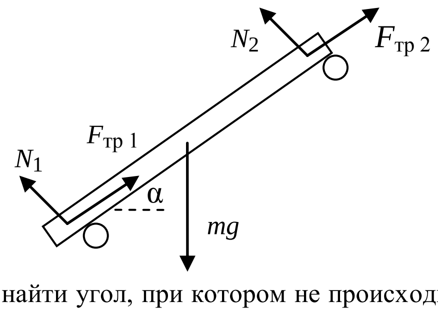
Из второго закона Ньютона

$N_1 + N_2 = mg\cos\alpha,$

$F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2} = \text{mg}\sin\alpha$ и

$F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2} = \mu_{\text{п}}(N_1 + N_2).$

Откуда $\mu_{\text{п}} = \text{tg}\,\alpha.$

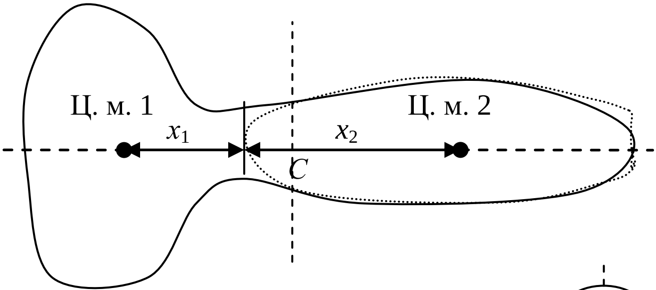


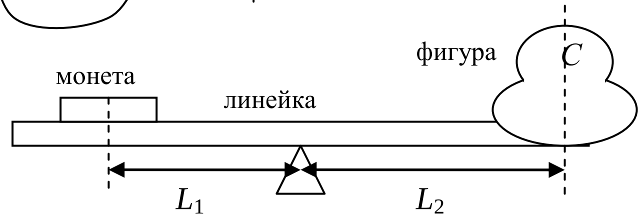

Слегка толкнув линейку, можно обнаружить, что даже при меньших углах наклона линейка не замедляется, двигаясь по карандашам. Аналогично приведенным выше вычислениям можно найти угол, при котором не происходит ускоренного движения линейки.

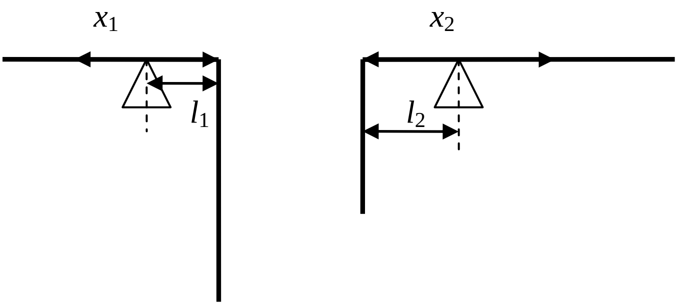
Приветствовались различные способы измерения и полезные замечания по поводу заусенцев на линейке, резко изменяющих характеристики трения, разных сторон линейки, неоднородности выданных материалов и т. д.

**9-10. Фигура**

Определим положение центра масс фигуры (точка $C$) путем вывешивания ее на остром ребре в двух направлениях. Используя линейку в качестве рычажных весов, с учетом расположения центров масс фигуры ($L_2$) и монеты ($L_1$) найдем массу фигуры: $m_{\text{монеты}} \cdot L_1 = m_{\text{ф}} \cdot L_2$ .




Согнем фигуру по отмеченной линии под прямым углом так, чтобы одна часть располагалась горизонтально, найдем положение опоры для равновесия для двух разных случаев. Отметим соответствующие положения центров масс конструкций в двух разных конфигурациях.

Предположим, что центры масс частей фигуры отстоят на $x_1$ и $x_2$ от линии. Тогда

$$l_1 = x_1 \cdot m_1 / m_{\text{ф}}, \; l_2 = x_2 \cdot m_2 / m_{\text{ф}}, \; l_C = (-x_1 m_1 + x_2 m_2) / m_{\text{ф}} .$$

Нетрудно заметить, что одна часть фигуры достаточно симметричная (см. сравнение контуров — так можно было проверить в тетради), ее центр масс лежит посередине ее длины. То есть $x_2$ находится измерением длины части фигуры с последующим делением пополам.

$$m_2 = m_ф l_2 / x_2 , \; m_1 = m_ф - m_2.$$

Соотношения масс можно также приближенно найти, как соотношение площадей, очертив трафарет фигуры в тетради.

**9-11. Дробь в пластилине**

Удобным методом является определение плотностей представленных материалов (пластилина и дробины). Изготовление рычажных весов позволяет определять массу элементов. Так можно найти массу нескольких дробин, откуда делением находится масса одной дробины, масса чистого пластилина и масса смеси (пластилин с дробинами).

Учитывая то, что у пластилина легко менять форму, изготовим для измерения объема параллелепипеды. Перемножив линейные размеры (длину, ширину, высоту), найдем объем чистого пластилина и смеси.

Для определения диаметра одной дробины воспользуемся методом рядов. Объем одной дробины равен $V_д = \pi d^3 / 6$.

Плотности дробины и пластилина равны: $\rho_д = m_д / V_д$, $\rho_п = m_п / V_п$. Рассмотрим массовый состав смеси: $m_{см} = \rho_п (V_{см} - N V_д) + \rho_д N V_д$. Откуда число дробин в смеси равно:

$$N = (m_{см} - \rho_п V_{см}) / (\rho_д V_д - \rho_п V_д) = (m_{см} - \rho_п V_{см}) / (m_д - \rho_п V_д) .$$

Попадание в интервал ±1 дробина от истинного результата оценивалось дополнительно.

**9-12. Резиновые кольца**

Определим жесткость цепочки из колец отрезков жгута или соорудим конструкцию с провисанием такой цепочки между двумя точками (так увеличивается величина отклонения деформированной конструкции).

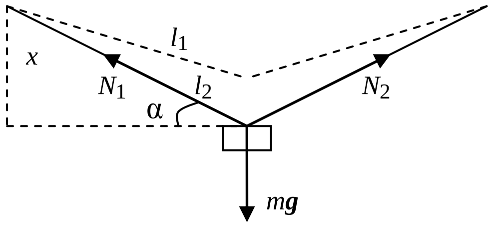
Для конструкции с провисанием из второго закона Ньютона

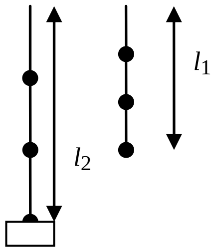
$$N_1 = N_2 = mg / \sin\alpha, \;\; \sin\alpha = x / l_2, \;\; k(l_2 - l_1) = mg / (2\sin\alpha).$$

Жесткость цепочки $k = \dfrac{mgl_2}{2(l_2 - l_1)x}$.

Если пользоваться вертикальной конструкцией, то

$$k(l_2 - l_1) = mg \text{ и жесткость цепочки } k = mg / (l_2 - l_1) .$$



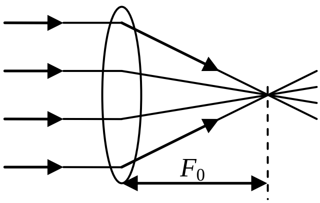

С ростом длины жесткость уменьшается обратно пропорционально длине. Искомая жесткость жгута длиной 1 м получается с учетом длины растягиваемого жгута за вычетом узелков:

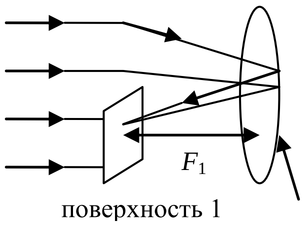
$$k_1 = k(l_1 - l_{\text{узелков}})/1\,\text{м}.$$

Попытки улучшить точность, другие способы измерения, замечания по поводу неоднородности выданного оборудования (жгуты немного отличались по толщине) оценивались дополнительно.

**9-13. Линза**

Как следует из данных в указании формул, для нахождения радиусов кривизны нужно измерять у таких систем фокусные расстояния. Фокусное расстояние линзы можно определить по нахождению точки фокуса для параллельных лучей от далеко расположенного источника света (там появляется наиболее четкое изображение). А еще два фокусных расстояния можно найти в отраженном свете (см. рисунок), когда свет проходит сквозь линзу, отражается от задней сферической поверхности и снова проходит через линзу. В таком случае система состоит из последовательно составленных линзы, линзы, эквивалентной кривому зеркалу, и еще одной линзы.




$$1/F_0 = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2),\ \ 1/F_0 = 0{,}5\cdot(1/R_1 + 1/R_2).$$

Для составной системы $1/F_1 = 1/F_0 + 1/F_{\text{экв}} + 1/F_0$, $1/F_1 = 2/F_0 + 2/R_1$, откуда $R_1 = 2\cdot(1/F_1 - 2/F_0)^{-1}$.

Аналогично $R_2 = 2\cdot(1/F_2 - 2/F_0)^{-1}$.

Методы, увеличивающие точность определения малых расстояний до точек фокуса, приветствовались.

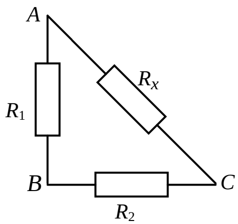
### 10-05. Спички

*1-й вариант.* Вынем спички из коробка и вложим в коробок предложенные грузы. С помощью динамометра определяем вес коробка с грузом. Далее уложим спички так, чтобы их головки составляли дорожку (можно, например, втыкать их в бумагу), затем положим на эту дорожку коробок с грузом. С помощью динамометра определим силу, при которой коробок начинает скользить по спичечной дорожке. Из отношения измеренных сил определим коэффициент трения $\mu$.

*2-й вариант.* Положим на выложенную из спичек дорожку коробок и попытаемся его опрокинуть, толкая острием ручки или линейкой в широкую вертикальную стенку. Найдем расстояние $a$ от нижней грани коробка до точки, при нажатии на которую коробок от скольжения переходит к опрокидыванию, и определим коэффициент трения из соотношения $\mu = b/2a$, где $b$ – ширина спичечного коробка.

*3-й вариант.* Свяжем аккуратно две спички так, чтобы их головки были на противоположных концах. Положим их на шероховатую поверхность спичечного коробка и, наклоняя коробок, определим угол $\alpha$, при котором спички начинают скольжение. В этом случае $\mu = \text{tg}\,\alpha$.

### 10-06. Решетка резисторов




Рассмотрим угол схемы, то есть сведем ее к треугольнику (см. рисунок). Измеряя сопротивления плеч и решая систему уравнений, можно определить все сопротивления этой цепи. В действительности в предлагавшихся схемах решетки построены из одинаковых резисторов, что было легко показать, измеряя сопротивления вертикального и горизонтального звеньев. В этом случае задача решается легко: $R_{AB} = \dfrac{R_1(R_1+R_x)}{2R_1+R_x}$, $R_{AC} = \dfrac{2R_1R_x}{2R_1+R_x}$, откуда, исключая неизвестное сопротивление, находим $R_1 = \dfrac{4R_{AB}-R_{AC}}{2}$.

### 10-07. Черный ящик

Четырехполюсники (черные ящики) сделаны из резисторов, соединенных звездой или треугольником (в зависимости от номера варианта). Следует установить, что два полюса соединены между собой. Убедиться, что двух резисторов недостаточно для предлагаемой схемы. Поочередно измеряя сопротивление между выводами, составить уравнения для соединения резисторов звездой или треугольником. Показать, что без замыкания пары полюсов невозможно отличить звезду от треугольника.

**10-08. Сталь и нить**

Привязать нить к двум линейкам через отверстия в них. Для меньшего провисания сложить нить в несколько раз, повесить на нее грузик. Натягивая нить и изменяя угол наклона нити, найти крайнее положение грузика, при котором он еще не съезжает. Для устойчивости измерений одну линейку ставить на стол, другую — на край стола, чтобы можно было изменять высоту; после натягивания нити измерить расстояние от края стола до первой линейки.

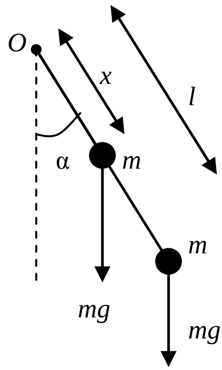
**10-09. Дробь**

Искомым значением коэффициента трения качения считалось 0,01, диапазон допустимых значений в качестве хорошего результата 0,005—0,05.

Методы измерения в силу малости коэффициента трения предпочтительнее было основывать на работе силы трения при прокатывании дробины по достаточно большому пути, для чего требовалось создать колебательную систему в виде катания дробины внутри плавно вогнутой бумажной поверхности. При этом можно было заметить зависимость результата от используемых скоростей и начальных условий. Из закона изменения механической энергии $A_{тр} = -F_{тр} \cdot l = -\mu mg \cdot l = \Delta E_{пот} = -mgh,$ где $h$ — исходная высота скатывания, $l$ — пройденный дробиной суммарный путь при колебаниях. Чем ближе вогнутая поверхность к горизонтальной плоскости, тем ближе получаемый ответ к истинному. То есть уменьшить систематическую погрешность было возможно путем создания нескольких поверхностей с приближением к горизонтальной и интерполяцией результата.

Приветствовались замечания по поводу проскальзывания при движении, разнородности участков, влияния микросоринок, присутствующих на бумаге.

**10-10. Маятник**




Хитростью этой задачи является слабая зависимость периода колебаний такого маятника от положения перемещаемого болта. Можно получить следующее теоретическое описание движения такого маятника:

уравнение для моментов (ось $O$):

$$(ml^2 + mx^2)\varepsilon = -mg(l + x)\sin\alpha;$$

для малых углов отклонения:

$$(l^2 + x^2)\varepsilon = -g(l + x)\alpha,$$

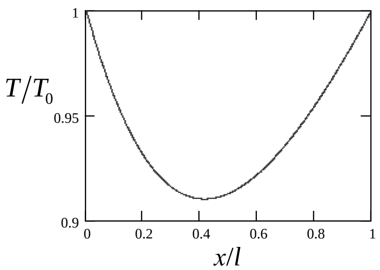
откуда находится угловая частота $\omega^2 = g(l+x)/(l^2+x^2)$. Период колебаний равен: $T = 2\pi/\omega$, то есть $T = 2\pi\sqrt{l/g}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{l^2}\right)/\left(1+\frac{x}{l}\right)}$.

Значения отношения $T/T_0$, где $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$, при различных значениях отношения $x/l$ приведены в таблице:

| $x/l$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T/T_0$ | 0,958 | 0,931 | 0,916 | 0,91 | 0,913 | 0,922 | 0,936 | 0,955 | 0,976 |

Таким образом, максимальный период достигается в самом ближнем к закрепленному болту отверстии, а минимальный период — в четвертом отверстии.

Примерный вид графика зависимости периода от положения второго болта:

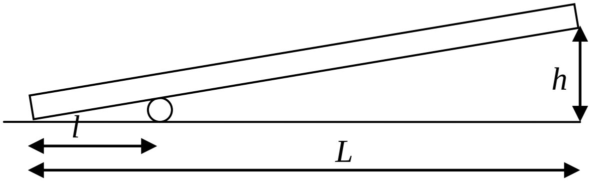



Как следует из представленного описания, чтобы увидеть экспериментально такую зависимость, требуется провести довольно точные измерения периода, а это возможно только при измерении времени максимально большого числа колебаний. В частности, в измерение времени входит реакция экспериментатора, запускающего и останавливающего секундомер, как правило составляющая около 0,2 с. Учитывая, что даже исходный период равен 0,9 с, получаем, что точность определения периода должна быть лучше, чем $0{,}9\cdot 0{,}09 \approx 0{,}08$ с, то есть нужно измерять как минимум время десяти колебаний (а лучше значительно больше для получения качественного графика).

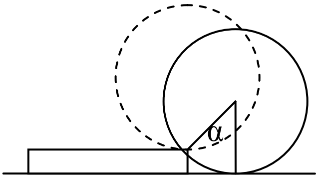
**10-11. Бумага**

Для определения толщины листа бумаги подойдет метод рядов с прижимом для нескольких листов бумаги.

В такой конструкции, подкладывая несколько слоев бумаги толщиной $z$ под левый край и измеряя изменение положение правого края $X$, можно значительно повысить точность: $Nzl = X(L-l)$, откуда толщина одного листа $z = X(L-l)/(Nl)$.




Второй возможный способ. Диаметр шарика достаточно мал, поэтому можно строить измерения на сопоставлении диаметра шарика и толщины листов бумаги. Для метода скатывания через ступеньку необходимо определить диаметр шарика методом подобия. Исходя из соотношения подобия для длинной линейки $d = l \cdot h / L,$ более точная формула $d = 2l \cdot \mathrm{tg}(0{,}5 \cdot \mathrm{arctg}(h / L)).$




При скатывании через невысокую ступеньку шарик существенно сдвигается вдоль поверхности на расстояние $b$: $\sin\alpha = b / R.$ Толщина листа $z = R(1-\cos\alpha) = R(1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}).$

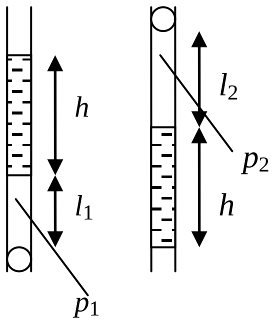
Для малого угла α

$$z \approx R(\alpha^2 / 2) = b^2 / 2R.$$

Дополнительно оценивалось исследование неоднородности листа.

**10-12. Атмосфера**

Подходящим методом для решения этой задачи является рассмотрение сжатия и разрежения газа между шариком и столбом жидкости в разных конфигурациях. Нетрудно догадаться, что диаметра шарика хватает для изготовления пробки шланга, надежно его закрывающей.




Рассмотрим следующее расположение столбика жидкости в трубке: наполним примерно половину трубки водой, оставшуюся половину закроем шариком. Определим необходимые длины. Затем перевернем, подождем несколько минут для осуществления теплообмена с окружающей средой. Тогда из равенства температур следует: $p_1V_1 = p_2V_2,$

$$(p_{\text{атм}} + \rho gh)Sl_1 = (p_{\text{атм}} - \rho gh)Sl_2.$$

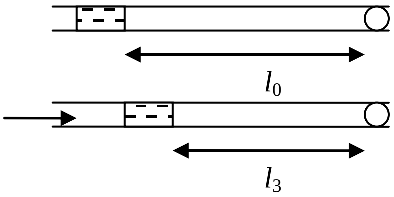
Откуда атмосферное давление равно:

$$p_{\text{атм}} = \rho gh(l_2 + l_1)/(l_2 - l_1).$$

Чтобы улучшить точность определения атмосферного давления, надо взять нужное количество воды и воздуха (для измерения больших отрезков необходимо взять $l_{1,2} \approx h$).

Попадание в интервал 10 % от истинного значения атмосферного давления оценивалось дополнительно.

Чтобы исследовать давление выдыхаемого воздуха, надо определить величину сжатия столбика воздуха.




$$p_3V_3 = p_0V_0,$$

$$(p_{\text{атм}} + p_{\text{дых}})Sl_3 = p_{\text{атм}}Sl_0.$$

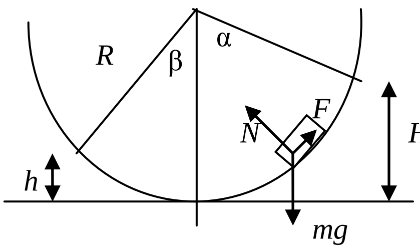
Здесь для повышения точности нужно было взять большие измеряемые отрезки, а для исключения нестабильности давления вдыхаемого в трубку воздуха быстро закрыть трубку пальцем после вдыхания.

**10-13. Скольжение и покой**

Задача аналогична задаче 9-09. Чтобы шарики не катались, их необходимо аккуратно скрепить вместе пластилином для создания устойчивой конструкции (достаточно трех шариков). Важно не запачкать рабочие поверхности пластилином, поскольку это сильно влияет на полученное значение.

Коэффициент трения покоя определяется путем измерения предельного угла наклонной плоскости, при котором еще не происходит скатывание. $\mu_n = \operatorname{tg}\alpha.$

Коэффициент трения скольжения также можно более точно найти методом интерполяции. Соорудим вогнутую конструкцию из листа бумаги с примерно постоянным радиусом. Будем скатывать нашу конструкцию по такой наклонной плоскости, фиксируя точки старта и остановки. Тогда сила трения скольжения




$$F = \mu N.$$

Пусть текущее значение угла наклона поверхности равно φ.

$$F = \mu(mg\cos\varphi + mV^2 / R).$$

Элементарная работа силы трения:

$$\Delta A = -\mu(mg\cos\varphi + mV^2 / R)R \cdot \Delta\varphi.$$

Полная работа силы трения связана с изменением потенциальной энергии:

$$A = mg(h - H).$$

При уменьшении высоты скатывания уменьшается и слагаемое в работе силы трения, связанное со скоростью движения *V*. Тогда в пренебрежении этим слагаемым и интегрируя косинус в пределах изменения угла,

$$\mu mg(\sin\alpha - \sin\beta)R \approx mg(H - h).$$

Откуда $\mu \approx (H - h)/((\sin\alpha - \sin\beta)R)$.

Построив график зависимости μ от (*H* – *h*) и продлив график до пересечения с осью ординат, получим значение коэффициента трения скольжения.

*Учебное издание*

**Сборник**
**олимпиадных задач**
**по физике**

**Нижний Новгород**
**2004—2013 годы**

Составители: Андрей Владимирович **Афанасьев**,
Владимир Викторович **Клиньшов**, Александр Михайлович **Рейман**

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательской группе ИПФ РАН

Формат 60 × 90 $^{1}/_{16}$. Бумага «Data copy».
Усл. печ. л. 7,25. Уч.-изд. л. 10,7.
Тираж 350 экз. Заказ № 9(2014)

Отпечатано в типографии Института прикладной физики РАН,
603950 Н. Новгород, ул. Ульянова, 46