

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР**

**Горьковский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им. Н. И. Лобачевского**

Факультет прикладной физики и микроэлектроники

Кафедра теоретической физики

**СОЛИТОНЫ ВОЛН МОДУЛЯЦИИ
В СРЕДАХ С СИЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ**

СОЛИТОНЫ ВОЛН МОДУЛЯЦИИ В СРЕДАХ С СИЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ.

Описание лабораторной работы по прикладной математике, вычислительной физике и радиофизике для студентов 4,5 курсов специальностей № 0647 (прикладная математика), № 2016 (физика) и № 0704 (радиофизика)./ Горький, 1988 г., стр.2, библи. 4 назв., ил. 9.

Численно исследуется динамика периодических и уединенных решений нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), описывающего волновые процессы на поверхности глубокой жидкости, в плазме, в твердых телах и т.д. Дано описание основных свойств стационарных решений этого уравнения. Обсуждается метод численного решения НУШ на ЭВМ. Приведена соответствующая программа на языке ФОРТРАН.

Составители: Е.Н.Пелиновский

Д.А.Степаняц

С.Е.Фильченков

Рецензенты: О.Р.Козырев

В.В.Курин

В данной лабораторной работе численно исследуется динамика периодических и уединенных волн модуляции, описываемых нелинейным уравнением Шредингера. Это уравнение является в известной степени универсальным, оно пригодно для описания волн различной физической природы в средах с сильной дисперсией, когда вторая и последующие гармоники несущей волны являются нерезонансными, т.е. не лежат на дисперсионной кривой

§ I. Вывод нелинейного уравнения Шредингера (НУШ).

Здесь мы представим упрощенный вывод нелинейного параболического уравнения, которое принято называть нелинейным уравнением Шредингера. Основное внимание при этом сосредоточим на качественной стороне, проясняющей физическую картину вывода. Более строгое рассмотрение можно найти, например, в [I]

Рассмотрим какую-либо нелинейную изотропную среду, у которой закон дисперсии имеет следующий вид

$$\omega = f(k, |a|^2) \quad (I)$$

где k - волновое число, a - комплексная амплитуда квазимонохроматической волны (для простоты будем рассматривать одномерные процессы). В этом выражении учтено, что частота волны ω может зависеть лишь от квадрата её амплитуды (т.е. определяется её интенсивностью), поскольку среда предполагается изотропной. Разложим правую часть (I) в степенной ряд в окрестности некоторого значения $k = k_0$ и $a = 0$:

$$\omega = f(k_0, 0) + \frac{\partial f}{\partial k} \Big|_0 (k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial k^2} \Big|_0 (k - k_0)^2 + \frac{\partial f}{\partial |a|^2} \Big|_0 |a|^2 + \dots \quad (2)$$

здесь индекс 0 у производных указывает, что они вычислены в точке $K = K_0$, $a = 0$.

Если рассматривать строго монохроматическую волну бесконечно малой амплитуды ($a \rightarrow 0$), то из (1) или (2) получаем обычный закон дисперсии для линейных сред

$$\omega = \omega_0(K_0) \equiv f(K_0, 0) \quad (3)$$

Пусть теперь волна обладает малой, но конечной амплитудой и узким спектром в окрестности K_0 (и соответственно ω_0). Тогда в разложении (2) можно ограничиться лишь несколькими членами и переписать его в виде:

$$\Omega = V_{гр} \mathcal{X} + d \mathcal{X}^2 + \beta |a|^2, \quad (4)$$

где обозначено $\Omega = \omega - \omega_0$, $\mathcal{X} = K - K_0$, $V_{гр} = \left. \frac{\partial f}{\partial K} \right|_0$ - групповая скорость волны с $K = K_0$, $d = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial K^2} \right|_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial V_{гр}}{\partial K}$, $\beta = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial |a|^2} \right|_0$. Здесь Ω и \mathcal{X} имеют смысл девиаций частоты и расстройку волнового числа, соответственно, от ω_0 и K_0 . На спектральном языке отличие Ω и \mathcal{X} от нуля означает существование узкого пакета волн, сосредоточенного вблизи несущей волны ω_0 , (рис. 1.). С другой стороны, на пространственно-временном языке узкий спектральный пакет соответствует модулированной квазимонохроматической волне, причем Ω и \mathcal{X} являются частотой и волновым числом огибающей, соответственно.

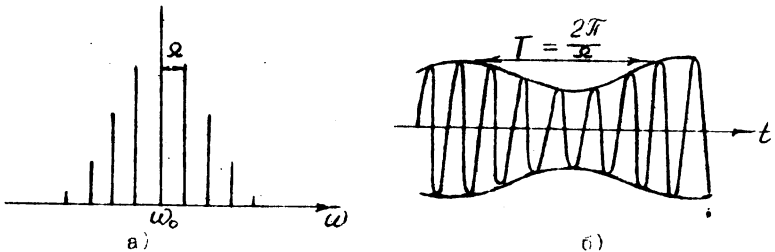


Рис. 1

Вернемся к соотношению (4) и будем рассматривать его как нелинейное дисперсионное уравнение для волны огибающей. Тогда легко выписать дифференциальное уравнение, которое приводит к данному дисперсионному уравнению. Для этого формально заменим Ω и \mathcal{X} на дифференциальные операторы $-i \frac{\partial}{\partial t}$ и $i \frac{\partial}{\partial x}$, которые действуют на медленно меняющуюся в пространстве и во времени амплитуду квазимонохроматической волны $a(x, t)$.

$$i \left(\frac{\partial a}{\partial t} + V_{\text{гф}} \frac{\partial a}{\partial x} \right) - \alpha \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \beta |a|^2 a = 0 \quad (5)$$

С помощью преобразования Галилея

$$\begin{cases} \xi = x - V_{\text{гф}} t \\ \tau = t, \end{cases} \quad (6)$$

соответствующего переходу в систему отсчета, движущуюся вдоль оси X со скоростью $V_{\text{гф}}$, данное уравнение окончательно приводится к виду

$$i \frac{\partial a}{\partial \tau} - \alpha \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \beta |a|^2 a = 0 \quad (7)$$

Это и есть нелинейное параболическое уравнение, называемое нелинейным уравнением Шредингера (НУШ).

Уравнение (7) обладает замечательным свойством: из него вытекает бесконечная серия сохраняющихся величин - интегралов движения. Так, например, если умножить (7) на a^* и затем вычесть комплексно-сопряженное выражение, то получим

$$i \frac{\partial |a|^2}{\partial \tau} - \alpha a^* \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \alpha a \frac{\partial^2 a^*}{\partial \xi^2} = 0 \quad (8)$$

Предполагая далее a и a^* периодическими по ξ с периодом L и интегрируя (8) от 0 до L , находим

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^1 |a|^2 d\xi = \alpha \int_0^1 \left(a^* \frac{\partial a}{\partial \xi^2} - a \frac{\partial a^*}{\partial \xi^2} \right) d\xi =$$

$$= \alpha \left[a^* \frac{\partial a}{\partial \xi} \Big|_0^1 - \int_0^1 \left| \frac{\partial a}{\partial \xi} \right|^2 d\xi - a \frac{\partial a^*}{\partial \xi} \Big|_0^1 + \int_0^1 \left| \frac{\partial a}{\partial \xi} \right|^2 d\xi \right] = 0 \quad (9)$$

Отсюда вытекает, что величина

$$I_1 = \int_0^1 |a|^2 d\xi \quad (10)$$

не зависит от τ , т.е. является интегралом движения. Можно также убедиться в том, что интегралом движения является величина (проверить самостоятельно).

$$I_2 = \int_0^1 \left(\alpha \left| \frac{\partial a}{\partial \xi} \right|^2 + \frac{\beta}{2} |a|^4 \right) d\xi \quad (11)$$

Наличие интегралов движения позволит судить об интегрируемости данного уравнения, проводить анализ устойчивости решений, а также осуществлять контроль правильности численных расчетов.

§ 2. Устойчивость квазигармонических волн. Автомодауляция.

Легко проверить, что частным решением уравнения (7) является функция, описывающая монохроматическую волну (однородный волновой пакет):

$$a = A_0 e^{i(\omega \tau - \omega \xi + \varphi_0)}, \quad \omega = \alpha \omega^2 + \beta A_0^2 \quad (12)$$

где A_0, φ_0 - постоянные. Рассмотрим устойчивость такого решения. Для этого дадим малые приращения величинам A_0 и φ_0 , т.е. положим $a = (A_0 + A') e^{i(\omega \tau - \omega \xi + \varphi_0 + \varphi')}$. Подставляя это выражение в (7) и отделяя действительную и мнимую части, получим в линейном приближении по A', φ' следующую систему (проделать самостоятельно):

$$\frac{\partial A'}{\partial \tau} + 2\alpha x \frac{\partial A'}{\partial \xi} - \alpha A_0 \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial \xi^2} = 0 \quad (13)$$

$$A_0 \frac{\partial \Psi'}{\partial \tau} + 2\alpha A_0 x \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial^2 A'}{\partial \xi^2} - 2\beta A_0^2 A' = 0$$

Поскольку данная система линейная с постоянными коэффициентами, то её решение можно искать в виде $A', \Psi' \sim e^{i(\nu\tau - \mu\xi)}$. Здесь

ν - имеет смысл частоты возмущения, а μ - волнового числа.

Из условия нетривиальной разрешимости системы (13) получаем дисперсионное уравнение (вывести самостоятельно):

$$\nu^2 - 4\alpha x \mu \nu + 4\alpha^2 x^2 \mu^2 - \alpha^2 \mu^4 - 2\alpha \beta A_0^2 \mu^2 = 0 \quad (14)$$

Это уравнение легко решается относительно ν :

$$\nu_{1,2} = \mu (2\alpha x \pm \sqrt{2\alpha \beta A_0^2 + \alpha^2 \mu^2}) \quad (15)$$

Если выражение под корнем положительно, то для ν получаем два действительных значения, что означает устойчивость исследуемого решения (13). Легко видеть, что устойчивость будет иметь место, если $\alpha \cdot \beta > 0$.

Если же это произведение отрицательно, то при достаточно малых μ (т.е. для длинноволновых возмущений) выражение под знаком корня будет отрицательным. В этом случае корни дисперсионного уравнения (14) являются комплексными, причем один из них (с отрицательной мнимой частью) соответствует нарастающему возмущению. Это означает, что решение (13) неустойчиво, т.е. синусоидальная волна (12) в процессе распространения будет испытывать спонтанную модуляцию (автомодуляцию).

Проанализируем подробнее критерий автомодуляционной неустойчивости, называемый критерием Лайтхилла (Lighthill M. J., 1965).

$$\alpha \beta = \frac{1}{2} \frac{\partial \nu_{gr}}{\partial k} \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial |a|^2} \right|_0 < 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_0 \cdot \left. \frac{\partial \omega}{\partial |a|^2} \right|_0 < 0 \quad (16)$$

Отсюда видно, что неустойчивость имеет место, если производные $\frac{\partial V_{gr}}{\partial k}$ и $\frac{\partial f}{\partial |a|^2}$ имеют разный знак. Замечательно, что эти производные легко определяются непосредственно из вида нелинейного дисперсионного соотношения (I). Подчеркнем, что неустойчивость возможна только в области достаточно длинных волн:

$$\mu < A_0 \sqrt{-2 \frac{\beta}{\alpha}} \quad (17)$$

§ 3. Стационарные волныгибающих. Солитоны.

Будем искать решение уравнения (7) в виде квазисинусоидальной волны, имеющей стационарнуюгибающую:

$$a(\tau, \xi) = A(\zeta) \cdot e^{i(\alpha\tau - \alpha\xi)}, \quad \zeta = \xi - V\tau \quad (18)$$

Подставляя (18) в (7) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для действительной функции $A(\zeta)$:

$$i(-V + 2\alpha\alpha) \frac{dA}{d\zeta} - \alpha \frac{d^2 A}{d\zeta^2} + (\alpha\alpha^2 - \alpha)A + \beta A^3 = 0 \quad (19)$$

Мнимая часть этого равенства обращается в нуль при $V = 2\alpha\alpha$.

При этом A удовлетворяет простому уравнению нелинейного осциллятора:

$$\frac{d^2 A}{d\zeta^2} = \left(\alpha^2 - \frac{\alpha}{\alpha} \right) A + \frac{\beta}{\alpha} A^3 \quad (20)$$

Это уравнение поддается качественному анализу с помощью фазовой плоскости. Для этого представим (20) в виде

$$\frac{d^2 A}{d\zeta^2} = - \frac{\partial W}{\partial A} \quad (21)$$

где $W = - \left(\alpha^2 - \frac{\alpha}{\alpha} \right) \frac{A^2}{2} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{A^4}{4} + C$ - потенциальная функция.

График этой функции и соответствующая фазовая плоскость при различных знаках отношения $\frac{\beta}{\alpha}$ изображены на рис. 2.

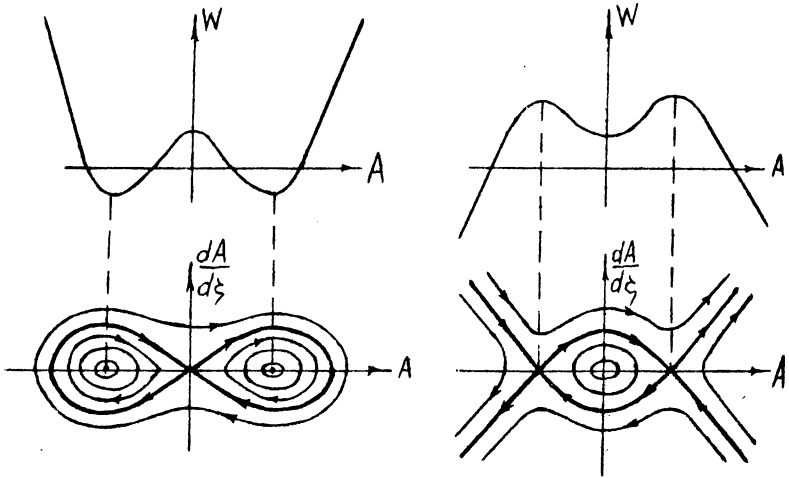


Рис. 2

а)

$$\frac{\beta}{\alpha} < 0$$

б)

$$\frac{\beta}{\alpha} > 0$$

Из рис. 2а видно, что в случае $\frac{\beta}{\alpha} < 0$ существуют периодические решения для A , соответствующие замкнутым неособым траекториям. Причем эти периодические решения могут быть двух типов - одному соответствуют траектории внутри сепаратрисы (жирной кривой), на которых знак A не изменяется, другому соответствуют траектории вне сепаратрисы, на которых изменяется знак A . Соответствующие решения качественно изображены на рис. 3.

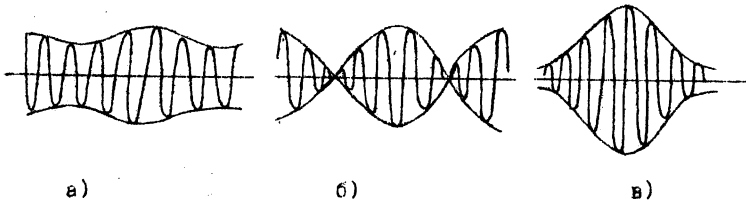


Рис. 3

Наконец, самой сепаратрисе соответствует неперриодическое решение в виде уединенной волны огибающей (рис.3в). Все эти решения легко могут быть получены из (20) последующим его интегрированием. Действительно, домножая (20) на $\frac{dA}{d\xi}$, получаем первый интеграл

$$\left(\frac{dA}{d\xi}\right)^2 - \left(\alpha^2 - \frac{\beta}{\alpha}\right)A^2 - \frac{\beta}{\alpha} \frac{A^4}{2} = 2E \quad (22)$$

где E - постоянная интегрирования. Отсюда находим

$$\xi - \xi_0 = \int_{A_1}^{A_2} \frac{dA}{\sqrt{2E + \left(\alpha^2 - \frac{\beta}{\alpha}\right)A^2 + \frac{\beta}{2\alpha}A^4}} \quad (23)$$

Здесь A_1, A_2 - нули подкоренного выражения. Соотношение (23) представляет собой эллиптический интеграл, обращение которого может быть выражено через специальные функции Якоби [1]. Фазовые траектории, расположенные внутри сепаратрисы, отвечают периодическим решениям вида

$$A = A_0 \cdot \text{dn} \left[A_0 \sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}} (\xi - \xi_0), s \right], \quad s^2 = \frac{A_0^2 - B_0^2}{A_0^2} \quad (24)$$

Здесь A_0 и B_0 - постоянные, связанные между собой соотношением $A_0^2 + B_0^2 = -2 \frac{\alpha}{\beta} \left(\alpha^2 - \frac{\rho}{\alpha} \right)$ и имеющие смысл предельных значений величины $A(\xi)$: $A_0 = \max A(\xi)$, $B_0 = \min A(\xi)$, s - модуль эллиптической функции ($0 \leq s \leq 1$) [2]. Если $B_0 \rightarrow A_0$ ($s \rightarrow 0$), то решение (24) близко к синусоиде. В этом случае мы имеем слабо модулированную квазимонохроматическую волну (рис.3а) с волновым числом $\alpha \leq A_0 \sqrt{-2 \frac{\beta}{\alpha}}$, близким к пороговому (17). При $B_0 \rightarrow 0$ ($s \rightarrow 1$) решение (24) превращается в последовательность уединенных волн - солитонов (рис.3в), расстояние между которыми пропорционально $\ln B_0$. В пределе $s = 1$ решение (24) описывает солитон, форму которого легко найти непосредственно из (23) при выборе константы $E=0$ (на фазовой плоскости такому решению соответствует сепаратриса).

$$A = A_0 \operatorname{sch} \left[A_0 \sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha}} \cdot (\xi - \xi_0) \right] \quad (25)$$

Наконец, фазовые траектории, лежащие вне сепаратрисы, отвечают периодическим решениям вида (рис.3б):

$$A = A_0 \cdot \operatorname{cn} \left[\sqrt{-\frac{\beta}{2\alpha} (A_0^2 + B_0^2)} \cdot (\xi - \xi_0), s \right], \quad s^2 = \frac{A_0^2}{A_0^2 + B_0^2}, \quad (26)$$

$$\text{где } A_0^2 - B_0^2 = -2 \frac{\alpha}{\beta} \left(\alpha^2 - \frac{\rho}{\alpha} \right)$$

Аналогично может быть проанализирован случай $\frac{\beta}{\alpha} > 0$ т.е. когда монохроматическая волна устойчива по отношению к автомодуляции. Не выписывая подробных решений, укажем лишь, что здесь возможны либо периодические решения, соответствующие замкнутым кривым на фазовой плоскости рис.2б, либо решения в виде перепадов (ударные волны огибаящих), которым соответствуют движения по сепаратрисе из одного состояния равно-

весьма в другое. Качественно оба решения изображены на рис.4.

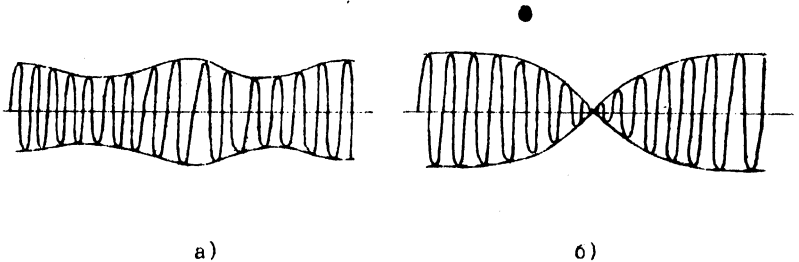


Рис. 4

Как видно из анализа фазовой плоскости (рис.2б), в случае $\frac{\beta}{\alpha} > 0$ солитонных решений нет. Однако иногда в литературе решения, изображенные на рис.4б., называют солитонами затемнения, а решения, изображенные на рис.3в., - солитонами просветления (терминология из нелинейной оптики).

§ 4. Динамика нестационарных возмущений.

Уравнение (7) принадлежит к классу точно интегрируемых динамических моделей, для которых может быть сформулирована и решена задача Коши, т.е. по начальным условиям $a(0, \xi)$ можно полностью описать дальнейшую эволюцию волнового поля $a(\tau, \xi)$. Однако теория получения точных решений уравнения (7) довольно громоздка и её изложение выходит за рамки данной лабораторной работы. Поэтому здесь мы ограничимся лишь кратким описанием основных эффектов на качественном уровне, которые возможны в рамках изучаемого уравнения НУШ (7).

Поведение нестационарных начальных возмущений существенно

зависит от знака отношения $\frac{\beta}{\alpha}$. Рассмотрим вначале случай $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, когда модуляционная неустойчивость не проявляется (критерий Лайтхилла не выполнен). В этом случае произвольное локализованное возмущение с нулевыми асимптотами при $\xi \rightarrow \pm\infty$ испытывает дисперсионное расплывание и в конце концов при больших t исчезает из-за "расползания" по всей оси ξ (рис.5).

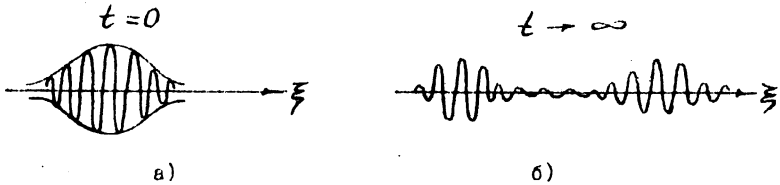


Рис.5

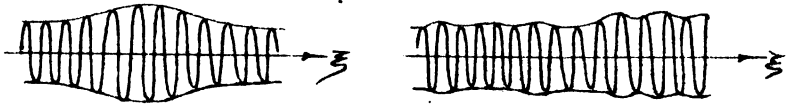


Рис. 6



Рис.7

Если же возмущение задано на фоне квазимонохроматической волны, имеющей постоянную амплитуду и период при $\xi \rightarrow \pm\infty$, то эволюция огибающей приводит либо к постепенному "расползанию" возмущения и образованию монохроматической волны (для возмущений, указанных на рис.6), либо к образованию стационарно движущихся "провалов" - солитонов затемнения (рис. 7).

Пусть теперь $\frac{\beta}{\alpha} < 0$. Тогда из начальных условий импуль-

сного типа (т.е. с нулевыми асимптотами при $\xi \rightarrow \pm \infty$) при их достаточной интенсивности формируются наборы из стационарно движущихся уединенных волн - солитонов огибающей (25), амплитуда A_0 и скорость V которых определяется видом начального условия.

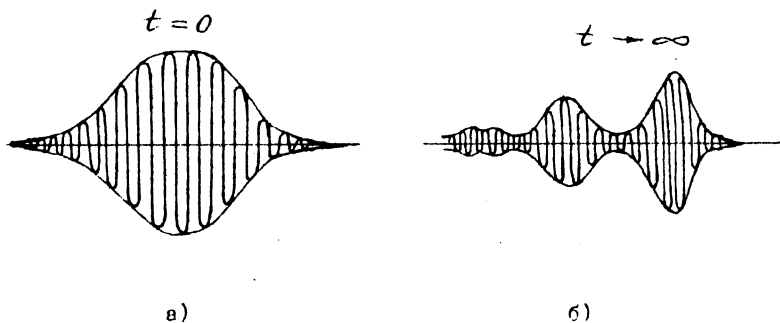


Рис. 8

Кроме того, часть энергии начального возмущения остается в нестационарных волновых пакетах, которые с течением времени из-за дисперсионного распыливания исчезают (рис. 8).

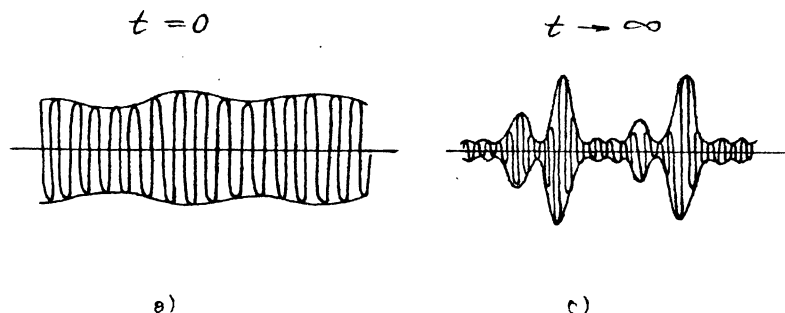


Рис. 9

Если же интенсивность начального возмущения недостаточно велика, то солитоны не образуются. Тогда начальное возмущение испытывает лишь дисперсионное распыливание и постепенно исчезает. На-

чальные возмущения квазимонохроматические, плавно промодулированные в пространстве, испытывают вначале модуляционную неустойчивость, т.е. разбиваются сперва на отдельные волновые пакеты, из которых в дальнейшем формируются солитоны огибающей и нестационарные пакеты быстро диспергирующих волн (рис.9). Более подробно о нестационарных решениях НУШ можно прочитать в [1,3].

§ 5. Метод численного решения НУШ.

Для численного решения уравнения (7) воспользуемся следующим алгоритмом. Считаем, что в начальный момент времени τ_0 в дискретных точках ξ_n задана периодическая по ξ функция $a(\tau_0, \xi_n)$. Рассмотрим её дальнейшую эволюцию во времени. Выполним преобразование Фурье от уравнения (7):

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} F_k [a] + \alpha k^2 F_k [a] + \beta F_k [|a|^2 \cdot a] = 0 \quad (27)$$

где $F_k[a]$ есть K -ая гармоника Фурье образа функции $a(\tau, \xi)$. Уравнение (27) представляет собой неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $F_k [a](\tau)$ с правой частью $-\beta F_k [|a|^2 \cdot a](\tau)$. Его решением является

$$F_k [a](\tau) = F_k [a](\tau_0) e^{i\alpha k^2 \Delta \tau} + i\beta e^{i\alpha k^2 \Delta \tau} \int_{\tau_0}^{\tau} F_k [|a|^2 a](\eta) e^{-i\alpha k^2 (\eta - \tau_0)} d\eta, \quad (28)$$

где $\Delta \tau = \tau - \tau_0$, τ_0 - начальный момент времени. Интеграл в правой части (28) вычислим приближенно по формуле трапеций [4]

$$\int_{\tau_0}^{\tau} F_k [|a|^2 a](\eta) e^{-i\alpha k^2 (\eta - \tau_0)} d\eta = \frac{\Delta \tau}{2} \left\{ F_k [|a|^2 a](\tau) e^{-i\alpha k^2 \Delta \tau} + F_k [|a|^2 a](\tau_0) \right\} + O(\Delta \tau^3) \quad (29)$$

Подставим аппроксимацию (29) в формулу (28), приведем подобные члены и выполним обратное преобразование Фурье. В резуль-

таке получим уравнение:

$$a \left(1 - \frac{i\beta\Delta\bar{c}}{2} |a|^2 \right) = F_{\kappa}^{-1} \left\{ e^{i\omega\kappa^2\Delta\tau} \cdot F_{\kappa} \left[a \left(1 + \frac{i\beta\Delta\bar{c}}{2} |a|^2 \right) \right] (\bar{c}_0) \right\} \quad (30)$$

в котором правая часть зависит от ξ и \bar{c}_0 , а левая - от ξ и $\bar{c} = \bar{c}_0 + \Delta\bar{c}$, F_{κ}^{-1} - обозначает обратное преобразование Фурье.

Остается явно выразить из уравнения (30) $a(\xi, \bar{c})$. Однако для ускорения вычислений удобно перейти от комплексного уравнения (30) к действительному уравнению для квадрата модуля $a(\xi, \bar{c})$, поскольку с комплексными числами ЭВМ работает медленнее, чем с действительными. Умножая (30) на комплексно-сопряженное выражение, получим:

$$|a|^2 \left(1 + \frac{\beta^2\Delta\bar{c}^2}{4} |a|^4 \right) = \left| F_{\kappa}^{-1} \left\{ e^{i\omega\kappa^2\Delta\tau} \cdot F_{\kappa} \left[a \left(1 + \frac{i\beta\Delta\bar{c}}{2} |a|^2 \right) \right] (\bar{c}_0) \right\} \right|^2 \quad (31)$$

Это уравнение является кубическим относительно $\bar{x} = |a|^2$. Его действительный корень будем искать итерационным способом по следующей схеме

$$\bar{x}_{n+1} = \frac{A + \gamma \bar{x}_n - B \bar{x}_n^3}{1 + \gamma} \quad (32)$$

где A - правая часть выражения (31), $B = \frac{\beta^2\Delta\bar{c}^2}{4}$, а числовой коэффициент γ выбирается из условия сходимости простой итерации. Будем считать, что решение найдено и итерационный процесс завершен, если

$$\frac{|\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n|}{\bar{x}_{n+1}} \leq \varepsilon$$

где ε - заданное число, относительная погрешность вычисления корня. Таким образом, зная $|a|^2$ в момент времени \bar{c} , можем теперь выразить искомую функцию $a(\xi, \bar{c})$ с помощью комплексного

уравнения (30), которое непосредственно используется при таком подходе лишь один раз на последнем этапе. Ясно, что момент времени τ должен мало отличаться от τ_0 , ибо вычисление интеграла по формуле трапеций в (29) тем точнее, чем меньше $\Delta\tau$. Но зная решение $a(\xi, \tau_0 + \Delta\tau)$ можно повторить всю описанную процедуру и вычислить $a(\xi, \tau_0 + 2\Delta\tau)$ и т.д. Практически величина шага $\Delta\tau$ выбирается так, чтобы для гармоник $F_k[a]$ с наибольшим номером k изменение фазы в экспоненте (см. правую часть формулы (29)) на интервале интегрирования $\Delta\tau$ не превышало $\frac{\pi}{2}$ (в этом случае на период самой высокой гармоники приходится не менее четырех точек).

Контроль точности счета можно осуществлять путем периодического вычисления интегралов (I0), (II), которые должны сохраняться в силу уравнения (7). Их вычисление в предлагаемой ниже программе реализовано с помощью метода трапеций.

§ 6. Описание и текст программы.

Предлагаемая программа предназначена для решения уравнения (7) описанным в п. 5 методом.

Входными параметрами являются:

PER - период начальной функции $a(\xi, 0) \Lambda (0 \leq \xi \leq \Lambda)$

AL - значение параметра α

BE - значение параметра β

TWR - временной шаг вывода данных на печать

TEND - конечное время счета

EPS - относительная точность вычисления ϵ

Выходные параметры:

$$I1 = \int_0^{\Lambda} |a|^2 d\xi$$

$$I2 = \int_0^{\Lambda} \left(\alpha \left| \frac{\partial a}{\partial \xi} \right|^2 + \frac{\beta}{2} |a|^4 \right) d\xi$$

T - текущее время вычислений

Кроме того, на АШПУ выводится график модуля и фазы функции

$a(\xi, \tau)$ в момент времени T .

Вызываемые подпрограммы:

FFT - вычисление прямого и обратного дискретного преобразования Фурье (стандартная)

INIT - задание начальных данных $a(\xi, 0)$

LOOK - выходная обработка результатов

GRAPH2 - вывод графика на АШПУ (стандартная)

ВОПРОСЫ

1. Записать нелинейное уравнение Шредингера для квазимонохроматического пакета волн на глубокой воде с законом дисперсии $\omega = \sqrt{gk}(1 + \frac{1}{2} a^2 k^2)$. Выяснить устойчивость этих волн к автомодуляции.
2. Получить аналитическое решение для солитона (25) непосредственно из (23).
3. Получить аналитическое решение для солитона затемнения при $\beta/\alpha > 0$.
4. Убедиться в том, что величина I_2 (см. формулу (II)) является интегралом движения для уравнения (7).

ЗАДАНИЯ

1. Численно рассчитать нелинейную стадию автомодуляции квазимонохроматической волны, огибающая которой в начальный момент является синусоидой с малой амплитудой: $a(\xi, 0) = A_0(1 + B e^{i\mu\xi}) e^{-i\alpha\xi}$, где $\mu = \frac{2\pi}{\Lambda}$, $\alpha = \mu N$, N - целое число много большее единицы. Проанализировать характер решения при различных N .
2. Рассчитать эволюцию одиночного квазимонохроматического пакета
а) при наличии автомодуляции ($\alpha=1, \beta=-1$);
б) при отсутствии автомодуляции ($\alpha=1, \beta=1$).

Начальное условие задать в виде

$$Q(\xi, 0) = A_0 \sqrt{1 - \text{th}^2 D(\xi - \Lambda/2)} \cdot e^{-i\alpha\xi}, \quad \alpha = \frac{2RN}{\Lambda}, \quad N \gg 1$$

3. Рассчитать образование солитонов затемнения в среде, устойчивой к автомодуляции ($\alpha = 1, \beta = 1$). Начальное условие задать в виде $Q(\xi, 0) = A_0 \text{th} D(\xi - \Lambda/2) \cdot e^{-i\alpha\xi}, \quad \alpha = \frac{2RN}{\Lambda}, \quad N \gg 1$

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах.- М., Наука, 1973г.
2. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции.- М., Наука, 1964г.
3. Захаров В.Е., Мананов С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи.- М., Наука, 1980г.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.- М., ГИФМЛ, 1960.

```

1.      PROGRAM SHRED
2. C*****
3. C Программа решения нелинейного уравнения Шредингера
4. C      I*D1T(A)-AL*D2X(A)+BE*A*/A/**2=0
5. C      X=O.(H)PER , TT=O.(TWR)TEND
6. C*****
7.      COMPLEX AO(128),EX(128),F(128)
8.      DIMENSION XKSY(128),AM(128),AF(128)
9.      PI=3,14159265359
10.     N=128
11.     EPS=1.E-5
12. C*****
13. C      Параметры задачи
14.     AL=
15.     BE=
16.     PER=
17.     TWR=
18.     TEND=
19. C*****
20. C      Начальные присвоения
21.     N2=N/2
22.     AK=2.*PI/PER
23.     TT=0
24.     TW=0
25.     T=PER*PER/(2.*PI*FLOAT(N*N)*ABS(AL))
26.     H=PER/FLOAT(N)
27.     DO 3 I=1,N
28.     EX(I)=CMPLX(O.,O.)
29.     XKSY(I)=H*FLOAT(I-1)
30.     IF(I.EQ.N2+1) GOTO 3
31.     IF(I.LE.N2) GOTO 1
32.     ARG=AL*T*(AK*FLOAT(I-N-1))**2
33.     GOTO 2
34. 1   ARG=AL*T*(AK*FLOAT(I-1))**2
35. 2   EX(I)=CEXP(CMPLX(O.,ARG))
36. 3   CONTINUE
37.     TB=0.5*T*BE
38.     BITER=TB*TB
39. C*****
40. C      Задание начальных данных и их просмотр
41.     CALL INIT(N,XKSY,AO)
42.     CALL LOOK(N,XKSY,AO,AM,AF,TT,H,AL,BE)
43. 100 CONTINUE
44. C*****
45. C      Вычисления на очередном временном слое
46.     DO 4 I=1,N
47.     AA=REAL(AO(I)*CONJG(AO(+)))
48. 4   F(I)=AO(I)*CMPLX(1.,TB*AA)
49.     CALL FFF(F,N,-1)
50.     DO 5 I=1,N
51. 5   F(I)=F(I)*EX(I)
52.     CALL FFF(F,N,1)
53.     DO 9 I=1,N
54.     AITER=REAL(F(I)*CONJG(F(I)))
55.     B=AITER*AITER*BITER
56.     IF(B.LE.1.) GOTO 7
57.     XM=1./(1.+B)
58.     XO=AITER*XM
59. 6   X1=(AITER+BITER*XO*(AITER-XO)*(AITER+XO))*XM
60.     IF(ABS(X1-XO).LE.X1*EPS) GOTO 9

```

```

61.      XO=X1
62.      GOTO 6
63. 7     XO=AITER*0.5
64. 8     X1=(AITER+XO*(1.-BITER*XO*XO))*0.5
65.      IF(ABS(X1-XO).LE.X1*EPS) GOTO 9
66.      XO=X1
67.      GOTO 8
68. 9     AO(I)=F(I)/CMPLX(1.,-TB*X1)
69. C*****
70. C     Приращение текущего времени и просмотр результатов
71.      TT=TT+T
72.      TW=TW+T
73.      IF(TT.GE.TEND) GOTO 999
74.      IF(TW.GE.TWR) GOTO 500
75.      GOTO 100
76. 500   CALL LOOK(N,XKSY,AO,AM,AF,TT,H,AL,BE)
77.      TW=0.
78.      GOTO 100
79. C*****
80. 999   CALL LOOK(N,XKSY,AO,AM,AF,TT,H,AL,BE)
81.      STOP
82.      END
83.      SUBROUTINE INIT(N,XKSY,AO)
84.      COMPLEX AO(1)
85.      DIMENSION XKSY(1)
86. C*****
87. C     Подпрограмма задания нач.усл.в массиве AO
88.      RETURN
89.      END
90.      SUBROUTINE LOOK(N,XKSY,AO,AM,AF,TT,H,AL,BE)
91. C*****
92. C     Подпрограмма просмотра результатов на АЦЦУ
93.      COMPLEX AO(1),AP1,APN
94.      DIMENSION XKS
95.      HO=0.5/H
96.      B2=BE*0.5
97.      S1=REAL(AO(1)*CONJG(AO(1))+AO(N)*CONJG(AO(N)))
98.      AP1=HO*(AO(2)-AO(N))
99.      APN=HO*(AO(1)-AO(N-1))
100.     S2=AL*REAL(AP1*CONJG(AP1)+APN*CONJG(APN))+
101.     *B2*(REAL(AO(1)*CONJG(AO(1))))**2+REAL(AO(N)*CONJG(AO(N)))
102.     ***2)
103.     N1=N-1
104.     DO 1 I=2,N1
105.     AP1=HO*(AO(I+1)-AO(I-1))
106.     A2=REAL(AO(I)*CONJG(AO(I)))
107.     S1=S1+A2
108. 1     S2=S2+AL*REAL(AP1*CONJG(AP1))
109.     S1=S1*H
110.     S2=S2*H
111.     PRINT 10,TT,S1,S2
112.     XZNAK=-1
113.     DO 2 I=1,N
114.     XZNAK=-XZNAK
115.     APN=AO(I)
116.     AM(I)=CABS(APN)*XZNAK
117.     AF(I)=REAL(APN)
118. 2     CONTINUE
118. 10    FORMAT(5X,T='`',E14.7,5X,`I1=`,E14.7,5X,`I2=`,E14.7)

```

```

119. C*****
120. C   Вывод огибающей и реальной части массива А0
121.   CALL GRAPH2(N,XKSY,AM,AF)
122.   RETURN
123.   END
124.   SUBROUTINE FFF(A,N,M)
125. C*****
126. C   Подпрограмма сопряжения со стандартной подпрограммой
127. C   быстрого преобразования Фурье
128.   COMPLEX A(1),AP
129.   REAL AR(128),AJ(128)
130.   DO 1 I=1,N
131.     AP=A(I)
132.     AR(I)=REAL(AP)
133.     AJ(I)=AIMAG(AP)
134.   1   CALL FFT(AR,AJ,N,N,N,M)
135.     XM=1.
136.     IF(M.LT.0.) XM=1./FLOAT(N)
137.     DO 2 I=1,N
138.   2   A(I)=CMPLX(AR(I),AJ(I))*XM
139.     RETURN
140.     END

```

**СОЛИТОНЫ ВОЛН МОДУЛЯЦИИ В СРЕДАХ С СИЛЬНОЙ
ДИСПЕРСИЕЙ**

Составители: Е.Н.Пелиновский

Ю.А.Степаняц

С.Е.Фильченков

Подп. и печ. 5.05.11 Форм. бум. 60x84/16. Бумага оберточная.
Печать офсетная. Усл.-печ. 1,5 л. Уч. - изд. 1,1 л. Заказ 875
Тираж 300 экз. Бесплатно.

Тип. ГГУ. Горький, ул. Свердлова, 57.